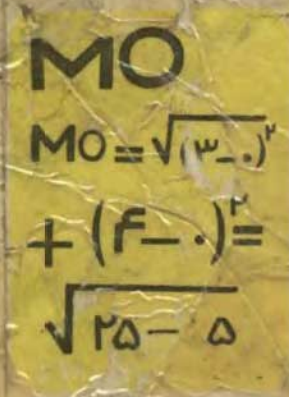
۳۱۰۰ مسئله

۶ ریاضی خودآموز و حل المسائل

جبر

شامل :

۱ ـ ۳۱۰۰ مسئله جبر باحل و جواب آنها
۲ ـ ۳۰۰ تست جبر چهار جوابی و پنج جوابی
۳ ـ حل مسائل کتاب درسی
۴ ـ مسائل امتحانات نهائی از سال ۱۳۰۸ به بعد
۵ ـ حل مسائل امتحانات نهائی از سال ۱۳۴۵ به بعد
۶ ـ مسائل کنکور دانشکده‌ها از سال ۱۳۲۶ تا ۱۳۵۱
۷ ـ تست کنکور سراسری کشور درسالهای ۱۳۴۸ به بعد
۸ ـ تست کنکور دانشگاه صنعتی از سال ۱۳۴۸ به بعد
۹ ـ کلیه قواعد جبر سالهای پنجم و ششم ریاضی



تالیف: محمد دهخ

خودآموز و حل المسائل

جبر

برای سال ششم ریاضی دبیرستانها و کنکور دانشکده‌ها

مسائل امتحانات نهائی از سال ۱۳۰۸ به‌بعد	۷۰۱-۷۴۶
چند مطلب خارج از برنامه (مشتق nام - دستور لایپ‌نیتس - تحت مماس و تحت قائم)	۷۴۸-۷۶۴
حل مسائل امتحانات نهائی باریز نمره از سال ۱۳۴۵ به‌بعد	۷۶۶-۸۱۴
تستهای چهارجوابی کنکور سراسری و مدارس عالی کشور و دانشگاههای شبانه تهران و تبریز از سال ۱۳۴۸ به‌بعد	آخر کتاب روی کاغذ سفید

تألیف: محمد دهخدا

حق چاپ برای ناشر و مؤلف محفوظ است

سازمان چاپ و انتشارات جاویدان

مؤسسه: محمد حسن علمی

محمد محمدی شنلو

کلاس سوم پنج

دبیرستان چمران

تاریخ هشتم ۱۳۶۷/۱۱/۲۰

بنام پروردگار مهربان

دبیران ودانش‌آموزان ارجمند، جای تردیدنیست که اساتیدمسلم وریاضی‌دانان براستی گرانقدر، درکشورما ازحدود انگشت‌شمار افزون‌هستند، ونیز باید اذعان داشت که تاکنون در زمینهٔ ـ بطورکلی ـ حل‌المسائل وکتاب‌های تقویتی، خصوصاً برای دانش‌آموزان دوره دوم دبیرستانها، کتاب‌های‌زیادی‌تألیف وانتشار یافته‌است، که اغلب آنها بدلیل‌اینکه‌براصول وقواعد آموزشی وعلمی تدوین‌شده صددرصد مفید معنی ومنظوربوده و پژوهشگر کنجکاو و علاقمند را بخوبی بمسائل گوناگون رهنمون می‌شود.

قبلا این مؤلف وظیفهٔ خود میداندکه از جملگی کارپرارزش این همکاران و رهبران ارجمند به‌نیکی یادکند وحق این مهم‌را دراین مختصربجای‌آورد .

اما ! این کتاب محتوی بخش‌ها و قسمت‌های گوناگون‌است که‌برای‌آگاهی دبیران و دانش‌آموزان ارجمند به‌آن‌ها اشارممی‌کنیم :

۱ـ مجموعاً ۳۰۴۰ مسأله‌جبر، ویژه سال‌ششم‌ریاضی دراین کتاب‌تدوین‌شده که‌بطور تقریب میتوان گفت از انواع ممکن ومختلف مسائلی است که‌دانش‌پژوه درخلال کلاس خودو یا آمادگی برای‌کنکور حتماً به‌آنها برخورد خواهد نمود.

۲ـ ۳۰۰ تست جبر دراین‌کتاب آمده‌است که درکتاب‌های مشابه‌کم‌سابقه‌بودموخود، بحثمهم این‌کتاب را شامل می‌شود .

۳ـ کلیه‌قواعدجبرسال‌پنجم‌وششم‌دبیرستان‌ها باحل‌مسائل‌مربوط بهرقاعده، جمع‌آوری

گردیده که نه تنها مروری است از قواعد جبر سال پنجم و ششم، بلکه دانش‌آموز را از مراجعه به کتب درسی و یا کتابهای دیگر کاملا بی‌نیاز میکند.

۴ـ تست جبر کنکور سراسری کشور مربوط بسالهای ۱۳۴۸ و ۱۳۴۹ و ۱۳۵۰ جهت آگاهی باچگونگی مسائل کنکور سالهای اخیر تألیف شده که نمونه‌های آموزنده‌ای است برای داوطلبان کنکور سال جاری دانشکده‌ها.

۵ـ کلیه مسائل جبر کنکور دانشکده‌های مختلف از سال ۱۳۳۶ تا سال ۱۳۵۰ در بخش مربوطه آمده است.

۶ـ مسائل امتحانات نهائی از سال ۱۳۰۸ تا شهریور سال ۱۳۵۰ جهت آگاهی و چگونگی مسائل امتحانات گردآوری و حل شده و «بارم» نمرات آن ذکر گردیده است.

۷ـ کلیه مسائل کتاب درسی سال ششم ریاضی دبیرستانها بطور کامل حل شده است .

مجموعاً کوشیده‌ایم که کتابی تألیف نمائیم تا از هرجهت پاسخگوی سؤالات مختلف دانش‌آموزان ومجموعه کاملی از درس جبر باشد ودانش‌پژوهان را با انواع گوناگون مسائل آشنا نماید .

امید است که خدمت کوچک ما مقبول خاطر دبیران وپژوهشگران ارجمند قرار گیرد و با همه دقتی که در تصحیح اوراق چاپی آن شده ، اگر اشتباهی بنظر صاحبنظران میرسد ، با بذل لطف ما را به نشانی «ناشر» آگاه سازند تا در چاپهای بعدی اشتباهات احتمالی برطرف گردد.

«محمد دهخدا»

فهرست

عنوان	صفحه
یادآوری مطالب جبر پنجم	۵ — ۲۳
انتقال و دوران محورها	۱۸ — ۲۰
طریقه پیدا کردن معادله نیمساز زاویه بین دو خط	۳۵ — ۳۶
شرط اینکه دو خط برهم منطبق باشند	۳۶
شرط اینکه چند نقطه در یک طرف یک خط راست واقع باشند	۳۷
فرمول محاسبه مساحت مثلث	۴۱ — ۴۴
مرکز تقارن و محور تقارن	۴۵ — ۵۴
معادله مکان هندسی یک نقطه	۵۵ — ۷۷
تابع معین و نامعین	۷۸ — ۸۰
مشتق و قواعد آن	۸۱ — ۱۱۰
مشتق توابعی که بر حسب arc و log و مجهول القوا میباشند	۱۱۰ — ۱۱۹

عنوان	صفحه
طریقه پیدا کردن نقاط ماکزیمم و می‌نیمم و صعودی و نزولی بودن توابع	۱۱۹ — ۱۲۵
طریقه پیدا کردن معادله مماس وطریقه پیدا کردن مختصات نقطه تماس	۱۲۵ — ۱۳۱
طریقه پیدا کردن معادله مماس بر منحنی از یك نقطه واقع در خارج آن	۱۳۱ — ۱۳۷
طریقه پیدا کردن زاویه بین دو منحنی ویك خط با یك منحنی	۱۳۷ — ۱۳۹
طریقه پیدا کردن معادله قائم بر منحنی	۱۳۹ — ۱۴۴
رابطه بین مشتق اول ومشتق دوم و...، تابع	۱۴۴ — ۱۴۷
طریقه پیدا کردن معادله پوش بالفاف یك خط یا یك منحنی	۱۴۷ — ۱۴۹
خواص مشتق ثانی (نقطهٔ عطف ـ انحنای منحنی)	۱۴۹ — ۱۵۸
صور مبهم ورفع ابهام آنها	۱۵۸ — ۱۸۶
طریقه تعیین معادله مجانبهای یك منحنی و ρ و θ	۱۸۷ — ۲۰۶
طریقه رسم توابع درجه دوم ودرجه سوم وچهارم	۲۰۷ — ۲۲۰
راه حل تقریبی معادلات درجه دوم وسوم وچهارم ازراه ترسیم	۲۲۱ — ۲۲۳
طریقه رسم توابع کسری	۲۲۳ — ۲۵۵
طریقه رسم توابع اسم	۲۵۵ — ۲۸۹
« « ضمنی	۲۹۰ — ۲۹۱
طریقه تعیین ماکزیمم و می‌نیمم یك تابع بدون استفاده از مشتق	۲۹۲ — ۲۹۸
تعیین $\frac{dy}{dx}$...	۲۹۹ — ۳۱۴

عنوان	صفحه
چند قاعده و مسأله در باره ماکزیمم و می‌نیمم (خارج از کتاب درسی)	۳۱۴ — ۳۲۰
قواعد و مسائل تقسیم توافقی	۳۲۱ — ۳۲۶
حل و بحث معادلات پارامتری درجه دوم	۳۲۷ — ۳۴۳
مقایسه عدد باریشه‌های معادله درجه دوم	۳۴۴ — ۳۷۸
معادله درجه سوم	۳۷۹ — ۳۹۶
توابع اولیه	۳۹۸ — ۴۴۴
محاسبه سطح محصور	۴۴۵ — ۴۶۳
محاسبه حجم حادث	۴۶۳ — ۴۷۷
حل مسائل ترکیبی کتاب درسی	۴۷۷ — ۵۶۵
مسائل امتحانات دبیرستانهای ایران	۵۶۶ — ۶۲۹
مسائل مجله یکان	۶۲۰ — ۶۵۰
مسائل نشریه حزب مردم	۶۵۳ - ۶۶۰
مسائل برای جهت تعیین بهترین دانش آموز سال ششم ریاضی و ششم طبیعی	۶۶۱ - ۶۶۲
مسائل کنکور دانشکده‌های ایران	۶۶۳ - ۷۰۰
مسائل امتحانات نهائی از سال ۱۳۰۸ تا شهریور ماه ۱۳۴۵	۷۰۱ — ۷۴۶
حل چهارده دوره مسائل امتحانات نهائی پاریز نمره برای آشنائی دانش آموزان به نمره امتحانی خود	۷۴۸ - ۷۹۵
محاسبه مشتق n ام	۷۹۷ — ۸۰۰

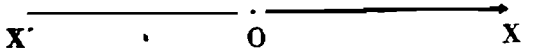
عنوان	صفحه
دستور لایب‌نیتس	۸۰۱ — ۸۰۴
تحت مماس وتحت قائم	۸۰۵ — ۸۱۲
تست جبر کنکور سراسری ۴۹ — ۵۰ گروه‌ریاضی	۱ — ۶
تست جبر کنکور دانشگاه شبانه تهران ۴۹ — ۵۰ گروه‌ریاضی	۶ — ۱۲
« « « سراسری ۴۹ — ۵۰ گروه‌طبیعی	۱۲ — ۱۴
« « دانشگاه آریامهر در سال ۴۸	۱۴ ۱۶
« دانشگاه شبانه‌تهران ۴۸ — ۴۹	۱۷ ۱۸
« « « « تبریز ۴۸ — ۴۹	۱۸ — ۲۱
چندنمونه تست کنکوردانشگاه‌پهلوی شیراز ۱۳۴۸	۲۱ ۲۲
تست جبر مؤسسه عالی حسابداری	۲۲ ۲۳
ـ تست جبر مدرسه‌عالی بیمه تهران	۲۳ ۲۶
تست جبر مدرسه عالی علوم اقتصاد	۲۶ ۲۸
تست‌جبر کنکورسراسری ۵۰ — ۵۱ رشته ریاضی و طبیعی ودانشگاه شبانه تهران	۲۸ — ۴۹
پاسخهای تست	۵۰ — آخر

بنام خدا

فصل اول

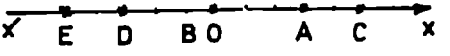
محور

خط جهتداری که یك نقطه بنام مبدأ دارا باشد محور مینامند ازمبدأ بطرف جهت مثبت واز مبدأ درخلاف جهت منفی است .



۱- نقاط A وB وC وD وE به ترتیب بطولهای ۳ و۱ — و۵ و۳ — و۵ — را برروی یك محور بدست آورید .

حل :



قاعده ۱	اندازه جبری یك بردار برروی یك محور برابرست با تفاضل طول ابتداء از طول انتها مانند مثالهای زیر $\overline{AB}=\overline{X}_B-\overline{X}_A$ و $\overline{BC}=\overline{X}_C-\overline{X}_B$
قاعده ۲	طول نقطه وسط یك پاره خط مساوی نصف مجموع طولهای دوسر آن پاره خط میباشد مانند مثالهای زیر $X_M=\frac{X_E+X_F}{۲}$ و $X_C=\frac{X_A+X_B}{۲}$ وسط EF وسط AB

۲- نقاط A وB وC بطولهای ۳ و۵ — و۷ برروی یك محور مفروضند. اولاً- طول بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ را بدست آورید. ثانیاً- طولهای نقاط M وN وسط پاره خطهای AC و BC راحساب کنید .

حل: اولاً- میدانیم $x_A=۳$ و $X_B=-۵$ و $X_C=۷$ میباشد

$\overline{AB}=x_B-x_A=-۵-۳=-۸$ و $\overline{BC}=x_C-x_B=۷+۵=۱۲$

ثانیاً ـ

$$X_{\text{وسط } AC} = \frac{X_A + X_C}{۲} = \frac{۳+۷}{۲} = ۵$$

$$X_{\text{وسط } BC} = \frac{X_B + X_C}{۲} = \frac{-۵+۷}{۲} = ۱$$

۳ـ اندازه جبری برداری که طول ابتدای آن ۵ — میباشد برابر ۱۲ است طول انتهای آنرا بدست آورید . جواب: $X_B = ۷$

۴ـ اندازه جبری برداری که طول انتهای آن ۵ — میباشد برابر ۴ است طول ابتداء بردار را بدست آورید. جواب: $X_A = -۹$

۵ـ نقاط A و B بطولهای ۷ — و ۸ برروی یك محور مفروضند طولهای نقاط C و D را چنان تعیین کنید که بین دو نقطه A و B بوده و پاره خط AB را بسه قسمت متساوی تقسیم نمایند . جواب: $x_D = ۳$ و $x_C = -۲$

۶ـ نقاط A و B بطولهای ۲ و ۸ مفروضند طول نقطه E را چنان تعیین کنید که نقاط A و E قرینه یکدیگر نسبت به نقطه B باشند . جواب $x_E = ۱۴$

۷ـ نقاط A و B بطولهای ۱۵ — و ۵ برروی یك محور مفروضند طول نقاط C و D و E را چنان تعیین کنید که نقاط C و D و E خط AB را به چهار قسمت متساوی تقسیم کنند . جواب: $x_E = ۰$ و $x_D = -۵$ و $x_C = -۱۰$

۸ـ نقاط A و B بترتیب بطولهای ۸ — و ۱۶ برروی یك محور مفروضند طول نقاط C و D و E را طوری تعیین کنید که بردار AB را به چهارقسمت مساوی تقسیم کنند.

جواب: $x_E = ۱۰$ و $x_D = ۴$ و $x_C = -۲$

۹ـ نقاط A و B بترتیب بطولهای ۵ و ۴ — برروی یك محور مفروضند طول نقطه F را چنان تعیین کنید که رابطه $۲\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BF}$ برقرار باشد .

جواب: $x_F = ۱۴$

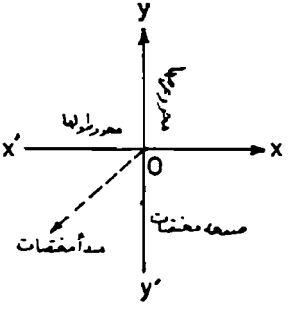
۱۰ـ نقاط C و D بطولهای ۳ — و ۲ برروی یك محور مفروضند نقطه P را بر روی محور چنان تعیین کنید که رابطه زیر برقرار باشد . $۲\overrightarrow{PC} + ۳\overrightarrow{PD} = ۳\overrightarrow{CD}$

جواب : $x_P = -۳$

فصل دوم

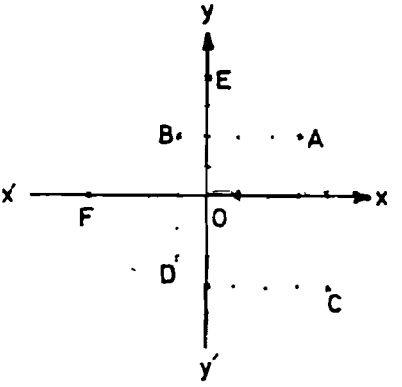
محورهای مختصات متعامد

هرگاه دو محور در مبدأ برهم عمود باشند محورهای مختصات متعامد را بوجود می‌آورند . محور افقی را محور طولها و محور قائم را محور عرضها ومحل تقاطع دومحور را مبدأ مختصات و صفحه دو محور را صفحه مختصات می‌نامند . یك نقطه در صفحه‌مختصات موقعی مشخص است که فاصله آن تا محور طولها و همچنین فاصله‌آن تا محور عرضها معلوم باشد واین فواصل را مختصات آن نقطه می‌نامند و چنین نمایش می‌دهند $A(\alpha,\beta)$ یا $A\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}$



۱۱- نقاط $A\begin{vmatrix}۳\\ ۲\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}-۱\\ ۲\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}۴\\ -۳\end{vmatrix}$ و $D\begin{vmatrix}-۱\\ -۲\end{vmatrix}$ و $E\begin{vmatrix}۰\\ ۴\end{vmatrix}$ و $F\begin{vmatrix}-۴\\ ۰\end{vmatrix}$

را درروی صفحه مختصات تعیین کنید. (واحدرا نیم سانتیمتر اختیار کنید)



قاعده۳- هر نقطه که روی محور طولها واقع باشد عرضش صفر است $y=0$

۱۲- m را چنان تعیین کنید که نقطه $A(3m-4 \text{ و } 3m+3)$ روی محور طولها باشد وسپس مختصات نقطه A را تعیین کنید.

حل: $Y_A=0$

$3m+3=0 \rightarrow 3m=-3 \rightarrow m=-1$ پس $A(-7 \text{ و } 0)$

۱۳- مطلوبست تعیین مقدار m بقسمی که نقطه $A(m^2-3 \text{ و } m^2-2m)$ روی محور طولها واقع باشد وسپس مختصات نقطه A را تعیین کنید.

حل: $Y_A=0 \Longrightarrow m^2-2m=0 \rightarrow m(m-2)=0 \rightarrow m=0 \text{ و } 2$

اگر در مختصات نقطه A بجای m مقادیر حاصل را قرار دهیم نتیجه میشود:

$A_1(-3 \text{ و } 0)$ و $A_2(1 \text{ و } 0)$

قاعده ۴- هر نقطه که روی محور عرضها واقع باشد طولش صفر است $x=0$

۱۴- مقدار a را طوری تعیین کنید که نقطه $K(a+2 \text{ و } 2a-1)$ روی محور عرضها واقع باشد.

حل: $X_k=0 \rightarrow a+2=0 \rightarrow a=-2$

۱۵- مقدار m را چنان تعیین کنید که نقطه $B(m^2-3m+2 \text{ و } 2m-3)$

روی محور عرضها واقع باشد.

حل: $X_B = ۰ \to m^۲ - ۳m + ۲ = ۰ \to m = ۲ و ۱$

قاعده ۵- هر نقطه که روی نیمساز ناحیه اول یا روی نیمساز ناحیه سوم واقع باشد طول و عرضش باهم برابر است $y = x$

۱۶- K را چنان تعیین کنید که نقطه $A(۲K - ۶ و ۳K - ۴)$ روی نیمساز ناحیه اول و یا روی نیمساز ناحیه سوم واقع باشد و سپس مختصات نقطه A را بدست آورید.

حل: $A(-۱۰ و -۱۰)$ پس $Y_A = X_A \to ۳K - ۴ = ۲K - ۶ \to K = -۲$

۱۷- مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که نقطه $P(a - b و ۲a - b + ۵)$ روی نیمساز ناحیه اول واقع بوده و طول آن برابر ۳ باشد.

$$X_P = Y_P = ۳ \to \begin{cases} a - b = ۳ \\ ۲a - b + ۵ = ۳ \end{cases} \to \begin{cases} a - b = ۳ \\ ۲a - b = -۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a + b = -۳ \\ ۲a - b = -۲ \end{cases}$$

از جمع دو رابطه $a - b = ۳ \to -۵ - b = ۳ \to b = -۸$ و $\to a = -۵$

قاعده ۶- هر نقطه که روی نیمساز ناحیه دوم یا روی نیمساز ناحیهٔ چهارم واقع باشد طول و عرضش با علامت مخالف برابرند $y = -x$

۱۸- a را چنان تعیین کنید که نقطه $B(۲a - ۵ و a + ۲)$ روی نیمساز ناحیه دوم یا چهارم واقع باشد.

حل: $Y_B = -X_B \to a + ۲ = -(۲a - ۵) \to ۳a = ۳ \to a = ۱$

۱۹- m را چنان تعیین کنید که نقطهٔ $K(۲m + ۳ و m^۲ + ۴m - ۵)$ روی محور طولها واقع باشد و سپس مختصات نقطه K را بدست آورید.

حل: $Y_k = ۰ \to m^۲ + ۴m - ۵ = ۰ \to m = -۵ و ۱$

$$K_۱ \left| \begin{matrix} -۱۰ + ۳ \\ ۲۵ - ۲۰ - ۵ \end{matrix} \right. \to K_۱ \left| \begin{matrix} -۷ \\ ۰ \end{matrix} \right. و \; K_۲ \left| \begin{matrix} ۲ + ۳ \\ ۱ + ۴ - ۵ \end{matrix} \right. \to K_۲ \left| \begin{matrix} ۵ \\ ۰ \end{matrix} \right.$$

۲۰- m را چنان بدست آورید که نقطه $M(m^۲ + ۷m - ۸ و m + ۳)$ روی محور عرضها واقع باشد و سپس مختصات نقطه M را بدست آورید.

حل: $X_M = 0 \rightarrow m^2 + 7m - 8 = 0 \rightarrow m = 1$ و -8

$$M_1 \left| \begin{matrix} 1+7-8 \\ 1+3 \end{matrix} \right. \Rightarrow M_1 \left| \begin{matrix} 0 \\ 4 \end{matrix} \right. \text{ و } M_2 \left| \begin{matrix} 64-56-8 \\ -8+3 \end{matrix} \right. \Rightarrow M_2 \left| \begin{matrix} 0 \\ -5 \end{matrix} \right.$$

۲۱- m را چنان تعیین کنید که نقطه $Q(m^2+m-2 \text{ و } m^2-m+2)$ اولاً- روی نیمساز ناحیه اول. ثانیاً- روی نیمساز ناحیه چهارم قرار داشته باشد و بعد بازای $m=1$ مختصات نقطه Q را بدست آورید.

جواب: اولاً- $m=2$ و ثانیاً- $m=0$ و $Q(0 \text{ و } 2)$

۲۲- نقطه $C(m^2+m-6 \text{ و } m^2+m+2)$ مفروض است m را چنان تعیین کنید که نقطه مفروض اولاً- روی نیمساز ناحیه دوم. ثانیاً- روی نیمساز ناحیه سوم واقع باشد. ثالثاً- بازای چه مقادیری از m نقطه مفروض روی محور طولها واقع خواهد بود.

جواب: اولاً- $m=2$ وثانیاً- $m=\pm 2$ وثالثاً- $m=-1$ و 2

قاعده ۷	**معادله خط یا منحنی:** رابطه‌ای را که بین x و y یعنی مختصات نقاط مختلف یک خط یا یک منحنی موجود است معادله خط یا معادله منحنی می‌نامند.
قاعده ۸	مختصات هر نقطه از خط یا منحنی در معادله خط یا منحنی صدق می‌کند.

۲۳- m را چنان تعیین کنید که نقطه $A(2 \text{ و } 2)$ روی خط D بمعادله: $mx+3y-4m=0$ واقع باشد.

حل: $2m+6-4m=0 \Rightarrow -2m=-6 \Rightarrow m=3$

۲۴- a را چنان تعیین کنید که منحنی $y=x^2-ax+2a-1$ محور طولها را در نقطه‌ای بطول ۳ قطع نماید.

حل:

$$M(3 \text{ و } 0) \Rightarrow y=x^2-ax+2a-1 \Rightarrow 0=9-3a+2a-1 \Rightarrow a=8$$

۲۵- a و b را چنان تعیین کنید که خط D بمعادله $ax+by+2a-4=0$ محور طولها را در نقطه‌ای بطول ۲ و نیمساز ناحیه اول را در نقطه‌ای بطول ۱ قطع نماید.

حل: $N(1 \text{ و } 1)$ و $M(2 \text{ و } 0)$ نقاطی از خط $ax+by+2a-4=0$ میباشند.

$$\begin{cases} 2a+0+2a-4=0 \\ a+b+2a-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a=4 \\ 3a+b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

۲۶ـ a و b را چنان تعیین کنید که منحنی c بمعادله $y=ax^2+bx+2$ محور طولها را در نقاطی بطولهای ۱ و ۲ قطع نماید.

جواب: $a=1$ و $b=-3$

۲۷ـ a و b را چنان تعیین کنید که منحنی K بمعادله $y=3x^2+2ax+b$ از نقطه‌ای بطول ۱ — واقع بر نیمساز ناحیه دوم گذشته و محور عرضها را در نقطه‌ای بعرض ۲ قطع نماید.

جواب: $a=2$ و $b=2$

قاعده ۹	مختصات قرینه نقطه $A(\alpha$ و $\beta)$ نسبت بمحور طولها بصورت $A_1(\alpha$ و $-\beta)$ می‌باشد یعنی طولش تغییر نمی‌کند ولی علامت عرضش عوض میشود

۲۸ـ مختصات قرینه نقاط $A(-3$ و $2)$ و $B(2$ و $-5)$ و $C(-1$ و $-4)$ را نسبت بمحور طولها بدست آورید.

حل: $A_1(-3$ و $-2)$ و $B_1(2$ و $5)$ و $C_1(-1$ و $4)$

۲۹ـ m را چنان تعیین کنید که مختصات قرینه نقطه $A(2$ و $3m-1)$ نسبت بمحور طولها بصورت $A_1(2$ و $-5)$ گردد.

حل: $y_A=-y_{A_1} \Longrightarrow 3m-1=5 \Longrightarrow 3m=6 \Longrightarrow m=2$

قاعده ۱۰	مختصات قرینه نقطه $A(\alpha$ و $\beta)$ نسبت بمحور عرضها بصورت $A_1(-\alpha$ و $\beta)$ می‌باشد یعنی علامت عرض آن تغییر نمیکند. ولی علامت طولش عوض میشود.

۳۰ـ مختصات قرینه نقاط $A(-1$ و $-2)$ و $B(3$ و $4)$ و $C(0$ و $-5)$ و $D(-4$ و $3)$ را نسبت بمحور عرضها بدست آورید.

حل: $A_1(2$ و $-1)$ و $B_1(-3$ و $4)$ و $C_1(0$ و $-5)$ و $D_1(4$ و $3)$

۳۱ـ نقاط $A(2m-9$ و $3m+2)$ و $B(3m-1$ و $3m+2)$ مفروضند m را چنان تعیین کنید که قرینه نقطه A نسبت بمحور عرضها نقطه B باشد وسپس مختصات نقاط A و B را بدست آورید.

$x_A=-x_B \Longrightarrow 2m-9=-3m+1 \Longrightarrow 5m=10 \Longrightarrow m=2$

اگر در مختصات A و B بجای m عدد ۲ را قرار دهیم نتیجه میشود $B(5$ و $8)$ و $A(-5$ و $8)$

قاعده ۱۱	مختصات قرینه نقطه $A(\alpha$ و $\beta)$ نسبت بمبدأ مختصات بصورت $A_1(-\alpha$ و $-\beta)$ می‌باشد یعنی هم علامت طولش و هم علامت عرضش عوض میشود.

۳۲ـ مختصات نقاط $A\left|\begin{matrix}۴\\۳\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}-۱\\۲\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}۵\\-۴\end{matrix}\right.$ و $D\left|\begin{matrix}۰\\-۵\end{matrix}\right.$ و $E\left|\begin{matrix}-۱\\-۶\end{matrix}\right.$ را نسبت بمبدأ مختصات بدست‌آورید

حل: $E_۱\left|\begin{matrix}۱\\۶\end{matrix}\right.$ و $D_۱\left|\begin{matrix}۰\\۵\end{matrix}\right.$ و $C_۱\left|\begin{matrix}-۵\\۴\end{matrix}\right.$ و $B_۱\left|\begin{matrix}۱\\-۲\end{matrix}\right.$ و $A_۱\left|\begin{matrix}-۲\\-۳\end{matrix}\right.$

۳۳ـ m را چنان‌تعیین کنید که‌قرینه‌نقطه $A(-۴m و ۲m-۱)$ نسبت بمبدأمختصات نقطه $B(۴m و -۳)$ باشد وسپس مختصات‌نقاط A وB را تعیین‌کنید.

حل: چون طولهایشان‌قرینه‌یکدیگرند پس‌باید $Y_A = -Y_B$ باشد.

$۲m-۱=۳ \rightarrow ۲m=۴ \rightarrow m=۲$

$A(-۸و۳)$ و $B(۸و-۳)$

قاعده ۱۲	مختصات قرینه نقطه $A(\alpha و \beta)$ نسبت به‌خط $x=a$ بصورت $A_۱(۲a-\alpha و \beta)$ می‌باشد .
قاعده ۱۳	مختصات قرینه نقطه $A(\alpha و \beta)$ نسبت به خط $y=b$ بصورت $A(\alpha و ۲b-\beta)$ میباشد

۳۴ـ نقطه $A(۲و۴)$ مفروض است مختصات نقاط $A_۱$ و $A_۲$ قرینه نقطه A را نسبت به‌خطوط $x=۳$ و $y=-۲$ بدست آورید.

حل: $A_۲\left|\begin{matrix}۲ \Longrightarrow A_۲\left|\begin{matrix}۲\\-۸\end{matrix}\right.\\ ۲\times -۲-۴=-۸\end{matrix}\right.$ و $A_۱\left|\begin{matrix}۲\times ۳-۲=۴\\ \beta=۴ \Longrightarrow A_۱\left|\begin{matrix}۴\\۴\end{matrix}\right.\end{matrix}\right.$

۳۵ـ نقاط $A\left|\begin{matrix}۲\\-۳\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}-۴\\۵\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}-۳\\-۱\end{matrix}\right.$ و $D\left|\begin{matrix}۰\\۴\end{matrix}\right.$.

مفروضند اولا ـ مختصات نقاط $A_۱$ و $B_۱$ و $C_۱$ و $D_۱$ قرینه نقاط فوق را نسبت به خط $x=-۲$ بدست آورید.

ثانیاـ مختصات نقاط $A_۲$ و $B_۲$ و $C_۲$ و $D_۲$ قرینه نقاط فوق را نسبت به خط $y=۳$ بدست آورید .

حل: $A_۱\left|\begin{matrix}۲\times -۲-۲=-۶\\-۳\end{matrix}\right.$ و $B_۱\left|\begin{matrix}۲\times -۲+۴=۰\\۵\end{matrix}\right.$

$C_۱\left|\begin{matrix}۲\times -۲+۳=-۱\\-۱\end{matrix}\right.$ و $D_۱\left|\begin{matrix}۲\times -۲-۰=-۴\\۴\end{matrix}\right.$

$A_{۲}\Big|^{۲}_{۲\times۳+۳=۹}$ و $B_{۲}\Big|^{-۴}_{۲\times۳-۵=۱}$ و $C_{۲}\Big|^{-۲}_{۲\times۳+۱=۷}$

و $D_{۲}\Big|^{۰}_{۲\times۳-۴=۲}$

۳۶ـ نقاط $A\Big|^{۳}_{۱}$ و $B\Big|^{a+۲}_{b-۳}$ مفروضند اولاً ـ a و b را چنان تعیین کنید که نقاط فوق قرینه یکدیگر نسبت به خط $x=۴$ باشند ثانیاً ـ a و b را چنان تعیین کنید که نقاط فوق قرینه یکدیگر نسبت به خط $y=-۳$ باشند.

حل: اولا:

$$\begin{cases}۲\times۴-۳=a+۲\\ ۱=b-۳\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}a=۳\\ b=۴\end{cases}$$

ثانیا:

$$\begin{cases}a+۲=۳\\ ۲\times-۳-۱=b-۳\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}a=۱\\ b=-۴\end{cases}$$

۳۷ـ a و b را چنان تعیین کنید که نقاط $A(۱و۲)$ و $B(۲a+b و a-b)$ نسبت به خط $x=a+b$ قرینه یکدیگر باشند. جواب: $a=۳$ و $b=۱$

۳۸ـ a و b را چنان تعیین کنید که نقاط $A(-۳و۲)$ و $B(۳a و a+۲b)$ نسبت به خط $y=a-b$ قرینه یکدیگر باشند. جواب: $a=-۱$ و $b=-۰/۷۵$

قاعده ۱۴

هرگاه مختصات نقاط A و B و M و N در دست باشد طول پاره خطهای AB و MN و AM و BN از فرمولهای زیر بدست میآیند.

$$MN=\sqrt{(x_M-x_N)^۲+(y_M-y_N)^۲}$$

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}$$

$$AM=\sqrt{(x_A-x_M)^۲+(y_A-y_M)^۲}$$

$$BN=\sqrt{(x_B-x_N)^۲+(y_B-y_N)^۲}$$

۳۹ـ $A(۳و۱)$ و $B(۴و-۱)$ و $C(۰و-۲)$ سه رأس یک مثلث میباشند طول اضلاع مثلث را محاسبه کنید.

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}=\sqrt{(۳-۴)^۲+(۱+۱)^۲}=\sqrt{۵}$$

$$AC=\sqrt{(x_A-x_C)^۲+(y_A-y_C)^۲}=\sqrt{(۳-۰)^۲+(۱+۲)^۲}=۳\sqrt{۲}$$

$$BC=\sqrt{(X_B-X_C)^2+(Y_B-Y_C)^2}=\sqrt{(4-0)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{17}$$

۴۰- نقاط $A(-1 \text{ و } 1)$ و $B(5 \text{ و } 2)$ و $C(-2 \text{ و } -5)$ سه‌رأس مثلث ABC میباشند تحقیق کنید که مثلث متساوی‌الساقین است .

حل :

$$AB=\sqrt{(X_A-X_B)^2+(Y_A-Y_B)^2}=\sqrt{(-1-5)^2+(1-2)^2}=\sqrt{37}$$

$$AC=\sqrt{(X_A-X_C)^2+(Y_A-Y_C)^2}=\sqrt{(-1+2)^2+(1+5)^2}=\sqrt{37}$$

$$BC=\sqrt{(X_B-X_C)^2+(Y_B-Y_C)^2}=\sqrt{(5+2)^2+(2+5)^2}$$

$$BC=\sqrt{49+49}=7\sqrt{2}$$

چون AB و AC مساوی هستند پس مثلث‌متساوی‌الساقین است .

قاعده ۱۵	برای اینکه ثابت کنیم مثلثی متساوی‌الساقین است سه ضلع مثلث را حساب می‌کنیم اگر دو ضلع آن مساوی شد مثلث متساوی‌الساقین است.
قاعده ۱۶	برای اینکه ثابت کنیم مثلثی متساوی‌الاضلاع است سه ضلع را محاسبه می‌کنیم اگر هرسه ضلع با هم مساوی شدند مثلث متساوی‌الاضلاع است.
قاعده ۱۷	برای اینکه ثابت کنیم مثلثی قائم‌الزاویه است سه ضلع را محاسبه می‌کنیم اگر مربع بزرگترین ضلع مساوی مجموع مربعات دو ضلع‌دیگرشد مثلث قائم‌الزاویه است.

۴۱- ثابت‌کنید نقاط $O(0 \text{ و } 0)$ و $B(-1 \text{ و } -2)$ و $C(-2 \text{ و } 1)$ سه رأس‌یك مثلث قائم‌الزاویه هستند .

۴۲- نقاط $B(1 \text{ و } 3)$ و $C(-1 \text{ و } 3)$ مفروضند نقطه A را چنان تعیین کنید که مثلث ABC در رأس A قائمه بوده و متساوی‌الساقین هم باشد .

حل: اگر $A(\alpha \text{ و } \beta)$ جواب مسأله باشد نتیجه میشود.

$$\begin{cases} AB=AC \Longrightarrow AB^2=AC^2 \\ BC^2=AB^2+AC^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\alpha-3)^2+(\beta-1)^2=(\alpha+1)^2+(\beta-3)^2 \\ (3+1)^2+(1-3)^2=(\alpha-3)^2+(\beta-1)^2+(\alpha+1)^2+(\beta-3)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2\alpha+\beta=0 \\ \alpha^2+\beta^2-2\alpha-4\beta=0 \end{cases} \Longrightarrow A\left|\begin{matrix}\alpha=0 \text{ و } 2 \\ \beta=0 \text{ و } 4\end{matrix}\right.$$

قاعده ۱۸

طول نقطه C وسط پاره خط AB برابر نصف مجموع طولهای نقاط A و B میباشد و همچنین عرض نقطه C وسط پاره خط AB مساوی نصف مجموع عرضهای نقاط A و B می‌باشد.

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{۲} \quad و \quad y_C=\frac{y_A+y_B}{۲}$$

۴۳ـ نقاط $A(۳m-۱ \text{ و } ۲m-۵)$ و $B(۳-m \text{ و } ۱-۴m)$ مفروضند m را چنان تعیین کنید که نقطه C وسط پاره خط AB روی محور عرضها واقع باشد و سپس مختصات نقاط A و B را تعیین کنید:

حل:

$$(\text{وسط } AB)\ x_C=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۳m-۱+۳-m}{۲}$$

$$x_C=۰ \Longrightarrow m+۱=۰ \Longrightarrow m=-۱$$

$$A(-۴ \text{ و } -۷) \quad و \quad B(۴ \text{ و } ۵)$$

۴۴ـ نقاط $A(۳ \text{ و } ۳)$ و $B(-۱ \text{ و } ۲)$ مفروضند بر روی محور عرضها نقطه‌ای تعیین کنید که فاصله آن تا وسط پاره خط AB برابر $\sqrt{۵}$ باشد.

حل: اگر نقطه C وسط AB و نقطه مفروض نقطه $M(۰ \text{ و } a)$ باشد نتیجه میشود.

$$MC=\sqrt{۵}$$

$$(\text{وسط } AB)\ x_C=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۳-۱}{۲}=۱$$

$$(\text{وسط } AB)\ y_C=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{۴+۲}{۲}=۳$$

$$MC=\sqrt{(x_C-x_M)^۲+(y_C-y_M)^۲} \Longrightarrow \sqrt{۵}=\sqrt{(۱-۰)^۲+(۳-a)^۲}$$

$$۵=۱+۹+a^۲-۶a \Longrightarrow a^۲-۶a+۵=۰ \Longrightarrow (a-۵)(a-۱)=۰$$

$$a-۵=۰ \Longrightarrow \boxed{a=۵} \quad و \quad a-۱=۰ \Longrightarrow \boxed{a=۱} \Longrightarrow M_۱\left|\begin{matrix}۰\\۵\end{matrix}\right. \quad و \quad M_۲\left|\begin{matrix}۰\\۱\end{matrix}\right.$$

۴۵ـ نقاط $M(a \text{ و } ۲)$ و $N(۳ \text{ و } ۲a)$ مفروض‌اند a را چنان تعیین کنید که نقطه C وسط MN روی نیمساز ناحیه اول باشد.

حل:

$$\text{وسط } MN\ C\left|\begin{matrix}x=\frac{۳+a}{۲}\\ y=\frac{۲a+۲}{۲}\end{matrix}\right. \quad \begin{cases}x=y\\ \frac{۳+a}{۲}=\frac{۲a+۲}{۲} \Longrightarrow a=۱\end{cases}$$

۴۶- نقاط $A(۳و۵)$ و $B(۲و۴)$ و $C(-۴و۲)$ سه رأس یك مثلث‌اند طول میانه AA' را حساب کنید. جواب: $۲\sqrt{۵}$

۴۷- برروی محورهای مختصات دو نقطه B وA راچنان‌تعیین کنیدکه نقطه $C(۳و۲)$ وسط AB باشد. جواب: $B(۶ و ۰)$ و $A(۰ و ۴)$

۴۸- نقاط $M(۲a+b و ۳)$ و $N(b+۲ و a-۱)$ و $K(۴ و a+b-۱)$ مفروضند. a و b را چنان تعیین کنیدکه قرینه نقطه M نسبت به نقطه N نقطه K باشد.
جواب: $a=-۴$ و $b=-۸$

قاعده ۱۹

مختصات نقطه G محل تلاقی میانه‌های مثلث : طول نقطه G محل تلاقی میانه‌های هر مثلث مساوی ثلث مجموع طولهای سه رأس آن است وهمچنین‌عرض نقطه G محل تلاقی‌میانه‌های هرمثلث برابر ثلث مجموع عرضهای سه رأس مثلث است.

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{۳} \text{ و } y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{۳}$$

۴۹- نقاط $A(۴و۲)$ و $B(۱و۰)$ و $C(۱و-۲)$ سه‌رأس یك‌مثلث هستند مختصات‌نقطه G محل تلاقی میانه‌های مثلث را حساب کنید.

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{۳}=\dfrac{۲+۰+۱}{۳}=۱ \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{۳}=\dfrac{۴+۱-۲}{۳}=۱ \end{cases} \Longrightarrow G\left|\begin{matrix}۱\\۱\end{matrix}\right.$$

۵۰- n و m را چنان تعیین کنیدکه نقطه $P(۳m-n و ۲n-۳)$ محل تلاقی میانه‌های مثلث ABC باشد.

در صورتیکه $A(۳ و ۱-)$ و $B(-۱ و ۲)$ و $C(-۲ و ۴-)$ باشد.

$$\begin{cases} x_P=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{۳} \Longrightarrow ۳m-n=\dfrac{۳-۱-۲}{۳}=۰ \\ y_P=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{۳} \Longrightarrow ۲n-۳=\dfrac{-۱+۲-۴}{۳}=-۱ \end{cases}$$

$$\begin{cases}3m-n=0\\2n-3=-1\end{cases}\quad\begin{cases}3m-n=0\\2n=2\end{cases}\quad\begin{cases}3m-n=0\Longrightarrow 3m-1=0\\n=1\end{cases}\quad m=\frac{1}{3}$$

۵۱- b و a را چنان تعیین کنید که $G(a+b\text{ و }b)$ محل تلاقی سه‌میانه مثلثی به‌رئوس $A(3a\text{ و }b)$ و $B(b\text{ و }2a)$ و $C(-a-b\text{ و }-3)$ باشد.

جواب: $a=1/5$ و $b=-0/5$

۵۲- نقاط $A(3\text{ و }5)$ و $B(2\text{ و }3)$ دو رأس مثلث ABC میباشند مختصات نقطه C را چنان تعیین کنید که میانه‌های مثلث ABC روی نیمساز ناحیه دوم و بطول ۲ — یکدیگر را قطع کنند.

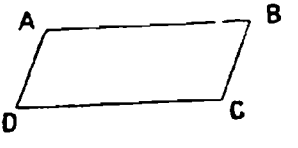
جواب: $C(-11\text{ و }-2)$

رابطه میان مختصات رئوس متوازی‌الاضلاع:

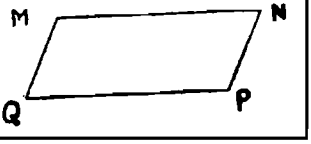
مجموع طولها: دو رأس مقابل متوازی‌الاضلاع مساوی با مجموع طولهای دو رأس مقابل دیگر آن است و همچنین مجموع عرضهای دو رأس مقابل متوازی‌الاضلاع مساوی مجموع عرضهای دو رأس مقابل دیگر آن است.

قاعده ۲۰

$$\begin{cases}x_A+x_C=x_B+x_D\\y_A+y_C=y_B+y_D\end{cases}$$



$$\begin{cases}x_M+x_P=x_N+x_Q\\y_M+y_P=y_N+y_Q\end{cases}$$



۵۳- نقاط $A\left|\begin{matrix}2\\-3\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}0\\3\end{matrix}\right.$ سه رأس متوالی متوازی‌الاضلاع $ABCD$ میباشد مختصات نقطه D را بدست آورید.

حل: $x_A+x_C=x_B+x_D\Longrightarrow 2+0=3+x_D\Longrightarrow x_D=-1$

$y_A+y_C=y_B+y_D\Longrightarrow -3+3=4+y_D\Longrightarrow y_D=-4\quad D\left|\begin{matrix}-1\\-4\end{matrix}\right.$

۵۴- نقاط $A(-3\text{ و }-2)$ و $B(-1\text{ و }2)$ دو رأس متوالی متوازی الاضلاع $ABCD$ میباشد و $M(-1\text{ و }1)$ محل تلاقی اقطار آن است مختصات دو رأس C و D را بدست آورید.

جواب: $D(3\text{ و }-4)$ $C(5\text{ و }0)$

۵۵- a و b را چنان تعیین کنید که نقاط $A(2a+1$ و $b)$ و $B(1$ و $-2)$ و $C(2a+b$ و $-3)$ و $D(2a$ و $2b-3)$ رئوس متوازی‌الاضلاع ABCD باشند .

جواب: $a=-2\div 3$ و $b=2$

۵۶- نقاط $A(1$و$2)$ و $B(-3$و$4)$ و $C(4$و$-2)$ مفروضند روی این مثلث چند متوازی‌الاضلاع میتوان ساخت؟ مختصات رأس چهارم متوازی‌الاضلاع‌ها را پیدا کنید .

راهنمائی: متوازی‌الاضلاع بیکی از صورتهای ABCD یا ACBD′ یا ACD″B مساشد

جواب: $D''(0$ و $0)$ یا $D'(-6$ و $8)$ یا $D(8$ و $-4)$

انتقال محورها- هرگاه دردستگاه xoy مختصات نقطه A بصورت

قاعده ۲۱ $A\left|\begin{matrix}x_A\\y_A\end{matrix}\right.$ باشد اگرمحورهای‌مختصات‌را به‌موازات خود انتقال‌دهیم تامبدأ به‌نقطه $O'\left|\begin{matrix}\alpha\\\beta\end{matrix}\right.$ منطبق شود و مختصات جدید نقطه A در دستگاه XO′Y بصورت $A\left|\begin{matrix}X_A\\Y_A\end{matrix}\right.$ باشد مابین مختصات جدید وقدیم روابط زیر برقرار است.

$$\begin{cases}x_A=\alpha+X_A\\y_A=\beta+Y_A\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}X_A=x_A-\alpha\\Y_A=y_A-\beta\end{cases}$$

۵۷- مختصات نقطه A در دستگاه xoy به ترتیب ۲و۳ و در دستگاه XO′Y که محورهای انموازی وهم‌جهت بامحورهای‌دستگاه‌اول‌میباشد به‌ترتیب۲ —و۵ میباشد مطلوبست مختصات‌نقطه O′.

حل:

$$A\left|\begin{matrix}2=x_A\\3=y_A\end{matrix}\right._{xoy}\qquad A\left|\begin{matrix}-2=X_A\\5=Y_A\end{matrix}\right._{XO'Y}\qquad O'\left|\begin{matrix}\alpha=?\\\beta=?\end{matrix}\right.$$

$$\begin{matrix}x_A=X_A+\alpha\Longrightarrow 2=\alpha-2\Longrightarrow\alpha=4\\y_A=Y_A+\beta\Longrightarrow 3=5+\beta\Longrightarrow\beta=-2\end{matrix}\qquad O'\left|\begin{matrix}4\\-2\end{matrix}\right.$$

۵۸- معادلهٔ خطی در دستگاه xoy بصورت $2x-3y=5$ میباشد محورهای مختصات‌را به موازات‌خودانتقال میدهیم تامبدأجدیدبرنقطه $O'(-3$و$+2)$ منطبق‌شودمعادل جدید خط دردستگاه جدید را بدست آورید.

حل:

$$2x-3y=5\Longrightarrow 2(X-3)-3(Y+2)=5$$
$$2X-6-3Y-6=5\Longrightarrow 2X-3Y=17$$

۵۹ـ معادله یك منحنی دردستگاه xoy بصورت $y=\frac{2x-3}{1-x}$ میباشد محورهای مختصات را بموازات خود انتقال میدهیم تا مبدأ جدید برنقطه $O'(2,1)$ منطبق شود معادله جدید منحنی را بدست آورید .

حل: $Y-2=\frac{2(X+1)-3}{1-(X+1)} \Longrightarrow Y=\frac{2X+2-3}{1-X-1}+2$

$$Y=\frac{2X-1}{-X}+2 \Longrightarrow Y=\frac{2X-1-2X}{-X} \Longrightarrow Y=\frac{1}{X}$$

۶۰ـ معادله یك منحنی بصورت $y=x^2+2x+1$ میباشد مبدا مختصات رابکدام نقطه انتقال دهیم تامعادله جدید بصورت $Y=X^2+2$ درآید.

حل: فرض کنیم مبدأجدید $O'(\alpha,\beta)$ باشد دراینصورت میتوان نوشت:

$$x=X+\alpha, y=Y+\beta$$

$$Y+\beta=(X+\alpha)^2+2(X+\alpha)+1$$

$$Y=X^2+2X(\alpha+1)+\alpha^2+2\alpha+1-\beta$$

$$X^2+2(\alpha+1)X+\alpha^2+2\alpha+1-\beta\equiv X^2+2$$

$$\alpha+1=0 \Longrightarrow \alpha=-1, \alpha^2+2\alpha+1-\beta=2 \Longrightarrow \beta=-2$$

۶۱ـ معادله یك منحنی بصورت $y=\frac{x+1}{x-1}$ میباشد مبدأ مختصات را بکدام نقطه انتقال دهیم تامعادله جدیدآن بصورت $Y=\frac{X}{X-2}$ درآید جواب: $O'(-1,0)$

خارج از برنامه

قاعده ۲۲

اگر نقطه $A(x,y)$ در دستگاه xoy مفروض باشد ومبدأ مختصات را ثابت نگهداشته وسپس محورهای مختصات را باندازه α درجه دوران دهیم و مختصات‌جدیدA بصورت $A(X,Y)$ درآیدبین دومختصات جدید وقدیم‌روابط زیر برقرار است.

$$\begin{cases} X=x\cos\alpha+y\sin\alpha, Y=-x\sin\alpha+y\cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=X\cos\alpha-Y\sin\alpha, y=X\sin\alpha+Y\cos\alpha \end{cases}$$

۶۲- نقاط $A(2,-3)$ و $B(-4,-6)$ مفروضند. اگر محورهای مختصات را باندازه 30° دوران دهیم مختصات جدید A و B را بدست آورید.

حل:

$$A\begin{cases} X = x\cos\alpha + y\sin\alpha = 2\cos 30^\circ + (-3)\sin 30^\circ = \sqrt{3} - 2 \\ Y = -x\sin\alpha + y\cos\alpha = -(2)\sin 30^\circ - 3\cos 30^\circ = -1 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$B\begin{cases} X = -4\cos 30^\circ + (-6)\sin 30^\circ = -2\sqrt{3} - 3 \\ Y = -(-4)\sin 30^\circ + (-6)\cos 30^\circ = 2 - 3\sqrt{3} \end{cases}$$

۶۳- مختصات نقاط A و B را نسبت بدستگاه xoy طوری بدست آورید که اگر محورهای مختصات را باندازه 60° دوران دهیم مختصات نقاط A و B نسبت بدستگاه جدید بصورت: $A(2,3)$ و $B(-4,4)$ درآید.

حل:

$$A\begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha = 2\cos 60^\circ - 3\sin 60^\circ \\ y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha = 2\sin 60^\circ + 3\cos 60^\circ \end{cases}$$

$$A\begin{cases} x = 1 - 2\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} + 2 \end{cases} \text{ و } B\begin{cases} x = -2 - 2\sqrt{3} \\ y = -2\sqrt{3} + 2 \end{cases}$$

۶۴- معادله خطی دردستگاه xoy بصورت $3x - 2y = \sqrt{2}$ میباشد اگر محورهای مختصات را باندازه 45° دوران دهیم معادله جدید خط نسبت بمحورهای جدید بچه صورت میشود

حل:

$$3(X\cos 45^\circ - Y\sin 45^\circ) - 2(X\sin 45^\circ + Y\cos 45^\circ) = \sqrt{2}$$

$$3(X - Y) - 2(X + Y) = 2 \Longrightarrow X - 5Y = 2$$

۶۵- مطلوبست معادله یك منحنی نسبت بدستگاه xoy بقسمی که اگر محورهای مختصات را باندازه 45° دوران دهیم معادله جدید آن بصورت $2XY + 1 = 0$ درآید.

حل:

$$2(x\cos 45^\circ + y\sin 45^\circ)(-x\sin 45^\circ + y\cos 45^\circ) + 1 = 0$$

$$2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)(-x + y) + 1 = 0 \Longrightarrow x^2 - y^2 = 1$$

۶۶- معادله یك منحنی دردستگاه xoy بصورت: $x^2 + y^2 + 2xy + 6x = 5$ میباشد محورهای مختصات باندازه چه‌زاویه‌ای دوران دهیم تا درمعادله جدید منحنی جمله XY وجودنداشته باشد.

حل:

$$(X\cos\alpha - Y\sin\alpha)^2 + (X\sin\alpha + Y\cos\alpha)^2 +$$

$$+ 2(X\cos\alpha - Y\sin\alpha)(X\sin\alpha + Y\cos\alpha) + 6(X\cos\alpha - Y\sin\alpha) = 5$$

$$X^2 + Y^2 + X^2\sin 2\alpha - Y^2\sin 2\alpha + 2XY\cos 2\alpha + 6(X\cos\alpha - Y\sin\alpha) = 5$$

$$\cos 2\alpha = 0 = \cos\frac{\pi}{2} \Longrightarrow \alpha = K\pi \pm \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \alpha = \pm 45^\circ \text{ و } \pm 135^\circ$$

۶۷- معادله یك منحنی دردستگاه xoy بصورت :

$x^2+3y^2+2\sqrt{3}xy+x-y=5$ میباشد محورهای مختصات را باندازه چه زاویه‌ای دوران دهیم تادرمعادله جدید منحنی جمله XY وجودنداشته باشد .

جواب: $\alpha=30^\circ$ و 120° و -60° و -150°

۶۸- معادله خطی بصورت $y=2x+3$ میباشد مبدا رابه نقطه $O'(1 \text{ و } -1)$ انتقال میدهیم معادله جدید خط را بنویسید. جواب: $Y=2X+6$

۶۹- معادله یك منحنی بصورت $y=x^2+1$ میباشد مبدا را به نقطه‌ای روی محور طولهای و بطول ۲ انتقال میدهیم معادله جدید منحنی را بنویسید.

جواب: $Y=X^2+4X+5$

۷۰- معادله یك منحنی بصورت $y=\frac{x-2}{x+5}$ میباشد مبدا را به نقطه‌ای روی نیمساز ناحیه اول بطول واحد انتقال میدهیم معادله جدید منحنی را بنویسید.

جواب: جواب: $Y=\frac{-7}{X+6}$

۷۱- معادله خطی بصورت $y=2x+7$ میباشد مبدا را به نقطه‌ای روی محور عرضها بعرض واحد انتقال میدهیم معادله جدید خط را بنویسید .

جواب: $Y=2X+6$

قاعده ۲۳	برای پیدا کردن مختصات محل تلاقی دوخط یایك خط با یك منحنی باید دومعادله آنهارا باهم حل نموده و x و y را بدست آورد.

۷۲- مختصات محل تلاقی دوخط $2x-y=5$ و $3x+y=10$ رابدست آورید.

جواب: $A(3 \text{ و } 1)$

۷۳- مختصات نقاط تلاقی خط $y=2x+1$ و منحنی $y=\frac{4x-1}{1-x}$ را بدست آورید . جواب: $A(0/5 \text{ و } 2)$ و $B(-2 \text{ و } -3)$

تذکر- مقدار tg زوایای زیر را بخاطر بسپارید

$tg 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$ و $tg 15^\circ=2-\sqrt{3}$ و $tg 0^\circ=0$

$tg 45^\circ=1$ $tg 60^\circ=\sqrt{3}$ $tg 75^\circ=2+\sqrt{3}$ $tg 90^\circ=\infty$

قاعده ۲۴	ضریب زاویه هر خط تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور طولها درست مینماید ودربالای محور طولها قراردارد وآنرا بحرف m نمایش می‌دهیم .

۷۳- خطوط D_1 و D_2 و D_3 و D_4 بترتیب با جهت مثبت محور طولها زوایای 30° و 60° و 45° و 90° درجه میسازند مطلوبست محاسبه ضریب زاویه خطوط فوق.

$$m_{D_1} = tg30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{و} \quad m_{D_2} = tg60^\circ = \sqrt{3}$$

$$m_{D_3} = tg45^\circ = 1 \quad \text{و} \quad m_{D_4} = tg90^\circ = \infty$$

قاعده ۲۵

tg هر زاویه با منهای tg مکمل همان زاویه برابر است مانند مثالهای زیر :

$$tg100^\circ = -tg80^\circ \quad \text{و} \quad tg120^\circ = -tg60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$tg165^\circ = -tg15^\circ = -(2-\sqrt{3}) \quad \text{و}$$

$$tg135^\circ = -tg45^\circ = -1$$

۷۴- مطلوبست ضریب زاویه خطوطی که باجهت مثبت محور طولها بترتیب زوایای صفردرجه و 120° و 135° و 150° و 165° و 105° میسازند .

حل:

$$m_{\Delta_1} = tg0^\circ \quad \text{و} \quad m_{\Delta_2} = tg120^\circ = -tg60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$m_{\Delta_3} = tg135^\circ = -tg45^\circ = -1 \quad \text{و} \quad m_{\Delta_4} = tg150^\circ = -tg30^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

$$m_{\Delta_5} = tg165^\circ = -tg15^\circ = -(2-\sqrt{3})$$

$$m_{\Delta_6} = tg105^\circ = -tg75^\circ = -2-\sqrt{3}$$

۷۵- ضریب زاویه خطی برابر $\sqrt{3}$ میباشد این‌خط چه زاویه‌ای‌باجهت مثبت‌محور طولها میسازد .

حل:

$$m = tg\alpha \Longrightarrow \sqrt{3} = tg\alpha \Longrightarrow \alpha = 60^\circ$$

قاعده ۲۶

هرگاه مختصات دو نقطه ازخطی معلوم باشد ضریب زاویه خط برابر است با تفاضل عرضهای آن دو نقطه بخش‌بر تفاضل طولهای همان دو نقطه مانند مثالهای زیر .

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \quad \text{و} \quad m_{CD} = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D}$$

$$m_{EF} = \frac{y_E - y_F}{x_E - x_F} \quad \text{و} \quad m_{pq} = \frac{y_p - y_q}{x_p - x_q}$$

۷۶- نقاط $A(3 \text{ و } 1)$ و $B(-1 \text{ و } 5)$ و $C(0 \text{ و } -2)$ سه رأس یك مثلث‌اندضریب

زاویهٔ اضلاع مثلث را حساب کنید .

حل: $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۵-۱}{-۱-۳}=-۱\Rightarrow m_{AB}=-۱$

$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{-۲-۵}{۰+۱}=-۷$ و $m_{AC}=۱$

۷۷- نقاط $A(۲a,a)$ و $B(۲a-۱ , a+۷)$ مفروضند. a را چنان‌تعیین کنید که خط AB با جهت مثبت محور طولها زاویه °۱۳۵ درجه بسازد .

حل: $m_{AB}=tg۱۳۵^\circ=tg(\pi-۴۵^\circ)=-tg۴۵^\circ=-۱$

$m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}\Rightarrow -۱=\frac{a-a-۷}{۲-۲a+۱}$

$-۳+۲a=-۷\Rightarrow a=-۲$

قاعده ۲۷	هرگاه معادله خطی بصورت $ax+by=c$ و یا بصورت $ax+by+c=۰$ باشد ضریب زاویه خط برابر است با ضریب x بخش‌بر ضریب y با علامت مخالف یعنی $m=\frac{-a}{b}$
قاعده ۲۸	هرگاه معادله خطی بصورت $y=ax+b$ باشدضریب زاویه‌خط‌برابر ضریب x میباشد یعنی $m=a$

تذکر: ضریب زاویه خطوط افقی صفر و ضریب‌زاویه‌خطوط قائم بی‌نهایت است .

ضریب زاویه هریك از خطوط زیر را در جلوی آنها بنویسید .

	جواب	صورت
۷۸-	$m=۲$	$y=۲x-۵$
۷۹-	$m=\frac{-۳}{۲}$	$۳x+۲y=۷$
۸۰-	$m=۴$	$۴x-y+۹=۰$
۸۱-	$m=\frac{-۳}{۰}=-\infty$	$۳x-۵=۰$
۸۲-	$m=\frac{۰}{۴}=۰$	$۴y-۱۵=۰$

۸۳ـ معادله خطی بصورت $(a-1)x+2ay=5$ مفروض است. a را چنان تعیین کنید که خط مزبور با جهت مثبت محور طولها زاویه °۱۳۵ بسازد.

حل:

$$\begin{cases} \text{خط } m=tg\,135^\circ=-tg\,45^\circ=-1 \\ \text{خط } m=\dfrac{-(a-1)}{2a} \Longrightarrow -1=\dfrac{-(a-1)}{2a} \end{cases}$$

$$-2a=-a+1 \Longrightarrow a=-1$$

۸۴ـ m را طوری تعیین کنید که خط $my+(m-1)x+5=0$ با جهت مثبت محور xها زاویه °۳۰ بسازد. جواب: $m=3\div(\sqrt{3}+3)$

۸۵ـ m و n را چنان تعیین کنید که خط $y=mx+n$ با جهت مثبت محور x ها زاویه °۴۵ بسازد و از نقطه‌ای بطول واحد واقع برمحور طولها عبور کند.

جواب: $m=1$ و $n=-1$

قاعده ۲۹	معادله محور طولها بصورت $y=0$ میباشد پس ضریب زاویه آن برابر صفر است.
قاعده ۳۰	معادله محور عرضها بصورت $x=0$ میباشد پس ضریب زاویه آن برابر ∞ است.
قاعده ۳۱	معادله نیمساز ناحیه اول ونیمساز ناحیه سوم بصورت $y=x$ میباشد پس ضریب زاویه آن برابر یك است.
قاعده ۳۲	معادله نیمساز ناحیه دوم و معادله نیمساز ناحیه چهارم بصورت $y=-x$ میباشد پس ضریب زاویه آن برابر -1 است.
قاعده ۳۳	**دوخط موازی**: هرگاه دو خط D و Δ با هم موازی باشند ضریب زاویهٔ آنها با هم برابراست یعنی: $m_D=m_\Delta$

۸۶ـ K را چنان تعیین کنید که دوخط $D\equiv y=3x+4$ و $\Delta\equiv(K-2)y+2Kx=K-1$ موازی باشند.

حل: $m_D=m_\Delta$ و $m_\Delta=\dfrac{-2K}{K-2}$ و $m_D=3$

$$3=\frac{-2K}{K-2} \Longrightarrow 3K-6=-2K \Longrightarrow K=\frac{6}{5}$$

۸۷- نقاط $A(۲و۳)$ و $B(۰و-۱)$ وخط $D\equiv ay+(۵a-۲)x-۲a=۰$ مفروضند a را چنان تعیین کنید که خط D با خط AB موازی باشد .

$$m_D=m_{AB}\Longrightarrow\frac{-(۵a-۲)}{a}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}$$

$$\frac{(-۵a+۲)}{a}=\frac{۳+۱}{۲-۰}=\frac{۴}{۲}=۲\Longrightarrow-۵a+۲=۲a\Longrightarrow a=\frac{۲}{۷}$$

۸۸- نقاط $A(K-۱و۲K)$ و $B(K و۳)$ مفروضند. K را چنان تعیین کنید که خط AB موازی نیمساز ناحیه اول باشد . جواب: $K=۱$

۸۹- نقاط $A(۳و۵)$ و $B(۲a+۱ و a+۲)$ و $C(a و ۳a)$ مفروضند. a را چنان تعیین کنید که خط BC موازی خط OA باشد (O مبدأ مختصات است) .

قاعده ۳۴	**دوخط عمود :** هرگاه دوخط D و Δ برهم عمود باشند حاصلضرب ضریب زاویه آنها برابر ۱- میباشد یعنی $m_D\times m_\Delta=-۱$

۹۰- a را چنان تعیین کنید که دو خط $D\equiv ۳x-۲y=۵$ و $\Delta\equiv ۵x+ay-۲a=۰$ بر هم عمود باشند.

حل: $m_D\times m_\Delta=-۱\Longrightarrow\frac{-۳}{-۲}\times\frac{-۵}{a}=-۱\Longrightarrow ۲a=۱۵\Longrightarrow a=\frac{۱۵}{۲}$

۹۱- نقاط $A(-۱و-۲)$ و $B(۲a و a+۳)$ مفروضند a را چنان تعیین کنید که خط AB بر نیمساز ناحیه اول عمود باشد . جواب: $a=-۲$

۹۲- نقاط $A(۳K+۱ و ۲K-۱)$ و $B(۳K+۲ و ۵)$ و $C(-۵ و ۲)$ سه رأس یك مثلثند. K را چنان تعیین کنید که زاویه B برابر ۹۰° باشد.

جواب: $K=۲۵\div۳$

قاعده ۳۵	**زاویه بین دوخط :** هرگاه ضریب زاویه دوخط d و d' بترتیب m و m' باشد تانژانت زاویه بین دوخط ازفرمول $tg\alpha=\pm\frac{m-m'}{۱+mm'}$ بدست می‌آید .

۹۳ـ مطلوبست زاویه بین دوخط d و d' بمعادلات $3x-y=5$ و $2x+y=4$

$m=3$ و $m'=-2$

$$tg\alpha=\pm\frac{m-m'}{1+mm'}=\pm\frac{3+2}{1+3(-2)}=\pm\frac{5}{-5}=\pm 1 \Rightarrow \alpha=45^\circ \text{ و } 135^\circ$$

۹۴ـ مطلوبست ضریب زاویه خطی که باخط $d\equiv 3x-y=1$ زاویه 45° بسازد.

$m=?$ و $m'=3$ و $\alpha=45^\circ$

$$tg\alpha=\pm\frac{m-m'}{1+mm'}\Rightarrow tg45^\circ=\pm\frac{m-3}{1+3m}\Rightarrow 1=\pm\frac{m-3}{1+3m}$$

$$1=\frac{m-3}{1+3m}\Rightarrow 1+3m=m-3\Rightarrow \boxed{m=-2}$$

$$1=-\frac{m-3}{1+3m}\Rightarrow 1+3m=-m+3\Rightarrow 4m=2\Rightarrow m=\frac{1}{2}$$

۹۵ـ دوخط بمعادلات $(3a+1)x+2y-5=0$ و $y=(a+2)x+3a-1$ مفروضند، a را چنان تعیین کنید که زاویه بین دوخط فوق برابر 45° باشد.

جواب: $a=(-6\pm\sqrt{21})\div 3$ و $-5\div 3$ و 1

۹۶ـ نقاط $A(3$ و $5)$ و $B(2a+1$ و $3)$ و خط d بمعادله $3x-y=7$ مفروضند a را چنان تعیین کنید که خط AB با خط d زاویه 135° بسازد.

جواب: $a=-1$ و $1/5$

تذکر: $Arctg5$ یعنی کمانیکه tg آن برابر ۵ میباشد و $Arcsin\,0/2$ یعنی کمانیکه سینوسش ۰/۲ میباشد.

۹۷ـ a را چنان تعیین کنید که خط $(2a+1)x+3ay=5$ بانیمساز ناحیه دوم زاویه‌ای برابر $Arctg3$ بسازد. جواب: $a=-1\div 7$ و $-5\div 19$

قاعده ۳۶	**معادله خط**: هرگاه مختصات نقاط A و B دردست باشد معادله خط AB از فرمول $AB\equiv\frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}$ بدست میآید.

۹۸ـ نقاط $A\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}-1\\3\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}0\\-2\end{matrix}\right.$ سه‌راس یکمثلث‌اند معادلات اضلاع این مثلث را بنویسید،

$$AB \equiv \frac{y-y_A}{x-x_A} = \frac{y_A-y_B}{x_A-x_B} \Longrightarrow AB \equiv \frac{y-۲}{x-۱} = \frac{۲-۳}{۱+۱} = \frac{-۱}{۲}$$

$$AB \equiv ۲y-۴ = -x+۱ \Longrightarrow AB \equiv ۲y+x=۵$$

$$AC \equiv \frac{y-y_C}{x-x_C} = \frac{y_A-y_C}{x_A-x_C} \Longrightarrow AC \equiv \frac{y+۲}{x-۰} = \frac{۲+۲}{۱-۰} = ۴$$

$$AC \equiv y+۲ = ۴x \Longrightarrow AC \equiv y = ۴x-۲$$

$$BC \equiv y+۵x = -۲$$

۹۹- معادله خطی‌را بنویسید که نقطه A بطول ۲ روی محورطولها ونقطه B بعرض ۳- روی نیمساز ناحیه سوم را بهم وصل کند.

حل: $A\left|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}-۳\\-۳\end{matrix}\right.$ و $AB \equiv \frac{y-۰}{x-۲} = \frac{۰+۳}{۲+۳}$

معادله خط AB $۵y = ۳x-۶$

قاعده ۳۷

معادله میانه‌های مثلث: هرگاه مختصات سه‌راس یك مثلث معلوم باشد ومعادله میانه‌های مثلث را بخواهند ابتداء مختصات اوساط اضلاع مثلثرا طبق قاعده (۱۸) بدست آورده و سپس طبق قاعده (۳۶) معادله میانه‌ها را مینویسیم.

۱۰۰- نقاط $A(۳و۵)$ و $B(-۵و۱)$ و $C(-۱و۷)$ سه راس یك مثلثاند معادله‌میانهٔ AA' رابدست آورید.

جواب: $AA' \equiv ۶y-x=۲۷$

قاعده ۳۸

معادله خط: هرگاه مختصات نقطه A از خط d و ضریب زاویه خط d یعنی m در دست باشد معادله خط d از یکی از دو فرمول زیر بدست می‌آید.

$$d \equiv \frac{y-y_A}{x-x_A} = m \text{ یا } y-y_A = m(x-x_A)$$

۱۰۱- معادله خطی را بنویسید که ازنقطه $A(-۲و-۳)$ گذشته وضریب زاویه‌آن ۴- باشد.

حل: $y+۳ = -۴(x+۲) \Longrightarrow y = -۴x-۱۱$

۱۰۲ـ معادله خطی را بنویسید که با جهت مثبت محور طولها زاویه °۱۳۵ تشکیل داده ومحور عرضها را درنقطه‌ای بعرض ۲ — قطع کند.

حل: $A(0,-2)$ و $m = tg\,135^\circ = -tg\,45^\circ = -1$

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y + 2 = -1(x - 0) \Rightarrow y = -x - 2$$

۱۰۳ـ معادله خطی را بنویسید که خط $2y - x = 5$ را در نقطه‌ای بعرض ۲ قطع نموده وبا خط d بمعادله $6x + 2y = 5$ موازی باشد. جواب: $y = -3x - 1$

۱۰۴ـ معادله خطی را بنویسید که از محل تلاقی دو خط $3x + 4y = 1$ و $y - 2x = 3$ گذشته و برخطی که دو نقطه $A(5,2)$ و $B(3,1)$ را بهم وصل میکند عمود باشد. جواب: $y = -2x - 1$

قاعده ۳۹

معادله ارتفاع: میدانیم ارتفاع خطی است که از راس بر ضلع مقابل عمود میشود پس ازفرمول $m = -1$ ارتفاع $\times m$ ضلع مقابل ضریب زاویه ارتفاع را بدست میآوریم وچون مختصات رأس راهم داریم معادله ارتفاع رااز فرمول $y - y_A = m(x - x_A)$ بدست میآوریم .

۱۰۵ـ نقاط $A(1,2)$ و $B(-3,4)$ و $C(-4,3)$ سه راس یك مثلث هستند معادله ارتفاع AH را بنویسید .

حل: میدانیم ارتفاع AH برضلع BC عمود است (خودتان یك‌مثلث فرضی بکشید)

$$m_{BC} \times m_{AH} = -1 \Rightarrow \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} \times m_{AH} = -1$$

$$\frac{4-3}{-3+4} \times m_{AH} = -1 \Rightarrow m_{AH} = -1$$

$$AH \equiv y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 2 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 3$$

۱۰۶ـ معادلات اضلاع مثلثی بصورت: $AB \equiv y = 2x + 3$ و $AC \equiv y = x$ و $BC \equiv y = -x + 3$ میباشند معادله ارتفاع CH را بنویسید.

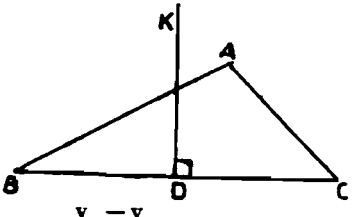
جواب: $CH \equiv y = -0/5x + 2/25$

قاعده ۴۰

معادله عمود منصف : میدانیم عمود منصف هرضلع خطی است که از وسط آنضلع برخودش عمود شود پس برای بدست آوردن معادله آنابتداء مختصات وسط ضلع رابدست آورده وسپس ازفرمول :

$m_{\text{عمود منصف}} \times m_{\text{ضلع}} = -1$ ضریب زاویه عمود منصف را بدست آوردموسپس ازفرمول $y - y_1 = m(x - x_1)$ استفاده کردمومعادله عمودمنصف را می‌نویسیم.

۱۰۷- نقاط $A(-1,2)$ و $B(3,2)$ و $C(5,-6)$ رئوس یك مثلث هستند معادله عمود منصف ضلع BC را بنویسید.



حل: اگروسط BC رانقطه D و درنتیجه عمودمنصف را DK بنامیم نتیجه میشود .

$$m_{BC} \times m_{DK} = -1$$

$$\frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} \times m_{DK} = -1 \Longrightarrow \frac{2+6}{3-5} \times m_{DK} = -1 \Longrightarrow m_{DK} = 0/25$$

$$\text{وسط BC } D \left| \begin{array}{l} x = \frac{3+5}{2} = 4 \\ y = \frac{-6+2}{2} = -2 \end{array} \right. \qquad D \left| \begin{array}{l} 4 \\ -2 \end{array} \right.$$

$$DK \equiv y - y_D = m(x - x_D)$$

$$y + 2 = 0/25(x - 4) \Longrightarrow y = 0/25x - 3$$

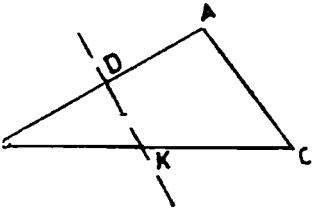
۱۰۸- معادلات اضلاع مثلثی عبارتنداز $AB \equiv y = x + 2$ و $AC \equiv y = -x + 4$ و $BC \equiv y = 2x + 5$ معادله عمود منصف ضلع AB را بدست آورید .

حل: ابتداء مختصات نقاط A و B را بدست می‌آوریم تا بتوانیم مختصات وسط آنرا حساب کنیم .

$$\begin{cases} AB \equiv y = x + 2 \\ AC \equiv y = -x + 4 \end{cases} \text{ازجمع دوراابطه} \Longrightarrow \begin{cases} 2y = 6 \Longrightarrow y = 3 \\ y = -x + 4 \Longrightarrow 3 = -x + 4 \Longrightarrow x = 1 \end{cases} \quad A(1,3) \text{ و}$$

$$\begin{cases} BC \equiv y = 2x + 5 \\ BA \equiv y = x + 5 \end{cases} \text{ازتفریق دوراابطه} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = x + 5 = 0 + 5 = 5 \end{cases} \quad B(0,5) \text{ و}$$

اگر وسط ضلع AB را D و عمودمنصف آنرا DK بنامیم نتیجه میشود.



حل:

$$m_{AB} \times m_{DK} = -۱$$

$$۱ \times m_{DK} = -۱$$

$$m_{DK} = -۱$$

$$x_D = \frac{x_A + x_B}{۲} = \frac{۱+۰}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$y_D = \frac{y_A + y_B}{۲} = \frac{۳+۵}{۲} = ۴ \Longrightarrow H(\frac{۱}{۲} \text{ و } ۴)$$

$$DK \equiv y - y_D = m(x - x_D) \Longrightarrow y - ۴ = -۱(x - ۰/۵)$$

$$DK \equiv y = -x + ۴/۵$$

قاعده ۴۱

برای اینکه قرینهٔ نقطهٔ $A(a \text{ و } b)$ را نسبت بخط d به معادلهٔ $ax + by + c = ۰$ بدست آوریم ابتداء معادلهٔ خط AH را که از A می‌گذرد و برخط d عمود است بدست می‌آوریم و سپس معادلهٔ آنرا با معادلهٔ خط d حل می‌کنیم تا مختصات نقطه H پای عمود بدست آید و سپس از فرمول وسط پاره‌خط استفاده کرده مختصات نقطه A' قرینهٔ A نسبت به H را پیدا می‌کنیم :

۱۰۹- مختصات قرینه نقطه $A(۳ \text{ و } -۵)$ را نسبت به‌خط $۳y - x + ۸ = ۰$ بدست آورید .

حل: $m_{AH} \times m_{\text{خط}} = -۱ \Longrightarrow \frac{۱}{۳} \times m_{AH} = -۱$ و $m = \frac{۱}{۳}$ خط

$$m_{AH} = -۳ \text{ و } AH \equiv y - y_A = m(x - x_A)$$

$$AH \equiv y = -۳x + ۴$$

$$\begin{cases} AH \equiv y + ۳x = ۴ \\ \text{خط} \equiv ۳y - x = -۸ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y + ۳x = ۴ \\ ۹y - ۳x = -۲۴ \end{cases}$$

از جمع دو رابطه $\Longrightarrow ۱۰y = -۲۰ \Longrightarrow y = -۲$

$$۳y - x = -۸ \Longrightarrow ۳ \times -۲ - x = -۸ \Longrightarrow x = ۲ \Longrightarrow H(۲ \text{ و } -۲)$$

$$\begin{cases} x_H = \dfrac{x_A + x_{A'}}{۲} \Longrightarrow ۲ = \dfrac{۳ + x_{A'}}{۲} \Longrightarrow x_{A'} = ۱ \\ y_H = \dfrac{y_A + y_{A'}}{۲} \Longrightarrow -۲ = \dfrac{-۵ + y_{A'}}{۲} \Longrightarrow y_{A'} = ۱ \end{cases} \qquad A' \Big| \begin{matrix} ۱ \\ ۱ \end{matrix}$$

۱۱۰- قرینه نقطه $A(-۲و-۱)$ را نسبت بخطی که دو نقطه $B(۲و-۳)$ و $C(-۱و۶)$ را بهم وصل می‌کند بدست آورید.

حل:

$$BC \equiv \frac{y - y_B}{x - x_B} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} \Longrightarrow BC \equiv \frac{y + ۳}{x - ۲} = \frac{-۳ - ۶}{۲ + ۱}$$

$$BC \equiv \frac{y + ۳}{x - ۲} = -۳ \Longrightarrow BC \equiv y + ۳ = -۳x + ۶$$

$$BC \equiv y + ۳x = ۳ \quad و \quad m_{BC} = -۳$$

$$m_{BC} \times m_{AH} = -۱ \Longrightarrow -۳ \times m_{AH} = -۱ \Longrightarrow m_{AH} = \frac{۱}{۳}$$

$$AH \equiv y - y_A = m(x - x_A) \Longrightarrow AH \equiv y + ۱ = \frac{۱}{۳}(x + ۲)$$

$$AH \equiv ۳y + ۳ = x + ۲ \Longrightarrow AH \equiv ۳y - x = -۱$$

$$۳\begin{cases} AH \equiv ۳y - x = -۱ \\ \text{خط} \equiv y + ۳x = ۳ \end{cases} \quad \begin{cases} ۹y - ۳x = -۳ \\ y + ۳x = ۳ \end{cases}$$

$$\text{از جمع دو رابطه} \Longrightarrow ۱۰y = ۰ \Longrightarrow y = ۰ و ۳y - x = -۱ \Longrightarrow ۳ \times ۰ - x = -۱$$

$$x = ۱ \quad و \quad H(۱و۰)$$

$$\begin{cases} x_H = \dfrac{x_A + x_{A'}}{۲} \Longrightarrow ۱ = \dfrac{-۲ + x_{A'}}{۲} \Longrightarrow x_{A'} = ۴ \\ y_H = \dfrac{y_A + y_{A'}}{۲} \Longrightarrow ۰ = \dfrac{-۱ + y_{A'}}{۲} \Longrightarrow y_{A'} = ۱ \end{cases} \qquad A' \Big| \begin{matrix} ۴ \\ ۱ \end{matrix}$$

قاعده ۴۲

شرط قرار داشتن چند نقطه بر یك استقامت : برای اثبات اینکه نقاط A و B و C و D و E و... بر یك استقامتند یعنی برروی یك خط راست واقع‌اند راه حل اینستکه معادله AB را بنویسیم اگر مختصات نقاط C و D و E و ... در معادله خط AB صدق کردند تمام نقاط فوق بر یك استقامتند.

قاعده ۴۳

شرط اینکه نقاط A و B و C و D و E و... بر یك استقامت باشند اینست که مختصات آنها در رابطه زیر صدق کند.

$$\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=\frac{y_A-y_D}{x_A-x_D}=\cdots\cdots$$

۱۱۱ـ تحقیق کنید که نقاط A(۰ و ۱−) و B(۱− و ۳−) و C(۲و۳) و D(۳ و ۵) بر یك استقامت هستند.

حل:

$$\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=\frac{y_A-y_D}{x_A-x_D}$$

$$\frac{-۱+۳}{۰+۱}=\frac{-۱-۳}{۰-۲}=\frac{-۱-۵}{۰-۳}\Longrightarrow ۲=۲=۲$$

قاعده ۴۴

فاصله یك نقطه از یك خط ـ برای پیدا کردن فاصله نقطه A(αوβ) از خط $d\equiv ax+by+c=۰$ از فرمول :

$$AH=\left|\frac{a\alpha+b\beta+c}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\right|$$

استفاده میشود یعنی در معادله خط مختصات نقطه A را قرار میدهیم و درصورت کسر مینویسیم و درمخرج کسر ریشه دوم مجموع مربعات ضریب x و ضریب y را قرار میدهیم این فرمول برای محاسبه طول ارتفاعات مثلث و همچنین برای محاسبه شعاع دایره‌ای که مرکز آن و معادله خط مماس برآن معلوم باشد و همچنین برای محاسبه فاصله دو خط موازی نیز بکار میرود

$$R=AH=\left|\frac{a\alpha+b\beta+c}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\right|$$

۱۱۲- مطلوبست فاصله نقطه $A(-3,2)$ از خط $3x-4y+7=0$

$$AH=\left|\frac{a\alpha+b\beta+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \Longrightarrow AH=\left|\frac{3\times-3-4\times2+7}{\sqrt{9+16}}\right|$$

$$AH=\left|\frac{-9-8+7}{5}\right|=2 \Longrightarrow \boxed{AH=2}$$

۱۱۳- مطلوبست محاسبه شعاع دایره‌ای که مرکزش مبدأ مختصات بوده و برخط $d\equiv\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y+12=0$ مماس باشد.

حل:

$$R=OH=\left|\frac{0+0+12}{\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{16}}}\right|=\frac{12}{\frac{5}{12}}=28/8$$

۱۱۴- مطلوبست محاسبه شعاع دایره‌ای که نقطه $A\left|\begin{matrix}-2\\3\end{matrix}\right.$ مرکز آن بوده و بر محور عرضها مماس باشد.

حل: $x=0$ معادله مماس $\Longrightarrow a=1$ و $b=c=0$

$$R=AH=\left|\frac{-2}{\sqrt{1}}\right|=2\Longrightarrow \boxed{R=AH=2}$$

۱۱۵- مطلوبست محاسبه شعاع دایره‌ای که مرکزش نقطه $C(2,1)$ بوده و برخط $3x-4y=7$ مماس باشد. جواب: $R=1$

۱۱۶- m را طوری تعیین کنید که فاصله نقطه $A(1,2)$ از خط $2y-mx-3=0$ مساوی ۲ باشد.

حل:

$$AH=\left|\frac{2(2)-m(2)-3}{\sqrt{4+m^2}}\right| \Longrightarrow \frac{1-2m}{\sqrt{4+m^2}}=\pm2$$

$$\frac{(1-2m)^2}{4+m^2}=4\Longrightarrow -4m=15\Longrightarrow m=-\frac{15}{4}$$

۱۱۷- m را چنان تعیین کنید که فاصله نقطه $A(-1,2)$ از خط $3x+4y+2m-1=0$ برابر ۶ باشد.

حل:

$$AH=\left|\frac{+3(-1)+4(2)+2m-1}{\sqrt{9+16}}\right|=3\Longrightarrow\left|\frac{4+2m}{5}\right|=6$$

$$\frac{4+2m}{5}=\pm6\Longrightarrow 4+2m=\pm30$$

$$4+2m=30\Longrightarrow m=13 \text{ و } 4+2m=-30\Longrightarrow m=-17$$

قاعده ۴۵

فاصله دوخط موازی : برای پیداکردن فاصله دو خط موازی ابتداء یك نقطه اختیاری بطول دلخواه روی یکی از خطوط اختیار کرده و مختصات آنرا بدست میآوریم و سپس فاصله آنرا از خط دیگر طبق قاعده (۴۴) بدست میآوریم .

۱۱۸- اولاً- ثابت کنید دوخط $۳x+۴y+۷=۰$ و $۹x+۱۲y-۱۱=۰$ موازیند .

ثانیاً- فاصله آنها را پیدا کنید .

حل:

$m_۱=\frac{-۹}{۱۲}=\frac{-۳}{۴}$ و $m_۲=-\frac{۳}{۴}\Longrightarrow m_۱=m_۲=-\frac{۳}{۴}$ پس موازیند

$A(?و-۱)$ و $۳x+۴y+۷=۰\Longrightarrow ۳x-۴+۷=۰\Longrightarrow x=-۱$

$A(-۱ \text{ و } -۱)$

$$AH=\left|\frac{-۹-۱۲-۱۱}{\sqrt{۸۱+۱۴۴}}\right|=\left|\frac{-۳۲}{۱۵}\right|=\frac{۳۲}{۱۵}$$

۱۱۹- a و b را طوری تعیین کنید که :

اولاً- دو خط $y+ax+b=۰$ و $y-۲x+۱=۰$ موازی باشند .

ثانیاً- فاصله آنها برابر $\sqrt{۵}$ باشد .

حل: $m_۱=۲$ و $m_۲=-a$ و $m_۱=m_۲\Longrightarrow a=-۲$

$A(۱و?)$ و $y-۲x+۱=۰\Longrightarrow y-۲+۱=۰\Longrightarrow y=۱\Longrightarrow A(۱و۱)$

$$AH=\left|\frac{۱-۲+b}{\sqrt{۱+۴}}\right|=\sqrt{۵}\Longrightarrow\left|\frac{b-۱}{\sqrt{۵}}\right|=\sqrt{۵}$$

$$\frac{b-۱}{\sqrt{۵}}=\pm\sqrt{۵}\Longrightarrow b-۱=\pm ۵\Longrightarrow b=۶ \text{ و } -۴$$

۱۲۰- m را چنان تعیین کنید که فاصله دوخط : $y-x+m=۰$ و $y-x+۲m=۰$ برابر $\sqrt{۲}$ باشد .

حل: $m_۱=۱$ و $m_۲=۱\Longrightarrow m_۱=m_۲=۱$ پس موازیند

$A(۱و?)$ و $y-x+m=۰\Longrightarrow y-۱+m=۰\Longrightarrow y=۱-m$

$A(۱ \text{ و } ۱-m)$

$$AH=\left|\frac{۱-m-۱+۲m}{\sqrt{۲}}\right|=\sqrt{۲}\Longrightarrow\left|\frac{m}{\sqrt{۲}}\right|=\sqrt{۲}$$

$$\frac{m}{\sqrt{۲}}=\pm\sqrt{۲}\Longrightarrow m=\pm ۲$$

قاعده ۴۶

طرز پیدا کردن معادله نیمساز زاویه بین دو خط :

اگر معادله دو خط d و d' بترتیب بصورت:

$ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$

باشد معادله نیمسازهای زوایای بین دو خط از فرمول زیر بدست می‌آید.

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

۱۲۱- دوخط d و d' بمعادلات $3x+4y-5=0$ و $5x-12y+1=0$ مفروض‌اند معادلات نیمسازهای زوایای بین دوخط را بدست‌آورید .

حل:

$$\frac{3x+4y-5}{\sqrt{9+16}}=\pm\frac{5x-12y+1}{\sqrt{25+144}}$$

$$\frac{3x+4y-5}{5}=\pm\frac{5x-12y+1}{13}$$

$$39x+52y-65=25x-60y+5$$

$14x+112y=70 \Longrightarrow x+8y=5$ معادله یك نیمساز

$$13(3x+4y-5)=-5(5x-12y+1)$$

$64x-8y=60 \Longrightarrow 16x-2y=15$ معادله نیمساز دیگر

۱۲۲- دو خط d و d' بمعادلات $6x-8y+11=0$ و $12x+9y-7=0$ مفروضند معادلات نیمسازهای زوایای بین دوخط را بدست آورید .

حل:

$$\frac{6x-8y+11}{\sqrt{36+64}}=\pm\frac{12x+9y-7}{\sqrt{144+81}}$$

$$\frac{6x-8y+11}{10}=\pm\frac{12x+9y-7}{15}$$

$$24x+18y-14=18x-24y+33 \Longrightarrow 6x+42y=47$$

$$24x+18y-15=-18+24y-33 \Longrightarrow 42x-6y=-18$$

۱۲۳- دو خط d و d' بمعادلات $3x-4y+5=0$ و $3x+4y-3=0$ مفروضند معادلات نیمسازهای زوایای بین این دو خط را بدست آورید .

جواب: $x=\frac{-1}{3}$ و $y=1$

قاعده ۴۷

برای اینکه سه خط یاچند خط متقارب باشند راه حل اینستکه مختصات محل تلاقی دوتاازآن چندخط‌رابدست می‌آوریم اگراین مختصات درمعادلات‌خطوط دیگرصدق کند آن خطوط هم ازآن نقطه میگذرند.

۱۲۴- تحقیق کنید که سه خط $2x+3y=5$ و $3x-y=2$ و $2y-x=1$ متقاربند .

حل:

$$\begin{cases}3x-y=2\\2y-x=1\end{cases}\quad\begin{cases}3x-y=2\\6y-3x=3\end{cases}\xrightarrow[\text{دوراً بطه}]{\text{ازجمع}}\begin{cases}5y=5\\y=1\end{cases}$$

$$3x-y=2\Longrightarrow 3x-1=2\Longrightarrow 3x=3\Longrightarrow x=1\Longrightarrow A(1,1)$$

$$2x+3y=5\Longrightarrow 2(1)+3(1)=5\Longrightarrow 5=5$$

۱۲۵- a را چنان تعیین کنید که سه خط $3x-2y=7$ و $x+2y=5$ و $(a-1)x+(1-2a)y=3$ متقارب باشند .

حل:

$$\begin{cases}x+2y=5\\3x-2y=7\end{cases}\xrightarrow[\text{دوراً بطه}]{\text{ازجمع}}\begin{cases}4x=12\\x=3\end{cases}$$

$$x+2y=5\Longrightarrow 3+2y=5\Longrightarrow y=1\Longrightarrow A(3,1)$$

$$(a-1)x+(1-2a)y=3\Longrightarrow(a-1)(3)+(1-2a)(1)=3$$

$$3a-3+1-2a=3\Longrightarrow a=5$$

قاعده ۴۸

شرط اینکه دوخط $d\equiv ax+by+c=0$ و $d'\equiv a'x+b'y+c'$ برهم منطبق باشند اینستکه: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ باشد .

۱۲۶- دوخط $d\equiv(a-1)x+(a+b)y=2$ و $d'\equiv 2x-3y=1$ مفروضند a و b را چنان تعیین کنید که دو خط برهم منطبق باشند

حل:

$$\frac{a-1}{2}=\frac{a+b}{-3}=\frac{2}{1}$$

$$\begin{cases}\frac{a-1}{2}=2\Longrightarrow a-1=4\Longrightarrow a=5\\\frac{a+b}{-3}=2\Longrightarrow a+b=-6\Longrightarrow 5+b=-6\Longrightarrow b=-11\end{cases}$$

۱۲۷- a و b را چنان تعیین کنید که هریك از دوخط زیر برهم منطبق باشند .

حل:

$$\begin{cases}D\equiv ax+(b+2)y=5\\\Delta\equiv x-y+3=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a=-\frac{5}{3}\ \text{و}\ b=\frac{-1}{3}\end{cases}$$

قاعده ۴۹

شرط اینکه نقاط A و B و C در یك طرف خط :
$ax+by+c=0$ باشند اینستکه مختصات این نقاط را در معادله خط قرار میدهیم وحاصلشان را بدست می‌آوریم اگراین حاصلها هم علامت باشند سه نقطه در یك طرف خط قرار دارند و در غیر اینصورت دردو طرف خط قرار دارند.

۱۲۸- تحقیق کنیدکه نقاط $A(1,3)$و$B(-1,0)$و$C(0,-2)$ دریك طرف خط راست $d\equiv 3x+2y+7=0$ میباشند.

$$A\Longrightarrow 3(3)+2(1)+7=18>0 \text{ و } B\Longrightarrow -3-2+7=2>0$$
$$C\Longrightarrow 0-4+7=3>0$$

چون حاصل هرسه مثبت میباشد پس سه‌نقطه دریك طرف خط d میباشند.

قاعده ۵۰

اگردر معادله خط یا منحنی پارامتری مانند a یا m یا .... وجود داشته باشد برای اثبات اینکه خطوط یا منحنی‌هائی که بازاء مقادیر مختلف پارامتر بوجود می‌آیند ازیك نقطه ثابت یا ازدو نقطه ثابت یا از سه نقطه ثابت می‌گذرند اگر بخواهیم مختصات نقطه ثابت یا نقاط ثابت را بدست آوریم راه حل اینست که اگر معادله کسری باشد طرفین وسطین می‌نمائیم و اگرمعادله بصورت حاصلضرب باشد ضرب می‌کنیم و سپس تمام جملات رابیك طرف می‌آوریم و از جملاتی که دارای پارامتر است فاکتور می‌گیریم یکدفعه ضریب پارامتر و یك دفعه بقیه را مساوی صفر قرار میدهیم و دو معادله دو مجهولی را حل میکنیم و x و y مختصات نقاط ثابت را حساب میکنیم .

۱۲۹- خط $(m-1)x+(m-2)y+2m=0$ مفروض است ثابت‌کنیدکلیه خطوطی که بازاء جمیع مقادیر مختلف m رسم میشوندهمگی ازیك‌نقطه ثابت می‌گذرند و مختصات این نقطه را تعیین کنید.

حل :

$$(m-1)x+(m-2)y+2m=0\Longrightarrow mx-x+my-2y+2m=0$$
$$m(x+y+2)-x-2y=0$$
$$\begin{cases}x+y+2=0\\-x-2y=0\end{cases}\Longrightarrow -y+2=0 \Longrightarrow \boxed{y=2}$$
$$x+y+2=0\Longrightarrow x+2+2=0\Longrightarrow x=-4 \qquad A(-4,2)$$

۱۳۰- تابع $y=\frac{x+a+2}{2x+a}$ مفروض است ثابت کنید کلیه منحنی‌هائی که بازاء مقادیر مختلف a رسم میشوند همگی از یك نقطه ثابت میگذرند و مختصات این نقطه را تعیین کنید .

حل:

$$y=\frac{x+a+2}{2x+a}$$

$$2xy+ay=x+a+2 \Longrightarrow a(y-1)+2xy-x-2=0$$

$$\begin{cases} y-1=0 \\ 2xy-x-2=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y=1 \\ 2x-x-2=0 \Longrightarrow x=2 \end{cases} \Longrightarrow A\left|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right.$$

۱۳۱- تابع $y=\frac{x-2}{ax+a-1}$ مفروض است ثابت کنید کلیه منحنی‌هائی که بازاء مقادیر مختلف a بدست می‌آیند ازدو نقطه ثابت می‌گذرند مختصات آن دو نقطه راحساب کنید.

حل: پس ازطرفین وسطین کردن نتیجه زیر بدست می‌آید .

$$axy+ay-y=x-2 \Longrightarrow axy+ay-y-x+2=0$$

$$ay(x+1)-y-x+2=0 \Longrightarrow \begin{cases} y(x+1)=0 \Longrightarrow y=0 \text{ و } x=-1 \\ -y-x+2=0 \end{cases}$$

چون y و x ازیك معادله هستند $x=-1$ مربوط بیك نقطه است و $y=0$ مربوط به نقطه دیگر .

$y=0 \Longrightarrow -y-x+2=0 \Longrightarrow -0-x+2=0 \Longrightarrow x=2$ پس $A(2,0)$

$x=-1 \Longrightarrow -y+1+2=0 \Longrightarrow y=3 \Longrightarrow B(-1,3)$

قاعده ۵۱

تذکر مهم اگردر مسأله‌ای پارامتر با قوه‌های مختلف وجود داشته باشد ازجملاتی‌که دارای‌پارامتر با قوه‌مشترك‌هستند بطورجداگانه‌فاکتور گرفته وسپس ضریب هرکدام ومقداری راکه به‌پارامتر بستگی ندارد مساوی صفرقرار میدهیم وسپس چندمعادله دومجهولی بدست می‌آیدکه دوتای آنها راباهم حل کرده و y و x رابدست می‌آوریم اگراین y و x درمعادلات دیگرهم صدق کند مختصات نقطه ثابت می‌باشد.

۱۳۲- تابع $y=mx^3+m^2x^2+m^3x+x+m+3$ مفروض‌است‌ثابت‌کنید که‌کلیه منحنی‌هائی که‌بازاء مقادیرمختلف m بدست میآیند ازنقطه ثابتی‌می گذرندومختصات آن را بدست آورید:

حل:

$$mx^3+m^2x^2+m^2x+x+m-y+3=0$$
$$m^2x(x+1)+m(x^2+1)+x-y+3=0$$
$$\begin{cases} x(x+1)=0 \Longrightarrow x=0 \text{ و } -1 \\ x^2+1=0 \Longrightarrow x^2=-1 \Longrightarrow x=-1 \\ x-y+3=0 \Longrightarrow -1-y+3=0 \Longrightarrow y=2 \end{cases}$$

پس نقطه $A(-1 \text{ و } 2)$ نقطه ثابت استولی جواب $x=0$ درمعادله دوم صدق نمیکند.

۱۳۳- تابع $y=\dfrac{a^2x^2+ax-a^2+2}{x+a-1}$ مفروض است ثابت کنید کلیه منحنی‌هائیکه بازاء مقادیر مختلف a بدست میآیند ازیك نقطه ثابت میگذرند ومختصات آن نقطه را بدست آورید.

حل:

$$y=\frac{a^2x^2+ax-a^2+2}{x+a-1}$$
$$a^2x^2+ax-a^2+2=xy+ay-y$$
$$a^2(x^2-1)+a(x-y)+2-xy+y=0$$
$$\begin{cases} x^2-1=0 \Longrightarrow x=\pm 1 \\ x-y=0 \Longrightarrow x=y=\pm 1 \\ 2-xy+y=0 \end{cases} \Longrightarrow A\left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right. \text{ و } B\left|\begin{matrix}-1\\-1\end{matrix}\right.$$

چون مختصات نقطه A درمعادله $2-xy+y=0$ صدق نمیکند ولی مختصات نقطه B دراین معادله صدق میکند پس $B(-1 \text{ و } -1)$ نقطه ثابت است.

۱۳۴- تابع $y=(a^2-1)x^3+(a+1)x^2+x+a^2-a+3$ مفروض است ثابت کنید کلیه منحنی‌هائی که بازاء مقادیر مختلف a بدست می‌آیند ازیك نقطه ثابت میگذرد و مختصات آنرا بدست آورید.

حل:

$$y=(a^2-1)x^3+(a+1)x^2+x+a^2-a+3$$
$$a^2x^3-x^3+ax^2+x^2+x+a^2-a+3-y=0$$
$$a^2(x^3+1)+a(x^2-1)-x^3+x^2+x+3-y=0$$
$$\begin{cases} x^3+1=0 \Longrightarrow x^3=-1 \Longrightarrow x=-1 \\ x^2-1=0 \Longrightarrow x^2=1 \Longrightarrow x=\pm 1 \\ -x^3+x^2+x+3-y=0 \end{cases}$$

چون فقط $x=-1$ جواب مشترك دومعادله اول می‌باشد پس درمعادله سوم بجای x عدد (-1) را قرار می‌دهیم و y را حساب می‌کنیم.

$$-x^3+x^2+x+3-y=0 \Longrightarrow 1+1-1+3-y=0$$
$$y=4 \Longrightarrow A(-1 \text{ و } 4)$$

ثابت کنید هر یك از منحنی‌های نمایش توابع زیر بازاء کلیه مقادیر پارامترها از یك یا از دو نقطه ثابت میگذرند و مختصات نقطه یا نقاط ثابت را بدست آورید.

۱۳۵- جواب: $A\left|\begin{matrix}-۲\\ ۱\end{matrix}\right.$ $\quad y=\frac{(a+b)x+۳a-۲}{x+a-۲b}$

۱۳۶- $y=(m^۲-۳m+۱)x^۲+(m^۲+m-۲)x+۴m-۱$

جواب: $A(-۱و۲)$

۱۳۷- $y=(a+۲b-۱)x^۲+(۲b+۲a+۳)x+a-۲$

جواب: $A(-۱و-۶)$

۱۳۸- جواب: $A\left|\begin{matrix}۳\\ ۲\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}۱\\ ۱\end{matrix}\right.$ $\quad y=\frac{(a+۲)x+a-۲}{x+۲a-۱}$

قاعده ۵۲	معادله کلیه خطوط بصورت $y=mx+n$ میباشد که m ضریب زاویه و n عرض ازمبدأ خط میباشد.

۱۳۹- صورت کلی معادلات خطوط موازی با خط $y=۳x+۴$ را بنویسید.

حل: خطوط $m=$ خط $m=۳$

$y=mx+n \Longrightarrow y=۳x+n$

۱۴۰- صورت کلی معادلات خطوط عمود برخط $y=۴x+۱$ را بنویسید.

حل: خطوط $m=-۱$ کلیه خطوط $\times$ خط $m=۴$

$۴\times m=-۱ \Longrightarrow$ کلیه خطوط $m=-۱\div ۴$

$y=mx+n \Longrightarrow y=-\frac{۱}{۴}x+n$

۱۴۱- صورت کلی خطوط موازی نیمساز زوایای xoy و $x'oy$ را بنویسید.

حل: $m=۱$ نیمساز ناحیه اول $=m$ خطوط

$y=mx+n \Longrightarrow y=x+n$

$m=-۱$ نیمساز ناحیه دوم $=m$ خطوط

$y=mx+n \Longrightarrow y=-x+n$

قاعده ۵۳	اگر در مسأله معادله چند خط را بدهند و بخواهیم ثابت کنیم که این چند خط متقاربند راه حل اینستکه معادله دو خط را با هم حل کرده و مختصات محل تلاقی آنها را بدست میآوریم اگر این مختصات درمعادلات بقیه خطوط صدق کند تمام خطوط ازآن نقطه میگذرند یعنی متقاربند.

۱۴۲ـ تحقیق کنید که خطوط $2x+2y=7$ و $5x-3y+1=0$ و $x+y=3$ متقاربند.

حل:

$$\begin{cases}5x-3y+1=0 & \times 2\\ 3x+2y=7 & \times 3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}10x-6y+2=0\\ 9x+6y=21\end{cases}$$

از جمع دو رابطه $\Rightarrow 19x=19 \Rightarrow x=1$

$3x+2y=7 \Rightarrow 3\times 1+2y=7 \Rightarrow 2y=4 \Rightarrow y=2$

$A(1,2)$ و $x+y=3 \Rightarrow 1+2=3 \Rightarrow 3=3$

چون مختصات نقطهٔ A در معادله خط سوم صدق کرده است پس سه خط از نقطه A میگذرند یعنی متقاربند.

قاعده ۵۴

محاسبه مساحت مثلث: برای محاسبه مساحت مثلث طول یك ضلع را حساب کرده وفاصله رأس مقابل آنرا تاخودش بدست آورده وسپس ازفرمول (نصف ارتفاع × قاعده = مساحت مثلث) استفاده میکنیم.

۱۴۳ـ نقاط $A(3,5)$ و $B(-5,3)$ و $C(-1,-3)$ سه رأس یك مثلث میباشند مساحت مثلث ABC را بدست آورید.

حل: ابتداء طول ضلع BC ومعادله آنرا بدست میآوریم وسپس ارتفاع AH (فاصله نقطه A تا خط BC) را بدست میآوریم.

$$BC=\sqrt{(-5+1)^2+(3+3)^2}=\sqrt{16+36}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$$

$$BC\equiv\frac{y-3}{x+5}=\frac{3+3}{-5+1}\Rightarrow\frac{y-3}{x+5}=\frac{-3}{2}$$

$$BC\equiv 2y-6=-3x-15\Rightarrow BC\equiv 2y+3x+9=0$$

$a=3$ و $b=2$ و $c=9$ و $A(3=\alpha$ و $5=\beta)$

$$AH=\left|\frac{a\alpha+b\beta+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|=\left|\frac{3\times 3+2\times 5+9}{\sqrt{9+4}}\right|=\frac{28}{\sqrt{13}}$$

$$S=\frac{1}{2}\times BC\times AH=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{13}\times\frac{28}{\sqrt{13}}=28$$ واحد مربع

۱۴۴ـ معادلات اضلاع مثلثی بترتیب زیر است.

$AB\equiv 2x+7y=5$ و $BC\equiv 3x-4y=2$ و $AC\equiv x-y=4$

مساحت مثلث ABC را حساب کنید.

حل: طول یکی از اضلاع مثلا BC را حساب کرده و بعد ارتفاع AH را حساب می‌نمائیم.

$$\begin{cases} AB \equiv ۲x+y=۵ \\ AC \equiv x-y=۴ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{دوراطه}]{\text{از جمع}} \begin{cases} ۳x=۹ \Rightarrow x=۳ \\ ۳-y=۴ \Rightarrow y=-۱ \end{cases} \qquad A\left|\begin{matrix} ۳ \\ -۱ \end{matrix}\right.$$

$$۴\begin{cases} AB \equiv ۲x+y=۵ \\ BC \equiv ۳x-۴y=۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۸x+۴y=۲۰ \\ ۳x-۴y=۲ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{ازجمع دوراطه}} ۱۱x=۲۲ \Rightarrow x=۲ \text{ و } ۲x+y=۵ \Rightarrow ۴+y=۵$$

$$y=۱ \Rightarrow B(۲و۱)$$

$$-۴\begin{cases} AC \equiv x-y=۴ \\ BC \equiv ۳x-۴y=۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۴x+۴y=-۱۶ \\ ۳x-۴y=۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۱۴ \\ y=۱۰ \end{cases} \quad C\left|\begin{matrix} ۱۴ \\ ۱۰ \end{matrix}\right.$$

$$BC=\sqrt{(۱۴-۲)^۲+(۱۰-۱)^۲}=\sqrt{۲۲۵}=۱۵$$

$$A(۳و-۱) \text{ و } BC \equiv ۳x-۴y-۲=۰$$

$$AH=\left|\frac{۳\times۳-۴\times-۱-۲}{\sqrt{۹+۱۶}}\right|=\frac{۱۱}{۵}=۲/۲$$

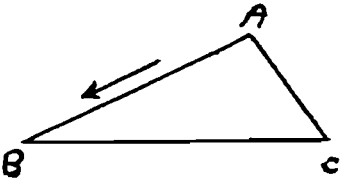
$$S=\frac{۱}{۲}BC\times AH=\frac{۱}{۲}\times۱۵\times۲/۲=۱۶/۵$$

قاعده ۵۵

فرمول محاسبهٔ مساحت مثلث: هرگاه مختصات سه رأس مثلث ABC در دست باشد مساحت مثلث از فرمول زیر بدست می‌آید.

$$S=\left|\frac{۱}{۲}[x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)]\right|$$

(برای اینکه اشتباه نشود جهت اختیار میکنیم)



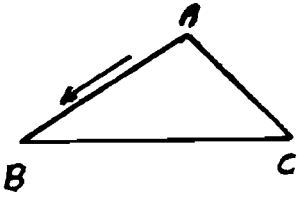
۱۴۵- نقاط $A\left|\begin{matrix} ۱ \\ -۲ \end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix} -۱ \\ ۳ \end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix} ۳ \\ ۵ \end{matrix}\right.$ سه رأس یك مثلث‌اند مساحت مثلث ABC را حساب کنید.

حل:

$$S=\left|\frac{۱}{۲}[x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)]\right|$$

$$S = \left|\frac{۱}{۲}[۱(۳-۵)-۱(۵+۲)+۳(-۲-۳)]\right|$$

$$S = \left|\frac{۱}{۲}[-۲-۷-۱۵]\right| = ۱۲ \Longrightarrow \boxed{S_{ABC}=۱۲}$$



۱۴۶- سه رأس مثلثی عبارتند از $A\left|\begin{matrix}-۱\\۵\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}۳\\۱۰\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}-۲\\-۲\end{matrix}\right.$ مساحت مثلث را حساب کنید .

حل:

$$S = \left|\frac{۱}{۲}[x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)]\right|$$

$$S = \left|\frac{۱}{۲}[-۱(۱۰+۲)+۳(-۲-۵)-۲(۵-۱۰)]\right|$$

$$S = \left|\frac{۱}{۲}[-۱۲-۲۱+۱۰]\right| = ۱۱/۵ \Longrightarrow \boxed{S_{ABC}=۱۱/۵}$$

۱۴۷- نقاط $A(۳و۵)$ و $B(-۵و۳)$ دو رأس یك مثلثند که رأس سوم آن روی خط $x-y=۲$ بوده ، و مساحت آن ۲۸ واحد مربع میباشد مختصات رأس سوم آنرا بدست آورید .

حل: اگر طول رأس سوم یعنی طول نقطه C را α فرض کنیم و از معادله $x-y=۲$ استفاده کنیم نتیجه میشود $(\alpha-y=۲ \Longrightarrow \alpha-۲=y)$ پس $C(\alpha و \alpha-۲)$ میباشد .

$$S = \frac{۱}{۲}\left|[x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)]\right|$$

$$۲۸ = \frac{۱}{۲}\left|[۳(۳-\alpha+۲)-۵(\alpha-۲-۵)+\alpha(۵-۳)]\right|$$

$$۵۶ = |۹-۳\alpha+۶-۵\alpha+۳۵+۲\alpha| \Longrightarrow ۵۶ = |۵۰-۶\alpha|$$

$$\begin{cases} ۵۶ = ۵۰-۶\alpha \Longrightarrow \alpha = -۱ \Longrightarrow C(-۱و-۱-۲) \Longrightarrow C(-۱و-۳) \\ ۵۶ = -(۵۰-۶\alpha) \Longrightarrow \alpha = \frac{۵۳}{۳} \Longrightarrow C\left(\frac{۵۳}{۳} و \frac{۴۷}{۳}\right) \end{cases}$$

قاعده ۵۶

برای پیدا کردن معادله وتر مشترك دو منحنی معادله دو منحنی را با هم حل می‌نمائیم و مختصات نقاط A وB محل تلاقی آنها را بدست میآوریم و سپس معادله خط AB را می‌نویسیم.

۱۴۸- معادله وتر مشترك دو منحنی $y=2x(x+2)$ و $y=x^2+3x+2$ را بنویسید .

حل:

$$\begin{cases} y=x^2+3x+2 \\ y=2x^2+4x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x^2+4x=x^2+3x+2 \\ x^2+x-2=0 \Longrightarrow x=1 \text{ و } -2 \end{cases}$$

$$x=1 \text{ و } y=x^2+3x+2 \Longrightarrow y=1+3+2=6 \Longrightarrow A(1,6)$$

$$x=-2 \Longrightarrow y=4-6+2=0 \Longrightarrow B(-2,0)$$

$$AB \equiv \frac{y-y_B}{x-x_B}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B} \Longrightarrow AB \equiv \frac{y-0}{x+2}=\frac{6-0}{1+2}=2$$

(معادله وترمشترك) معادلهٔ خط AB $\quad y=2x+4$

۱۴۹ ـ سه نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}2\\5\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}5\\0\end{matrix}\right.$ رئوس مثلث ABC مفروضند .

معادله ارتفاع AH را بدست آورید . جواب: $AH \equiv 5y-3x=13$

مرکز تقارن و محور تقارن

قاعده ۵۷	شرط اینکه مبدأ مختصات مرکز تقارن یك منحنی باشد اینستکه اگر در معادله آن بجای x ، $-x$ و بجای y ، $-y$ قرار دهیم و خلاصه نمائیم در معادله منحنی تغییری حاصل نشود
قاعده ۵۸	شرط اینکه محور طولها محور تقارن یك منحنی باشد اینستکه اگر در معادله منحنی بجای y ، $-y$ و بجای x ، $-x$ را قرار دهیم معادله منحنی تغییر نکند.
قاعده ۵۹	شرط اینکه محور عرضها محور تقارن منحنی باشد اینست که اگر در معادله منحنی بجای x ، $-x$ و بجای y ، $-y$ را قرار دهیم معادله منحنی تغییر نکند.

۱۵۰ — ثابت کنید مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی C بمعادله :
$x^2+y^2-3xy=5$ می‌باشد.

حل: $(-x)^2+(-y)^2-3(-x)(-y)=5 \rightarrow x^2+y^2-3xy=5$
چون با تبدیل x به $-x$ و y به $-y$ در معادله منحنی تغییری رخ نداد پس مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی است .

۱۵۱ — ك ۱۷ ص ۱۷ـ ثابت کنید اگر معادله یك منحنی نسبت به x و y از درجه دوم باشد شرط لازم و کافی برای آنکه مبدأ مختصات مرکز تقارن آن باشد آنست که معادله شامل جمله درجه اول نباشد.

حل: میدانیم اگر معادله یك منحنی بصورت $ax^2+by^2+cxy=d$ باشد اگر در معادله آن بجای x ، $-x$ و بجای y ، $-y$ قرار دهیم معادله منحنی تغییر نمیکند پس مبدأ مختصات مرکز تقارن آن است .

۱۵۲ — ثابت کنید محور طولها محور تقارن منحنی $y^4+y^2-2x=3$ میباشد.

حل: $y\to -y\to (-y)^4+(-y)^2-2(x)=3\to y^4+y^2-2x=3$

چون با تبدیل y به $-y$ معادله منحنی تغییر نکرد پس محور طولها محور تقارن است .

۱۵۳ — ثابت کنید محور عرضها محور تقارن منحنی $y=x^2+3$ میباشد .

حل: $x\to -x\to y=(-x)^2+3\to y=x^2+3$

چون با تبدیل x به $-x$ معادله منحنی تغییر نکرد پس محور عرضها محور تقارن است.

ثابت کنید مبدأ مختصات مرکز تقارن هر یك از توابع زیر میباشد

۱۵۴ — $2x^3-3yx^2+2y-3x=0$

۱۵۵ — $y=-x^2+3x$

۱۵۶ — $x^2+xy^2-yx^2+2y^2-3x-2y=0$

۱۵۷ — $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+2x}$

۱۵۸ — $y=\dfrac{x^2}{x^2+3}$

ثابت کنید محور عرضها محور تقارن هر یك از توابع زیر میباشد

۱۵۹ — $y=\dfrac{x^2-3}{x^2+1}$

۱۶۰ — $y=(x^4+5)\div(x^2-1)$

۱۶۱ — $x^2+4y^2-8y+5=0$

۱۶۲ — $y=x^4-6x^2+5$

ثابت کنید محور طولها محور تقارن هر یك از توابع زیر میباشد

۱۶۳ — $y^2+x^2-3x-7=0$

۱۶۴ — $y^4-y^2x^2+x^4-3x^2+5=0$

۱۶۵ — a و b را چنان تعیین کنید که مبدأ مختصات مرکز تقارن تابع زیر باشد.

$x^2+y^2+(2a-b-5)x+(a+b-1)y=a+4$

جواب : $a=2$ و $b=-1$

قاعده ۶۰

طریقه‌اول

برای اینکه ثابت‌کنیم نقطه $A(\alpha و \beta)$ مرکز تقارن یك منحنی است راه‌حل اینست که طبق قاعده(۲۱) صفحه (۱۸) معادله جدید منحنی‌را نسبت بمحورهائیکه نقطه A مبدأ آنست ومحور های‌آن‌موازی محورهای مختصات است بدست‌آورد. یعنی‌بجای x ، $X+\alpha$ وبجای y ، $Y+\beta$ قرارمیدهیم وخلاصه می‌نمائیم اگر درمعادله‌جدید بجای X،X − وبجای Y،Y − را قراردهیم و معادله جدید منحنی تغییرنکند مبدأ جدید یعنی نقطه Aمرکزتقارن‌آنست .

قاعده ۶۱

طریقه‌دوم

شرط اینکه نقطه $A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ مرکز تقارن منحنی نمایش تابع : $y=f(x)$ ویا $f(x و y)=0$ باشد اینست‌که مختصات قرینه نقطه $M\left|\begin{matrix}x\\ y\end{matrix}\right.$ از منحنی نسبت به نقطه A یعنی مختصات نقطه $M'\left|\begin{matrix}2\alpha-x\\ 2\beta-y\end{matrix}\right.$ نیز درمعادله منحنی صدق‌کند یعنی‌اگردرمعادله یك‌منحنی بجای x،x $2\alpha-x$ وبجای y،y $2\beta-y$ راقرار دهیم ومعادله‌منحنی تغییرنکند نقطه$A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ مرکزتقارن منحنی‌است.

۱۶۶ — ك۱۲ـ تحقیق‌کنیدکه‌نقطه $o'(1 و -2)$ مرکز تقارن‌منحنی $xy-2y+x+7=0$ میباشد.

حل: طریقه اول ـ

$$o'(\alpha=2 و \beta=-1)\rightarrow(X+2)(Y-1)-2(Y-1)+(X+2)+7=0$$

$$XY-X+2Y-2-2Y+2+X+2+7=0\rightarrow XY+9=0$$

چون‌باتغییر X به− X و Y به− Y معادله جدید تغییر نمیکند مبدأ جدید یعنی نقطه o' مرکزتقارن‌منحنی‌است.

حل: طریقه دوم ـ

$$(2\times2-x)(2\times-1-y)-2(2\times-1-y)+(2\times2-x)+7=0$$

$$(4-x)(-2-y)-2(-2-y)+(4-x)+7=0$$

$$-8-4y+2x+xy+4+2y+4-x+7=0$$

$$xy-2y+x+7=0$$

چون درمعادله‌منحنی تغییری حاصل‌نشده پس $o'(۱ - و ۲)$ مرکز تقارن‌است.

تذکر: معادله هر مقطع‌مخروطی بصورت‌زیر میباشد.

$$ax^۲+by^۲+cxy+dy+ex+f=۰$$

قاعده ۶۲ طریقه‌سوم

برای پیدا کردن مرکز تقارن‌منحنی نمایش‌مقاطع‌مخروطی علاوه بر دوراه فوق راه‌حل‌دیگری‌بصورت‌زیراست.

درمعادله منحنی یکدفعه y را ثابت‌نگهداشته نسبت به x مشتق میگیریم و یکدفعه هم x را ثابت نگهداشته نسبت به y مشتق میگیریم دستگاه‌دومعادله‌دومجهولی بدست می‌آید آن‌را حل میکنیم ومختصات مرکز تقارن‌را بدست‌می‌آوریم.

$$\begin{cases} ۲ax+cy+e=۰ \\ ۲by+cx+d=۰ \end{cases}$$

۱۶۷ ــ مختصات مرکز تقارن‌منحنی $x^۲+۲y^۲-۸y+۴x=۳$ را بدست‌آورید.

حل: باطریقه ـوم

$$\begin{cases} ۲x+۴=۰ \to x=-۲ \\ ۴y-۸=۰ \to y=۲ \end{cases} \to o' \left| \begin{matrix} -۲ \\ ۲ \end{matrix} \right.$$

حل: باطریقه‌اول ـ فرض‌میکنیم نقطه $o'(\alpha و \beta)$ مرکز تقارن‌باشد

$$(X+\alpha)^۲+۲(Y+\beta)^۲-۸(Y+\beta)+۴(X+\alpha)=۳$$

$$X^۲+۲Y^۲+۲X(\alpha+۲)+۴Y(\beta-۲)+\alpha^۲+۲\beta^۲-۸\beta+۴\alpha-۳=۰$$

$$\left| \begin{matrix} \alpha+۲=۰ \to \alpha=-۲ \\ \beta-۲=۰ \to \beta=۲ \end{matrix} \right. \qquad o' \left| \begin{matrix} -۲ \\ ۲ \end{matrix} \right.$$

۱۶۸ ــ مختصات مرکز تقارن منحنی $۳x^۲+y^۲-۳xy-۲y-x=۵$ را بدست‌آورید :

$$\begin{cases} ۶x-۳y-۱=۰ \\ ۲y-۳x-۲=۰ \end{cases} \quad ۲ \qquad \begin{cases} ۶x-۳y=۱ \\ -۶x+۴y=۴ \end{cases} \xrightarrow[\text{دورابطه}]{\text{ازجمع}} \boxed{y=۵}$$

$$۲y-۳x-۲=۰ \to ۱۰-۳x-۲=۰ \to x=۸\div۳ \Longrightarrow O'(۸\div۳ \text{ و } ۵)$$

ثابت کنید که هریك از نقاط زیر مرکز تقارن‌منحنی‌نمایش توابع‌روبروی خود میباشند.

۱۶۹- $A \left| \begin{matrix} ۰ \\ -۱ \end{matrix} \right.$ $\qquad y=\dfrac{x^۲-x+۴}{x}$

۱۶۹- $B(-1,3)$ $\quad 4x^2+y^2+8x-6y=3$

۱۷۰- $o'(-1,-2/5)$ $\quad 2x^2+y^2-2xy+3y-x=5$

۱۷۱- $C(1,-3)$ $\quad x^2+xy+x-y=0$

۱۷۲- $D(2,0)$ $\quad xy-2y+7=0$

۱۷۳- $E(\frac{-3}{2},\frac{-7}{2})$ $\quad y=\frac{x^2-4x+3}{2x+3}$

۱۷۲- ۲۰ ـ منحنی نمایش تابع $y=\frac{x^2-4x}{x+1}$ دارای مرکز تقارن است مختصات آنرا پیدا کنید.

حل: فرض میکنیم نقطه $o'(\alpha,\beta)$ مرکز تقارن است و α و β را حساب می‌کنیم

بطریقه اول

$$Y+\beta=\frac{(X+\alpha)^2-4(X+\alpha)}{X+\alpha+1}$$

$$YX+\alpha Y+Y+\beta X+\alpha\beta+\beta-X^2-\alpha^2-2\alpha X+4X+4\alpha=0$$

$$YX-X^2+Y(\alpha+1)+X(\beta-2\alpha+4)+\alpha\beta+\beta-\alpha^2+4\alpha=0$$

برای اینکه با تبدیل X به X- و Y به Y- معادله تغییر نکند ضریب جملات توان فرد را مساوی صفر قرار میدهیم.

$$\begin{cases}\alpha+1=0\to\alpha=-1\\ \beta-2\alpha+4=0\to\beta-2(-1)+4=0\to\beta=-6\end{cases}\qquad o'\left|\begin{matrix}-1\\-6\end{matrix}\right.$$

۱۷۳- تابع $y=\frac{x^2+(a+b-1)x+2}{x+a}$ مفروض است

a و b را چنان تعیین کنید که نقطه $o'(-3,2)$ مرکز تقارن منحنی باشد.

$$Y-3=\frac{(X+2)^2+(a+b-1)(X+2)+2}{X+2+a}$$

$$XY+2Y+aY-3X-6-3a-X^2-4-4X-(a+b-1)X$$
$$-2(a+b-1)-2=0$$

$$XY-X^2+Y(a+2)-X(a+b+6)-5a-2b-10=0$$

$$\left|\begin{matrix}a+2=0\to a=-2\\ a+b+6=0\to-2+b+6=0\to b=-4\end{matrix}\right.\qquad\left|\begin{matrix}a=-2\\ b=-4\end{matrix}\right.$$

قاعده ۶۳ طریقه اول	شرط اینکه خط $x=\alpha$ محور تقارن منحنی باشد اینست که معادله منحنی را نسبت به دستگاهی که نقطه $o'(\alpha و ۰)$ مبدأ آنست ومحورهای آن موازی محورهای قدیم است نوشته اگر درمعادله جدید با تبدیل X به $-X$ معادله منحنی تغییر نکند محور عرضهای جدید یعنی خط $x=\alpha$ محور تقارن منحنی است .
قاعده ۶۴ طریقه دوم	شرط اینکه خط $x=\alpha$ محور تقارن منحنی باشد اینست که مختصات قرینه نقطه $M(x و y)$ ازمنحنی نسبت به خط $x=\alpha$ یعنی مختصات نقطه $M'(۲\alpha-x و y)$ درمعادله منحنی صدق کند یعنی اگر در معادله منحنی بجای x، $۲\alpha-x$ و بجای y، y را قرار دهیم ومعادله منحنی تغییر نکند خط $x=\alpha$ محور تقارن منحنی است .

۱۷۴ – ک ۱۰ – ص ۱۷ – تحقیق کنید که خط $x=۲$ محور تقارن منحنی : $y=x^۲-۴x+۳$ میباشد .

حل: طریقه اول –

$$o'(\alpha=۲ \text{ و } \beta=۰)\rightarrow Y+۰=(X+۲)^۲-۴(X+۲)+۳$$

$$Y=X^۲-۱ \text{ و } X\rightarrow -X\rightarrow Y=(-X)^۲-۱=X^۲-۱$$

پس محورعرضهای جدید یعنی خط $x=۲$ محور تقارن است.

حل: طریقه دوم

$$y=(۲\times۲-x)^۲-۴(۲\times۲-x)+۳$$

$$y=۱۶+x^۲-۸x-۱۶+۴x+۳\rightarrow y=x^۲-۴x+۳$$

چون معادله منحنی تغییر نکرده پس خط $x=۲$ محورتقارن است.

۱۷۵ – ک ۱۸ – ص ۱۷ – تحقیق کنید که منحنی نمایش تابع $y=x^۲+۴x-۱$ دارای محورتقارنی است موازی محور yها ومعادله آن را بنویسید.

حل: فرض میکنیم خط $x=a$ محورتقارن منحنی و $o'(a و ۰)$ مبدأ جدید باشد.

$$Y+۰=(X+a)^۲+۴(X+a)-۱$$

$$Y=X^۲+۲X(a+۲)+a^۲+۴a-۱$$

برای اینکه باتبدیل X به $-X$ معادله منحنی تغییر نکند باید $a+۲=۰$ یعنی : $a=-۲$ باشد پس خط $x=-۲$ محورتقارن است.

۱۷۶ – تحقیق کنید خط $x=\frac{-b}{۲a}$ محورتقارن منحنی نمایش تابع $y=ax^۲+bx+c$ میباشد.

حل: اگر خط $x=\alpha$ محور تقارن فرض‌شود نتیجه‌میشود.

$$o'(\alpha,0)\rightarrow Y+0=a(X+\alpha)^2+b(X+\alpha)+c$$

$$Y=aX^2+X(2\alpha a+b)+a\alpha^2+b\alpha+c$$

برای اینکه محورعرضهای‌جدید محورتقارن‌باشد باید $2\alpha a+b=0$ باشد.

یعنی $\alpha=-b\div 2a$ میشود پس‌خط $x=-b\div 2a$ محورتقارن‌است .

۱۷۷ — a را چنان تعیین‌کنیدکه خط $x=3$ محور تقارن‌منحنی : $x^2-y^2+3y+ax=5$ باشد.

مبدأ جدید $o'(3,0)$ ← محورتقارن $x=3$

$$(X+3)^2-(Y+0)^2+3(Y+0)+a(X+3)=5$$

$$X^2+9+6X-Y^2+3Y+aX+3a=5$$

$$X^2-Y^2+X(a+6)+3Y+3a+4=0$$

برای‌اینکه محورعرضهای جدید محور تقارن باشد باید $a+6=0$ باشد. پس : $a=-6$ میشود .

قاعده ۶۵ طریقه‌اول	شرط‌اینکه خط $y=\beta$ محورتقارن منحنی باشد اینست‌که‌معادله منحنی‌را نسبت به‌دستگاهی‌که نقطه $o'(0,\beta)$ مبدأ آنستو محورهای‌آن موازی محورهای قدیم است نوشته اگر در معادله جدید یا تبدیل Y به $-Y$ معادله‌منحنی تغییر نکند محورطولهای جدید یعنی خط $y=\beta$ محورتقارن‌منحنی‌است.
قاعده ۶۶ طریقه‌دوم	شرط اینکه‌خط $y=\beta$ محورتقارن‌منحنی‌باشد اینست‌که‌مختصات قرینه نقطه $M(x,y)$ ازمنحنی نسبت به‌خط $y=\beta$ یعنی مختصات نقطه $M'(x,2\beta-y)$ درمعادله منحنی‌صدق‌کند یعنی اگر درمعادله منحنی بجای y ، $2\beta-y$ را قراردهیم و معادله منحنی تغییر نکند خط $y=\beta$ محور تقارن آنست.

۱۷۸ — ک۱۱ـ ص۱۷ـ تحقیق‌کنیدکه خط $y=-1$ محورتقارن منحنی : $x^2+y^2+2y-4=0$ میباشد

حل: طریقه اول ـ مبدأجدید $o'(0,-1)$ ومحورتقارن $y=-1$

$$(X+0)^2+(Y-1)^2+2(Y-1)-4=0\rightarrow X^2+Y^2-5=0$$

$$Y\rightarrow -Y\rightarrow X^2+(-Y)^2-5=0\rightarrow X^2+Y^2-5=0$$

چون‌باتبدیل Y به $-Y$ معادله‌منحنی تغییر نکرد پس محورطولهای جدید یعنی خط

$y=-1$ محور تقارن است.

حل: طریقه‌دوم $x^2+(2\times-1-y)^2+2(2\times-1-y)-4=0$

$x^2+4+y^2+4y-4-2y-4=0 \rightarrow x^2+y^2+2y-4=0$

چون معادله منحنی تغییر نکرده پس‌خط $y=-1$ محور تقارن است.

۱۷۹ — ك۱۹ص۱۷- تحقیق کنید که منحنی‌نمایش $y^2-4x-2y+1=0$ دارای محور تقارنی بموازات محور xها میباشد معادله‌آن‌را پیدا کنید .

حل: فرض‌میکنیم خط $y=\beta$ محورتقارن و $o'(0,\beta)$ مبدأ جدیداست.

$(Y+\beta)^2-4(X+0)-2(Y+\beta)+1=0$

$Y^2+2Y(\beta-1)-4X+\beta^2-2\beta+1=0$

برای‌اینکه محورطولهای‌جدید یعنی $y=\beta$ محورتقارن‌باشد $\beta=1 \rightarrow \beta-1=0$

پس $y=\beta-1$ محورتقارن است.

۱۸۰ — ك۲۱- ص۱۸- تحقیق کنید که‌منحنی $x^2-2y^2+4x+2y=1$ دارای محورهای تقارن بموازات محورهای مختصات است معادلات‌آنهارا بنویسید آیا دراینصورت منحنی فوق مرکزتقارن دارد.

راهنمائی: یکبار فرض‌میکنیم خط $x=\alpha$ محورتقارن‌است طبق‌قاعده (۶۳)عمل مینمائیم ویکبار فرض‌میکنیم‌خط $y=\beta$ محورتقارن منحنی است ودردوحالت αوβ راحساب میکنیم. جواب: $x=-2$ و $y=0/5$

تحقیق کنید درهریك از توابع زیر خطوط مقابل آنها محور تقارن‌آنها می‌باشد .

۱۸۱ —	$x=2$	$y=(x^2-4x+5)\div(x^2-4x+1)$
۱۸۲ —	$x=-2$	$x^2+y+4x+5=0$
۱۸۳ —	$y=2$	$2x+2y^2-8y+7=0$
۱۸۴ —	$y=0$	$2y^2+3x-4=0$
۱۸۵ —	$x=0$	$x=\pm\sqrt{2y-3}$
۱۸۶ —	$y=1$	$y=1\pm\sqrt{1-2x}$
۱۸۷ —	$x=-1$	$y=(x^2+2x)\div(x+1)^2$

درهریك‌از توابع‌زیر پارامترهاراطوری‌تعیین کنید که‌خطوط‌مقابل آنها محور تقارن‌آنهاباشد.

۱۸۸ — $x=2$ $y=(x^2+ax+2a)\div(x^2+ax+a^2)$

جواب: $a=-4$

در مسائل زیر معادله یک منحنی و معادله یک خط یا مختصات یک نقطه داده شده است پارامترها را طوری تعیین کنید که خط یا نقطه داده شده محور تقارن یا مرکز تقارن منحنی باشد.

۱۸۹- $x=۳$ $\quad y=mx^۲+۳x+۲$

جواب: $m=\frac{-۱}{۲}$

۱۹۰- $x=-۲$ $\quad y=m^۲x+۲x^۲+۱$

جواب: $m=\pm ۲\sqrt{۲}$

۱۹۱- $A(۲و-۱۰)$ $\quad y=۲mx^۳+mx^۲-۳x+b$

جواب: $m=۰$ و $b=-۳$

۱۹۲- $A\left|\begin{matrix}۲\\۲\end{matrix}\right.$ $\quad y=\frac{۲x+۳}{۳\alpha x+\beta}$

جواب: $\alpha=\frac{۱}{۳}$ و $\beta=-۲$

۱۹۳- $A(-۱و-۱)$ $\quad y=\frac{mx+۲}{(\alpha+m)x+\alpha+۱}$

جواب: $m=۱$ $\alpha=-۲$

۱۹۴- $x=۲$ $\quad y=۲ax^۲+(۵+a)x+۲$

جواب: $a=-(۵\div ۹)$

۱۹۵- $A(۱و۱)$ $\quad ۳\alpha y^۲+۴\alpha\beta xy+۲\beta x^۲=۰$

جواب: $\alpha=-۱$ و $\beta=-(۳\div ۲)$

۱۹۶- $A(۲و۲)$ $\quad y=\frac{۳\alpha x+۲}{۲\beta x-۱}$

جواب: $\alpha(۱\div ۳)$ و $\beta=(۱\div ۴)$

۱۹۷- $A(۰و۰)$ $\quad \alpha x^۲+\beta y^۲=۱$

جواب: بازاء جمیع مقادیر α و β نقطه A مرکز تقارن است

۱۹۸- $A(۱و-۲)$ $\quad y=ax^۳+۳x^۲+ax+b$

جواب: $a=-1 \quad b=6$

۱۹۹- $A(0,1)$ $y=3ax^3+(2a+1)x^2+1$

جواب: $a=-(1\div 2)$

۲۰۰- $A(1,2)$ $y=\dfrac{(\alpha+1)x+3}{\beta x-\alpha+3}$

جواب: $\alpha=7$ و $\beta=4$

۲۰۱- $x=0$ $y=\dfrac{x^2+ax+3}{a+x^2}$

جواب: $a=0$

۲۰۲- $x=1$ $y=\dfrac{2\alpha x^2+3\beta x+1}{3\alpha x^2+x}$

جواب: $\alpha=-(1\div 6)$ و $\beta-(2\div 9)$

۲۰۳- $A(2,3)$ $y=\dfrac{(\beta+\alpha)x+1}{\alpha x-1}$

جواب: $\alpha=(1\div 2)$ و $\beta=1$

۲۰۴- $A(3,3)$ $y=\dfrac{\alpha^2x+9}{\beta^2x-9}$

جواب: $\alpha=\pm 3$ و $\beta=\pm(3\div 2)$

۲۰۵- $A(2,1)$ $\alpha y^2+2\alpha\beta yx+\beta x^2=0$

جواب: $\alpha=-2$ و $\beta=-(1\div 2)$

۲۰۶- $x=-1$ $y=ax^2+x(3a+3)+3$

جواب: $a=-3$

۲۰۷- $x=0$ $y=\dfrac{\alpha x^2+(\alpha+1)x+1}{2x^2+(\beta-2)x}$

جواب: $\alpha=-1$ و $\beta=2$

۲۰۸- $A(1,1)$ $x^2+2axy-ay^2=0$

جواب: $a=-1$

۲۰۹- $x=3$ و $y=-2$ $x^2+ay^2+bx+8y=5$

جواب: $a=2$ و $b=6$

معادله مکان هندسی

طریقه پیدا کردن معادله مکان هندسی یك نقطه

برای پیدا کردن معادله مکان هندسی یك نقطه باید رابطه‌ای بین x و y بدست آورد که بستگی به پارامتر نداشته باشد برای این عمل مکان هندسی را به هفت قسمت می‌نمائیم.

قاعده ۶۷

الف: اگر مختصات نقطه بیکی از صورتهای زیر باشد (یعنی طول وعرض یك نقطه از یك جنس بوده یعنی اگر در یکی m یا $\sin\alpha$ یا $\cos\alpha$ یا $tg\alpha$ یا $cotg\alpha$ وجود داشته باشد و در دیگری نیز m یا $\sin\alpha$ یا $\cos\alpha$ یا $tg\alpha$ یا $cotg\alpha$ یا توان دوم آنها موجود باشد راه حل اینستکه پارامتر (یعنی m یا $\sin\alpha$ یا $\cos\alpha$ یا $tg\alpha$ یا $cotg\alpha$) را از یکی از دو رابطه برحسب x یا y بدست آورده و در رابطه دیگر قرارداده و سپس خلاصه می‌نمائیم. مانند مثالهای زیر:

۲۱۰- $A(x=m-2 \text{ و } y=2m+1)$

حل: $\rightarrow y=2x+5$

$$\begin{cases} x=m-2 \\ y=2m+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m=x+2 \\ y=2(x+2)+1 \end{cases}$$

۲۱۱- $B(x=m+3 \text{ و } y=m^2+3m+1$

حل:
$$\begin{cases} x = m+3 \\ y = m^2+3m+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = x-3 \\ y = (x-3)^2+3(x-3)+1 \end{cases}$$
$$y = x^2-3x+1$$

۲۱۲- $C\left(\frac{m-1}{2m+1}, \frac{m-2}{m+1}\right)$

حل:
$$\begin{cases} x = \frac{m-1}{2m+1} \\ y = \frac{m-2}{m+1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2mx+x = m-1 \\ 2mx-m = -x-1 \\ m = \frac{x+1}{1-2x} \end{cases}$$

$$y = \frac{m-2}{m+1} = \frac{\frac{x+1}{1-2x}-2}{\frac{x+1}{1-2x}+1} \rightarrow y = \frac{5x-1}{2-x}$$

۲۱۳- $M(tg\alpha+2 \text{ و } 3tg^2\alpha-1)$

حل:
$$\begin{cases} x = tg\alpha+2 \\ y = 3tg^2\alpha-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} tg\alpha = x-2 \\ y = 3(x-2)^2-1 \end{cases} \rightarrow y = 3x^2-12x+11$$

	جواب	صورت
۲۱۴-	$y = \frac{x-1}{2(2+x)}$	$C(2m-1 \text{ و } \frac{m-1}{2m+1})$
۲۱۵-	$y = \frac{2x-7}{2}$	$E(2\sin\alpha+1 \text{ و } 3\sin\alpha-2)$
۲۱۶-	$3y+x = 2$	$F(3\cos\alpha-1 \text{ و } 1-\cos\alpha)$
۲۱۷-	$y = \frac{1-x}{2-x}$	$N(3-\cot g\alpha \text{ و } \frac{\cot g\alpha-2}{\cot g\alpha-1})$
۲۱۸-	$y = 3x+5$	$P(\sin 3\alpha-1 \text{ و } 3\sin 3\alpha+2)$
۲۱۹-	$x = y^2+4y+5$	$J(tg^2\alpha+1 \text{ و } tg\alpha-2)$

قاعده ۶۸

اگر مختصات نقطه‌ای بصورت :

$$A(m^2+3m-1 \text{ و } 2m^2+m+3)$$

باشد یعنی درطول‌وعرض نقطه m^2 و m هردوموجودباشد برای پیداکردن معادله‌مکان نقطه ابتداء بین‌دوراطه m^2 را حذف می‌کنیم وسپس m را برحسب x و y بدست می‌آوریم ودریکی‌ازروابط طول یاعرض قرارمی‌دهیم.

۲۲۰- $A(x=m^2+2m+1 \text{ و } y=2m^2+3m-1)$

حل: $\begin{cases} -2x=-2m^2-4m-2 \\ y=2m^2+3m-1 \end{cases} \xrightarrow[\text{دوراطه}]{\text{ازجمع}} y-2x=-m-3$

$m=2x-y-3 \text{ و } x=m^2+2m+1$

$x=(2x-y-3)^2+2(2x-y-3)+1$

معادله‌مکان نقطه A $\quad 4x^2+y^2-4xy-8x+4y+4=0$

۲۲۱- $A(x=2m^2+3m-2 \text{ و } 3m^2+4m-1)$

جواب: $18x^2+8y^2-24xy+56x-38y+42=0$

تذکرمهم: لطفاً فرمولهای‌زیررا بخاطربسپارید.

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$	و	$tg\alpha\, cotg\alpha=1$
$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$	و	$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$	و	$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$	و	$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$
$a\sin\alpha\cos\alpha=\frac{a}{2}\sin 2\alpha$	و	$tg^m\alpha\, cotg^m\alpha=1$

قاعده ۶۹

ب : اگر مختصات نقطه بیکی ازصورتهای زیر باشد(یعنی درطول نقطه فقط $\sin\alpha$ یا $\sin^2\alpha$ یا $\sin 2\alpha$ وجودداشته باشدودرعرض نقطه $\cos\alpha$ یا $\cos^2\alpha$ یا $\cos 2\alpha$ وجودداشته باشد یا بعکس) راه حل اینست که :

ابتدا اعدادمعلوم را بطرفیکه x یا y هست برده وسپس $\sin^2\alpha$ یا $\sin^2 2\alpha$ را ازیك رابطه برحسب x یا y و $\cos^2\alpha$ یا $\cos^2 2\alpha$ را ازرابطه دیگر برحسب y یا x بدست آورده وسپس باهم جمع نموده وبجای $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ یا $\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha$ مساویش عدد یك را قرارمی‌دهیم .

۲۲۲ — $A(x=\sin\alpha \text{ و } y=\cos\alpha)$

حل:

$$\begin{cases} x=\sin\alpha \\ y=\cos\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2=\sin^2\alpha \\ y^2=\cos^2\alpha \end{cases} \quad \text{ازجمع دورابطه}$$

$$x^2+y^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha \rightarrow x^2+y^2=1$$

۲۲۳ — $B(x=\sin 2\alpha-1 \text{ و } y=\cos 2\alpha+2)$

حل:

$$\begin{cases} x=\sin 2\alpha-1 \\ y=\cos 2\alpha+2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+1=\sin 2\alpha \\ y-2=\cos 2\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)^2=\sin^2 2\alpha \\ (y-2)^2=\cos^2 2\alpha \end{cases} \xrightarrow[\text{دورابطه}]{\text{ازجمع}} (x+1)^2+(y-2)^2=1$$

۲۲۴ — $F(2\sin\alpha-1 \text{ و } 4\cos^2\alpha)$

حل:

$$\begin{cases} x=2\sin\alpha-1 \\ y=4\cos^2\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+1=2\sin\alpha \\ y=4\cos^2\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)^2=4\sin^2\alpha \\ y=4\cos^2\alpha \end{cases} \xrightarrow[\text{دورابطه}]{\text{ازجمع}} (x+1)^2+y=4$$

۲۲۵ — $N(\sin\alpha \text{ و } 1+\cos 2\alpha)$

حل:

$$\begin{cases} x=\sin\alpha \\ y=1+\cos 2\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2=\sin^2\alpha \\ y=1+2\cos^2\alpha-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 = 2\sin^2\alpha \\ y = 2\cos^2\alpha \end{cases} \xrightarrow[\text{دورابطه}]{\text{ازجمع}} 2x^2 + y = 2$$

۲۲۶- $P(1+\sin 2\alpha \text{ و } 2\cos^2\alpha)$

حل:

$$\begin{cases} x = 1+\sin 2\alpha \\ y = 2\cos^2\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-1 = \sin 2\alpha \\ y = 2\times\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2 = \sin^2 2\alpha \\ y-1 = \cos 2\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = \sin^2 2\alpha \\ (y-1)^2 = \cos^2 2\alpha \end{cases}$$

ازجمع‌دورابطه $\Longrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2 = 1$

۲۲۷- $Q(2\sin\alpha\cos\alpha \text{ و } 3+\cos 2\alpha)$

حل:

$$\begin{cases} x = 2\sin\alpha\cos\alpha \\ y = 3+\cos 2\alpha \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 2\sin 2\alpha \\ 2(y-3)^2 = \cos^2 2\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 4\sin^2 2\alpha \\ 4(y-3)^2 = 4\cos^2 2\alpha \end{cases} \xrightarrow[\text{دورابطه}]{\text{ازجمع}} x^2+4(y-3)^2 = 4$$

	صورت	جواب
۲۲۸-	$C(x=2\sin\alpha-1 \text{ و } y=3\cos\alpha-2)$	$\dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$
۲۲۹-	$D(2\sin\alpha+3 \text{ و } 5-2\cos\alpha)$	$(x-3)^2+(y-5)^2=4$
۲۳۰-	$E(2\cos\alpha-3 \text{ و } 3\sin\alpha)$	$9(x+3)^2+4y^2=36$
۲۳۱-	$M(3\cos^2 2\alpha+2 \text{ و } \sin 2\alpha-2)$	$3y^2+12y+x+7=0$
۲۳۲-	$I(1-2\sin\alpha\cos\alpha \text{ و } 2\cos^2\alpha-1)$	$(x-1)^2+y^2=1$
۲۳۳-	$H(2\sin^2\alpha+1 \text{ و } 4\sin\alpha\cos\alpha-1)$	$4(x-2)^2+(y+1)^2=4$

قاعده ۷۰

ج: اگر مختصات نقطه بصورت :
$M(a\sin\alpha+b\cos\alpha+c \text{ و } a\cos\alpha-b\sin\alpha+c)$ باشد.
راه‌حل اینستکه: اعدادمعلوم‌را بطرفی‌که x یا y هست برده وسپس دوطرف تساوی‌را بتوه دو رسانیده وبعد دورابطه‌را باهم جمع‌می‌نمائیم.

۲۳۴- $A(\sin\alpha+\cos\alpha \text{ و } \sin\alpha-\cos\alpha-2)$

$$\begin{cases} \sin\alpha+\cos\alpha=x \\ \sin\alpha-\cos\alpha-2=y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sin\alpha+\cos\alpha=x \\ \sin\alpha-\cos\alpha=y+2 \end{cases}$$

طرفین دو رابطه را مجذور می کنیم.

$$\begin{cases} (\sin\alpha+\cos\alpha)^2=x^2 \\ (\sin\alpha-\cos\alpha)^2=(y+2)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=x^2 \\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=(y+2)^2 \end{cases}$$

$$(y+2)^2+x^2=2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\rightarrow(y+2)^2+x^2=2$$

۲۳۵- $C(3\sin 2\alpha-4\cos^2\alpha+5 \text{ و } 3\cos 2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha+2)$

$$\begin{cases} 3\sin 2\alpha-4\times\frac{1+\cos 2\alpha}{2}+5=x \\ 3\cos 2\alpha+2\sin 2\alpha+2=y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3\sin 2\alpha-2\cos 2\alpha=x-3 \\ 3\cos 2\alpha+2\sin 2\alpha=y-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3\sin 2\alpha-2\cos 2\alpha)^2=(x-3)^2 \\ (3\cos 2\alpha+2\sin 2\alpha)^2=(y-2)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3)^2=9\sin^2 2\alpha+4\cos^2 2\alpha-12\sin 2\alpha\cos 2\alpha \\ (y-2)^2=9\cos^2 2\alpha+4\sin^2 2\alpha+12\sin 2\alpha\cos 2\alpha \end{cases}$$

از جمع دو رابطه نتیجه میشود:

$$(x-3)^2+(y-2)^2=13(\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha)\rightarrow(x-3)^2+(y-2)^2=13$$

۲۳۶- $D(\sin 3\alpha+5\cos 3\alpha+4 \text{ و } 5\sin 3\alpha-\cos 3\alpha+2)$

جواب: $(x-4)^2+(y-2)^2=26$

۲۳۷- $E(4\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha+3 \text{ و } 2\cos 2\alpha-\sin 2\alpha+1)$

جواب : $(x-4)^2+(y-1)^2=5$

۲۳۸- $F(3\sin 5\alpha-2\cos 5\alpha-2 \text{ و } 3\cos 5\alpha+2\sin 5\alpha+1)$

جواب: $(x+2)^2+(y-1)^2=13$

۲۳۹- $G(6\sin\alpha\cos\alpha+4\cos 2\alpha-3 \text{ و } 4\sin 2\alpha-3\cos 2\alpha+6)$

جواب: $(x+3)^2+(y-6)^2=25$

قاعده ۷۱-

د : اگر مختصات نقطه یکی از صورتهای زیر باشد (یعنی درطول نقطه $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ بصورت مجموع یا تفاضل بوده و درعرض نقطه $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ بصورت حاصلضرب باشند ویا بر عکس راه حل اینستکه ابتدا اعداد معلوم را بطرفیکه x یا y میباشد برده وسپس رابطه ای که در آن $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ بصورت جمع یا تفریق میباشند بقوه ۲ رسانیده و بعد ضریب $\sin\alpha\cos\alpha$ را در دو رابطه قرینه نموده وجمع جبری می نمائیم.

-۲۴۰ $M(\sin 3\alpha+\cos 3\alpha-8 \quad و \quad 3\sin 6\alpha+12)$

حل:

$$\begin{cases}\sin 3\alpha+\cos 3\alpha=(x+8)\\ 3\sin 6\alpha+12=y\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(\sin 3\alpha+\cos 3\alpha)^2=(x+8)^2\\ 6\sin 3\alpha\cos 3\alpha+12=y\end{cases}$$

$$-3\begin{cases}\sin^2 3\alpha+\cos^2 3\alpha+2\sin 3\alpha\cos 3\alpha=(x+8)^2\\ 6\sin 3\alpha\cos 3\alpha+12=y\end{cases}$$

$$\begin{cases}-3-6\sin 3\alpha\cos 3\alpha=-3(x+8)^2\\ 12+6\sin 3\alpha\cos 3\alpha=y\end{cases}$$

$$9=y-3(x+8)^2\rightarrow y=9+3(x+8)^2$$

-۲۴۱ $N(4\sin\alpha\cos\alpha+3 \quad و \quad \sin\alpha-\cos\alpha+4)$

حل:

$$\begin{cases}4\sin\alpha\cos\alpha+3=x\\ \sin\alpha-\cos\alpha=y-4\end{cases}\rightarrow\begin{cases}4\sin\alpha\cos\alpha+3=x\\ 2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=(y-4)^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}4\sin\alpha\cos\alpha+3=x\\ 2-4\sin\alpha\cos\alpha=2(y-4)^2\rightarrow 2(y-4)^2+x=5\end{cases}$$

معادله مکان هندسی نقاط زیر را بدست آورید.

-۲۴۲ $K(\sin 2\alpha-\cos 2\alpha+4 \quad و \quad 6+3\sin 4\alpha)$

جواب: $y=9-3(x-4)^2$

-۲۴۳ $L(3-2\sin\alpha\cos\alpha \quad و \quad \sin\alpha+\cos\alpha+1)$

جواب: $(y-1)^2+x=4$

-۲۴۴ $P(\sin\alpha+\cos\alpha+2 \quad و \quad 4-4\sin\alpha\cos\alpha)$

جواب: $y=5-2(x-2)^2$

۲۴۵- $S(\sin\alpha+\cos\alpha \quad و \quad \sin\alpha-\cos\alpha)$

جواب: $x^2+y^2=2$

۲۴۶- $(3\sin 2\alpha-\cos 2\alpha+1 \quad و \quad \sin 2\alpha+3\cos 2\alpha+1)$

جواب: $(x-1)^2+(x-1)^2=10$

۲۴۷- $(3\sin 3\alpha+3\cos 3\alpha+3 \quad و \quad 3\sin 3\alpha-2\cos 3\alpha+1)$

جواب: $(x-3)^2+(y-1)^2=13$

۲۴۸- $Q(\sin\alpha+\cos\alpha \quad و \quad \sin\alpha-\cos\alpha-2)$

جواب: $(y+2)^2+x^2=2$

۲۴۹- $E(2\sin\alpha\cos\alpha-3\cos 2\alpha+1 \quad و \quad 3\sin 2\alpha+2\cos^2\alpha-2)$

جواب: $(x-1)^2+(y+1)^2=10$

قاعده ۷۲

اگر مختصات نقطه بیکی از صورتهای زیر باشد یعنی در طول نقطه فقط $tg\alpha$ یا $tg2\alpha$ یا $tg^2\alpha$ و در عرض نقطه فقط $cotg\alpha$ یا $cotg2\alpha$ و یا $cotg^2\alpha$ وجود داشته باشد و برعکس. راه حل اینستکه $tg\alpha$ یا $tg2\alpha$ یا $tg^2\alpha$ را از یك رابطه و $cotg\alpha$ یا $cotg2\alpha$ یا $cotg^2\alpha$ را از رابطه دیگر بدست آورده و سپس در هم ضرب نموده و بجای $tg\alpha cotg\alpha$ یا $tg2\alpha\ cotg2\alpha$ یا $tg^2\alpha cotg^2\alpha$ مساویش عدد یك را قرار می‌دهیم.

۲۵۰- $A(tg\alpha \quad و \quad cotg\alpha)$

حل:
$$\begin{cases} tg\alpha=x \\ cotg\alpha=y \end{cases} \rightarrow tg\alpha cotg\alpha=xy \rightarrow xy=1 \rightarrow y=\frac{1}{x}$$

۲۵۱- $B(tg\alpha-2 \quad و \quad cotg\alpha-1)$

حل:
$$\begin{cases} tg\alpha=x+2 \\ cotg\alpha=y+1 \end{cases} \rightarrow tg\alpha cotg\alpha=(x+2)(y+1)$$

$$(y+1)(x+2)=1 \rightarrow y=\frac{1}{x+2}-1 \rightarrow y=\frac{-x-1}{x+2}$$

۲۵۲- $C(2cotg\alpha-1 \quad و \quad 3tg\alpha+2)$

حل:
$$\begin{cases} 2cotg\alpha=x+1 \\ 3tg\alpha=y-2 \end{cases} \xrightarrow[\text{در رابطه}]{\text{از ضرب}} 6cotg\alpha tg\alpha=(y-2)(x+1)$$

$$(y-2)(x+1)=6 \rightarrow y=\frac{6}{x+1}+2=\frac{2x+8}{x+1}$$

۲۵۳ $D(2tg\alpha+2 \quad و \quad cotg^2\alpha-1)$

حل:

$$\begin{cases} 2tg\alpha=x-2 \\ cotg^2\alpha=y+1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 4tg^2\alpha=(x-2)^2 \\ cotg^2\alpha=y+1 \end{cases} \xrightarrow[\text{دو را بطه}]{\text{از ضرب}}$$

$$4tg^2\alpha cotg^2\alpha=(x-2)^2(y+1)$$

$$(y+1)(x-2)^2=4 \rightarrow y=\frac{4}{(x-2)^2}-1=\frac{4-(x-2)^2}{(x-2)^2}=\frac{4x-x^2}{(x-2)^2}$$

	صورت		جواب
K	$\begin{cases} x=3tg^2\alpha-3 \\ y=cotg^2\alpha+2 \end{cases}$	۲۵۴-	$y=\frac{2x+9}{x+3}$
H	$\begin{cases} cotg^2\alpha+1=x \\ tg^2 3\alpha-2=y \end{cases}$	۲۵۵-	$y=\frac{1-2(x-1)^2}{(x-1)^2}$
L	$\begin{cases} x=4\,cotg^2\alpha-2 \\ y=tg^2 3\alpha-2 \end{cases}$	۲۵۶-	$y=\frac{8-8x-2x^2}{(x+2)^2}$
E	$\begin{cases} x=tg^2\alpha-1 \\ y=cotg\alpha+1 \end{cases}$	۲۵۷-	$(y-1)^2(x+1)=1$
F	$\begin{cases} x=tg^2\alpha-2 \\ y=cotg^2\alpha-3 \end{cases}$	۲۵۸-	$y=\frac{-3x-5}{x+2}$
G	$\begin{cases} x=2tg2\alpha-1 \\ y=3cotg2\alpha+4 \end{cases}$	۲۵۹-	$y=\frac{4x+10}{x+1}$

تذکر مهم : دو فرمول زیر را بخاطر بسپارید:

$$\frac{a}{cos^2\alpha}=a(1+tg^2\alpha) \quad و \quad \frac{a}{sin^2\alpha}=a(1+cotg^2\alpha)$$

قاعده ۷۳

ه ـ اگر مختصات نقطه بیکی ازصورتهای زیر باشدیعنی اگر درطول نقطه $\cos\alpha$ یا $\cos^2\alpha$ ودرعرض نقطه $tg\alpha$ یا $tg^2\alpha$ موجود باشدیااگر درطول نقطه $\sin\alpha$ یا $\sin^2\alpha$ ودر عرض نقطه $cotg\alpha$ یا $cotg^2\alpha$ موجودباشد. راه‌حل این‌است که ابتدا اگر بصورت کسری باشد کسر راتفکیک نموده‌وبعد اعدادرا بطرفیکه x یا y می‌باشد برده و $tg^2\alpha$ را ازیک‌رابطه و $\frac{1}{\cos^2\alpha}$ را از رابطه‌دیگر بدست‌آورده وبجای $\frac{1}{\cos^2\alpha}$ مساویش $1+tg^2\alpha$ قرارداده وازهم کم‌می‌نمائیم‌ویا $cotg^2\alpha$ راازیک‌رابطه و $\frac{1}{\sin^2\alpha}$ را ازرابطه‌دیگر بدست‌آورده و بجای $\frac{1}{\sin^2\alpha}$ مساویش $1+cotg^2\alpha$ قرارداده و سپس ازهم کم میکنیم.

۲۶۰ـ $A(x=tg\alpha \quad و \quad y=\frac{1}{\cos\alpha})$

حل:

$$\begin{cases} x=tg\alpha \\ y=\frac{1}{\cos\alpha} \end{cases} \rightarrow - \begin{cases} x^2=tg^2\alpha \\ y^2=\frac{1}{\cos^2\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^2=-tg^2\alpha \\ y^2=1+tg^2\alpha \end{cases} \xrightarrow[\text{دوراپله}]{\text{ازجمع}} y^2-x^2=1$$

۲۶۱ـ $B(x=cotg\alpha+1 \quad و \quad y=\frac{2}{\sin\alpha})$

حل:

$$\begin{cases} x=cotg\alpha+1 \\ y=\frac{2}{\sin\alpha} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-1=cotg\alpha \\ \frac{y}{2}=\frac{1}{\sin\alpha} \end{cases} - \rightarrow \begin{cases} (x-1)^2=cotg^2\alpha \\ \frac{y^2}{4}=\frac{1}{\sin^2\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(x-1)^2=-cotg^2\alpha \\ \frac{y^2}{4}=1+cotg^2\alpha \end{cases} \xrightarrow[\text{دوراپله}]{\text{ازجمع}} \frac{y^2}{4}-(x-1)^2=1$$

۲۶۲- $F(2tg\alpha-3 \text{ و } \frac{\cos\alpha-2}{\cos\alpha})$

حل:

$$\begin{cases} x=2tg\alpha-3 \\ y=\frac{\cos\alpha-2}{\cos\alpha} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+3=2tg\alpha \\ y=\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}-\frac{2}{\cos\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} tg\alpha=\frac{x+3}{2} \\ \frac{-2}{\cos\alpha}=y-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} tg\alpha=\frac{x+3}{2} \\ \frac{-1}{\cos\alpha}=\frac{y-1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} tg^2\alpha=\frac{(x+3)^2}{4} \\ \frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{(y-1)^2}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -tg^2\alpha=-\frac{(x+3)^2}{4} \\ 1+tg^2\alpha=\frac{(y-1)^2}{4} \end{cases} \xrightarrow[\text{دورابطه}]{\text{ازجمع}} \frac{(y-1)^2}{4}-\frac{(x+3)^2}{4}=1$$

	جواب	صورت
۲۶۳-	$y^2-9(x-2)^2=9$	$C(x=tg\alpha+2 \text{ و } y=\frac{3}{\cos\alpha})$
۲۶۴-	$(y+1)^2-(x+2)^2=1$	$D(tg\alpha-2 \text{ و } \frac{1}{\cos\alpha}-1)$
۲۶۵-	$9(y-1)^2-(x-1)^2=9$	$E(2cotg\alpha+1 \text{ و } \frac{\sin\alpha-1}{\sin\alpha})$
۲۶۶-	$\frac{(y-2)^2}{9}-\frac{(x+1)^2}{4}=1$	$M(2cotg\alpha-1 \text{ و } \frac{2\sin\alpha-3}{\sin\alpha})$
۲۶۷-	$x^2-4(y-1)^2=4$	$N(\frac{2}{\cos\alpha} \text{ و } 1+tg\alpha)$

۲۶۸- نقاط $A\begin{vmatrix}2\\2\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}\sin\alpha\\4\cos\alpha\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}2\sin\alpha+1\\1-\cos\alpha\end{vmatrix}$ سه‌راس یک‌مثلث‌می‌باشندمعادله مکان نقطه G محل‌تلاقی‌میانه‌های مثلث ABCرا بدست‌آورید.

حل:

$$G\begin{cases} x_G=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}=\dfrac{2+\sin\alpha+2\sin\alpha+1}{3}=\sin\alpha+1 \\ y_G=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}=\dfrac{2+3\cos\alpha+1-\cos\alpha}{3}=\cos\alpha+1 \end{cases}$$

جواب: $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

۲۶۹ — نقاط $A\begin{vmatrix}3\\1+tg^2\alpha\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}1+2\cot g\alpha\\2tg^2\alpha+2\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}\cot g\alpha+2\\3\end{vmatrix}$ سه رأس یک مثلث میباشند معادله مکان نقطه G محل تلاقی میانه‌های مثلث را بدست آورید.

$$G\begin{cases} x_G=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}=\dfrac{3+1+2\cot g\alpha+\cot g\alpha+2}{3}=\cot g\alpha+2 \\ y_G=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}=\dfrac{1+tg^2\alpha+2tg^2\alpha+2+3}{3}=tg^2\alpha+2 \end{cases}$$

جواب: $y=\dfrac{2x^2-8x+9}{(x-2)^2}$

۲۷۰ — نقاط $A\begin{vmatrix}3\\2\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}3-2\cos\alpha\\2\sin\alpha+1\end{vmatrix}$ ، $C\begin{vmatrix}1-\cos\alpha\\3\sin\alpha\end{vmatrix}$ سه رأس متوالی متوازی‌الاضلاع ABCD است معادله مکان رأس D را بدست آورید.

حل:

$$\begin{cases} x_D+x_B=x_A+x_C \\ y_D+y_B=y_A+y_C \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x_D+3-2\cos\alpha=3+1-\cos\alpha \\ y_D+2\sin\alpha+1-3\sin\alpha+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1+\cos\alpha \\ y=1+\sin\alpha \end{cases}$$

جواب: $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

۲۷۱ — خطوط $y=2mx+3m$ و $y=mx-2m+1$ مفروض‌اند معادله مکان نقطه K محل تلاقی دو خط را بدست آورید وقتی m تغییر کند.

$$\begin{cases} y=2mx+3m \\ y=mx-2m+1\rightarrow 2mx+3m=mx-2m+1 \end{cases}$$

$$mx = 1 - 5m \rightarrow x = \frac{1-5m}{m} \qquad K\left|\begin{matrix}\frac{1-5m}{m}\\ 2-7m\end{matrix}\right.$$

$$y = m \times \frac{1-5m}{m} - 2m + 1$$

جواب: $y = \frac{2x+3}{x+5}$

۲۷۲ـ خطوط $y = 2x\sin\alpha + 3\sin\alpha$ و $y = x\sin\alpha - 2\sin\alpha + 1$ مفروض‌اند معادله‌مکان نقطه K محل‌تلاقی دوخطرا وقتی α تغییر کند بدست‌آورید:

$$\begin{cases} y = 2x\sin\alpha + 3\sin\alpha \\ y = x\sin\alpha - 2\sin\alpha + 1 \end{cases} \rightarrow 2x\sin\alpha + 3\sin\alpha = x\sin\alpha - 2\sin\alpha + 1$$

$$x\sin\alpha = 1 - 5\sin\alpha \rightarrow x = \frac{1-5\sin\alpha}{\sin\alpha}$$

$$y = \sin\alpha \times \frac{1-5\sin\alpha}{\sin\alpha} - 2\sin\alpha + 1 \rightarrow y = 2 - 7\sin\alpha$$

$$\begin{cases} x = \frac{1-5\sin\alpha}{\sin\alpha} \\ y = 2 - 7\sin\alpha \end{cases} \rightarrow y = \frac{2x+3}{x+5}$$ جواب:

۲۷۳ـ نقاط $A\left|\begin{matrix}4\\3\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}\cos\alpha+1\\2\sin\alpha-1\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}2\cos\alpha+1\\\sin\alpha-2\end{matrix}\right.$ سه‌رأس یکمثلث میباشند معادله‌مکان‌نقطه G محل‌تلاقی میانه‌های‌مثلث‌را بدست‌آورید.

جواب: $y^2 + (x-2)^2 = 1$

۲۷۴ـ خطوط $y = 4mx + 3$ و $y = 2mx + 4m - 1$ مفروض‌اند معادله مکان‌نقطه K محل‌تلاقی دوخطرا وقتی‌که m تغییر کند بدست‌آورید.

جواب: $y = (5x+6) \div (2-x)$

۲۷۵ـ خطوط $y = 3x\,tg\alpha + 2\,tg\alpha$ و $y = x\,tg\alpha + 4$ مفروض‌اند معادله‌مکان نقطه K محل تلاقی دوخطرا وقتی‌که α تغییر کند بدست‌آورید.

جواب: $y = \frac{6x+4}{1+x}$

۲۷۶ـ نقاط $A\left|\begin{matrix}4\\5\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}2-3\sin\alpha\\1-\cos\alpha\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}1-\sin\alpha\\2+\cos\alpha\end{matrix}\right.$ سه‌رأس متوالی متوازی‌ـ

الاضلاع ABCD هستند معادله‌مکان‌رأس D‌را بدست آورید.

جواب: $(x-۳)^۲+(y-۶)^۲=۴$

۲۷۷ــ نقاط $A\begin{vmatrix} tg\alpha+۱ \\ ۲ \end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix} ۳tg\alpha-۲ \\ ۲cotg\alpha+۱ \end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix} ۴-tg\alpha \\ cotg\alpha+۳ \end{vmatrix}$ سه‌رأس یك‌مثلث می‌باشند معادله مکان نقطه G محل تلاقی میانه‌های مثلث‌را بدست‌آورید.

جواب: $y=\dfrac{۲x-۱}{x-۱}$

معادله مکان‌هندسی نقطه تلاقی هریك از دوخط زیر راکه‌دریکدستگاه نوشته‌شده است وقتیکه α تغییرمیکند بدست آورید.

	جواب	صورت
۲۷۸ــ	$x^۲+y^۲=۲۵$	$\begin{cases} x\sin\alpha+y\cos\alpha=۳ \\ x\cos\alpha-y\sin\alpha=۴ \end{cases}$
۲۷۹ــ	$y=\dfrac{۳x-۵}{۱۷x-۱۵}$	$\begin{cases} ۲xtg\alpha+۳y-۱=۰ \\ ۳x-۴ycotg\alpha=۵ \end{cases}$
۲۸۰ــ	$۴x^۲+۹y^۲=۲۶$	$\begin{cases} ۲x\cos۲\alpha-۳y\sin۲\alpha=۵ \\ ۳y\cos۲\alpha+۲x\sin۲\alpha=۱ \end{cases}$

مسائل مکان هندسی کتاب درسی

۲۸۱ــ ك : مطلوبست معادله مکان هندسی نقاطی‌که بفاصله R از نقطه C(a و b) قرار دارد .

حل: اگر نقطه‌مطلوب بصورت $M(x و y)$ باشدنتیجه‌میشود:

$$MC=R\rightarrow MC^۲=R^۲\rightarrow(x-a)^۲+(y-b)^۲=R^۲$$

۲۸۲ــ ك: مطلوبست مکان‌هندسی‌نقاط $M(x و y)$ که ازآنجا قطعه‌خط AB بزاویه قائمه دیده‌میشود $A(R و ۰)$ و $B(-R و ۰)$

حل: $m_{MA}\times m_{MB}=-۱\rightarrow\dfrac{y_M-y_A}{x_M-x_A}\times\dfrac{y_M-y_B}{x_M-x_B}=-۱$

$$\frac{y-۰}{x-R}\times\frac{y-۰}{x+R}=-۱\rightarrow\frac{y^۲}{x^۲-R^۲}=-۱\rightarrow y^۲+x^۲=R^۲$$

۲۸۳ــك: مطلوبست‌معادله‌مکان‌هندسی‌نقاطی‌که‌به‌یك‌فاصله ازدوخط :

$ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ باشد.

حل: اگر نقطه $M\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ نقطه مفروض باشد نتیجه‌میشود:

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

که معادلات نیمسازهای زوایای بین دوخط میباشند.

۲۸۴ – ک: می‌دانیم که قوت یك نقطهٔ M که بفاصلهٔ d از C ، مرکز دایره بشعاع R قراردارد، نسبت به آن دایره، برابر d^2-R^2 است. مطلوب است مکان‌هندسی نقطه $M(x,y)$ که نسبت به دو دایره (C) و (C') دارای یك قوت باشد. با فرض اینکه مرکز این دوایر $C(a,b)$ و $C'(a',b')$ وشعاع آن دوبترتیب R و R' باشد .

حل: میدانیم قوت نقطه M نسبت بدودایره بمرکز $C(\alpha,\beta)$ و $C'(\alpha',\beta')$ برابر است

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2 \quad \text{و} \quad (x-\alpha')^2+(y-\beta')^2-R'^2$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2=(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2-R'^2$$

$$2(\alpha'-\alpha)x+2(\beta'-\beta)y+\alpha^2+\beta^2-\alpha'^2-\beta'^2=0$$

معادله مکان‌هندسی هریك از نقاط زیررا بدست‌آورید.

۲۸۵ – ک ۲۲ $A\ (x=\frac{1-m}{1+m}$ و $y=2m)$

حل $m=\frac{y}{2}\rightarrow x=\frac{2-y}{2+y}\rightarrow 2x+xy=2-y$

$$y(x+1)=2(1-x)\rightarrow y=2(1-x)\div(x+1)$$

۲۸۶ – ک ۲۳ $P\ (x=\frac{2t}{1+t^2}$ و $y=\frac{1-t^2}{1+t^2})$

حل: $x^2=\frac{4t^2}{1+t^4+2t^2}$ و $y^2=\frac{1+t^4-2t^2}{1+t^4+2t^2}$

$$x^2+y^2=\frac{1+t^4+2t^2}{1+t^4+2t^2}\rightarrow \boxed{x^2+y^2=1}$$

۲۸۷ – ک ۲۴ $M\ (x=\frac{1+\cos t}{\cos t}$ و $y=tg\,t)$

حل: $x=\frac{1}{\cos t}+1\rightarrow x-1=\frac{1}{\cos t}\rightarrow(x-1)^2=\frac{1}{\cos^2 t}$

$(x-1)^2 = 1 + tg^2 t \to (x-1)^2 = 1 + y^2 \to x^2 - y^2 - 2x = 0$

۲۸۸ - ک ۲۵ - $D(x = cotg\alpha \quad و \quad y = \frac{1}{cos\alpha})$

حل: $y^2 = \frac{1}{cos^2\alpha} = 1 + tg^2\alpha = \frac{1 + cotg^2\alpha}{cotg^2\alpha}$

$y^2 = \frac{1 + x^2}{x^2} \to y = \frac{\pm\sqrt{1 + x^2}}{x}$

۲۸۹ - از نقطه $A(-3 \quad و \quad -2)$ به‌نقاط مختلف منحنی نمایش تابع $y = -x^2 + 2x + 3$ وصل می‌نمائیم معادله مکان هندسی وسط پاره خط‌های حاصل را بدست آورید.

حل: $M(\alpha و -\alpha^2 + 2\alpha + 3)$ روی‌منحنی و $A(-3 و -4)$

$K(x = \frac{-3 + \alpha}{2} \quad و \quad y = \frac{-4 - \alpha^2 + 2\alpha + 3}{2})$ وسط AM

$\alpha = 2x + 3 \quad و \quad y = \frac{-4 - (2x+3)^2 + 2(2x+3) + 3}{2}$

جواب: $y = -2x^2 - 8x - 2$

۲۹۰ - از نقطه $A(3 و -5)$ بنقاط مختلف محور طولها وصل می‌نمائیم معادله مکان هندسی وسط پاره خط‌های حاصل را بدست آورید.

حل: $K(\frac{\alpha + 3}{2} \quad و \quad \frac{-5}{2})$ وسط AB و $B(\alpha و 0)$ روی محور طولها و $A(3 و -5)$

پس خط $y = -2/5$ معادله مکان هندسی نقطه K است که موازی محور طولها می‌باشد

۲۹۱ - از نقطه B بطول ۳ روی نیمساز ناحیه اول بنقاط مختلف محور عرضها وصل مینمائیم معادله مکان هندسی وسط پاره خط‌های حاصل را بدست آورید.

جواب: $x = 1/5$ معادله مکان است

۲۹۲ - از نقطه $C(-4 و +7)$ بنقاط مختلف نیمساز ناحیه اول وسوم وصل می‌نمائیم معادله مکان هندسی وسط پاره خط‌های حاصل را بدست آورید.

جواب: $2y - 2x = 11$

۲۹۳ - از نقطه $M(3 و -1)$ بنقاط مختلف خط $3y + x = 5$ وصل می‌نمائیم معادله مکان هندسی وسط پاره خط‌های حاصل را بدست آورید.

جواب: $2x + 6y = 5$

۲۹۴ - معادله مکان هندسی نقاطی را پیدا کنید که از دو نقطه $A(3 و 1)$ و $B(-2 و -3)$

بیک‌فاصله باشند.

حل: $MA=MB \rightarrow (x-3)^2+(y-1)^2=(x+2)^2+(y+3)^2$

معادله‌مکان $10x+8y+2=0$

۲۹۵ ــ مکان‌هندسی نقاطی‌را پیدا کنید که‌مجموع‌مربعات فواصل‌آنها از دو نقطه $A\left|\begin{matrix}-1\\3\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}3\\-5\end{matrix}\right.$ برابر ۲۲ باشد.

$MA^2+MB^2=22$ و $M(x,y)$

$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(x-x_B)^2+(y-y_B)^2=22$

$(x+1)^2+(y-3)^2+(x-3)^2+(y+5)^2=22$

$x^2+y^2-2x+2y+11=0$

۲۹۶ ــ معادله‌مکان‌هندسی نقاطی‌را پیدا کنید که تفاضل مربعات فواصل‌آن از دو نقطه $A\left|\begin{matrix}3\\5\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}-1\\-1\end{matrix}\right.$ برابر ۴ باشد

حل: اگر $M\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ فرض شود نتیجه میشود $MA^2-MB^2=4$

$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2-[(x-x_B)^2+(y-y_B)^2]=4$

جواب: $2x+3y=7$

۲۹۷ ــ معادله‌مکان‌هندسی نقاطی‌را تعیین کنید که تفاضل‌فواصلشان ازدو نقطه $A(3,5)$ و $B(3,-5)$ برابر ۶ باشد.

جواب: $16y^2-9x^2+54x=225$

۲۹۸ ــ معادله‌مکان‌هندسی نقاطی‌را پیدا کنید که‌نسبت فواصلشان از دوخط

$d'=3x+4=0$ و $d=3x+4y=7$

برابر ۴ باشد.

حل: اگر نقطه $M\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ جواب مسأله باشد نتیجه میشود

$$MH=\frac{3x+4y-7}{\pm\sqrt{9+16}} \quad , \quad MH'=\frac{3x+4}{\mp\sqrt{9+0}}$$

فاصله M از d فاصله M از d'

$$\frac{MH}{MH'}=\frac{3(3x+4y-7)}{\pm 5(3x+4)}=4$$ ← از تقسیم دو رابطه

$9x+12y-21=\pm 20(3x+4)$

$$\begin{cases} ۹x+۱۲y-۲۱=۶۰x+۸۰ \rightarrow ۱۲y-۵۱x=۱۰۱ \\ ۹x+۱۲y-۲۱=-۶۰x-۸۰ \rightarrow ۱۲y+۶۹x+۵۹=۰ \end{cases}$$

۲۹۹ — معادله مکان هندسی نقاطی را بیابید که مجموع فواصلشان از دو نقطه $F(۶و۰)$ و $F'(-۱۰و۰)$ برابر ۲۰ باشد. ج: $۹x^۲+۲۵y^۲+۳۶x=۸۶۴$

۳۰۰ — معادله مکان هندسی نقاطی را که فاصله آنها از نقطه $F(۱و-۰/۵)$ و محور عرضها یك اندازه میباشد بدست آورید. ج: $۴y^۲+۴y=۸x-۵$

۳۰۱ — معادله مکان هندسی نقاطی را تعیین کنید که نسبت فواصلشان از نقطه $A(۴و۳)$ و خط $۳x+۴y+۷=۰$ برابر ۵ باشد.

ج: $x^۲+y^۲-۱۱x-۱۰y+۱۸=۰$

۳۰۲ — معادله مکان هندسی نقاطی را تعیین کنید که اگر آنها را به نقطه $A(۳و-۵)$ وصل نمائیم ضریب زاویه هریك از این خطوط ۳- باشد.

ج: $y=-۳x+۴$

۳۰۳ — نقاط $A(۳و۵)$ و $B(-۱و۲)$ دو رأس یك مثلث قائم الزاویه ایست که در رأس C قائمه است معادله مکان نقطه C را بدست آورید.

ج: $x^۲+y^۲-۲x-۷y+۷=۰$

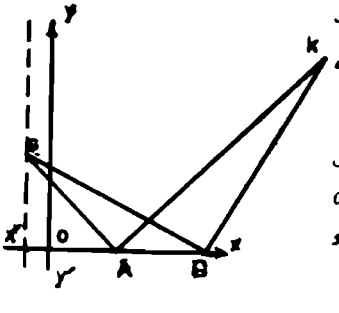
۳۰۴ — نقاط $A(-۲و۳)$ و $B(۳و-۴)$ دو راس مثلث ABC میباشد معادله مکان نقطه C را طوری بدست آورید که زاویه $C=۴۵^\circ$ باشد.

جواب: $y^۲+x^۲-۶x-۴y-۷=۰$ و $x^۲+y^۲-۶y-۷x+۷=۰$

۳۰۵ — نقاط $A(۳و۱)$ و $B(-۵و۲)$ دو راس مثلث ABC میباشد معادله مکان نقطه C را طوری بیابید که ضریب زاویه خط AC دو برابر ضریب زاویه AB باشد.

ج: $۲y=-x+۷$

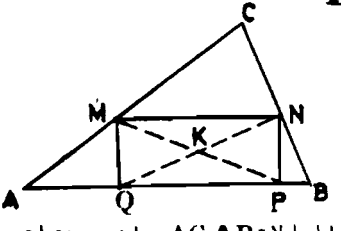
۳۰۶ — نقاط $A\left|\begin{matrix}۳\\۰\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}۷\\۰\end{matrix}\right.$ مفروض اند از نقطه C که بر روی خط $x=-۱$ تغییر مکان میدهد بنقاط A و B وصل میکنیم و سپس از نقاط A و B دو خط دیگر بر خطوط AC و BC عمود می کنیم تا یکدیگر را در نقطه K قطع کنند معادله مکان هندسی نقطه K را بدست آورید وقتیکه نقطه C تغییر مکان میدهد.



راهنمائی: اگر نقطه $C(-۱و\alpha)$ فرض شود ضریب زاویه خطوط CA و CB را برحسب α بدست می آوریم و سپس ضریب زاویه خطوط AK و

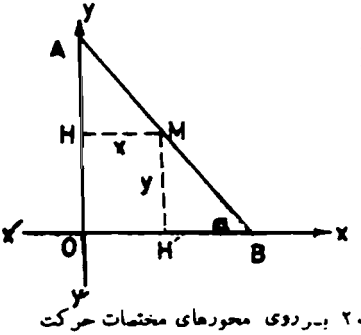
BK که بر آنها نیز عمود ند حساب می کنیم و بعد معادله خطوط AK و BK نوشته و با یکدیگر حل می نمائیم تا مختصات نقطه K برحسب α بدست آید و سپس بین x و y نقطه K پارامتر α را حذف می نمائیم .

۳۰۷ — نقاط $A\begin{vmatrix}3\\-1\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}-1\\7\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}-3\\-3\end{vmatrix}$ سه رأس یك مثلث میباشند مطلوبست معادله مکان هندسی نقطه K مراکز مربع مستطیل هائی که در مثلث ABC محاط بوده و یك ضلعشان بر AB منطبق است.



راهنمائی: چون نقطه K هم وسط NQ و هم وسط MP میباشد پس باید مختصات M و N و Q معلوم باشد تا مختصات K بدست آید و برای این منظور معادلات AB و AC و BC را نوشته و سپس از معادله $y = mx + n$ استفاده کرده معادله خط MN را با ضریب زاویه معلوم $m = m_{AB}$ و عرض ازمبدا مجهول (پارامتر n) نوشته و سپس معادله آنرا با معادلات AB و AC حل نموده مختصات M و N را برحسب n بدست می آوریم همچنین مختصات Q را هم برحسب n بدست آورده و سپس مختصات نقطه K وسط NQ را برحسب n حساب می کنیم و برای بدست آوردن معادله مکان n را حذف می نمائیم.

۳۰۸ — دو سر پاره خط AB بطول ۱۸cm برروی محورهای مختصات حرکت می نماید معادله مکان هندسی وسط پاره خط AB را بیابید .



حل: در دو مثلث AHM و BH'M می توان نوشت:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x}{9} \\ \sin\alpha = \dfrac{y}{9} \end{cases} \rightarrow \left\{ x^2 + y^2 = 81 \right.$$

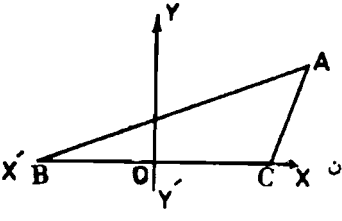
۳۰۹ دو سر پاره خط AB بطول ۲۰cm برروی محورهای مختصات حرکت می نماید معادله مکان نقطه P روی AB را طوری بیابید که $3PA = 2PB$ باشد.

$$m_{AB} = tgB = \frac{y}{a+x} \quad و \quad m_{AC} = tg(\pi - 2B) = -tg2B$$

$$m_{AC} = -tg2B = -\frac{y}{a-x} \rightarrow -\frac{2tgB}{1-tg^2B} = \frac{y}{a-x}$$

$$\frac{2 \times \frac{y}{a+x}}{1 - \frac{y^2}{(a+x)^2}} = \frac{y}{a-x} \rightarrow \frac{2y(a+x)}{(a+x)^2 - y^2} = \frac{y}{a-x}$$

$$(a+x)^2 - y^2 = 2(a^2 - x^2) \rightarrow 3x^2 - y^2 + 2ax = a^2$$



۳۱۲ــ اگر درمثلث ABC نقاط B و C ثابت و تفاضل دوزاویه B و C مساوی ۹۰° باشد مکان هندسی نقطه A را وقتی که زاویه B تغییر میکند بدست آورید.

حل: اگر خط BC را محور طولها و عمود منصف آن را محور عرضها فرض کنیم نتایج زیر بدست میآید.

$$C - B = 90^\circ \rightarrow C = 90^\circ + B$$

$$m_{AB} = tgB = \frac{y}{a+x}$$

$$m_{AC} = tg(180 - 90^\circ - B) = tg(90^\circ - B)$$

$$m_{AC} = cotgB = \frac{y}{x-a} \rightarrow tgB\,cotgB = 1 \rightarrow \frac{y}{a+x} \times \frac{y}{x-a} = 1$$

$$x^2 - a^2 = y^2 \rightarrow x^2 - y^2 = a^2$$

۳۱۳ــ $M\left(x = t + 2 - \frac{1}{t} \quad و \quad 2 + \frac{2t}{1-t^2}\right)$

جواب: $y = (2x - 6) \div (x - 2)$

۳۱۴ــ دوسرپاره‌خط AB بطول ۱۰cm بر روی محورهای مختصات حرکت می‌نماید از نقاط A و B خطوطی بموازات محورهای مختصات رسم می‌نمائیم تا یکدیگر را در نقطه K قطع نمایند معادله مکان نقطه K را بدست آورید. ج: $x^2 + y^2 = 100$

۳۱۵ــ معادله مکان هندسی نقاطی را تعیین کنید که بتوان از آنها دو مماس عمود برهم بر منحنی نمایش تابع $xy = x^2 + 2x + 2$ رسم نمود.

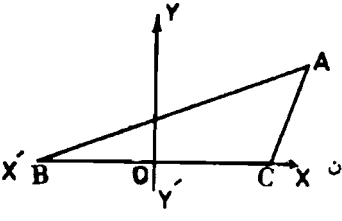
راهنمائی: اگر نقطه دلخواه $M(\alpha و \beta)$ باشد معادله خطی را که از این نقطه باضریب

$$m_{AB} = tgB = \frac{y}{a+x} \quad و \quad m_{AC} = tg(\pi - 2B) = -tg2B$$

$$m_{AC} = -tg2B = -\frac{y}{a-x} \rightarrow -\frac{2tgB}{1-tg^2B} = \frac{y}{a-x}$$

$$\frac{2 \times \frac{y}{a+x}}{1 - \frac{y^2}{(a+x)^2}} = \frac{y}{a-x} \rightarrow \frac{2y(a+x)}{(a+x)^2 - y^2} = \frac{y}{a-x}$$

$$(a+x)^2 - y^2 = 2(a^2 - x^2) \rightarrow 3x^2 - y^2 + 2ax = a^2$$



۳۱۲ــ اگر درمثلث ABC نقاط B و C ثابت و تفاضل دوزاویه B و C مساوی ۹۰° باشد مکان هندسی نقطه A را وقتی که زاویه B تغییر میکند بدست آورید.

حل: اگر خط BC را محور طولها و عمود منصف آن را محور عرضها فرض کنیم نتایج زیر بدست میآید.

$$C - B = 90^\circ \rightarrow C = 90^\circ + B$$

$$m_{AB} = tgB = \frac{y}{a+x}$$

$$m_{AC} = tg(180 - 90^\circ - B) = tg(90^\circ - B)$$

$$m_{AC} = cotgB = \frac{y}{x-a} \rightarrow tgB\,cotgB = 1 \rightarrow \frac{y}{a+x} \times \frac{y}{x-a} = 1$$

$$x^2 - a^2 = y^2 \rightarrow x^2 - y^2 = a^2$$

۳۱۳ــ $M\left(x = t + 2 - \frac{1}{t} \quad و \quad 2 + \frac{2t}{1-t^2}\right)$

جواب: $y = (2x - 6) \div (x - 2)$

۳۱۴ــ دوسرپاره‌خط AB بطول ۱۰cm بر روی محورهای مختصات حرکت می‌نماید از نقاط A و B خطوطی بموازات محورهای مختصات رسم می‌نمائیم تا یکدیگر را در نقطه K قطع نمایند معادله مکان نقطه K را بدست آورید. ج: $x^2 + y^2 = 100$

۳۱۵ــ معادله مکان هندسی نقاطی را تعیین کنید که بتوان از آنها دو مماس عمود برهم بر منحنی نمایش تابع $xy = x^2 + 2x + 2$ رسم نمود.

راهنمائی: اگر نقطه دلخواه $M(\alpha و \beta)$ باشد معادله خطی را که از این نقطه باضریب

زاویه m میکنند نوشته وبامعادله منحنی‌حل کرده ومعادله بدست‌آمده را برحسب x مرتب می‌نمائیم وسپس مبین (Δ) آنرا مساوی صفرقرارداده وبرحسب m مرتب می کنیم شرط عمود بودن دو مماس اینست که $m'm''=-1$ باشد یعنی $\frac{c}{a}=-1$ باشد .

جواب : $\alpha^2+\beta^2-4\beta=4$

معادلهٔ مکان هندسی نقاطی را بیابید که بتوان ازآنها دومماس عمود برهم برهریك ازمنحنی‌های نمایش تابع‌زیررسم نمود.

۳۱۶ – جواب: $\alpha^2+\beta^2=4$ $\quad y=\frac{x^2+1}{x}$

۳۱۷ – جواب : $\alpha^2+\beta^2-2\alpha=1$ $\quad y=\sqrt{x^2-2x+3}$

۳۱۸ – $\alpha^2+\beta^2-2\beta-2\alpha+8\alpha\beta+3=0$ $\quad y=2+\sqrt{x^2+4}$

۳۱۹ – نقاط A(۱و۳) و B(۱و۳-) و C(۳-و۳-) سه‌رأس مربع‌مستطیل ABCD میباشدمعادله مکان‌هندسی نقاطی‌راتعیین‌کنید که‌مجموع‌مربع‌فواصلشان ازچهارضلع مربع‌مستطیل برابر۳۶باشد. ج: $x^2+y^2+2y=4$

راهنمائی: ابتداء معادلات اضلاع‌مستطیل‌رانوشته‌وسپس فاصله‌نقطه M(xوy) رااز هریك ازاضلاع‌بدست‌آورده ومجموع‌مربعات‌فواصل‌را مساوی۳۶قرارمیدهیم.

۳۲۰ – بیضی (c) بمعادله $4x^2+y^2-16x+7=0$ مفروض معادله‌مکان‌هندسی‌اوساط اوتاری‌ازاین بیضی‌را بدست‌آوریدکه ازمبدأ مختصات‌میگذرند.

حل: اگرمعادله‌خط $y=mx$ را بامعادله‌بیضی حل‌کنیم نتیجه‌میشود .

$$(m^2+4)x^2-16x+7=0 \qquad x=\frac{x'+x''}{2}=\frac{-b}{2a}=\frac{8}{m^2+4}$$

وسط‌اوتار P

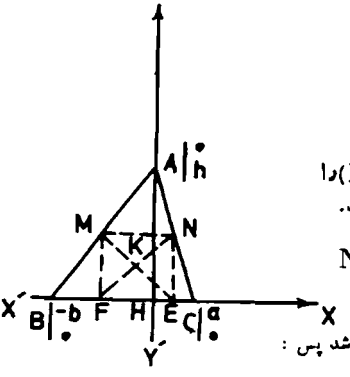
$$y=mx\rightarrow y_P=\frac{8m}{m^2+4}\rightarrow P\left(\frac{8}{m^2+4}\text{ و }\frac{8m}{m^2+4}\right)$$

اگرm را بین‌مختصات‌نقطه‌P حذف‌نمائیم معادله‌مکان‌نقطه‌P بدست‌می‌آید.

۳۲۱ – معادله‌مکان اوساط اوتاری ازدایره C بمعادله $x^2+y^2=16$ که‌طول‌آنها ۶میباشد بدست‌آورید . ج: $x^2+y^2=7$

۳۲۲ – خطوطی ازنقطه A (۳و۰) میکنند دومنحنی‌نمایش‌تابع $y=\frac{x^2+2x+2}{x-1}$ را درنقاط P وQ قطع‌میکنند معادله‌مکان‌هندسی نقطه K وسط PQ را بدست‌آورید.

۳۲۳ــ مکان هندسی مراکز مستطیل‌های محاط درمثلث ABC را بدست آورید.



حل: $AC \equiv \frac{x}{a}+\frac{y}{h}=1$

$AB \equiv \frac{x}{-b}+\frac{y}{h}=1$

$MN \equiv y = n$ n پارامتراست

اگر معادلات (MN و AC) و (MN و AB) را باهم حل نمائیم مختصات نقاط M و N بدست می‌آید.

$M(-b+\frac{bn}{h}$ و $n)$ و $N\ (a-\frac{an}{h}$ و $n)$

و $E(a-\frac{an}{h}$ و $0)$ میدانیم K وسط ME میباشد پس :

$$K\ (x=\frac{h-n}{h}\times\frac{a-b}{2}\ \text{و}\ y=\frac{n}{2})$$

و معادله مکان بصورت زیر است :

معادله نقطه K $\quad 2hx+2(a-b)y=h(a-b)$

قاعده ۷۴	برای تعیین علامت دوجمله‌ای درجه اول که بصورت $ax+b$ میباشد راه اصلی اینست که آنرا مساوی صفر قرار داده وریشه آن یعنی x را محاسبه کنیم (علامت دو جمله‌ای درجه اول کوچکتر از ریشه مخالف علامت ضریب x یعنی مخالف علامت a میباشد وبزرگتر ازریشه موافق علامت a است)
قاعده ۷۵	برای تعیین علامت سه جمله‌ای درجه دوم که بصورت ax^2+bx+c میباشد راه حل اینستکه آنرا مساوی صفر قرار میدهیم و ریشه‌های آن یعنی x'' و x' رامحاسبه می‌کنیم (علامت سه‌جمله‌ای درجه دوم بازاء مقادیری از x که داخل دوریشه میباشند مخالف علامت درجه‌دوم‌یعنی مخالف علامت a میباشد و بازاء سایر مقادیر موافق علامت‌ضریب درجه دوم است
قاعده ۷۶	اگر سه جمله‌ای درجه دوم ریشه نداشته یافقط یك ریشه مضاعف داشته باشدعلامت‌آن همواره موافق علامت ضریب‌درجه‌دوم‌است

تابع معین و نامعین

عدد موهومی : عددموهومی‌عددیست رادیکالی‌بافرجه‌زوج که‌علامت عددزیررادیکال منفی‌است مانند: $\sqrt{-3}$ و $\sqrt[4]{-2}$ و $\sqrt[6]{-8}$ و $\sqrt{-4}$

تابع نامعین: اگرمقدارتابعی‌بازاء $x=a$ مساوی ∞ ویا مساوی‌یك‌عددموهومی شود. میگویند تابع بازاء $x=a$ نامعین است بنابراین‌کلیه توابع درجه‌اول ودرجه‌دوم و درجه‌سوم و .... وتوابع‌رادیکالی بافرجه‌فرد (اگرکسری نباشند) بازاءکلیه مقادیر x معین میباشند .

قاعده ۷۷ توابع کسری بازاء ریشه‌های مخرج‌کسر (اگرداشته‌باشد)نامعین و منفصل است وبازاء سایر مقادیرx معین ومتصل است.

قاعده۷۸ توابع‌رادیکالی‌بافرجه‌زوج(توابع‌اصم)موقعی‌معین‌ومتصل‌میباشند که زیررادیکال‌آنها مثبت‌باشد.

معین کنید که کدامیك ازتوابع زیرمعین‌وانصالی وکدامیك‌انفصالیند وبازاء چه مقادیری از x نامعین‌ومنفصل میباشند.

۳۲۴ — ك۱- $y=x^2-4x$ معین ومتصل میباشد

۳۲۵ — ك۲- $y=x^3-1$ معین‌ومتصل‌میباشند

۳۲۶ — ك۳- $y=(x^2-1)\div(x^2+1)$

$x^2+1=0\rightarrow x^2=-1$ ← ریشه‌ندارد معین‌ومتصل میباشد

۳۲۷ — ك۴- $y=\sqrt{x^2+1}$

$x^2+1=0\rightarrow x^2=-1$

ریشه‌ندارد پس‌زیررادیکال‌همواره‌مثبت‌است‌وتابع‌بازاء جمیع‌مقادیر x معین‌ومتصل‌است

۳۲۸ — ك۵- $y=(x^2+1)\div(x^2-1)$

$x^2-1=0 \rightarrow x=\pm 1$

تذکر: توابع‌رادیکالی بافرجه‌زوج بازاء ریشه‌های صورت زیررادیکال معین‌است ولی‌بازاء ریشه‌های‌زیررادیکال‌منفصل‌است.

تابع بازاء $x=\pm 1$ نامعین ومنفصل است.

۳۲۹ - ک۶ - $y=\sqrt{x^2-1}$

$x^2-1\geq 0 \rightarrow x^2-1=0 \rightarrow x=\pm 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
زیر رادیکال		$+$	0	$-$	0	$+$	
تابع		معین ومتصل		نامعین ومنفصل		معین ومتصل	

۳۳۰ - ک۷ - $y=x\div(x^2-2x+1)$

$x^2-2x+1=0 \rightarrow x=1$

بازاء $x=1$ تابع نامعین و منفصل است

۳۳۱ - ک۸ - $y=\sqrt{-x^2+4x-3}$

$-x^2+4x-3\geq 0 \rightarrow -x^2+4x-3=0 \rightarrow x=1$ و 3

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
زیر رادیکال		$-$	0	$+$	0	$-$	

تابع بازاء $x<1$ و $x>3$ نامعین ومنفصل است وبازاء $1\leq x\leq 3$ معین ومتصل است.

۳۳۲ - $y=x^2-x+1+\sqrt{x^3-4x}$

$x^3-4x\geq 0 \rightarrow x(x^2-4)=0 \rightarrow x=0$ و $x=\pm 2$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
زیر رادیکال		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

تابع بازاء $0<x<2$ و $x<-2$ نامعین و منفصل است. و در فاصله $0\geq x\geq -2$ وهمچنین درفاصله $x\geq 2$ معین ومتصل میباشد.

۳۳۳- $y = \sqrt{x^2-x-2} - \sqrt{3-x}$

$$\begin{cases} x^2-x-2 \geq 0 \rightarrow x^2-x-2=0 \rightarrow x=2 \text{ و } =-1 \\ 3-x \geq 0 \quad \rightarrow \quad 3-x=0 \rightarrow x=3 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	2	3	$+\infty$
زیر رادیکال اول	+	−	+	+	
زیر رادیکال دوم	+	+	+	−	

جائی که هر دو رادیکال مثبت باشد یعنی بازاء $3 \geq x \geq 2$ وهمچنین بازاء $x < -1$ تابع معین ومتصل است وبازاء سایر مقادیر نامعین است.

۳۳۴- $y = x\sqrt{4-x^2} + 2(x-1)\sqrt{x^2+3x+2}$

جواب: تابع بازاء $2 \geq x \geq -1$ معین ومتصل میباشد وبازاء $x=-1$ معین است وبازاء سایر مقادیر x نامعین است.

۳۳۵- $y = x\sqrt{x} + \sqrt[4]{2-x^2} + \sqrt[6]{x^2-5x+6}$

جواب: تابع بازاء $\sqrt{2} \geq x \geq 0$ معین ومتصل است وبازاء سایر مقادیر x نامعین است.

۳۳۶- $y = \sqrt{\frac{2-x}{1-x^2}}$

تابع بازاء $1 > x > -1$ همچنین بازاء $x \geq 2$ معین ومتصل است وبازاء $x = \pm 1$ نامعین ومنفصل است وبازاء سایر مقادیر نامعین است.

۳۳۷- $y = \sqrt{\frac{1-x}{x}} + \sqrt[3]{\frac{x^2-2}{5-x^2}}$

جواب: تابع بازاء جمیع مقادیر x نامعین است.

۳۳۸- $y = \sqrt{\frac{x^2-4x}{9-x^2}} + \sqrt{\frac{1-2x}{x^2+x+1}}$

جواب: تابع بازاء $x < -3$ وهمچنین درفاصله $0 > x > -2$ معین ومتصل است

۳۳۹- $y = \sqrt{x-3} + x\sqrt{x+1} - \sqrt[4]{-x+5}$

جواب: تابع بازاء $3 < x < 5$ معین ومتصل است.

قواعدی راجع بمشتق

قاعده ۷۹

مشتق هرعدد یا هرمقدار ثابت برابرصفر است.

$y=c \rightarrow y'=0$

قاعده ۸۰

مشتق توابعی که بصورت $y=ax+b$ میباشد برابر a یعنی برابر ضریب x میباشد یعنی $y'=a$ است.

۳۴۰	$y=5$	$y'=0$
۳۴۱	$y=-7$	$y'=0$
۳۴۲	$y=2\sqrt{5}$	$y'=0$
۳۴۳	$y=\frac{3}{5}$	$y'=0$
۳۴۴	$y=4x$	$y'=4$
۳۴۵	$y=-8x$	$y'=-8$
۳۴۶	$y=(2+\sqrt{3})x$	$y'=2+\sqrt{3}$
۳۴۷	$y=2x\sqrt{3}+5$	$y'=2\sqrt{3}$
۳۴۸	$y=(3-\sqrt{5})x$	$y'=(3-\sqrt{5})$

قاعده ۸۱

مشتق توابعی که بصورت $y=ax^m$ می‌باشند از فرمول $y'=max^{m-1}$ بدست می‌آید یعنی توان در ضریب ضرب میشود وضریب قرارمیگیرد ویك واحدازتوان x کم میشود.

۳۴۹	$y=5x^3$	$y'=15x^2$
۳۵۰	$y=-7x^{10}$	$y'=-70x^9$
۳۵۱	$y=4x^{-5}$	$y'=-20x^{-6}$
۳۵۲	$y=-x^{-1}$	$y'=x^{-2}$
۳۵۳	$y=\frac{3}{4}x^7$	$y'=\frac{21}{4}x^6$
۳۵۴	$y=\frac{2x^3}{5}$	$y'=\frac{6x^2}{5}$
۳۵۵	$y=(2a-1)x^3$	$y'=3(2a-1)x^2$
۳۵۶	$y=(2-\sqrt{3})x^{-7}$	$y'=-7(2-\sqrt{3})x^{-8}$
۳۵۷	$y=x^{\frac{14}{9}}$	$y'=\frac{14}{9}x^{\frac{5}{9}}$
۳۵۸	$y=3x$	$y'=7x^{\frac{7}{3}}$

قاعده ۸۲

مشتق توابعی که بصورت $y=ax^m+bx^n+cx^h+\dots$ میباشند از فرمول $y'=max^{m-1}+bnx^{n-1}+chx^{h-1}+\dots$ بدست میآیند یعنی مشتق تابع برابر مجموع جبری مشتق هریك از جملات است.

۳۵۹- $y=5x^4-x^3+x-1$ $\quad y'=20x^3-3x^2+1$

۳۶۰- $y=-7x^5-4x-2$ $\quad y'=-35x^4-4$

۳۶۱- $y=x^{-5}-x^{-4}-2x^{-1}$ $\quad y'=-5x^{-6}+4x^{-5}+2x^{-2}$

۳۶۲- $y=\frac{x^3-2x-1}{3}$ $\quad y'=\frac{3x^2-2}{3}$

۳۶۳- $y=\frac{x^3}{4}-\frac{2x^5}{3}-\frac{7x}{2}$ $\quad y'=\frac{3x^2}{4}-\frac{10x^4}{3}-\frac{7}{2}$

تذکر- درزیر وقتی نامی از U و W و V برده میشود منظور توابعی هستند از x و یا عباراتی هستند از x و یا پرانتزهائی هستند که داخل آنها x وجود دارد و منظور از U' و W' و V' مشتق هریك از آنها نسبت به x می باشد.

قاعده ۸۳

مشتق توابعی که بصورت $y=\frac{u}{c}$ میباشد که در آن u تابعی از x و c عدد و یا مقدار ثابت است از فرمول $y'=\frac{u'}{c}$ بدست می آید

۳۶۴- $y=\frac{4x^3-5x^2-7x+2}{11}$ $\quad y'=\frac{12x^2-10x-7}{11}$

۳۶۵- $y=\frac{8x^5-7x^4-3x-1}{a+2b}$ $\quad y'=\frac{40x^4-28x^3-3}{a+2b}$

قاعده ۸۴

مشتق توابعی که‌بصورت $y = au^m$ میباشند ازفرمول‌زیر بدست می‌آیند $y' = ma(u')u^{m-1}$ یعنی مشتق برابر است باتوان پرانتزضرب درضریب پرانتزضرب درمشتق‌پرانتز ضربدر خود پرانتز بقوه‌یك واحد کمتر.

۳۶۶- $y = 4(x^2+x+1)^3 \qquad y' = 12(2x+1)(x^2+x+1)^2$

۳۶۷- $y = 8(x^3-4x+3)^{-5} \quad y' = -40(3x^2-4)(x^3-4x+3)^{-6}$

۳۶۸- $y = (x^4-3x+2a-1)^{11}$

$y' = 11(4x^3-3)(x^4-3x+2a-1)^{10}$

۳۶۹- $y = (1-x)^7-2(2-3x)^{10}$

$y' = -7(1-x)^6+60(2-3x)^9$

۳۷۰- $y = (x^8-5a^2-3)^4 \qquad y' = 32x^7(x^8-5a^2-3)^3$

قاعده ۸۵

مشتق توابعی که‌بصورت $y = u.v.w$ میباشند ازفرمول زیر بدست می‌آید . $y' = u'.v.w+v'.u.w+w'.u.v$ یعنی مشتق برابراست بامشتق پرانتز اول ضرب درپرانتزهای دیگر باضافه‌مشتق پرانتز دوم‌ضرب در پرانتزهای دیگر باضافه مشتق‌پرانتزسوم‌ضرب درپرانتزهای‌دیگر وبهمین‌ترتیب‌تاآخر.

۳۷۱- $y = x^3(x^2-x+1)$

$y' = 3x^2(x^2-x+1)+(2x-1)x^3 = x^2(5x^2-4x+3)$

۳۷۲- $y = (x^2+b)(x^2+c)$

$y' = 2x(x^2+c)+3x^2(x^2+b) = x(5x^2+3bx+2c)$

۳۷۳- $y = (5x-1)(x^2+3)(1-2x)$

$y' = -40x^3+21x^2-62x+21$

۳۷۴- $y = (2x-1)^3(1+3x)^3$

$y' = 3(2x-1)^2(1+3x)^2(12x-1)$

۳۷۵- $y = 2x(1-3x^2)^2(2x+5)^2$

$y' = 2(1-3x^2)(2x+5)(-42x^3-75x^2+6x+5)$

۳۷۶- ك : ۳۱- $y = (ax+b)^2(x-1)$

$y' = 2a(ax+b)^2(x-1)+1(ax+b)^3$

$y' = (ax+b)^2(3ax-2a+b)$

۳۷۷- $y=(2-3x)^5(1+5x)^3$

$y'=15(2-3x)^4(1+5x)^2(1-8x)$

۳۷۸- $y=(2+x)^4(3-x)^6(5-2x)^3$

$y'=2(2+x)^3(3-x)^5(5-2x)^2(13x^2-28x-18)$

۳۷۹- $y=(x^2+3x+1)^5(x^2-x+3)^{10}$

$y'=5(x^2+3x+1)^4(x^2-x+3)^9(6x^3+11x^2+x+7)$

۳۸۰- $y=(4-3x^2)^5(5-x^2)^7$

$y'=-66x(4-3x^2)^4(5-x^2)^5(3-x^2)$

قاعده ۸۶

مشتق توابعی که بصورت $y=\frac{u}{v}$ میباشند ازفرمول زیر بدست می‌آید. $y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$ یعنی مشتق مساوی است بامشتق صورت ضرب درمخرج منهای مشتق مخرج ضرب درصورت بخش بر توان دوم مخرج کسر

۳۸۱- $y=\frac{x^2+3}{4-3x^2}$

$y'=\frac{2x(4-3x^2)-(-6x)(x^2+3)}{(4-3x^2)^2}=\frac{26x}{(4-3x^2)^2}$

۳۸۲- $y=\frac{x^3-x+1}{x^3-x+5}$

$y'=\frac{(3x^2-1)(x^3-x+5)-(3x^2-1)(x^3-x+1)}{(x^3-x+5)^2}=\frac{4(3x^2-1)}{(x^3-x+5)^2}$

۳۸۳- ک۹- $y=\frac{(x-1)^3}{3x}$

$y'=\frac{2(x-1)(3x)-3(x-1)^2}{9x^2}=\frac{3(x^2-1)}{9x^2}=\frac{x^2-1}{3x^2}$

۳۸۴- ک۱۰- $y=\frac{(3x+1)^3}{x-2}$

$y'=\frac{3(3)(3x+1)^2(x-2)-(1)(3x+1)^3}{(x-2)^2}=\frac{(3x+1)^2(6x-19)}{(x-2)^2}$

۳۸۵ — ۱۳ ک — $y=\frac{x^3-1}{(2x+5)^3}$ $\quad y'=\frac{15x^2+6}{(2x+5)^4}$

۳۸۶ — $y=\frac{(2x-1)^2}{(3x+2)^4}$ $\quad y'=\frac{12(2x-1)^5(x+3)}{(3x+2)^5}$

۳۸۷ ۳۸۸ — $y_1=\frac{(x^2-x-1)^3}{(x^2-x+1)^2}$ و $y_2=\frac{(x^2+3x+1)^5}{(x^2-2x+3)^{10}}$

$$y_1'=\frac{(2x-1)(x^2-x+5)(x^2-x-1)^2}{(x^2-x+1)^3}$$

$$y_2'=\frac{5(x^2+3x+1)^4(-2x^3-9x^2+8x+13)}{(x^2-2x+3)^{11}}$$

۳۸۹ — $y=\frac{(3x-4)^2}{(2x-1)^5}$ $\quad y'=\frac{(3x-4)^3(12x+19)}{(2x-1)^6}$

۳۹۰ — $y=\frac{x(ax-b)}{(ax+b)^2}=\frac{ax^2-bx}{(ax+b)^2}$ $\quad y'=\frac{b(3ax-b)}{(ax+b)^3}$

قاعده ۸۷

مشتق توابعی که بصورت $y=\sqrt{u}$ میباشد از فرمول زیر بدست می‌آید $y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ یعنی مشتق برابر با کسری است که صورت آن مشتق زیر رادیکال و مخرج آن دو برابر خود رادیکال می‌باشد.

۳۹۱ — $y=\sqrt{x^2-3x+1}$ $\quad y'=(2x-3)\div 2\sqrt{x^2-3x+1}$

۳۹۲ — $y=\sqrt{x^3+b^2-1}$ $\quad y'=3x^2\div 2\sqrt{x^3+b^2-1}$

۳۹۳ — $y=\sqrt{x+5}-\sqrt{x-1}$ $\quad y'=\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+5}}{2\sqrt{x^2+4x-5}}$

۳۹۴ — ۱۱ ک — $y=\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}$

$$y'=\frac{\frac{2x^2-x^2+1}{x^2}}{2\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}}=\frac{x^2+1}{2x\sqrt{x(x^2-1)}}$$

۳۹۵ - $y=\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}$ $\quad y'=\frac{1+x^2}{2(1-x^2)\sqrt{x(1-x^2)}}$

۳۹۶ - $y=\sqrt{\frac{x}{x+1}}$ $\quad y'=\frac{1}{2(x+1)\sqrt{x(x+1)}}$

۳۹۷ - $y=\sqrt{\frac{x^2}{a^2-x^2}}$ $\quad y'=\frac{(3a^2-x^2)\sqrt{x}}{2(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$

۳۹۸ - $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ $\quad y'=\frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$

۳۹۹ - ك - $y=\sqrt{x\cdot\frac{x-1}{x+1}} \rightarrow y=\sqrt{\frac{x^2-x}{x+1}}$

$$y'=\frac{x^2+2x-1}{2(x+1)\sqrt{x(x^2-1)}}$$

۴۰۰ - $y=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+3}}$ $\quad y'=\frac{2x}{(x^2+3)\sqrt{x^4+4x^2+3}}$

قاعده ۸۸

مشتق توابعی که بصورت $y=\sqrt[m]{u}$ میباشند از فرمول :

$y'=\frac{u'}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}$ بدست می‌آیند یعنی مشتق برابر باکسری است که صورت آن مشتق زیر رادیکال ومخرج آن فرجه رادیکال ضربدر رادیکالی است که فرجهٔ آن همان فرجه و داخل آن همان جمله زیر رادیکال بتوه یك واحد کمتر ازفرجه است .

۴۰۱ - ك۱۸ - $y=\sqrt[3]{x^2-1}$ $\quad y'=2x\div 3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$

۴۰۲ - $y=\sqrt{x\sqrt{x-1}} \rightarrow y=\sqrt[4]{x^3-x^2}$

$$y'=\frac{3x^2-2x}{4\sqrt[4]{(x^3-x^2)^3}}=\frac{x(3x-2)}{4x\sqrt[4]{x^2(x-1)^3}}$$

$$=\frac{3x-2}{4\sqrt[4]{x^2(x-1)^3}}$$

۴۰۳ـ ك۱۶ـ

$$y = \sqrt[3]{x^2-1} \cdot \sqrt[4]{3x-1}$$

$$y' = \frac{2x \times \sqrt[4]{3x-1}}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} + \frac{3 \times \sqrt[3]{x^2-1}}{3\sqrt[4]{(3x-1)^3}}$$

$$y' = \frac{20x^2-3x-8}{6\sqrt[3]{(x^2-1)^2}\sqrt[4]{(3x-1)^3}}$$

۴۰۴ـ ك۱۹ـ

$$y = \sqrt[3]{\frac{1-x}{x(x^2+1)}} \rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{1-x}{x^3+x}}$$

$$y' = \frac{\dfrac{-x^3-x-(3x^2+1)(1-x)}{x^2(x^2+1)^2}}{3\sqrt[3]{\dfrac{(1-x)^2}{x^2(x^2+1)^2}}}$$

$$y' = (2x^3-3x^2-1) \div 3x(x^2+1)\sqrt[3]{x(1-x)^2(x^2+1)}$$

۴۰۵ـ

$$y = \sqrt[3]{\frac{2x-3}{1-x}} \qquad y' = \frac{-1}{3(1-x)\sqrt[3]{(2x-3)^2(1-x)}}$$

۴۰۶ـ

$$y = \sqrt[4]{(x^2-x+3) \div (x^2-3x+1)}$$

$$y' = -(x^2+2x-4) \div 2(x^2-3x+1)\sqrt[4]{(x^2-3x+1)(x^2-x+3)^3}$$

۴۰۷ـ

$$y = \sqrt[5]{(x-2)^3(x+1)^2} \qquad y' = \frac{5x-1}{5\sqrt[5]{(x-2)^2(x+1)^3}}$$

۴۰۸ـ

$$y = \sqrt[4]{3x} + \sqrt{x\sqrt{x+1}} = \sqrt[4]{3x} + \sqrt[4]{x^3+x^2}$$

$$y' = \frac{۳}{۴\sqrt[۴]{۲۷x^۳}} + \frac{۳x+۲}{۴\sqrt[۴]{x^۲(x+۱)^۳}}$$

۴۰۹- $y = \sqrt[۳]{\frac{۳x}{x-۲}}$ $\quad y' = \frac{-۲}{(x-۲)\sqrt[۳]{۹x^۲(x-۲)}}$

قاعده ۸۹

مشتق توابعی که بصورت $y = \sqrt[m]{u^n}$ می‌باشند از فرمول زیر بدست می‌آیند. $y' = \frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$ یعنی مشتق برابر کسری است که صورت آن حاصل‌ضرب توان درمشتق پرانتز زیر رادیکال می‌باشد و مخرج آن حاصل ضرب فرجه رادیکال در رادیکالی است که فرجه‌اش همان فرجه ولی توان پرانتز زیر رادیکال برابر با تفاضل فرجه و توان پرانتز باشد.

۴۱۰-

$$y = \sqrt[۵]{(x^۲-۳x+۱)^۳}$$

$$y' = \frac{۳(۲x-۳)}{۵\sqrt[۵]{(x^۲-۳x+۱)^۴}}$$

۴۱۱- $y = \sqrt[۷]{x^۳} \rightarrow y = \sqrt[۷]{(x)^۳}$ $\quad y' = ۳ \div ۷\sqrt[۷]{x^۴}$

۴۱۲- $y = \sqrt[۴]{x^۳} + \sqrt[۹]{x^۲} \rightarrow y = \sqrt[۴]{(x)^۳} + \sqrt[۹]{(x)^۲}$

$$y' = ۳ \div ۴\sqrt[۴]{x} + ۷ \div ۹\sqrt[۹]{x^۲}$$

۴۱۳- $y = \sqrt[۳]{(۲x+۷)^۲}$ $\quad y' = ۲ \div ۳\sqrt[۳]{۲x+۷}$

۴۱۴- $y = \sqrt[۷]{\left(\frac{۱-x^۲}{۳-۲x^۲}\right)^۵}$

$$y' = \frac{5 \times \frac{-2x(3-2x^2)+4x(1-x^2)}{(3-2x^2)^2}}{2\sqrt[7]{\left(\frac{1-x^2}{3-2x^2}\right)^2}}$$

$$y' = -10 \cdot x \div 7\sqrt[7]{(1-x^2)^2(3-2x^2)^5} \times (3-2x^2)$$

۴۱۵ـ

$$y = \sqrt[6]{\left(\frac{2-3x}{1-4x}\right)^5} \qquad y' = \frac{25}{6(1-4x)\sqrt[6]{(2-3x)(1-4x)^5}}$$

۴۱۶ـ

$$y = \sqrt[7]{\left(\frac{x^2+3x+1}{x^2+1}\right)^4}$$

$$y' = \frac{-12(x^2-1)}{7(x^2+1)\sqrt[7]{(x^2+3x+1)^3(x^2+1)^4}}$$

۴۱۷ـ

$$y = \sqrt[7]{\left(\frac{1-2x}{2+3x}\right)^2} \qquad y' = \frac{-2}{(2+3x)\sqrt[7]{(1-2x)^5(2+3x)^2}}$$

۴۱۸ـ ک۱۳ـ

$$y = \frac{\sqrt{x-1}}{2x+1}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \times (2x+1) - 2\sqrt{x-1}}{(2x+1)^2}$$

$$y' = \frac{2x+1-4x+4}{2(2x+1)^2\sqrt{x-1}} = \frac{5-2x}{2(2x+1)^2\sqrt{x-1}}$$

۴۱۹ـ ک۱۷ـ

$$y = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$y' = 1 \times \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \frac{\frac{1+1}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \times x$$

$$y' = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} +$$

$$+ \frac{x}{2(x+1)\sqrt{(x+1)(x-1)}} = \frac{x^2+x-1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$$

۴۲۰ــ ک ۲۰ــ

$$y = ax\sqrt[m]{\frac{1-x}{b+x}}$$

$$y' = a \times \sqrt[m]{\frac{1-x}{b+x}} + \frac{\frac{-b-1}{(b+x)^2}}{m\sqrt[m]{\left(\frac{1-x}{b+x}\right)^{m-1}}} \times ax$$

$$y' = \frac{a\sqrt[m]{1-x}}{\sqrt[m]{b+x}} - \frac{(b+1)ax}{m(b+x)\sqrt[m]{(1-x)^{m-1} \times (b+x)}}$$

۴۲۱ــ ک ۲۲ــ

$$y = \frac{x^2}{4}\sqrt{x \times \frac{x-1}{x+1}} \rightarrow y' = \frac{5x^4-5x^2+2x^3}{8(x+1)\sqrt{x(x^2-1)}}$$

۴۲۲ــ

$$y = \frac{2x-x^2}{\sqrt[3]{x^2-4}} \qquad y' = \frac{2(-2x^2-3x+6)}{3(x+2)\sqrt[3]{x^2-4}}$$

۴۲۳ــ

$$y = x\sqrt[3]{x} - x^2\sqrt{x} \qquad y' = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} - \frac{7}{2}x^2\sqrt{x}$$

۴۲۴ــ

$$y = \sqrt[3]{x^2-4x} \times \sqrt{2x+1}$$

$$y = (7x^2-18x-4) \div 3\sqrt[3]{(x^2-4x)^2} \cdot \sqrt{2x+1}$$

۴۲۵ــ

$$y = \frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$$

حل: مخرج کسر را گویا می‌نمائیم:

$$y = \frac{x+1+x-1+2\sqrt{x^2-1}}{x+1-x+1}$$

$$y = x + \sqrt{x^2 - 1} \rightarrow y' = 1 + x \div \sqrt{x^2 - 1}$$

قاعده ۹۰

مشتق تابع تابع. اگر Y تابعی از Z و Z تابعی از U و U تابعی از V و V تابعی از X باشد مشتق Y نسبت به X ازفرمول $Y'_x = Y'_z \times Z'_u \times U'_v \times V'_x$ بدست می‌آید یعنی ابتدا Y'_z و Z'_u و U'_v و V'_x را بدست آورده و سپس درفرمول بالا قرار می‌دهیم .

۴۲۶ـ اگر $z = 3x - 1$ باشدمشتق تابع $y = 2z^2 - 5$ را نسبت به x بدست‌آورید

$$z'_x = 3 \quad \text{و} \quad y'_z = 4z \rightarrow y'_x \times y'_z = z'_x = 4z \times 3 = 12z$$

$$y'_z = 12(3x - 1)$$

۴۲۷ـ ک۳۱ـ

$$y = 5u^3 \quad \text{و} \quad u = x^2 - 1$$

$$y'_u = 15u^2 \quad \text{و} \quad u'_x = 2x \quad \text{و} \quad y'_x = y'_u \times u'_x$$

$$y'_x = 15u^2 \times 2x = 30xu^2 = 30x(x^2 - 1)^2$$

۴۲۸. ک۳۲ـ

$$y = tv \quad \text{و} \quad t = 3x + 2 \quad \text{و} \quad v = \sqrt{x^2 - 4x}$$

$$t'_x = 3 \quad \text{و} \quad v'_x = (x - 2) \div \sqrt{x^2 - 4x}$$

$$y'_x = t'_x v + v'_x \times t = 3\sqrt{x^2 - 4x} + \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x}} \times \frac{(3x + 2)}{1}$$

$$y'_x = \frac{3x^2 - 12x + 3x^2 + 2x - 6x - 4}{\sqrt{x^2 - 4x}} = \frac{6x^2 - 16x - 4}{\sqrt{x^2 - 4x}}$$

۴۲۹ـ ک۳۳ـ

$$y = \frac{t^2 - 1}{t + 3} \cdot \frac{v}{v^2 - 1} \quad \text{و} \quad v = \frac{2x - 1}{x + 2}$$

$$t = x^2 - 1$$

حل:

$$t'_x = 2x \quad \text{و} \quad V'_x = \frac{5}{(x + 2)^2}$$

$$y'_x = \frac{2tt'(t + 3) - t'(t^2 - 1)}{(t + 3)^2} \times$$

$$\times \frac{v}{v^2 - 1} + \frac{v'(v^2 - 1) - 2v'v^2}{(v^2 - 1)^2} \times \frac{t^2 - 1}{t + 3}$$

$$y'_x = \frac{t'v(t^2 + 6t + 1)}{(t + 3)^2(v^2 - 1)} + \frac{v'(t^2 - 1)(-v^2 - 1)}{(v^2 - 1)^2(t + 3)}$$

اگر بجای t' و v' و t و v مساویش برحسب x را قرار دهیم و خلاصه نمائیم نتیجه میشود .

۴۳۰ — اگر $y=5u^2-2u$ و $u=\sqrt{x^3-1}$ باشد مشتق y نسبت به x را پیدا کنید :

$$y'_u=10u-3 \quad \text{و} \quad u'_x=3x^2\div 2\sqrt{x^3-1} \quad \text{و} \quad y'_x=y'_u\times u'_x$$

$$y'_x=(10u-3)\times\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}=\frac{3x^2(10\sqrt{x^3-1}-3)}{2\sqrt{x^3-1}}$$

۴۳۱ — اگر $y=2z^2-5$ و $z=2u+1$ و $u=3x^2-4$ باشد مشتق تابع y را نسبت به x بدست‌آورید.

$$y'_z=4z \quad \text{و} \quad z'_u=2 \quad \text{و} \quad u'_x=6x \quad \text{و} \quad y'_x=y'_z\times z'_u\times u'_x$$

$$y'_x=4z\times 2\times 6x=48xz=48x(2u+1)$$

$$y'_x=48x[2(3x^2-4)+1]=48x(6x^2-7)$$

۴۳۲ — $y=3z^2-2z$ و $z=\sqrt{2x-1}$

$$y'_x=2(3\sqrt{2x-1}-1)\div(\sqrt{2x+1})$$

۴۳۳ — $y=z-2\sqrt{2z}$ و $z=\sqrt{x^2-4}$

$$y'_x=x(3\sqrt[6]{4(x^2-4)}-4)\div 3\sqrt{16(x^2-4)^5}$$

۴۳۴ — $y=(3u^2-7)\div\sqrt{u}$ و $u=(1-4x)^{-3}$

$$y'_x=6\sqrt{1-4x}\,[9+8(1-4x)^6]\div(1-4x)^7$$

قاعده ۹۱	میدانیم مشتق Y نسبت به X برابر y' می‌باشد مشتق $2Y$ برابر $2Y'$ ومشتق $-3Y$ برابر $-3Y'$ ومشتق Y^2 برابر $2YY'$ و مشتق Y^3 برابر $3Y^2Y'$ ومشتق $5Y^4$ برابر $20Y^3Y'$ میباشد
قاعده ۲۷۷	اگر x تابع و y متغیر فرض‌شود مشتق $5y$ و y و y^2 و $5y^3$ بترتیب ۱ و ۵ و $2y$ و $15y^2$ ومشتق $3x$ و x و $4x^2$ و $-7x^3$ بترتیب $3x'$ و x' و $8x'x$ و $-21x'x^2$ میشود .

مشتق توابع زیر را برحسب آنکه دفعه اوّل x تابعی از y و یك دفعه y تابعی از x باشد پیدا کنید .

۴۳۵ — ك-۳۰ $x+4y-2xy-1=0$

حل: اگر x تابعی از y باشد $x'+4-2x'y+1(-2x)=0$

$x'(1-2y)=2(x-2)\rightarrow x'=2(x-2)\div(1-2y)$

اگر y تابعی از x باشد. $1+4y'-2y+y'(-2x)=0$

$2y'(2-x)=2y-1\rightarrow y'=(2y-1)\div 2(2-x)$

۳۳۶ - ک ۲۱ - $x^2-y^2+4xy-1=0$

اگر x تابعی از y باشد. $2x'x-2y+4x'y+1\times 4x=0$

$2x'(x+2y)=2(y-2x)\rightarrow x'=(y-2x)\div(x+2y)$

اگر y تابعی از x باشد $2x-2y'y+4y+4xy'=0$

$2y'(2x-y)=-2(x+2y)\rightarrow y'=(x+2y)\div(y-2x)$

۳۳۷ - ک ۲۲ - $3x^2+4y^2-3xy+5=0$

اگر x تابعی از y باشد $6x'x+8y-3x'y-3x=0$

$3x'(2x-y)=3x-8y\rightarrow x'=(3x-8y)\div 3(2x-y)$

اگر y تابعی از x باشد $6x+8y'y-3y-3xy'=0$

$y'(8y-3x)=3(y-2x)\rightarrow y'=3(y-2x)\div(8y-3x)$

۳۳۸ - ک ۲۳ - $(y-2x)(4y+x-1)=9$

اگر x تابعی از y باشد

$(1-2x')(4y+x-1)+(4+x')(y-2x)=0$

$4y+x-1-2x'(4y+x-1)+4y-8x+x'(y-2x)=0$

$x'(-8y-2x+2+y-2x)=7x-8y+1$

$x'=(7x-8y+1)\div(2-7y-4x)$

اگر y تابعی از x باشد

$(y'-2)(4y+x-1)+(4y'+1)(y-2x)=0$

$y'(4y+x-1)-8y-2x+2+4y'(y-2x)+y-2x=0$

$y'(4y+x-1+4y-8x)=7y+4x-2$

$y'=(7y+4x-2)\div(8y-7x-1)$

۳۳۹ - ک ۲۴ - $(x^2-y^2)(xy-1)4y+5=0$

$(2x-2y'y)(xy-1)4y+(y+y'x)(x^2-y^2)4y+4y'(x^2-y^2)$

$(xy-1)=0$

پس از ضرب کردن و خلاصه نمودن واز y' فاکتور گرفتن نتیجه میشود.

$y'=(y^4+2xy-3x^2y^2)\div(3y^2-4xy^3+2x^3y-x^2)$

اگر y تابعی از x باشد مشتق هریك از توابع زیر را بدست آورید .

۳۴۰ - $y^2-8x^2+4y-1=0$ $\quad y'=8x\div(y+2)$

۴۴۱ $y' = (2x - y) \div (2y + x)$ $x^2 - y^2 = xy$

۴۴۲ $y' = \frac{4(x-1)^3}{2y-1}$ $(y-3)(y+2) = (x-1)^4$

۴۴۳ $(x+y)^2 = x - y$

$y' = (1 - 2x - 2y) \div (2x + 2y + 1)$

قاعده ۹۳ مشتق توابعی که بصورت $y = a\sin u$ میباشند از فرمول : $y' = au'\cos u$ بدست می‌آید.

کسینوس همان زاویه × مشتق زاویه × ضریب سینوس = مشتق

قاعده ۹۴ مشتق توابعی که بصورت $y = a\cos u$ میباشند از فرمول : $y' = -au'\sin u$ بدست می‌آید.

$y' = -$ ضریب کسینوس × مشتق زاویه × سینوس همان زاویه

قاعده ۹۵ مشتق توابعی که بصورت $y = a\,tg\,u$ میباشند از فرمول : $y' = au'(1 + tg^2 u)$ بدست می‌آید.

قاعده ۹۶ مشتق توابعی که بصورت $y = a\,cotg\,u$ میباشند از فرمول : $y' = -au'(1 + cotg^2 u)$ بدست می‌آیند .

قاعده ۹۷ هر جمله‌ای که از جنس کسینوس و کتانژانت باشد در موقع مشتق گرفتن علامتش عوض میشود.

۴۴۴ - $y = 4\sin x - 1$ $y' = 4 \times 1\cos x = 4\cos x$ - ۲۲ گ

۴۴۵ - $y = \cos x + 1$ $y' = -1 \times 1\sin x = -\sin x$ - ۲۴ گ

۴۴۶ - $y = 2\sin 3x - 5\cos 2x - 3\sin 7x$

۴۴۷ - $y' = 2 \times 3\cos 3x + 5 \times 2\sin 2x - 3 \times 7\cos 7x$

۴۴۸ - $y = 2\sin(45^\circ + 2x) - 3\cos(3x - 75^\circ) + \cos 4x$

$y' = 2 \times 2\cos(45^\circ + 2x) + 3 \times 3\sin(3x - 75)^\circ - 1 \times 4\sin 4x$

۴۴۹ - $y = 3\sin(x^2 + x + 1) - 4\cos(x^3 - x + 2)$

$y' = 3(2x + 1)\cos(x^2 + x + 1) + 4(3x^2 - 1)\sin(x^3 - x + 2)$

۴۵۰ - $y = 4\sin\sqrt{x} + 3\cos\sqrt[3]{x} - 8\sin\sqrt[4]{x^3}$

$$y' = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos\sqrt{x} - 3 \times \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \sin\sqrt[3]{x} - 8 \times \frac{3 \times 1}{2\sqrt[4]{x}} \cos\sqrt[4]{x^3}$$

$$y' = \frac{2\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{6\cos\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x}}$$

۴۵۱- $y = \sin(\sin 2x) + \cos(\sin 3x)$

$y' = 2\cos 2x \cos(\sin 2x) - 3\cos 3x \sin(\sin 3x)$

۴۵۲- $y = \sin(x^3 - 4x^2 - 3x + 1) + \cos(x^2 + 1)$

$y' = (3x^2 - 8x - 3)\cos(x^3 - 4x^2 - 3x + 1) - 2x\sin(x^2 + 1)$

۴۵۳- $y = \cos(\cos 3x)$ $\quad y' = +3\sin 3x \sin(\cos 3x)$

۴۵۴- $y = \cos[\cos(\sin 2x)]$

$y' = 2\cos 2x \times -\sin(\sin 2x) \times -\sin[\cos(\sin 2x)]$

$y' = 2\cos 2x \sin(\sin 2x)\sin[\cos(\sin 2x)]$

۴۵۵- $y = -5tg x + 2x$ $\quad y' = -5 \times 1(1 + tg^2 x) + 2$

۴۵۶- $y = 3cotg x + 2\sin x$

$y' = -3 \times 1(1 + cotg^2 x) + 2 \times 1\cos x$

۴۵۷- $y = 3tg(3x - 30^\circ) + 5cotg(75^\circ - 2x)$

$y' = 3 \times 3[1 + tg^2(3x - 30^\circ)] - 5 \times -2[1 + cotg^2(75^\circ - 2x)]$

۴۵۸- $y = 7tg(25^\circ - 4x) - tg(47^\circ - 5x)$

$y' = 7 \times -4[1 + tg^2(25^\circ - 4x)] - 1 \times -5[1 + tg^2(47^\circ - 5x)]$

۴۵۹- $y = 3tg(x^4 - 5x + 1) + 4cotg(x^2 - x + 6)$

$y' = 3(4x^3 - 5)[1 + tg^2(x^4 - 5x + 1)] - 4(2x - 1)[1 + cotg^2(x^2 - x + 6)]$

۴۶۰- $y = tg\frac{1+x}{1-x} + cotg\sqrt{x^2 + x + 1}$

$$y' = \frac{2}{1-x^2}\left(1 + tg^2\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\left(1 + cotg^2\sqrt{x^2+x+1}\right)$$

۴۶۱- $y = tg(tg x)$ $\quad y' = (1 + tg^2 x)[1 + tg^2(tg x)]$

۴۶۲- $y = tg[cotg(cotg 2x)]$

$y' = 2(1 + cotg^2 2x)[1 + cotg^2(cotg 2x)]\left\{(1 + tg^2[cotg(cotg 2x)]\right\}$

تذکر- فرمول $a\sin mx\cos mx=\frac{a}{2}\sin 2mx$ را یاد بگیرید

۴۶۳- $y=6\sin 2x\cos 2x+4\sin 5x\cos 5x$

$y=3\sin 4x+2\sin 10x\rightarrow y'=12\cos 4x+20\cos 10x$

۴۶۴- ص۲۷- $y=3\sin x\cos x-1\rightarrow y=\frac{3}{2}\sin 2x-1\rightarrow y'=3\cos 2x$

۴۶۵- ص۲۸- $y=6tg x\sin x+3\cos x$

$y'=6(1+tg^2x)\sin x+6\cos x\, tg x-3\sin x$

$y'=6\sin x(1+tg^2x)+6\sin x-3\sin x$

۴۶۶- ص۲۹- $y=\frac{4\cos x}{\cos x+2}$ $\qquad y'=\frac{-8\sin x}{(\cos x+2)^2}$

۴۶۷- ص۳۹- $y=3cotg x\sin x+2\cos x\, tg x$

$y=3\cos x+2\sin x\rightarrow y'=-3\sin x+2\cos x$

۴۶۸- $xy=\cos(x+y)$

$y+y'x=-(1+y')\sin(x+y)$

$y'x+y'\sin(x+y)=-y-\sin(x+y)$

$y'=-[y+\sin(x+y)]\div[x+\sin(x+y)]$

۴۶۹- $\sin xy=\sin(x+y)$

$(y+y'x)\cos xy=(1+y')\cos(x+y)$

$y'[x\cos xy-\cos(x+y)]=\cos(x+y)-y\cos xy$

$y'=[\cos(x+y)-y\cos xy]\div[x\cos xy-\cos(x+y)]$

قاعده ۹۸	مشتق توابعی که بصورت $y=a\sin^b u$ میباشند ازفرمول: $y'=abu'\cos u\sin^{b-1}u$ بدست می‌آید.
قاعده ۹۹	مشتق توابعی که بصورت $y=a\cos^b u$ میباشند ازفرمول : $y'=-abu'\sin u\cos^{b-1}u$ بدست‌می‌آید.
قاعده ۱۰۰	مشتق توابعی که بصورت $y=a tg^b u$ میباشند ازفرمول: $y'=abu'(1+tg^2u)tg^{b-1}u$ بدست می‌آید.
قاعده ۱۰۱	مشتق توابعی که بصورت $y=a cotg^b u$ میباشند ازفرمول : $y'=-abu'(1+cotg^2u)cotg^{b-1}u$ بدست‌می‌آید.

۴۷۰ـ ص ۳۴ـ

$$y = 4\cos^2\frac{x-1}{2x+3}$$

$$y' = -8\times\frac{5}{(2x+3)^2}\sin\frac{x-1}{2x+3}\cos\frac{x-1}{2x+3} = \frac{-20}{(2x+3)^2}\sin\frac{2x-2}{2x+3}$$

۴۷۱ـ ص ۳۵ـ

$$y = 2\sin^2 5x^2$$

$$y' = 4\times 10x\cos 5x^2\sin^1 5x^2 = 40x\cos 5x^2\sin^1 5x^2$$

۴۷۲ـ ص ۳۶ـ

$$y = 5tg^2\sqrt{x-1}$$

$$y' = \frac{15\times 1}{2\sqrt{x-1}}(1+tg^2\sqrt{x-1})tg^2\sqrt{x-1}$$

۴۷۳ـ ص ۳۷ـ

$$y = 3\cos^2(2x^2-1)\cdot\sin\sqrt[3]{x^2+1}$$

$$y' = -6(4x^2)\sin(2x^2-1)\cos(2x^2-1)\cdot\sin\sqrt[3]{x^2+1} +$$

$$\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}\cos\sqrt[3]{x^2+1}\times 3\cos^2(2x^2-1)$$

$$y' = -18x^1\sin 2(2x^2-1)\sin\sqrt[3]{x^2+1} + \frac{2x\cos^2(2x^2-1)\cos\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$$

۴۷۴ـ ص ۳۸ـ

$$y = 4cotg^2\sqrt{x} + 2\sin^2(5x-\frac{\pi}{4})$$

$$y' = \frac{-8\times 1}{2\sqrt{x}}(1+cotg^2\sqrt{x})cotg\sqrt{x} + 4\times 5\cos(5x-\frac{\pi}{4})\sin(5x-\frac{\pi}{4})$$

$$y' = -4cotg\sqrt{x}(1+cotg^2\sqrt{x})\div\sqrt{x} + 10\cdot\sin(10x-90^\circ)$$

۴۷۵ـ

$$y = 4\sin^2\sqrt{x} \qquad y' = (6\sin^2\sqrt{x}\cos\sqrt{x})\div\sqrt{x}$$

۴۷۶ـ ص ۳۹ـ

$$y = 4x^2tg^2\sqrt{x}\cdot cotg\sqrt[3]{x^2-1}$$

$$y' = 8xtg^2\sqrt{x}\cdot cotg\sqrt[3]{x^2-1} + \frac{3tg^2x}{2\sqrt{x}}(1+tg^2x)\cdot 4x^2\cdot cotg\sqrt[3]{x^2-1}$$

$$-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}(1+cotg^2\sqrt[3]{x^2-1})\times 4x^2\times tg^2\sqrt{x}$$

۴۷۷ـ

$$y = (\sin 2x - 3\cos^4 x)^5$$

$$y' = 5(2\cos 2x + 12\sin x\cos^3 x)(\sin 2x - 3\cos^4 x)^4$$

۴۷۸ـ

$$y = \frac{1-3\cos^2 2x}{1+3\cos^2 2x} \qquad y' = \frac{12\sin 4x}{(1+3\cos^2 2x)^2}$$

۴۷۸ـ

$$y = 5\sin^4(x^2-5x+1)^3$$

$$y' = 20\times 3(2x-5)(x^2-5x+1)^2\cos(x^2-5x+1)\sin^3(x^2-5x+1)$$

۴۷۹- $y = \sin^{۴}\frac{۳x-۲}{۲-x}$

$$y' = \frac{۱۶}{(۲-x)^{۲}}\sin^{۳}\frac{۳x-۲}{۲-x}\cos\frac{۳x-۲}{۲-x}$$

۴۸۰- $y = \frac{\sin^{۲}x}{۱-\sin x}$ $\quad y' = \frac{\sin ۲x(۲-\sin x)}{۲(۱-\sin x)^{۲}}$

۴۸۱- $y = \frac{۱+\cos^{۲}x}{۱-\cos ۲x}$ $\quad y' = \frac{-۴\sin ۲x}{(۱-\cos ۲x)^{۲}}$

۴۸۲- $y = tg^{۲}\sqrt{x} - \sqrt{tg\,x}$

$$y' = \frac{۲\sqrt{tg\,x}\cdot tg\sqrt{x}\,[۱+tg^{۲}\sqrt{x} - \sqrt{x}(۱+tg^{۲}x)]}{۲\sqrt{x\,tg\,x}}$$

۴۸۳- $y = x^{۲}\sin x - \cos x - \sqrt{\sin x}$

$$y' = ۲x\sin x + x^{۲}\cos x + \sin x - (\cos x \div ۲)\sqrt{\sin x}$$

۴۸۴- $y = tg\,a\cos x + tg(a+x) + \sqrt{tg\sqrt{x}}$

$$y' = ۱ - tg\,a\sin x + tg^{۲}(a+x) + ۱ \div ۴\sqrt{x\,tg\sqrt{x}}\cos^{۲}\sqrt{x}$$

قاعده ۱۰۲

اگر y و x یعنی تابع ومتغیر هردو برحسب پارامتر دیگری مانند t یا m یا α باشند برای پیدا کردن مشتق y نسبت به x دو راه حل موجود است.

راه حل اول- بین y و x رابطه‌ای بدست می‌آوریم که در آن پارامتر موجود نباشد طبق قواعد مکان هندسی وسپس طبق توابع ضمنی از آن مشتق میگیریم.

راه حل دوم- از فرمول $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ میتوان استفاده کرد

۴۸۵- $x = ۲\sin\alpha + ۱$ و $y = ۳\cos\alpha + ۲$

حل: معادله مکان هندسی نقاطی بامختصات فوق بصورت زیر است:

$$۹(x-۱)^{۲} + ۴(y-۲)^{۲} = ۳۶ \rightarrow ۱۸(x-۱) + ۸y'(y-۲) = ۰$$

$$y' = ۹(۱-x) \div ۴(y-۲)$$

طریقه‌دوم $y'_\alpha = -3\sin\alpha$ و $x'_\alpha = 2\cos\alpha$

$$y'_x = \frac{-3\sin\alpha}{2\cos\alpha} \to y'_x = \frac{-9(x-1)}{4(y-2)}$$

۴۸۶- $x = 2t^2 - 3t + 1$ و $y = t - 3$

حل: $t = y + 3 \to x = 2(y+3)^2 - 3(y+3) + 1$

$x = 2y^2 + 9y + 10 \to 1 = 4y'y + 9y' \to y' = 1 \div (4y+9)$

طریقه‌دوم $y'_t = 1$ و $x'_t = 4t - 3$

$y'_x = y'_t \div x'_t = 1 \div 4(t-3) = 1 \div (4y+9)$

۴۸۷- $x = \sqrt{t}$ و $y = \sqrt[3]{t}$

طریقه اول $x^2 = t$ و $y^3 = t \to y^3 = x^2$

$3y'y^2 = 2x \to y' = 2x \div 3y^2$

تمرین‌باجواب: مشتق هریك از توابع‌زیررا بدست‌آورید:

۴۸۸- $y = \frac{4x^4}{b^2 - x^2}$ $\qquad y' = \frac{8x^2(2b^2 - x^2)}{(b^2 - x^2)^2}$

۴۸۹- $y = \frac{x^3}{1 + x^2}$ $\qquad y' = \frac{x^2(3 + x^2)}{(1 + x^2)^2}$

۴۹۰- $y = \frac{(4 + x)^2}{x + 3}$ $\qquad y' = \frac{(x+4)(x+2)}{(x+3)^2}$

۴۹۱- $y = \frac{x^p}{x^m - a^m}$ $\qquad y' = \frac{x^{p-1}[(P-m)x^m - Pa^m]}{(x^m - a^m)^2}$

۴۹۲- $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4$ $\qquad y' = 8 \times \frac{(x-1)^3}{(x+1)^5}$

۴۹۳- $y = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^4(x+3)^4}$

$$y' = \frac{-(x+1)(5x^2 + 8x - 1)}{(x+2)^5(x+3)^5}$$

۴۹۴- $y = x^5(a + 3x)^3(a - 2x)^2$

$y' = 5x^4(a + 3x)^2(a - 2x)(a^2 + 2ax - 12x^2)$

۴۹۵- $y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3$

$y' = 2(x+2)(x+3)^2(3x^2 + 11x + 9)$

$y=(x\sin\alpha+\cos\alpha)(x\cos\alpha-\sin\alpha)$ $\quad y'=x\sin 2\alpha+\cos 2\alpha$ — ۴۹۶

$y=3x^4(x^3-x+1)^3(x^3+x-2)^6$

$y'=9x^3(x^3-x+1)^5(x^3+x-2)^5(23x^7-17x^5+28x^3-22x^3-8x^2+15x-23)$

$y=(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3$ — ۴۹۷

$y'=-(1-x^2)(1-x^3)^2(13x^5-13x^4-10x^3+4x^2+4x+1)$

$y=(5+2x)^{10}(3-4x)^{20}$ — ۴۹۸

$y'=-20(17+12x)(5+2x)^9(3-4x)^{19}$

$y=x^p(1-x)^q\div(1+x)$ — ۴۹۹

$y'=x^{p-1}(1-x)^{q-1}[p-(q+1)x-(p+q-1)x^2]\div(1+x)^2$

$y=\dfrac{x}{(1-x)^2(1+x)^2}$ — ۵۰۰

$y=\dfrac{x^3}{(x-5)^2}$ $\quad y'=\dfrac{-x^2(15+x)}{(x-5)^5}$ — ۵۰۱

$y=\dfrac{(5-3x)^3}{x^5}$ $\quad y'=\dfrac{(5-3x)^2(3x-25)}{x^6}$ — ۵۰۲

$y=[(a+bx^n)\div(a-bx^n)]^m$ — ۵۰۳

$y'=2abmnx^{n-1}(a+bx^n)^{m-1}\div(a-bx^n)^{m+1}$

$y=(a+x)\sqrt{a-x}$ $\quad y'=\dfrac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$ — ۵۰۴

$y=\dfrac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}}$ $\quad y'=\dfrac{1+4x^2}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$ — ۵۰۵

$y=\sqrt{3x}+\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x}$ — ۵۰۶

$y'=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{1}{x^2}$

$y=\dfrac{(x+1)^3}{x\sqrt{x}}$ $\quad y'=\dfrac{3(x+1)^2(x-1)}{2x^2\sqrt{x}}$ — ۵۰۷

$y=\dfrac{ax^2}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{b}{x\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$ — ۵۰۸

$$y' = \frac{5a}{3}\sqrt{x^2} - \frac{3b}{2x^2\sqrt{x}} + \frac{1}{6x\sqrt[6]{x}}$$

۵۰۹- $y = x\sqrt{1+x^2}$ $\qquad y' = (1+2x^2) \div \sqrt{1+x^2}$

۵۱۰- $y = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ $\qquad y' = \frac{\sqrt{x(1-x)}}{2x^2(x-1)}$

۵۱۱- $y = \sqrt[3]{\frac{2x+3}{x+3}}$ $\qquad y' = \frac{5}{3(x+3)\sqrt[3]{(2x+3)^2(x+3)}}$

۵۱۲- $y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}$

$$y' = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2}{x-1}\right)$$

۵۱۳- $y = \frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad y' = \frac{1+3x^2-2x^4}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

۵۱۴- $y = x \div \sqrt{a^2-x^2}$ $\qquad y' = a^2 \div (a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}$.

۵۱۵- $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$ $\qquad y' = \frac{2x^2}{1-x^3}\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$

۵۱۶- $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$ $\qquad y' = \frac{1-3x^2}{2(x^2+1)^2\sqrt{x}}$

۵۱۷- $y = (1+\sqrt{x})^2$ $\qquad y' = \left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

۵۱۸- $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

۵۱۹- $y=\sqrt[5]{(x-1)^2}\div(\sqrt[3]{(x-2)^2}\cdot\sqrt[7]{(x-3)^2}$

$y'=(480x-161x^2-271)\div(60\sqrt[5]{(x-1)^3}\sqrt[3]{(x-2)^2}\cdot\sqrt[7]{(x-3)^{12}}$

۵۲۰- $y=\sqrt[7]{1+\sqrt[7]{1+\sqrt[7]{x}}}$

$y'=\dfrac{1}{27\sqrt[7]{x^2}(1+\sqrt[7]{x})^2\times(1+\sqrt[7]{1+\sqrt[7]{x}})^2}$

۵۲۱- $y=(1+x)\sqrt{2+x^2\sqrt[3]{3+x^3}}$

$y'=(6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5)\div\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{(3+x^3)^2}$

۵۲۲- $y=\sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$

$y'=\dfrac{n-m-(n+m)x}{(m+n)\sqrt[m+n]{(1-x)^n(1+x)^m}}$

۵۲۳- $y=1\div(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}$

۵۲۴- $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}$

$y'=\dfrac{-1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

۵۲۵- $y=\sqrt[7]{x\sqrt{x}}$ $y'=1\div2\sqrt{x}$

۵۲۶- $y=(x^2\sqrt{x+1})\div(x-1)^3\sqrt[5]{5x-1}$

$y'=y(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{2x+2}-\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{1}{5x-1})$

۵۲۷- $y = \dfrac{\sqrt{x+a} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{x+a} - \sqrt{a-x}}$

$y' = \dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2}\,(\sqrt{a^2-x^2}-a)}$

۵۲۸- $y = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$ $\quad y' = \dfrac{-1}{2\sqrt{x-x^2}(1+\sqrt{x})}$

۵۲۹- $y = \dfrac{3}{32}\,(20x^2-36x+81)\sqrt[3]{(2x+3)^2}$

$y' = x^2 \div \sqrt[3]{2x+3}$

۵۳۰- $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2(x^2+1)}{\sqrt[5]{1-x}}}$

$y' = \dfrac{-24x^4+25x^3-9x+10}{15(1-x)\sqrt[15]{(x^2+1)^{10}(x^5-x^6)}}$

۵۳۱- $y = \cos x \div (\sin x + 1)$ $\quad y' = -1 \div (\sin x + 1)$

۵۳۲- $y = tg\,x \div \sqrt{1+tg^2 x}$ $\quad y' = \cos x$

۵۳۳- $y = (\sin x - \cos x) \div (\sin x + \cos x)$

$y' = 2 \div (\sin x + \cos x)^2$

۵۳۴- $y = (\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2})^2$ $\quad y' = -\cos x$

۵۳۵- $y = (-2\cos\frac{x}{2}) \div (\sin\frac{x}{2} + 3\cos\frac{x}{2})$

$y' = 1 \div (3\sin x + 4\cos x + 5)$

۵۳۶- $y = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ $\quad y' = \dfrac{1}{1+\cos x}$

۵۳۷- $y = \sin 2x \cos 3x$ $\quad y' = 2\cos 5x - \sin 2x \sin 3x$

۵۳۸- $y = x\sin x + \cos x$ $\quad y' = x\cos x$

$y = \sin^3 x \cos x \qquad y' = \sin^2 x(3\cos^2 x - \sin^2 x)$ — ۵۳۹

$y = a\sqrt{\cos 2x} \qquad y' = -a\sin 2x \div \sqrt{\cos 2x}$ — ۵۴۰

$y = \sin^2 2x \cos 4x \qquad y' = \sin 8x - 4\sin^2 2x \sin 4x$ — ۵۴۱

$y = \frac{1}{3}tg^3 x - tg x + x \qquad y' = tg^4 x$ — ۵۴۲

$y = (x\,cotg\,x)^2 \qquad y' = 2x\,cotg\,x(cotg\,x - x\,cosec^2 x)$ — ۵۴۳

$y = \cos x \div 2\sin^2 x \qquad y' = -(1 + \cos^2 x) \div 2\sin^3 x$ — ۵۴۴

$y = (tg\frac{x}{2} + cotg\frac{x}{2})x \qquad y' = \frac{+2(\sin x - x\cos x)}{x^2 \sin^2 x}$ ۵۴۵

$y = (tg\,x - 1) \div \sec x \qquad y' = \sin x + \cos x$ — ۵۴۶

$y = \sin(x + a)\cos(x + a) \qquad y' = \cos 2(x + a)$ — ۵۴۷

$y = \sin x \div 2\cos^2 x \qquad y' = (1 + \sin^2 x) \div 2\cos^3 x$ — ۵۴۸

$y = (2 - x^2)\cos x + 2x\sin x \qquad y' = x^2 \sin x$ — ۵۴۹

$y = \frac{tg\,x}{x} \qquad y' = \frac{2x - \sin 2x}{2x^2 \cos^2 x}$ — ۵۵۰

$y = \sin^n x \cos nx \qquad y' = n\sin^{n-1} x \cdot \cos(n+1)x$ — ۵۵۱

$y = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2} \qquad y' = \frac{2\sin x(\cos x \sin x^2 - x\sin x \cos x^2)}{\sin^2 x^2}$ — ۵۵۲

$y = \sec^2\frac{x}{a} + \operatorname{cosec}^2\frac{x}{a}$ — ۵۵۳

$y' = -16\cos\frac{2x}{a} \div a\sin^2\frac{2x}{a}$

$y = x^2 \sin^2\frac{x}{2} \qquad y' = 3x^2 \sin^2\frac{x}{2} + \frac{x^3}{2}\sin x$ — ۵۵۴

$y = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x \qquad y' = x^2 \cos x$ — ۵۵۵

$y = (\sin x) \div x \qquad y' = (x\cos x - \sin x) \div x^2$ — ۵۵۶

$y = x^2 + x\sin 2x + \cos^2 x \qquad y' = 4x\cos^2 x$

$y = (x\sin x) \div (1 + x)$ — ۵۵۷

$y' = [\sin x + x(x+1)\cos x] \div (1 + x)^2$

$y = x\sin x\cos x + \frac{1}{2}\cos^2 x \qquad y' = x\cos 2x$ — ۵۵۸

۵۵۹- $y=\frac{\sin x}{x-\sin x}$ $\quad y'=\frac{x\cos x-\sin x}{(x-\sin x)^{2}}$

۵۶۰- $y=x\sqrt{\sin x}$ $\quad y'=\frac{2\sin x+x\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

۵۶۱- $y=3x\sin^{2}x+3\cos x-\cos^{3}x$ $\quad y'=9x\sin^{2}x\cos x$

۵۶۲- $y=\sin(\cos x)$ $\quad y'=-\sin x\cos(\cos x)$

۵۶۳- $y=\sin(\cos^{2}x)$. $\quad y'=-\sin 2x\cdot\cos(\cos^{2}x)$

۵۶۴- $y=\sin[\sin(\sin x)]$ $\quad y'=\cos x\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos[\sin(\sin x)]$

۵۶۵- $y=tg^{3}(tg\,x)+3tg(tg\,x)$ $\quad y'=3\sec^{2}x\sec^{4}(tg\,x)$

۵۶۶- $y=\frac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$ $\quad y'=\frac{x}{(\cos x+x\sin x)^{2}}$

۵۶۷- $y=\sin[\cos^{2}(tg^{3}x)]$

$y'=-3tg^{2}x\sec^{2}x\sin(2tg^{3}x)\cdot\cos[\cos^{2}(tg^{3}x)]$

۵۶۸- $y=3\sqrt[3]{cotg^{2}x}+\sqrt[3]{cotg^{8}x}$ $\quad y'=\frac{8}{3\sin^{2}x\sqrt[3]{cotg\,x}}$

۵۶۹- $y=\frac{1-cotg\,x}{1+tg\,x}$ $\quad y'=\frac{3(\cos 2x+\sin 2x)}{(1+tg\,x)^{2}\sin^{2}2x}$

۵۷۰- $y=\frac{1}{3}\sin^{3}\sqrt{x}-\frac{2}{5}\sin^{5}\sqrt{x}+\frac{1}{7}\sin^{7}\sqrt{x}$

۵۷۱- $y'=(\sin^{2}\sqrt{x}\cos^{5}\sqrt{x})\div 2\sqrt{x}$

۵۷۲- $y=2(tg\sqrt{x}-\sqrt{x})$ $\quad y'=(tg^{2}\sqrt{x})\div\sqrt{x}$

۵۷۳- $y^{2}=2px$ $\quad y'=p\div y$

۵۷۴- $b^{2}x^{2}+a^{2}y^{2}=a^{2}b^{2}$ $\quad y'=-b^{2}x\div a^{2}y$

۵۷۵- $y^{3}-3y+2ax=0$ $\quad y'=2a\div 3(1-y^{2})$

۵۷۶- $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ $\quad y'=-\sqrt{y\div x}$

۵۷۷- $\sqrt[3]{x^{2}}+\sqrt[3]{y^{2}}=\sqrt[3]{a^{2}}$ $\quad y'=-\sqrt[3]{y\div x}$

۵۷۸- $y^{2}-2xy+b^{2}=0$ $\quad y'=y\div(y-x)$

۵۷۹- $x^{3}+y^{3}=3xya$ $\quad y'=(ay-x^{2})\div(y^{2}-ax)$

۵۸۰- $y=\cos(x+y)$ $\quad y'=\frac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$

۵۸۱- $x^{3}+y^{3}=a^{3}$ $\quad y'=-x^{2}\div y^{2}$

۵۸۲- $x^2+y^2-3xy=0 \qquad y'=(x^2-y)\div(x-y^2)$

۵۸۳- $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$

۵۸۴- $y'=-(Ax+By+D)\div(Bx+Cy+E)$

۵۸۵- $x^3-6x^2y^2+9y^3-5x^2+15y^2=100 \qquad y'=x\div 3y$

۵۸۶- $x\sin y+y\sin x=0$

$y'=-(y\cos x+\sin y)\div(x\cos y+\sin x)$

۵۸۷- $x^2\sin y+y^3\cos x-2x-3y+1=0$

۵۸۸- $y'=-\dfrac{2x\sin y-y^3\sin x-2}{x^2\cos y+3y^2\cos x-3}$

۵۸۹- $\cos(xy)=x \qquad y'=\dfrac{1+y\sin(xy)}{-x\sin(xy)}$

۵۹۰- $\sin(x+y)=x \qquad y'=[1-\cos(x+y)]\div\cos x(x+y)$

۵۹۱- $x^2\div a^2+y^2\div b^2=1 \qquad y'=-b^2x\div a^2y$

۵۹۲- $-x^3+x^2y+y^2=0 \qquad y'=\dfrac{x(3x-2y)}{x^2+2y}$

۵۹۳- $y^3=\dfrac{x-y}{x+y} \qquad y'=\dfrac{1-y^3}{4y^3+3y^2x+1}$

۵۹۴- $tg\,y=xy \qquad y'=y\cos^2 y\div(1-x\cos^2 y)$

۵۹۵- $xy=\sin y \qquad y'=y\div(\cos y-x)$

رشته فیزیك دانشکده علوم ۱۳۳۷

۵۹۶- $y=(x^3-x)^5 \qquad y'=5(x^3-x)^4(3x^2-1)$

رشته کشاورزی تبریز ۱۳۳۷

۵۹۷- $$y=\frac{x\sqrt{\dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}}-\sqrt{\dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}}}{x\sqrt{\dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}}+\sqrt{\dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}}}\;;\quad y'=\frac{2x^4+8a^2x^2-2a^4}{(x^3-a^2x+x^2+a^2)^2}$$

رشته معماری دانشکده هنرهای زیبا ۱۳۳۸

۵۹۸- $y=\sqrt[3]{\dfrac{x}{2x-1}} \qquad y'=\dfrac{-1}{3(2x-1)\sqrt[3]{x^2(2x-1)}}$

رشته‌زمین‌شناسی‌دانشکده‌علوم۱۳۳۹

۵۹۹- $y=\sqrt{\frac{2x}{x+1}}$ $y'=\frac{1}{\sqrt{2x(x+1)^3}}$

دانشکده کشاورزی تبریز ۱۳۳۹

۶۰۰- $y=\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$ $y'=\frac{a}{(x+a)\sqrt{x^2-a^2}}$

۶۰۱- دانشکده‌علوم۱۳۳۹ $y=(5x^3+\sqrt{2x^2+1})^2$

۶۰۲- $y'=2(5x^3+\sqrt{2x^2+1})\ (15x^2+\frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}})$

۶۰۳- رشته‌معماری‌دانشکده‌هنرهای‌زیبا $y=\sqrt{\frac{x^2-5}{2(x-12)}}\cos^2 3x$

$$y'=\frac{x^2-24x+5}{4\sqrt{2(x^2-5)(x-12)^3}}\cos^2 3x-6\sqrt{\frac{x^2-5}{2(x-12)}}\times\sin 3x\cos 3x$$

۶۰۴- رشته‌زمین‌شناسی‌دانشکده‌علوم۱۳۳۹ $y=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\cot g^2 2x$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}-6\cot g^2 2x(1+\cot g^2 2x)$$

۶۰۵- رشته‌ریاضی‌دانشکده‌علوم۱۳۳۲ $y=(2x^2+\sqrt{1-x^2})^2$

$$y'=16x^3-2x+8x\sqrt{1-x^2}-\frac{4x^3}{\sqrt{1-x^2}}$$

گروه‌چهارم‌دانشگاه‌تهران مرداد۴۵

۶۰۶- $y=\frac{1}{\cos\sqrt{x}}+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

$$y'=\frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}+\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$$

مسائل کتاب درسی

مشتق اول و مشتق‌دوم هریک‌ازتوابع زیررابدست‌آورید

۶۰۷- ص۵۱- $y=x^2-4x+1$

$y'=2x-4\rightarrow y''=2$

۶۰۸- ص۵۲-

$$y = x^4 - x^2 + 4$$

$$y' = 4x^3 - 2x \rightarrow y'' = 12x^2 - 2$$

۶۰۹- ص۵۳-

$$y = \frac{x-1}{x+1}$$

$$y' = \frac{2}{(x+1)^2} \rightarrow y'' = \frac{-4(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-4}{(x+1)^3}$$

۶۱۰- ص۵۴-

$$y = \frac{2}{x-1}$$

$$y' = \frac{-2}{(x-1)^2} \quad \text{و} \quad y'' = \frac{4(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3}$$

۶۱۱- ص۵۶-

$$y = \frac{x^2}{x+1} \rightarrow y' = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

$$y'' = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2+2x)}{(x+1)^4} =$$

$$y'' = \frac{2(x+1)(x^2+2x+1-x^2-2x)}{(x+1)^4} = \frac{2}{(x+1)^3}$$

۶۱۲- ص۵۷-

$$y = \frac{x^2-x}{x^2+x+1} \rightarrow y' = \frac{2x^2+2x-1}{(x^2+x+1)^2}$$

$$y'' = \frac{2(2x+1)(x^2+x+1)^2 - 2(2x+1)(x^2+x+1)(2x^2+2x-1)}{(x^2+x+1)^4}$$

$$y'' = \frac{2(2x+1)(x^2+x+1)(x^2+x+1-2x^2-2x+1)}{(x^2+x+1)^4}$$

$$y'' = 2(2x+1)(-x^2-x+2) \div (x^2+x+1)^3$$

۶۱۳- ص۵۸-

$$y = \frac{x^2-2}{(x+1)^2} \rightarrow y' = \frac{2(x+2)}{(x+1)^3}$$

$$y'' = \frac{2(x+1)^3 - 6(x+1)^2(x+2)}{(x+1)^6}$$

$$y'' = \frac{2(x+1)^2(x+1-3x-6)}{(x+1)^6} = \frac{-2(2x+5)}{(x+1)^4}$$

۶۱۴- ص۵۹-

$$y = \sin^2 x - 1$$

$y' = 2\sin x\cos x = \sin 2x \rightarrow y'' = 2\cos 2x$

۶۱۵- ص ۶۱-

$y = 2tg\,x - 1$

$y' = 2(1 + tg^2 x)$ و $y'' = 4tg\,x(1 + tg^2 x)$

۶۱۶- ص ۶۰-

$y = \frac{2\sin x}{\sin x + 1} \rightarrow y' = \frac{2\cos x}{(\sin x + 1)^2}$

$y'' = \frac{-2\sin x(\sin x + 1)^2 - 2\cos x(\sin x + 1)(2\cos x)}{(\sin x + 1)^4}$

$y'' = \frac{-2(\sin x + 1)(\sin^2 x + \sin x + 2\cos^2 x)}{(2\sin x + 1)^4}$

$y'' = \frac{-2(\cos^2 x + \sin x + 1)}{(\sin x + 1)^3}$

۶۱۷- ص ۶۲-

$y = \frac{\cos x}{2\sin x +}$ $y' = \frac{-2 - \sin x}{(2\sin x + 1)^2}$

$y'' = \frac{-\cos x(2\sin x + 1)^2 - 4\cos x(2\sin x + 1)(-2 - \sin x)}{(2\sin x + 1)^4}$

$y'' = -\frac{\cos x(2\sin x + 1)(2\sin x + 1 - 8 - 4\sin x)}{(2\sin x + 1)^4}$

$y'' = \frac{\cos x(2\sin x + 7)}{(2\sin x + 1)^3}$

۶۱۸- ص ۶۳-

$y = \sin^3 x + \cos^3 x$

$y' = 3\sin^2 x\cos x - 3\cos^2 x\cos x = \frac{3}{2}\sin 2x\,(\sin x - \cos x)$

$y'' = 3\cos 2x(\sin x - \cos x) + (\cos x + \sin x) \times 1/5\sin 2x$

$y'' = (\cos x + \sin x)(-3 + 6\sin x\cos x + 1/5\sin 2x) =$

$y'' = (\cos x + \sin x)(4/5\sin 2x - 3)$

۶۱۹- ص ۶۴-

$y = 4\sin x\cos 2x$

$y = 2(\sin 3x - \sin x) \rightarrow y' = 2(3\cos 3x - \cos x)$

$y'' = 2(-9\sin 3x + \sin x)$

۶۲۰- تذکر خیلی مهم: اگر مشتق تابع $y_1 = f(\frac{2x-1}{2x+1})$ و یا $y_2 = f(\sin x - \cos x)$ و یا $y_2 = f(\sqrt{x^2 - 1} + x)$ را بخواهند باید داخل پرانتز را u

فرض‌نموده وازفرمول $y'_x = f'(u) \times u'_x$ باید استفاده‌نمود.

فرمول $\cos y = \pm\sqrt{1-\sin^2 y}$ و $\sin y = \pm\sqrt{1-\cos^2 y}$

درس: اگر $y = \arcsin u$ باشد(u تابعی‌ازx است) نتیجه‌میشود $\sin y = u$ که‌اگر ازدوطرف این‌تساوی نسبت به x مشتق بگیریم.

$$y'_x \cos y = u' \rightarrow = y'_x = u' \div \cos y = u' \div \sqrt{1-\sin^2 y}$$

$$y_x' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

قاعده ۱۰۳

مشتق توابعی که‌بصورت $y = \arcsin u$ میباشنداز‌فرمول $y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ بدست‌می‌آید.

درس: اگر $y = \arccos u$ باشد نتیجه میشود $\cos y = u$ که اگر ازدوطرف این تساوی‌نسبت‌به x مشتق بگیریم نتیجه‌میشود:

$$-y'_x \sin y = u' \rightarrow y'_x = -u' \div \sin y = -u' \div \sqrt{1-\cos^2 y}$$

$$y'_x = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

قاعده ۱۰۴

مشتق توابعی که‌بصورت $y = \arccos u$ میباشنداز‌فرمول $y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$ بدست‌می‌آید.

درس: اگر $y = \operatorname{arctg} u$ باشد نتیجه‌میشود $\operatorname{tg} y = u$ و

$$y'(1+\operatorname{tg}^2 y) = u' \rightarrow y' = u' \div (1+\operatorname{tg}^2 y) \rightarrow y' = u' \div (1+u^2)$$

قاعده ۱۰۵

مشتق توابعی که‌بصورت $y = \operatorname{arctg} u$ میباشند ازفرمول $y' = \frac{u'}{1+u^2}$ بدست‌می‌آید.

درس: اگر $y = \operatorname{arccotg} u$ فرض‌شود نتیجه میشود $\operatorname{cotg} y = u$

$$-y'(1+\operatorname{cotg}^2 y) = u' \rightarrow -u' \div (1+\operatorname{cotg}^2 y) = -u' \div (1+u^2)$$

قاعده ۱۰۶

مشتق‌توابعی که‌بصورت $y = \operatorname{arccotg} u$ میباشند ازفرمول $y' = \frac{-u'}{1+u^2}$ بدست می‌آید.

مشتق هریك از توابع زیررا بدست آورید:

۶۲۱- $y=\arcsin(x^2+1)$ $\quad y'=\dfrac{2x}{\sqrt{1-(x^2+1)^2}}$

۶۲۲- $y=\arccos(2x^2+x-3)$ $\quad y'=\dfrac{-(4x+1)}{\sqrt{1-(2x^2+x-3)^2}}$

۶۲۳- $y=\operatorname{arctg}(3x+1)$ $\quad y'=\dfrac{3}{1+(3x+1)^2}$

۶۲۴- $y=\operatorname{arccotg}(x^2-5x+2)$ $\quad y'=\dfrac{-(2x-5)}{1+(x^2-5x+2)^2}$

۶۲۵- $y=\arcsin(3-4x)$ $\quad y'=\dfrac{-4}{\sqrt{1-(3-4x)^2}}$

۶۲۶- $y=\operatorname{arc\,tg}\sqrt[4]{x^3}$ $\quad y'=\dfrac{3\div 4\sqrt[4]{x}}{1+(\sqrt[4]{x^3})^2}$

$$=\frac{3}{4\sqrt[4]{x}(1+x\sqrt{x})}$$

۶۲۷- $y=\arccos 3x$ $\quad y'=-3\div\sqrt{1-9x^2}$

۶۲۸- $y=\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}$ $\quad y'=1\div 3\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x^2})$

۶۲۹- $y=(\operatorname{arccotg} x)^3$ $\quad y'=-3(\operatorname{arccotg} x)^2\div(1+x^2)$

۶۳۰- $y=2(\arcsin\frac{x}{3})^3$ $\quad y'=6(\arcsin\frac{x}{3})^2\div\sqrt{9-x^2}$

۶۳۱- $y=3\arccos 4x^2$ $\quad y'=-32x\div\sqrt{1-16x^4}$

۶۳۲- $y=\arccos\frac{1-x}{\sqrt{2}}$ $\quad y'=\dfrac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$

۶۳۳- $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{x}$ $\quad y'=\dfrac{1}{x^2+1}$

۶۳۴- $y=\operatorname{arctg}\frac{x+a}{1-ax}$ $\quad y'=\dfrac{-1}{x^2+2}$

۶۳۵- $y=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$ $\qquad y'=\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$

۶۳۶- $y=x\arcsin x$ $\qquad y'=\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

۶۳۷- $y=\arcsin(\sqrt{\sin x})$ $\qquad y'=\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x-\sin^2 x}}$

۶۳۸- $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ $\qquad \pi>x>0 \qquad y'=\frac{1}{2}$

۶۳۹- $y=\arcsin(\sin x)$ $\qquad y'=\frac{\cos x}{|\cos x|}=\begin{cases}+1\\-1\end{cases}$

۶۴۰- $y=\operatorname{arctg}(x^2+x+1)$ $\qquad y'=(2x+1)\div[1+(x^2+x+1)^2]$

۶۴۱- $y=\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$ $\qquad y'=\frac{2}{1+x^2}$

۶۴۲- $y=\frac{\arccos x}{x}$ $\qquad y'=\frac{-(x+\sqrt{1-x^2}\arccos x)}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

۶۴۳- $y=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}$ $\qquad y'=2\sqrt{a^2-x^2}$

۶۴۴- $y=\sqrt{a^2-x^2}+a\times\arcsin\frac{x}{a}$ $\qquad y'=\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$

۶۴۵- $y=x+\sqrt{1-x^2}\arccos x$ $\qquad y'=-x\arccos x\div\sqrt{1-x^2}$

۶۴۶- $y=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$ $\qquad y'=\sqrt{\frac{x}{1+x}}$

۶۴۷- $y=\arcsin(\sin x-\cos x)$ $\qquad y'=(\sin x+\cos x)\div\sqrt{\sin 2x}$

۶۴۸- $y=\arcsin(\cos^2 x)$ $\qquad y'=\frac{-2\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$

۶۴۹- $y=\operatorname{arctg}\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ $\qquad y'=-1$

۶۵۰- $y=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$ $\qquad a>b>0$

$$y' = 1 \div (a + b\cos x)$$

$$y = \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 \arccos x \qquad -۶۵۱$$

$$y' = \frac{\arcsin x(2\arccos x - \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = (x - \frac{1}{2}) \arcsin\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x - x^2} \qquad -۶۵۲$$

$$y' = \arcsin\sqrt{x}$$

$$y = \operatorname{arc\,tg}\frac{x\sin\alpha}{1 - x\cos\alpha} \qquad y' = \frac{\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} \qquad -۶۵۳$$

$$y = \arccos^2(x^2) \qquad -۶۵۴$$

$$y = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad y' = \frac{1}{1+x^2} \qquad -۶۵۵$$

$$y = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad y' = \frac{x\arccos x - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \qquad -۶۵۶$$

$$y = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + \frac{\arccos x}{4} + \frac{x^2\arcsin x}{2} \qquad -۶۵۷$$

$$y' = x\arcsin x$$

$$y = 2\arcsin(2x-1) - (4x+6)\sqrt{x - x^2} \qquad -۶۵۸$$

$$y' = 8x^2 \div \sqrt{x - x^2}$$

$$y = \operatorname{arctg} x + 1 \div 3\operatorname{arctg}(x^3) \qquad -۶۵۹$$

$$y' = (1 + x^4) \div (1 + x^6)$$

$$y = 1 \div \arccos^2(x^2) \qquad y' = 4x \div \sqrt{1 - x^4}\arccos^3(x^2) \qquad -۶۶۰$$

$$y = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{1 + x^2}) \qquad y' = 1 \div 2(1 + x^2) \qquad -۶۶۱$$

$$y = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha\sin x}{1 - \cos\alpha\cos x}\right) \qquad y' = \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha\cos x} \qquad -۶۶۲$$

$$y = \arccos\frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} \qquad y' = \frac{2n|x|^n}{x(x^{2n} + 1)} \qquad -۶۶۳$$

$$y = \arccos(\sin x^2 - \cos x^2) \qquad -۶۶۴$$

۶۶۵- $y = \arcsin(\sin x^2) + \arccos(\cos x^2)$

تذکر مهم: $\mathrm{Log}\,a$ منظور از لگاریتم عدد a درمبنای e میباشد.

تذکر مهم: $\log a$ منظور از لگاریتم عدد a درمبنای ۱۰ میباشد

تذکر: $\log_b a$ منظور از لگاریتم عدد a درمبنای b میباشد.

قاعده ۱۰۷	مشتق توابعی که بصورت $y = \mathrm{Log}\,u$ میباشند از فرمول $y' = \frac{u'}{u}$ بدست می‌آید.
قاعده ۱۰۸	مشتق توابعی که بصورت $y = \log_a u$ میباشند از فرمول $y' = \frac{u' \log_a e}{u}$ بدست می‌آید

۶۶۶- $y = \mathrm{Log}(1 - 2x) \qquad y' = -2 \div (1 - 2x)$

۶۶۷- $y = \mathrm{Log}(x^2 - 3x + 1) \qquad y' = (2x - 3) \div (x^2 - 3x + 1)$

۶۶۸- $y = \mathrm{Log}(\sin 3x) \qquad y' = 3\cos 3x \div \sin 3x = 3\cot g\, 3x$

۶۶۹- $y = \mathrm{Log}(\sin^2 x)$

۶۷۰- $y' = 3\cos x \sin^2 x \div \sin^2 x = 3\cot g\, x$

$y = \mathrm{Log}(\cos^4 x^2)$

$y' = -8x \sin x^2 \cos^3 x^2 \div \cos^4 x^2 = -8x\, tg\, x^2$

۶۷۱- $y = \mathrm{Lo}\, x\, tg^3 x$

$y' = 3 tg^2 x(1 + tg^2 x) \div tg^3 x = 3(1 + tg^2 x) \div tg\, x$

۶۷۲- $y = tg(x + \mathrm{Log}\, x)$

$y' = (1 + 1 \div x)[1 + tg^2(x + \mathrm{Log}\, x)]$

۶۷۳- $y = \log(x^2 - 3x + 1)$

$y' = (2x - 3)\log_{10} e \div (x^2 - 3x + 1)$

۶۷۴- $y = \log_2(\sin x - \cos 4x)$

$y' = (\cos x + 4\sin 4x)\log_2 e \div (\sin x - \cos 4x)$

۶۷۵- $y = \mathrm{Log}\, tg\, x \qquad y' = 2 \div \sin 2x$

$y = \mathrm{Log}\cos x \qquad y' = -tg\, x$

$y = \mathrm{Log}\sin^2 x \qquad y' = 2\cot g\, x$

۶۷۶- $y = \mathrm{Log}\, tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \qquad y' = \frac{1}{\cos x}$

۶۷۷- $y=\mathrm{Log}\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ $\quad y'=\frac{1}{\cos x}$

۶۷۸- $y=\mathrm{Log}(ax+b)$ $\quad y'=a\div(ax+b)$

۶۷۹- $y=\mathrm{Log}\frac{1+x}{1-x}$ $\quad y'=\frac{2}{1-x^2}$

۶۸۰- $y=\mathrm{Log}\frac{1+x^2}{1-x^2}$ $\quad y'=\frac{4x}{1-x^4}$

۶۸۱- $y=x\mathrm{Log}x$ $\quad y'=\mathrm{Log}x+1$

۶۸۲- $y=\mathrm{Log}^2x$ $\quad y'=(2\mathrm{Log}^2x)\div x$

۶۸۳- $y=\mathrm{Log}(x+\sqrt{1+x^2})$ $\quad y'=1\div\sqrt{1+x^2}$

۶۸۴- $y=\mathrm{Log}(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1})$

$y'=1\div\sqrt{x^2+x+1}$

۶۸۵- $y=\sin(\mathrm{Log}x)$ $\quad y'=[\cos(\mathrm{Log}x)]\div x$

۶۸۶- $y=tg(\mathrm{Log}x)$ $\quad y'=[1+tg^2(\mathrm{Log}x)]\div x$

۶۸۷- $y=\mathrm{Log}(\mathrm{Log}x)$ $\quad y'=1\div x\mathrm{Log}x$

۶۸۸- $y=\mathrm{Log}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ $\quad y'=\frac{1}{1-x^2}$

۶۸۹- $y=\mathrm{Log}\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-1}+x}$ $\quad y'=\frac{-2}{\sqrt{1+x^2}}$

۶۹۰- $y=\sqrt{a^2+x^2}-a\mathrm{Log}\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}$

$y'=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}$

۶۹۱- $y=\mathrm{Log}(x+\sqrt{x^2+a^2})-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}$

$y'=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}$

۶۹۲- $y=\mathrm{Log}\mathrm{Log}(3-2x^2)$

$y'=-4x^2\div(3-2x^2)\,\mathrm{Log}(3-2x^2)$

$$y=\mathrm{Log}\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}-x} \qquad y'=\frac{2}{\sqrt{x^2+a^2}} \qquad -۶۹۳$$

$$y=\frac{-\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\mathrm{Log}\ tg\ \frac{x}{2} \qquad y'=\frac{1}{\sin^3 x} \qquad -۶۹۴$$

$$y=\frac{1}{2}tg^2 x+\mathrm{Log}\cos x \qquad y'=tg^3 x \qquad -۶۹۵$$

$$y=\arccos \mathrm{Log}x \qquad y=-1\div x\sqrt{1-\mathrm{Log}^2 x} \qquad -۶۹۶$$

$$y=\mathrm{Log}\frac{a}{x}+\mathrm{Log}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} \qquad y'=-\frac{1}{x}+\frac{a}{2(a^2-x^2)} \qquad -۶۹۷$$

$$y=\mathrm{Log}\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}-\frac{1}{2}\mathrm{arc}tg x \qquad y'=\frac{x^2}{1-x^4} \qquad -۶۹۸$$

$$y=\frac{3x^2-1}{3x^3}+\mathrm{Log}\sqrt{1+x^2}+\mathrm{arc}tg x \qquad -۶۹۹$$

$$y'=\frac{x^5+1}{x^6+x^3}$$

$$y=x\,\mathrm{arc}tg x-\frac{1}{2}\mathrm{Log}(x^2+1) \qquad y'=\mathrm{arc}tg x \qquad -۷۰۰$$

$$y=\frac{1}{8}\mathrm{Log}\frac{x-1}{x+1}+\frac{\sqrt{2}}{16}\mathrm{Log}\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1} \qquad -۷۰۱$$

$$-\frac{1}{4}\mathrm{arc}\ tg x-\frac{\sqrt{2}}{8}\ \mathrm{arc}tg\ \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$$

$$y'=1\div(x^8-1)$$

$$y=\mathrm{Log}(1+\sin^2 x)-2\sin x\cdot\mathrm{arc}tg(\sin x) \qquad -۷۰۲$$

$$y'=-2\cos x\cdot\mathrm{arc}tg(\sin x)$$

$$y=\mathrm{Log}(\arccos\frac{1}{x}) \qquad y'=1\div 3x\sqrt{x-1}\,\arccos\frac{1}{\sqrt{x}} \qquad -۷۰۳$$

$$y=x\sin(\mathrm{Log}x-45^\circ) \qquad y'=\sqrt{2}\sin \mathrm{Log}x \qquad -۷۰۴$$

$$y=\frac{1}{2}\mathrm{Log}tg\frac{x}{2}-\frac{\cos x}{2\sin^2 x} \qquad y'=\frac{1}{\sin^3 x} \qquad -۷۰۵$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Log}\,\frac{tg\,\frac{x}{2}+2-\sqrt{3}}{tg\,\frac{x}{2}+2+\sqrt{3}} \qquad y'=\frac{1}{1+2\sin x} \qquad -706$$

$$y=\mathrm{Log}\arcsin x+\frac{1}{2}\mathrm{Log}^2 x+\arcsin \mathrm{Log}\,x \qquad -707$$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}+\frac{\mathrm{Log}\,x}{x}+\frac{1}{x\sqrt{1-\mathrm{Log}^2 x}} \qquad -708$$

$$y=\arc tg\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{x} \qquad y'=\frac{-1}{x(1+\mathrm{Log}^2 x)}$$

$$y=\frac{\sqrt{2}}{3}\arc tg\,\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{6}\mathrm{Log}\,\frac{x-1}{x+1} \qquad -709$$

$$y'=\frac{x^2}{x^4-x^2-2}$$

$$y=\mathrm{Log}\,\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}}+2\arc tg\sqrt{\sin x} \qquad -710$$

$$y'=\frac{2}{\cos x\,\sqrt{\sin x}}$$

$$y=\frac{1}{3}\mathrm{Log}\,\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arc tg\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \qquad -711$$

$$y'=1\div(x^3+1)$$

$$y=\mathrm{Log}\,\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}+2\arc tg\,\frac{x\sqrt{2}}{1-x_2} \qquad -712$$

$$y'=4\sqrt{2}\div(1+x^4)$$

$$y=\frac{3}{4}\mathrm{Log}\,\frac{x^2+1}{x^2-1}+\frac{1}{4}\mathrm{Log}\,\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{2}\arc tg\,x \qquad -713$$

$$y'=(x^2-2x)\div(x^4-1)$$

$$-714$$

$$y=\frac{1}{2}\mathrm{Log}\,(1+x)-\frac{1}{6}\mathrm{Log}(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arc tg\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

$$y'=1\div(1+x^3)$$

$$y = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \operatorname{Log}\sqrt{1-x^2} \qquad -۷۱۵$$

$$y' = \arcsin x \div \sqrt[3]{(-x^2)^2}$$

$$y = \operatorname{Log}\left[\frac{2}{x} + \operatorname{Log}\left(\frac{1}{x} + \operatorname{Log}\frac{1}{x}\right)\right] \qquad -۷۱۶$$

$$y = x[\sin(\operatorname{Log} x) - \cos(\operatorname{Log} x)] \qquad y' = 2\sin(\operatorname{Log} x) \qquad -۷۱۷$$

$$y = \operatorname{Log}(1 + \sin^2 x) - 2\sin x \cdot \operatorname{arctg}(\sin x) \qquad -۷۱۸$$

$$y' = -2\cos x \cdot \operatorname{arctg}(\sin x)$$

$$y = \operatorname{Log}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}} \qquad -۷۱۹$$

$$y' = -1 \div (1-x)\sqrt[3]{x}$$

$$y' = \frac{1}{4}\operatorname{Log}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} \qquad -۷۲۰$$

$$y' = 1 \div \sqrt[4]{1+x^4}$$

$$y = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\operatorname{Log}(1+x^2) - \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 \qquad -۷۲۱$$

$$y' = x^2 \operatorname{arctg} x \div (1+x^2)$$

$$-۷۲۲$$

$$y = \frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{Log}\frac{\sqrt{x^2+2}-x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2}+x\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$$

$$y' = 1 \div (x^4-1)\sqrt{x^2+2}$$

قاعده ۱۰۹	مشتق توابعی که بصورت $y = e^u$ میباشند از فرمول $y' = u'e^u$ بدست می‌آید.
قاعده ۱۱۰	مشتق توابعی که بصورت $y = a^u$ میباشند ازفرمول : $y' = u'a^u \operatorname{Log} a$ بدست می‌آید

$y=e^{\cos x}$	$y'=-\sin x\, e^{\cos x}$	۷۲۳
$y=e^{۴x+۵}$	$y'=۴e^{۴x+۵}$	۷۲۴
$y=e^{x^۲+x+۱}$	$y'=(۲x+۱)e^{x^۲+x+۱}$	۷۲۵
$y=۵e^{\sqrt{x}}$	$y'=\frac{۵}{۲\sqrt{x}}\, e^{\sqrt{x}}$	۷۲۶
$y=e^{\log x}$	$y'=\frac{۱}{x}\, e^{\log x}\, \frac{۱}{\mathrm{Log}\,۱۰}$	۷۲۷
$y=e^{\cos x}\sin x$	$y'=e^{\cos x}(\cos x-\sin^۲ x)$	۷۲۸
$y=a^{tg\,nx}$	$y'=n(۱+tg^۲ nx)a^{tg\,nx}\,\mathrm{Log}\,a$	۷۲۹
$y=e^x(۱-x^۲)$	$y'=e^x(۱-۲x-x^۲)$	۷۳۰
$y=\frac{e^x-۱}{e^x+۱}$	$y'=\frac{۲e^x}{(e^x+۱)^۲}$	۷۳۱

موارد استعمال مشتق

۱ـ برای پیدا کردن مختصات نقطه ماکزیمم ومی نیمم

قاعده ۱۱۱	هر گاه مشتق تابعی را مساوی صفر قراردهیم طول نقطه ماکزیمم یا می نیمم تابع بدست می آید که اگر آنرا در تابع بجای x قرار دهیم عرض نقطه ماکزیمم یا می نیمم منحنی بدست می آید.
قاعده ۱۱۲	اگر مشتق تابعی ریشه نداشته باشد تابع دارای ماکزیمم ومی نیمم نیست .
قاعده ۱۱۳	اگر مشتق تابعی از درجه دوم باشد وفقط یك ریشه مضاعف داشته باشد باز تابع دارای ماکزیمم ومی نیمم نیست وآن ریشه مضاعف طول نقطهٔ عطف منحنی است.

۲ـ برای تعیین اینکه تابع درچه فاصله‌ای از x صعودی یا نزولی است:

قاعده ۱۱۴

> برای تعیین اینکه تابع درچه فاصله‌ای از x صعودی یا نزولی است از آن مشتق میگیریم و علامت مشتق را طبق قواعد صفحهٔ ۷۷ بدست می‌آوریم اگر درفاصله x_1 و x_2 مشتق تابعی منفی باشد تابع در آن فاصله نزولی است واگر درفاصله x_1 و x_2 مشتق تابعی مثبت باشد تابع در آن فاصله صعودی است.

لطفاً ابتدا قواعد شماره ۷۴ و ۷۵ صفحه ۷۷ را مطالعه کنید:

اولاً ـ مختصات نقاط ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بدست آورده و تعیین کنید که درچه فواصلی صعودی یا نزولی هستند.

۷۳۲ ـ ک۶۵ ـ ص۵۰ ـ $y = 2x^2$

حل: $y' = 4x \to y' = 0 \to 4x = 0 \to x = 0$

$x = 0 \to y = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$4x$		$- -$	0	$+ +$	
y		نزولیست	0		صعودیست
		↘	Min	↗	

۷۳۳ ـ ک۶۶ ـ ص۵۰ ـ $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$

$y' = 3x^2 - 4x + 1 \to y' = 0 \to 3x^2 - 4x + 1 = 0$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{3} \to x = 1$ و $\frac{1}{3} \to y = -1$ و $\frac{-23}{27}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗	$-\frac{23}{27}$	↘	-1	↗	
			Max		Min		

۷۳۴ ـ ک۶۸ ـ ص۵۱ ـ $y = \frac{2x-1}{x+2} \to y' = \frac{5}{(x+2)^2}$

چون صورت و مخرج مشتق همیشه مثبت هستند پس y' بزرگتر از صفر است و تابع همواره صعودیست.

۷۳۵ ـ ک۶۹ ـ $y = \frac{x^2-1}{x^2+4x}$ $\qquad y' = \frac{4x^2+2x+4}{(x^2+4x)^2}$

چون $x^2+2x+4=0$ ریشه ندارد و علامت درجه دوم مثبت است پس صورت و مخرج کسر مثبت بوده و تابع همواره صعودیست.

۷۳۶ - ص ۷۲-

$$y=\frac{x^2}{x^2-4}\rightarrow y'=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$$

$$y'=0\rightarrow x^2(x^2-12)=0\rightarrow x=0 \text{ و } x=\pm 2\sqrt{3}$$

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		-2		0		2		$2\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2		+		+		+		+		+		+	
x^2-12		+	0	−		−		−		−	0	+	
y'		+	0	−		−	0	−		−	0	+	
y	$-\infty$	↗	$-3\sqrt{3}$	↘	$-\infty$	↘	$+\infty$	↘	$-\infty$ عطف	↘	$3\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

۷۳۷ - ص ۶۷-س ۵۱-

$$y=\sqrt{x-1} \text{ و } y'=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

در توابع اصم ابتداء باید تحقیق نمود که تابع بازاء چه مقادیری از x معین است و سپس علامت مشتق را در این فواصل بدست آورد. $x-1\geq 0\rightarrow x\geq 1$

بازاء $x\geq 1$ تابع معین است و در ازاء همین مقادیر مشتق مثبت است پس تابع بازاء $x\geq 1$ صعودیست.

۷۳۸ - ص ۷۰-

$$y=\sqrt{x^2-1} \text{ و } y'=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

تابع معین است $x\leq -1$ و $x\geq 1$ $\quad x^2-1\geq 0$

تابع بازاء $x=0$ نامعین است و ماکزیمم یا مینیمم ندارد $\rightarrow y'=0\rightarrow x=0$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		−	∞				∞	+	
y	$+\infty$	↘	0		نامعین		0	↗	$+\infty$

۷۳۹ - ص ۷۱-

$$y=x\sqrt{\frac{x-1}{1+x}} \text{ و } y'=\frac{x^2+x-1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$$

$$x^2+x-1=0\rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ و } \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

میدانیم تابع درفاصله $-1 < x < 1$ نامعین است.

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		-1		1		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
x^2+x-1		$+$	$\cdot$	$-$		$-$		$-$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$	$\cdot$	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	$\cdot$	$+$		$+$	
$\sqrt{x-1}$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
y'		$-$	$\cdot$	$+$	∞	$-$	∞	$-$	$\cdot$	$+$	
y	$-\infty$	$\searrow$	Min	$\nearrow$		نامعین		$\searrow$	Min	$\nearrow$	$+\infty$

$y=3x^4-6x^2-2$ — ۷۴۰

x	$-\infty$		-1		$\cdot$		1		$+\infty$
y'		$-$	$\cdot$	$+$	$\cdot$	$-$	$\cdot$	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$
			Min		Max		Min		

$y=-x^5+5x^3-3$ — ۷۴۱

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\cdot$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	$\cdot$	$+$	$\cdot$	$+$	$\cdot$	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-3(2\sqrt{3}+1)$	$\nearrow$	-3	$\nearrow$	$3(2\sqrt{3}+1)$	$\searrow$	$-\infty$
			Min		عطف		Max		

تمرین- درمسائل زیر تحقیق کنید بازاء چه مقادیری از پارامتر تابع صعودی یا نزولی ویا مقدارثابت ویا دارای ماکزیمم ومی نیمم است

$y=\frac{mx+3}{2x+m+1}$ $\qquad y'=\frac{m^2+m-6}{(2x+m+1)^2}$ — ۷۴۲

$m^2+m-6=0 \rightarrow m=2$ و -3

m	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
m^2+m-6		$+$	$\cdot$	$-$	$\cdot$	$+$	
		تابع $\nearrow$		مقدارثابت $\searrow$		مقدارثابت $\nearrow$	

$y=(m-1)x^3+2(m-1)x^2+mx+3m-4$ — ۷۴۳

$$y' = 3(m-1)x^2 + 4(m-1)x + m$$

قاعده ۱۱۵

برای تعیین علامت مشتق (دراین نوع مسائل که مشتق وباصورت مشتق تابع درجه‌دومی است از جنس x وپارامتر هم دارد باید علامت Δ وعلامت‌ضریب درجه‌دوم را بازاء مقادیر مختلف پارامتر در جدولی بدست‌آورد . در اینصورت حالات زیراتفاق می‌افتد .

تابع دارای یك‌ماکزیمم ویك‌می‌نیمم است $\Delta > 0$

تابع صعودیست $\Delta < 0$ و $a > 0$

تابع نزولیست $\Delta < 0$ و $a < 0$

تابع دارای یك‌ماکزیمم ویا دارای یك‌می‌نیمم است

$\Delta > 0$ و $a = 0$

$\Delta = 0$ و $a = 0$

$$\begin{cases} \Delta' = 4(m-1)^2 - 3m(m-1) = (m-1)(m-4) \to \Delta = 0 \to m = 1 \text{ و } 4 \\ a = 3(m-1) \to a = 0 \to m = 1 \end{cases}$$

m	$-\infty$		1		4		$+\infty$
Δ		+	0	−	0	+	
a		−	0	+		+	
تابع		یك ماکزیمم ویك می‌نیمم دارد		↗		یك‌ماکزیمم و یك‌می‌نیمم‌دارد	
			↗		↗		

۷۴۴ — شهریور ۴۶

$$y = \frac{x^2 + ax + 2a}{x^2 + ax - 2a} \quad , \quad a \neq 0$$

حل:

$$y' = \frac{-4a(2x+a)}{v^2}$$

بازاء جمیع مقادیر a فقط دارای یك‌ماکزیمم ویا دارای یك‌می‌نیمم‌است که مختصات آن‌بصورت $K\left(\frac{-a}{2} \text{ و } \frac{a-8}{a+8}\right)$ می‌باشد اگر $a > 0$ باشد این‌نقطه ماکزیمم‌است واگر

$a<0$ باشد این نقطه می‌نیمم است.

قاعده ۱۱۶

اگر مشتق تابعی بصورت $y'=ax+b$ ویا بصورت: $y'=\frac{ax+b}{v^2}$ باشد تابع دارای یك ماکزیمم ویا دارای یك می‌نیمم است اگر $a>0$ باشد می‌نیمم دارد واگر $a<0$ باشد ماکزیمم دارد.

۷۴۵- $y=\frac{2mx^2+x+3m}{x^2-1}$ $\quad y'=\frac{-x^2+10mx-1}{(x^2-1)^2}$

m	$-\infty$		$\frac{-1}{5}$		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
Δ		$+$	0	$-$ $-$	0	$+$	
a		$-$		$-$		$-$	
تابع		دارد Min و Max		نزولیست		دارد Min و Max	
			$\searrow$		$\searrow$		

۷۴۶- $y=\frac{mx^2+x+2}{x^2+x-2}$

$$y'=\frac{(m-1)x^2-4(m-1)x-4}{(x^2+x-2)^2}$$

m	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
Δ		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
a		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
تابع		Min و Max دارد		نزولیست				Min و Max دارد	
			$\searrow$				$\searrow$		

۷۴۷- $y=(mx+3)\div(2x+m+1)$

جواب: بازاء $m>2$ و $m<-3$ صعودیست وبازاء $-3<m<3$ نزولیست و بازاء $m=2$ و $m=-3$ تابع برابر مقدار ثابت است.

$y=(x+a+۲)\div(۲x+a)$ — ۷۴۸

بازاء $a>۲$ نزولی و بازاء $a<۲$ صعودیست و $a=۲$ مقدار ثابت است.

۳- برای پیدا کردن معادله مماس (در یك نقطه از منحنی نمایش هندسی تابع)

هرگاه طول یك نقطه ازمنحنی را در مشتق بجای x قراردهیم y' مساوی ضریب زاویه خط مماس برمنحنی در آن نقطه میشود یعنی مشتق بازاء طول نقطه تماس برابر ضریب زاویه خط مماس است این قاعده درتوابع درجه دوم ودرجه سوم ودرجه چهارم و... وکسری قابل استفاده می باشد.	قاعده ۱۱۷
هرگاه مختصات یك نقطه ازمنحنی را درمشتق بجای x و y قرار دهیم y' مساوی ضریب زاویه خط مماس برمنحنی در آن نقطه میشود، یعنی مشتق بازاء مختصات نقطه تماس برابر ضریب زاویه خط مماس است (این قاعده دردایره- بیضی- هذلولی- سهمی بطور کلی در توابع ضمنی قابل استفاده است) .	قاعده ۱۱۸
برای پیدا کردن معادله مماس: اگر درمسأله طول یا عرض یك نقطه ازمنحنی را بدهند ومعادله مماس برمنحنی را بخواهند ابتدا طول یا عرض نقطه را درتابع بجای x یا y قرار میدهیم تا عرض یا طول نقطه تماس محاسبه شود (یعنی مختصات نقطه تماس بدست آید) وسپس طبق قواعد بالا (۱۱۷) و (۱۱۸) ضریب زاویه خط مماس را حساب میکنیم وسپس معادله خط مماس را از فرمول $y-y_A=m_A(x-x_A)$ یا از فرمول $\frac{y-y_A}{x-x_A}=m_A$ بدست می آوریم.	قاعده ۱۱۹

تذکر: برای پیدا کردن ضریب زاویه خط مماس بردایره یا بیضی یا هذلولی یا سهمی (توابع ضمنی) ابتداء مشتق میگیریم واز y' جملاتی که y' دارند فاکتور میگیریم وسپس y' را برحسب x و y بدست می آوریم وبعد بجای x و y مختصات نقطه تماس را قرار می دهیم.

تذکر بسیار مهم: اگر ضریب زاویه خط مماس بردایره یا بیضی یا هذلولی یا سهمی در نقطه $K(a,b)$ برابر بینهایت شود در اینصورت معادله خط مماس بر منحنی بصورت $x=a$ خواهد شد.

۷۴۹ — ک۷۳ـ ص۵۱ـ معادله‌مماس برمنحنی نمایش $y=x^3-x^2$ را در نقطه‌ای بطول ۱ بنویسید.

حل:

$$x=1\to y=1-1=0\to A(1,0)$$
$$y'=3x^2-2x\to m_A=3(1)^2-2(1)=1\to m_A=1$$
$$y-y_A=m_A(x-x_A)\to y-0=1(x-1)\to y=x-1$$

۷۵۰ — ک۷۴ـ ص۵۱ـ معادلات مماس برمنحنی نمایش $y^2+x^2-4x=0$ را در نقطه‌ای بطول ۱ بنویسید.

حل:

$$x=1\to y^2+1-4=0\to y^2=3\to y=\pm\sqrt{3}$$

$A(1,\sqrt{3})$ و $B(1,-\sqrt{3})$ و $2y'y+2x-4=0$

$$y'=\frac{2-x}{y}\to m_A=\frac{2-1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{و} \quad m_B=\frac{2-1}{-\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}}{3}$$

معادله‌مماس در A $\quad y-y_A=m_A(x-x_A)\to 3y-x\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

معادله‌مماس در B $\quad y-y_B=m_B(x-x_B)\to 3y+x\sqrt{3}=-2\sqrt{3}$

۷۵۱ — ک ۷۵ـ ص۵۱ـ معادلات مماس برمنحنی نمایش $2x^2-y^2+2x-4y-1=0$ را در نقطه‌ای بعرض ۱ بنویسید.

حل:

$$y=1\to 2x^2-1+2x-4-1=0\to x^2+x-3=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}\to A\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2},1\right) \text{ و } B\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2},1\right)$$

$$4x-2y'y+2-4y'=0\to 2x-y'(y+2)+1=0$$

$$y'=\frac{2x+1}{y+2}\to m_A=\frac{\sqrt{13}}{3} \quad \text{و} \quad m_B=\frac{-\sqrt{13}}{3}$$

معادله‌مماس در A $\quad 6y-2\sqrt{13}x=-7+\sqrt{13}$

معادله مماس در B $\quad 6y+2\sqrt{13}x=-7-\sqrt{13}$

تذکر: بقیه مسائل مماس کتاب درسی درفصل مماس خارج ودرصفحه (۱۲۱) می‌باشد لطفاً قاعده شماره ۲۸ صفحه ۲۳ را مطالعه نمائید.

۷۵۲ — اولا مختصات نقاط A و B محل تلاقی خط $y=2x-1$ را بامنحنی نمایش تابع $y=\frac{3x^2+2x-4}{x+2}$ ثانیاً معادلات مماس برمنحنی را در این نقاط بنویسید. ثالثاً ـ تانژانت زاویه بین این دو مماس را بدست آورید.

حل:

$$\frac{2x+3x^2-4}{x+2}=2x-1$$

$x^2 - x - 2 = 0 \to x = 2$ و -1

$y = 2x - 1 \to x = 2 \to y = 3 \to A(2,3)$

$x = -1 \to y = -2 - 1 = -3 \to B(-1,-3)$

$y = \frac{3x^2 + 2x - 4}{x+2}$ و $y' = \frac{3x^2 + 12x + 8}{(x+2)^2}$

$m_A = \frac{12 + 24 + 8}{16} = \frac{11}{4}$ و $m_B = \frac{3 - 12 + 8}{1} = -1$

معادلات مماسها $4y - 11x + 10 = 0$ و $y + x + 4 = 0$

$tg\alpha = \pm \frac{m_A - m_B}{1 + m_A m_B} = \pm \frac{15}{7}$

خود را امتحان کنید

اولا مختصات نقاط A و B محل تلاقی منحنی نمایش توابع زیر را با خط مقابل آنها بدست آورید. ثانیاً- معادلات مماس بر منحنی را در نقاط A و B بنویسید. ثالثاً- $tg\alpha$ زاویه بین دو مماس را بدست آورید.

۷۵۳- $x^2 + y^2 - 3x + 2y = 13$ و $y = 2x + 1$

جواب: $A(-2,-3)$ و $B(1,3)$ و $tg\alpha = \pm 2/4$

$4y + 7x + 26 = 0$ و $8y - x = 23$

۷۵۴- $x^2 + 4y^2 + 8y - 5x = 26$ و $y = x - 1$

جواب: $A(3,2)$ و $B(-2,-3)$ و $tg\alpha = \pm 2 \cdot \div 392$

$24y + x = 51$ A معادله مماس در $16y + 9x + 66 = 0$

۷۵۵- $y^2 + 3y - 2x - 6 = 0$ و $y = x + 2$

جواب: $A(-1,1)$ و $B(-4,-2)$ و $tg\alpha = \pm 12$

$5y - 2x = 7$ و $y + 2x + 10 = 0$

۷۵۶- $x^2 + y^2 + 4x - 3y = 4$ و $y - 2x + 1 = 0$

جواب: $A(0,-1)$ و $B(1/2, 1/4)$ و $tg\alpha = \pm 156 \div 133$

$5y - 4x + 5 = 0$ و $y - 32x + 37 = 0$

۷۵۷- $x^2 + y^2 - 3x + y = 0$ و $x - 1 = 0$

جواب: $A(1,1)$ و $B(1,-2)$ و $tg\alpha \neq \pm 0/75$

$3y - x + 2 = 0$ و $3y + x + 5 = 0$

۷۵۸ — $x^2-y^2-3y=4$ و $x+2=0$

جواب: $tg\alpha=\pm 80\div 39$ و $B(-2,-4)$ و $A(-2,1)$

$5y+8x+11=0$ و $5y-8x+4=0$

۷۵۹ — $4x^2+y^2-20x=-20$ و $y+2=0$

جواب: $tg\alpha=\pm 1$ و $B(3,-2)$ و $A(2,-2)$

$9y+x=0$ و $y-x+5=0$

۷۶۰ — $x^2\quad y^2-4x+y=12$ و $y=2x+3$

جواب: $tg\alpha=\pm 2/4$ و $B(-2,-1)$ و $A(0,3)$

$7y-4x=21$ و $y+8x+17=0$

۷۶۱ — $y=x^2-x+2$ و $y=x+2$

جواب: $tg\alpha=\pm 2$ و $B(2,4)$ و $A(0,2)$

$y=-x+2$ و $y=3x-2$

۷۶۲ — $x^2+2y^2+8x=20$ و $y-x+2=0$

جواب: $tg\alpha=\pm 4$ و $B(-2,-4)$ و $A(2,0)$

$x=2$ A و معادله مماس در $4y-x+14=0$

۷۶۳ — بامحور xx' $4x^2-y^2+4y-3=0$

جواب: $\alpha=60^\circ$ و 120° $B(-0/5\sqrt{3},0)$ و $A(0/5\sqrt{3},0)$

$2y+2\sqrt{3}x=3$ و $2y-2\sqrt{3}x=3$

۴- برای پیدا کردن مختصات نقطه تماس

قاعده ۱۲۰	هر گاه درمشتق بجای y' ضریب زاویه خط مماس برمنحنی را قراردهیم طول نقطه یا نقاط تماس بدست می‌آید که اگر آنرا در تابع بجای x قراردهیم عرض نقاط تماس بدست می‌آید(درتوابع درجه‌دوم وسوم واصم ومثلثاتی قابل استفاده‌است).
قاعده ۱۲۱	هر گاه در مشتق بجای y' ضریب زاویه خط‌مماس برمنحنی‌را قراردهیم رابطه‌ای بین x و y یعنی مختصات نقطه تماس‌بدست می‌آید که اگر آنرا بامعادله‌منحنی حل کنیم‌مختصات‌نقاط‌تماس بدست می‌آید . (در دایره ـ بیضی ـ هذلولی ـ سهمی ـ وتوابع ضمنی)

۷۶۴ ـ تابع $y=x^3-3x^2+2x+5$ مفروض‌است نقاطی از آن را بدست‌آورید که ضریب‌زاویه مماس درآن‌نقاط برابر ۲ باشد.

حل: $y' = 3x^2 - 6x + 2$ و $m_{\text{مماس}} = y' = 2$

$2 = 3x^2 - 6x + 2 \rightarrow 3x(x-2) = 0 \rightarrow x = 0$ و 2

$x = 0 \rightarrow y = 5 \rightarrow A(0,5)$

$x = 2 \rightarrow y = 8 - 12 + 4 + 5 = 5 \rightarrow B(2,5)$

لطفاً قواعد شماره (۲۴ و ۲۵ و ۲۶ و ۲۷ و ۲۸ و ۲۹ و ۳۰) صفحات (۲۱ و ۲۲ و ۲۳ و ۲۴) را مطالعه فرمائید.

۷۶۵ــ نقاطی از منحنی نمایش تابع $y = x^3 - 2x + 3$ را بدست آورید که خطوط مماس در آن نقاط با جهت مثبت محور طولها زاویه 45° بسازد.

حل: $y' = 3x^2 - 2$ و $m_{\text{مماس}} = tg 45^\circ = 1$

$y' = 1 \rightarrow 1 = 3x^2 - 2 \rightarrow 3x^2 = 3 \rightarrow x = \pm 1$

$x = 1 \rightarrow y = 1 - 2 + 3 = 2 \rightarrow A(1,2)$

$x = -1 \rightarrow y = -1 + 2 + 3 = 4 \rightarrow B(-1,4)$

۷۶۶ــ نقاطی از دایره $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ را بدست آورید که خط مماس در آن نقاط موازی خط $2y + 4x = 7$ باشد.

حل: $m_{\text{مماس}} = m_{\text{خط}} = -4 \div 2 = -2$

$2x + 2y'y + 2 - 4y' = 0 \rightarrow x + y'y + 1 - 2y' = 0$

$y' = -2 \rightarrow x - 2y + 1 - 2(-2) = 0 \Rightarrow x = 2y - 5$

$x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$

$(2y-5)^2 + y^2 + 2(2y-5) - 4y = 0$

$4y^2 + 25 - 20y + y^2 + 4y - 10 - 4y = 0$

$5y^2 - 20y + 15 = 0 \rightarrow y^2 - 4y + 3 = 0$

$y = +3$ و $+1 \rightarrow x = 2y - 5$

$y = +3 \rightarrow x = +6 - 5 = +1 \rightarrow A(+1 \text{ و } +3)$

$y = +1 \rightarrow x = +2 - 5 = -3 \Rightarrow B(-3 \text{ و } +1)$

مختصات نقاطی از هر یك از توابع زیر را بدست آورید که مماس در آن نقاط با جهت مثبت محور طولها زاویه داده شده را بسازد.

۷۶۷ــ $y = x^2 - 3x + 1$ و $\alpha = \text{Arc}tg 3$

جواب: $A(3,1)$

۷۱۹ــ $y = (4x+3) \div (x-1)$ و $\alpha = -\text{Arc}tg(0/28)$

جواب: $A(6,3)$ و $B(-4,1)$

۷۶۹ــ $y = -x^3 + 3x^2 + x + 2$ $\alpha = 45^\circ$

جواب: $A(0,2)$ و $B(2,8)$

۷۷۰- $y=-x^2+2x-3 \qquad \alpha=135^\circ$

جواب: $A(1,-2)$ و $B(-1,-4)$

در هر یك از مسائل زیر معادله یك خط و یك منحنی داده شده است مختصات نقاطی از هر یك از منحنی‌های توابع زیر را بدست آورید که مماس در آن نقاط موازی خط روبروی آنها باشد.

۷۷۱- $y=-x^2+x-1$ و $y=5x+1$

جواب: $A(-2,-7)$

۷۷۲- $y=2x^3-15x^2+20x$ و $y+4x=1$

جواب: $A(1,7)$ و $B(4,-32)$

۷۷۳- $y=x^3-x^2-x+2$ و $2x+2y=0$

جواب: $A(0,2)$ و $B(2\div 3,32\div 27)$

۷۷۴- $x^2-y^2+3x-2y=1 \qquad 4x-2y+3=0$

جواب: $A\left(\frac{-3+2\sqrt{3}}{2},\frac{-2+\sqrt{3}}{2}\right)$ و $B\left(\frac{-3-2\sqrt{3}}{2},\frac{-2-\sqrt{3}}{2}\right)$

۷۷۵- $y=2x^3-15x^2+20x$ و $y+4x=1$

جواب: $A(4,-32)$ و $B(1,7)$

۷۷۶- $x^2+y^2=5$ و $y-2x-3=0$

جواب: $A(-2,1)$ و $B(2,-1)$

درهر یك ازمسائل زیر معادله یك خط ومعادله یك منحنی داده شده است مختصات نقاطی از هر یك از منحنی‌های تابع زیر را بدست آورید که مماس در آن نقاط عمود بر خط روبروی آنها باشد.

۷۷۷- $x^2+y^2-2x+2y-18=0$ و $2y+x=5$

جواب: $A(-3,1)$ و $B(5,-3)$

۷۷۸- $y=(1-2x)\div(3x-2)$ و $4x+y=5$

جواب: $A(0,-0/5)$ و $B(4\div 3,-5\div 6)$

۷۷۹- $x^2+y^2-4x+2y=15$ و $4y+2x=5$

جواب: $A(-2,1)$ و $B(6,-3)$

۷۸۰- $2x^2-y^2+4x-2y=3 \qquad 2y=x-5$

جواب: $A(-3,1)$ و $B(1,-3)$

۷۸۱- $y=(2x+3)\div(1-x) \qquad 2y+10x=13$

۷۸۲ — $۳x+۶y=۱۱$ $\quad$ $۲x^۲+y^۲-۴x-۲y=۲۴$

جواب: $A(۶و-۳)$ و $B(-۴و-۲)$

۷۸۳ — $۴y-x=۳$ $\quad$ $y=(۳x-۲)\div(۱-۲x)$

جواب: $A(۰/۷۵و-۰/۵)$ و $B(۰/۲۵و-۲/۵)$

۷۸۴ — $۶x+۲y=۷$ $\quad$ $y=(۲x+۱)\div(۱-x)$

جواب: $A(-۲و-۱)$ و $B(۴و-۳)$

۴° مماس بر منحنی از نقطه‌ای واقع در خارج آن

قاعده ۱۳۲

برای پیدا کردن معادلات مماس بر منحنی از نقطه A واقع در خارج آن یکی از راه‌حل‌ها این است که معادله خطی را که از نقطه A باضریب زاویه m میگذرد نوشته سپس این معادله را با معادله منحنی حل نمائیم وسپس تمام جملات را بیک طرف آورده و مرتب میکنیم و بعد دلتای (Δ) معادله را مساوی صفر قرار داده و m (ضریب زاویه خطوط مماس) را بدست می‌آوریم و سپس این مقدار را در معادله خط مماس بجای m قرار میدهیم.

قاعده ۱۳۳

طول نقطه تماس برابر $\frac{-b}{۲a}$ معادله فوق می‌باشد (یعنی $x=\frac{-b}{۲a}$ تماس) و در رابطه $\frac{-b}{۲a}$ بجای m مقادیر بدست آمده را قرار میدهیم و طول نقاط تماس را بدست می‌آوریم وسپس این مقادیر را در معادلات مماس‌ها یا در معادله منحنی قرار میدهیم و عرض نقاط تماس را حساب میکنیم.

۷۸۵ — ج۷۶ص۵۱ـ از نقطه‌ای واقع بر محور عرضها بعرض ۲ـ خطوطی بر منحنی نمایش $y=x^۲-۲x$ مماس کنید و معادلات مماسها را بنویسید.

حل: $A(۰ و -۲)$ مماس و $m=m$

$y-y_A=m(x-x_A)\rightarrow y=mx-۲$

$x^۲-۲x=mx-۲\rightarrow x^۲-(m+۲)x+۲=۰$

$\Delta=۰\rightarrow(m+۲)^۲-۸=۰\rightarrow m=-۲\pm۲\sqrt{۲}=-۲(۱\pm\sqrt{۲})$

$y=mx-۲\rightarrow y=-۲(۱\pm\sqrt{۲})x-۲$

۷۸۶ — ج۷۷ص۵۱ـ از نقطه $M(۲ و ۰)$ خطوطی بر منحنی نمایش

$x^2+y^2+2x+2y=-1$ مماس کنید ومعادلات مماسهارا بنویسید

$M(2 \text{ و } 0)$ مماس و $m=m \to y-y_M=m(x-x_M)$

$y=mx-2m$ و $x^2+y^2+2x+2y=-1$

$x^2+(mx-2m)^2+2x+2(mx-2m)=-1$

$(m^2+1)x^2-2(2m^2-m-1)x+4m^2-4m+1=0$

$\Delta=-8m^2+6m \Rightarrow \Delta=0 \Rightarrow -8m^2+6m=0$

$m=0$ و $\frac{3}{4} \Rightarrow y=0$ و $y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$

۷۸۷ - از نقطه $D(-1 \text{ و } 1)$ چندمماس برمنحنی $x^2+4y-2x+8y+1=0$ می‌توان رسم کرد معادلات آنهارا بنویسید .

۷۸۹- در تابع $y=x^2+x+a-1$ مقدار a را چنان تعیین کنید که مماسهایی که ازنقطه $A(0 \text{ و } 0/5)$ برمنحنی نمایش آن رسم می‌شوند برهم عمود باشند

$y-y_A=m(x-x_A) \to y+0/5=m(x-0)$

$y=mx-0/5 \to mx-0/5=x^2+x+a-1$

$x^2+x+a-1-mx+0/5=0 \to x^2+(1-m)x+a-0/5=0$

$\Delta=(1-m)^2-4(a-0/5)=1+m^2-2m-4a+2=0$

$m^2-2m-4a+3=0$

$m'm''=-1 \to \frac{c}{a}=-1$ پس $-4a+3=-1 \to a=1$

۷۸۸ - تابع $y=(x^2+1)\div x$ مفروض است برروی‌محور طولها نقاطی‌را بدست آورید که بتوان ازآنها دومماس عمودبرهم برمنحنی فوق رسم‌نمود خرداد۴۸

حل: طول یکی‌از نقاط α وضریب زاویه مماس‌را m فرض می‌کنیم‌معادله مماس را مینویسیم وبا معادله منحنی حل‌می‌نمائیم ودلتای‌آنرا مساوی صفرقرار میدهیم چون‌دو مماس برهم عمودند پس $mm'=-1$ میشود یعنی $\frac{c}{a}=-1$ میشودپس‌دلتا را مساوی ۱- قرار میدهیم α راحساب می‌کنیم

$y-0=m(x-\alpha) \to y=mx-m\alpha$

$\frac{x^2+1}{x}=mx-m\alpha \to (m-1)x^2-m\alpha x-1=0$

$\Delta=m^2\alpha^2+4m-4=0 \to \frac{c}{a}=-1 \to \frac{-4}{\alpha^2}=-1$

$\alpha^2=4 \to \alpha=\pm 2 \to A(2 \text{ و } 0)$ و $B(-2 \text{ و } 0)$

قاعده ۱۴۴	طول نقطه تماس را α فرض کرده و عرض آنرا برحسب α بدست میآوریم وسپس ازتابع مشتق گرفته ودر مشتق بجای x مساویش α راقرار میدهیم وسپس معادله خط مماس را برحسب α مینویسیم وبعد مختصات نقطه A رابجای x و y درمعادله مماس
طریقه دوم	قرار میدهیم و α را محاسبه می‌نمائیم و سپس در مختصات نقطه تماس ودر معادله مماس بجای α مقادیر بدست آمده راقرار رمیدهیم

۷۸۹ – تابع $y=9(1-x)\div x^3$ مفروض است ازمبدأ مختصات خطی بر منحنی فوق مماس کنید طول نقطهٔ تماس وضریب زاویهٔ خط مماس راحساب کنید. خرداد ۴۳

حل: اگرطول نقطهٔ تماس α فرض شود نتیجه میشود.

$$A_{\text{تماس}}\left[\alpha \text{ و } \frac{9(1-\alpha)}{\alpha^3}\right] \text{ و } y'=\frac{-9(-2x+3)}{x^4} \text{ و } m_{\text{تماس در } A}=\frac{-9(-2\alpha+3)}{\alpha^4}$$

$$y-y_A=m_A(x-x_A)\rightarrow y-\frac{9(1-\alpha)}{\alpha^3}=\frac{-9(-2\alpha+3)}{\alpha^4}(x-\alpha)$$

$$o(0 \text{ و } 0)\rightarrow 0-\frac{9(1-\alpha)}{\alpha^3}=\frac{-9(-2\alpha+3)(0-\alpha)}{\alpha^4}$$

$$1-\alpha=2\alpha-3\rightarrow\alpha=\frac{4}{3} \text{ و } A\left(\frac{4}{3} \text{ و } -\frac{81}{64}\right)$$

$$m_{\text{مماس}}=-243\div 256$$

۷۹۰ – تابع $y=\frac{(x-1)^2-9}{(x-1)^2}$ مفروض است اولاً ثابت کنید که خط $x=1$ محور تقارن منحنی است ثانیاً ثابت کنید که از نقطه $A(1 \text{ و } -2)$ می‌توان دو مماس AB و AC برمنحنی رسم کرد مختصات دو نقطه B و C را بدست آورید وبدون هیچگونه محاسبه‌ای ثابت کنید که AB و AC برابرند خرداد ۴۲

حل مبدأ جدید $o'(1 \text{ و } 0)$ ← محور تقارن $x=1$

$$Y+0=\frac{(X+1-1)^2-9}{(X+1-1)^2}\rightarrow Y=\frac{X^2-9}{X^2}$$

چون باتبدیل X به $-X$ معادله منحنی تغییر نمیکند پس محور عرضهای جدید یعنی خط $x=1$ محور تقارن است

ثانیاً ـ اگرطول نقطه تماس α فرض شود نتیجه میشود. $P\left(\alpha \text{ و } \frac{(\alpha-1)^2-9}{(\alpha-1)^2}\right)$

$$y'=\frac{18}{(x-1)^3} \text{ مماس و } m=y'=\frac{18}{(\alpha-1)^3}$$

$$y-\frac{(\alpha-1)^2-9}{(\alpha-1)^2}=\frac{18}{(\alpha-1)^3}(x-\alpha) \rightarrow \text{معادله مماس}$$

حال مختصات نقطه A باید در معادله مماس صدق کند

$$-2(\alpha-1)^3-(\alpha-1)^3+9(\alpha-1)=18(1-\alpha)$$

$$3(\alpha-1)^3-27(\alpha-1)=0 \rightarrow 3(\alpha-1)(\alpha^2-2\alpha-8)=0$$

$$\alpha=1 \text{ و } 4 \text{ و } -2$$

چون خط $x=1$ مجانب منحنی است پس بازاء $\alpha=1$ خط مماس بر مجانب منطبق است و بازاء $\alpha=4$ و $\alpha=-2$ نقاط تماس $B(4,0)$ و $C(-2,0)$ میشوند چون نقطه $A(1,-2)$ روی محور تقارن $x=1$ می‌باشد و B و C قرینه یکدیگر نسبت به خط $x=1$ می‌باشند پس $AB=AC$ میشود.

۷۹۱ — تابع $y=x-2\sqrt{x}$ مفروض است معادلات مماسهائی را که از نقطه $A(0,-2)$ بر منحنی فوق رسم میشوند بنویسید و مختصات نقاط تماس را حساب کنید.

(شهریور ۴۵)

حل: اگر طول نقطه تماس α فرض شود نتیجه میشود $P(\alpha,\alpha-2\sqrt{\alpha})$

$$y'=1-\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \rightarrow \text{مماس } m=\frac{\sqrt{\alpha}-1}{\sqrt{\alpha}}$$

$$y-\alpha+2\sqrt{\alpha}=\frac{\sqrt{\alpha}-1}{\sqrt{\alpha}}(x-\alpha) \rightarrow \text{معادله مماس در } P$$

حال باید مختصات نقطه A در این معادله صدق کند

$$-2\sqrt{\alpha}-\alpha\sqrt{\alpha}+2\alpha=-\alpha\sqrt{\alpha}+\alpha \rightarrow \alpha=2\sqrt{\alpha}$$

$$\alpha^2-4\alpha=0 \rightarrow \alpha=0 \text{ و } 4 \rightarrow P(0,0) \text{ و } P'(4,0)$$

در معادله مماس بجای α مقادیر بدست آمده را قرار میدهیم.

معادلات دو مماس $x=0$ و $2y-x+4=0$

۷۹۲ — تابع $y=(x^2-x)\div(x^2-x-2)$ مفروض است ثابت کنید که دو نقطه بر منحنی میتوان یافت که مماس بر آنها محور عرضها را در نقطه‌ای بعرض یك قطع کند و طولهای دو نقطه را پیدا کنید.

خرداد ماه ۴۰

قاعده ۱۲۵

برای پیدا کردن یك پارامتر وقتی که یك خط برمنحنی (درجه دوم - دایره - بیضی - هذلولی - سهمی - هموگرافیك وبعضی از توابع کسری) مماس باشد . راه حل این است که معادله خط را بامعادله منحنی حل کرده و سپس طرفین وسطین نموده بعد تمام جملات را بیك طرف آورده وخلاصه نموده وبرحسب x مرتب مینمائیم و بعد مبین معادله بدست آمده را تشکیل داده و مساوی صفر قرار میدهیم وپارامتر را بدست می‌آوریم.

۷۹۳ - منحنی (C) بمعادله $y=\frac{ax+1}{x-2}$ و خط $y=2x-1$ مفروض است a را چنان تعیین کنید که خط برمنحنی مماس باشد.

حل: معادله خط را بامعادله منحنی حل مینمائیم . $\frac{ax+1}{x-2}=2x-1$

$$2x^2-4x-x+2=ax+1\rightarrow 2x^2-5x-ax+1=0$$

$$2x^2-(a+5)x+1=0\rightarrow \Delta=b^2-4ac=0$$

$$(a+5)^2-8=0\rightarrow a^2+25+10a-8=0$$

$$a^2+10a+17=0\rightarrow a=-5\pm 2\sqrt{2}$$

۷۹۴ - تابع $y=\frac{2x-a+2}{1-x}$ خط $y-x=3$ مفروض است a را چنان تعیین کنید که خط برمنحنی مماس باشد وسپس مختصات نقطه تماس را بدست آورید .

حل:

$$y-x=3\rightarrow y=x+3$$

$$x+3=\frac{2x-a+2}{1-x}\rightarrow x-x^2+3-3x=2x-a+2$$

$$x^2+4x-a-1=0\rightarrow \Delta'=b'^2-ac=0$$

$$4+a+1=0\rightarrow a=-5 \text{ تماس و } x=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2}=-2$$

$$y=x+3=-2+3=1 \text{ پس } A(-2,1)$$

۷۹۵ - منحنی c بمعادله $y=x^2+mx+1$ وخط Δ بمعادله $y-2x+1=0$ مفروض است m را چنان تعیین کنید که خط برمنحنی مماس شود .

$$y-2x+1=0\rightarrow y=2x-1$$

$$x^2+mx+1=2x-1\rightarrow x^2+(m-2)x+2=0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \rightarrow (m-2)^2 - 8 = 0 \rightarrow m^2 - 4m + 4 - 8 = 0$$

$$m^2 - 4m - 4 = 0 \rightarrow m = 2 \pm 2\sqrt{2}$$

قاعده ۱۳۶

وقتی در مسأله میگویند پارامتر را چنان تعیین کنید که خط بر منحنی مماس باشد معادله خط را با معادله منحنی حل نموده و بر حسب x مرتب میکنیم وشرط ریشه مضاعف را در آن عمل مینمائیم یعنی دلتای معادله بدست آمده را مساوی صفر قرار میدهیم و پارامتر را حساب می کنیم .

۷۹۶ – تابع $y = (x-1)(x^2+x+1-m)$ مفروض است m را چنان تعیین کنید که منحنی بر محور xها مماس باشد.

حل: $y = 0 \rightarrow (x-1)(x^2+x+1-m) = 0$

برای اینکه منحنی بر محور طولها مماس باشد باید معادله فوق دارای یک ریشه مضاعف و یک ریشه ساده باشد اگر این ریشه مضاعف جواب معادله $x-1=0$ یعنی $x=1$ باشد این ریشه باید در معادلهٔ دوم هم صدق کند.

$$x^2+x+1-m = 0 \rightarrow 1+1+1-m = 0 \rightarrow m = 3$$

واگر $x=1$ جواب مضاعف نباشد معادله $x^2+x+1-m=0$ باید دارای ریشه مضاعف باشد یعنی باید دلتای آن مساوی صفر باشد.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(1-m) = 4m - 3$$

$$\Delta = 0 \rightarrow 4m - 3 = 0 \rightarrow 4m = 3 \rightarrow m = 0/75$$

۷۹۷ – تابع $y = x^3 + x^2 + (a+1)x + 2$ مفروض است a را چنان تعیین کنید که منحنی نمایش تابع فوق بر خط $y = 3x + 4$ مماس باشد .

$$x^3 + x^2 + (a+1)x + 4 = 3x + 4 \rightarrow x(x^2+x+a-2) = 0$$

اگر ریشه مضاعف $x=0$ باشد نتیجه می‌شود:

$$x^2+x+a-2 = 0 \rightarrow 0+0+a-2 = 0 \rightarrow a = 2$$

اگر $x=0$ ریشه مضاعف نباشد باید دلتای معادله دوم مساوی صفر باشد.

$$x^2+x+a-2 = 0 \rightarrow \Delta = 1 - 4a + 8 = 0 \rightarrow a = 2/25$$

در هر یک از مسائل زیر معادله یک منحنی و مختصات یک نقطه داده شده است معادلات مماس و مختصات نقاط تماسی را که می توان از آن نقطه بر منحنی رسم نمود بدست آورید

۷۹۸ – $x^2 + y^2 + 4x = -3$ و $A(0,1)$

$y = 1$ و $3y - 4x = 1$ و $B(-2,1)$ و $C(-1/2, -0/6)$

۷۹۹- $4x^2+y^2-4y+2=0$ و $O(0,0)$

$y=\pm 2x$ و $A(0/8\ldots)$ و $B(-0/5,1)$

۸۰۰- $9x^2+y^2-18x=$ و $M(2/5,0)$

$5y\pm 6\sqrt{5}x=\pm 5\sqrt{5}$ و $A(5\div 3\ \ -\sqrt{5})$

۸۰۱- $y=x^2+x+1$ و $A(0,-3)$

$y=5x-3$ و $y=-3x-3$ و $B(2,7)$ و $C(-2,4)$

۸۰۲- $y=x^2-6x+5$ و $M(2\ ,-3)$

$y=-3x+3$ و $y=-12x+3$ و $A(1,0)$ و $B(4,45)$

۸۰۳- $y=(x-1)^2$ و $Q(1,2)$

$y=3x-1$ و $A(0,-1)$

۸۰۴- $y=(x+2)\div(x+1)^2$ و $P(-1,1)$

$y=x+2,27y+5x=22$ و $A(-2,0)$ و $B(2,4\div 9)$

m را چنان تعیین کنید که منحنی هریك ازتوابع زیر برمحورطولها مماس باشند

۸۰۵- $y=(1-x)(x^2+mx+1)$ $\quad m=\pm 2$

۸۰۶- $y=(2x-1)(x^2+mx-3)$ $\quad m=4,0$ و -12

۸۰۷- $y=(mx+2m-3)(x^2-3x+2)$ $\quad m=0/75,1$

قاعده ۱۲۷

زاویه بین یك منحنی ویك خط زاویه‌ایست که خط بامماس درنقطه تقاطع خط ومنحنی تشکیل میدهد پس برای بدست آوردن زاویه بین یك خط ویك منحنی ابتداء معادلات آنها را باهم حل می‌نمائیم ومختصات محل تلاقی را بدست می‌آوریم و سپس مشتق گرفته و ضریب زاویه مماس برمنحنی‌را بدست می‌آوریم وبعد ازفرمول $tg\alpha=\pm\frac{m_{\text{مماس}}-m_{\text{خط}}}{1+m_{\text{مماس}}\times m_{\text{خط}}}$ استفاده می‌نمائیم .

قاعده ۱۲۸

زاویه بین دومنحنی زاویه‌ای‌است که دومماس بر دو منحنی درنقطه تقاطع تشکیل میدهند وبرای بدست آوردن آن ابتداء مختصات محل تلاقی وسپس ضریب زاویه مماس برهریك از منحنی‌ها را دریکی ازنقاط تقاطع بدست آورده وبعدازفرمول tg زاویه بین دوخط استفاده می‌نمائیم .

اولاً- مختصات نقاط تلاقی هریك ازدومنحنی یاخط ومنحنی نمایش توابع زیر راکه‌روبروی‌هم‌نوشته‌شده‌اندبدست‌آورید . ثانیاً- زاویه بین دو منحنی یازاویه بین‌خط ومنحنی را دریکی از نقاط تلاقی بدست‌آورید.

۸۰۸- $۴x^۲-y^۲=۱$ و $y^۲-x^۲=۱$

A و $B(\frac{+\sqrt{۶}}{۳}$ و $\frac{\pm\sqrt{۱۵}}{۳})$ C و $D(\frac{-\sqrt{۶}}{۳}$ و $\pm\frac{\sqrt{۱۵}}{۳})$.

$tg\alpha=\pm۳\sqrt{۱۰}\div۱۳$

۸۰۹- $y=x^۲+۳x-۳$ و $y=-x^۲+۳x+۵$

$A(۲$ و $۷)$ و $B(-۲$ و $-۵)$ و $tg\alpha=\pm\frac{۴}{۳}$

۸۱۰- $x^۲+y^۲+۲y=۱۷$ و $y=x-۱$

$A(۳$ و $۲)B(-۳$ و $-۴)$ و $tg\alpha=\pm\infty\Rightarrow\alpha=۹۰^\circ$

۸۱۱- تابع $y=\frac{۲x^۲+m^۲}{x-۲m}$ مفروض است ثابت‌کنید کلیه منحنی‌هائیکه بازاء مقادیرمختلف m بدست‌می‌آیند بردوخط ثابت‌مماسندومعادلات آن‌هارا بدست‌آورید .

حل: فرض‌میکنیم خط $y=ax+b$ معادله مماس‌استمعادله‌آن را بامعادله منحنی حل‌مینمائیم و دلتای آن‌را مساوی‌صفرقرارمیدهیم.

$$\frac{۲x^۲+m^۲}{x-۲m}=ax+b$$

$$۲x^۲+m^۲=ax^۲+bx-۲amx-۲bm$$

$$(۲-a)x^۲+(۲am-b)x+m^۲+۲bm=۰$$

$$=۰\rightarrow m^۲(۴a^۲-۸+۴a)-۴m(ab-۲ab+۴b)+b^۲=۰$$

شرط اینکه Δ بازاء جمیع‌مقادیرm مساوی‌صفرباشد بایدروابط زیر برقرارباشد:

$$\begin{cases}۴a^۲+۴a-۸=۰\rightarrow a=۱ و -۲\\ ab+۴b-۲ab=۰\\ b^۲=۰\rightarrow b=۰\end{cases}$$

معادلات آن دوخط ثابت $y=x$ و $y=-۲x$

۸۱۲- دوتابع $y_۱=\frac{۳x}{۲x+۴}$ و $y_۲=(m+۱)x^۲+mx$ مفروضند.

مقدار m را طوری تعیین‌کنید که اولا منحنی دو تابع فوق یکدیگر را درمبدأ مختصات‌بزاویه ۴۵° درجه‌قطع کند (زاویه بین دومماس درمبدأ ۴۵° شود). ثانیاً- منحنی نمایش دوتابع فوق درمبدأ مختصات برهم‌عمودباشند.

حل:

$$\begin{cases} y_1' = \frac{12}{(2x+4)^2} \rightarrow \text{درمبدأ } m_1 = \frac{3}{4} = 0/75 \\ y_2' = 2(m+1)x + m \rightarrow \text{مماس درمبدأ } m_2 = m \end{cases}$$

$$tg\alpha = \pm \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \rightarrow tg45^\circ = \pm \frac{m - 0/75}{1 + 0/75m} \rightarrow m = 7 \text{ و } \frac{-1}{7}$$

ثانیاً ـ

$$m_1 m_2 = -1 \rightarrow \frac{3}{4} \times m = -1 \rightarrow m = -\frac{4}{3}$$

۸۱۲ ـ تابع $y = (x^2 - 6x + 10)^a + 3x - 5$ مفروض است. اولاً ـ ثابت کنید کلیه منحنی‌هائیکه بازاء مقادیر مختلف a بدست می‌آیند از یك نقطه ثابت میگذرند و در این نقطه بر خط ثابتی مماسند معادله مماس را بنویسید.

حل: وقتی که حاصل $(x^2 - 6x + 10)$ مساوی یك شود a هر چقدر باشد مقدار تابع تغییر نمیکند.

$$x^2 - 6x + 10 = 1 \rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x-3)^2 = 0 \rightarrow x = 3$$

$$y = (x^2 - 6x + 10)^a + 3x - 5 \rightarrow x = 3 \rightarrow y = 1 + 9 - 5 = 5 \rightarrow A(3و5)$$

$$y' = a(2x-6)(x^2 - 6x + 10)^{a-1} + 3 \text{ و } m = 0 + 3 = 3 \text{ مماس}$$

چون نقطه A بازاء جمیع مقادیر a ثابت است و مقدار ضریب زاویه مماس در نقطه A به a بستگی ندارد و مساوی ۳ می‌باشد پس کلیه منحنی‌ها بر خط ثابتی مماسند

$$y - y_A = m(x - x_A) \rightarrow y = 3x - 4$$

قاعده ۱۲۹	خط قائم برمنحنی خطی است که برمماس برمنحنی در نقطه تماس عمود میشود پس $m \times m_{\text{مماس}} = -1$ قائم
قاعده ۱۳۰	برای پیدا کردن ضریب زاویه قائم برمنحنی ابتداء ضریب زاویه مماس را بدست می‌آوریم و سپس ضریب زاویه قائم را بدست می‌آوریم و یا $m_{\text{قائم}} = \frac{-1}{y'}$

۸۱۳ ـ ک۶۹ ـ ص۵۱ ـ معادله قائم برمنحنی $y = x^2 - 4x + 1$ را در نقطه‌ای بطول ۱ بنویسید.

حل:

$$x = 1 \rightarrow \text{و } y = 1 - 4 + 1 = -2 \rightarrow A(1و-2)$$

$$y' = 2x - 4 \rightarrow m_{\text{قائم}} = \frac{-1}{y'} = \frac{-1}{2x-4} = \frac{-1}{2-4} = \frac{1}{2}$$

$y - y_A = m(x - x_A) \rightarrow ۲y - x + ۵ = ۰$

۸۱۴ – ک ۸۰ـ معادله قائم بر منحنی $x^۲ + y^۲ = ۴$ را در نقطه‌ای بطول ۱ بنویسید.

حل: $\Delta = ۱ \rightarrow ۱ + y^۲ = ۴ \rightarrow y^۲ = ۳ \rightarrow y = \pm\sqrt{۳}$

$A(۱ و \sqrt{۳})$ و $B(۱ و -\sqrt{۳})$ و $۲x + ۲y'y = ۰$

$y' = \frac{-x}{y} \rightarrow$ قائم $m = \frac{-۱}{y'} = \frac{y}{x} = \frac{\pm\sqrt{۳}}{۱} = \pm\sqrt{۳}$

$y - y_A = m(x - x_A) \rightarrow y - x\sqrt{۳} = \sqrt{۳}$

$y - y_B = m(x - x_B) \rightarrow y + x\sqrt{۳} + \sqrt{۳} = ۰$

۸۱۵ – ک ۸۱ـ معادله قائم بر منحنی $y = \frac{۳\sin x}{\sin x + ۲}$ را در نقطه‌ای بطول $\frac{\pi}{۶}$ بنویسید.

حل: $x = \frac{\pi}{۶} \rightarrow y = \frac{۳\sin ۳۰^\circ}{\sin ۳۰^\circ + ۲} = \frac{۳}{۵} \rightarrow A(\frac{\pi}{۶} و \frac{۳}{۵})$

$y' = \frac{۶\cos x}{(\sin x + ۲)^۲}$ و $x = \frac{\pi}{۶} \rightarrow$

قائم $m = \frac{-(\sin ۳۰^\circ + ۲)^۲}{۶\cos ۳۰^\circ} = \frac{-۲۵\sqrt{۳}}{۳۶}$

$y - y_A = m(x - x_A) \rightarrow y = \frac{-۲۵\sqrt{۳}}{۳۶}x + \frac{۲۵\sqrt{۳}}{۲۱۶} + \frac{۳}{۵}$

۸۱۶ – ک ۸۲ـ ص ۵۱ـ معادله قائم بر منحنی $x^۲ + y^۲ + ۴x - ۲y = ۰$ را در نقطه $M(۰ و ۲)$ را بنویسید.

حل: چون مختصات نقطه M در معادله منحنی صدق میکند پس نقطه M روی منحنی است و کافی است که ضریب زاویه آن را بدست آوریم $۲x + ۲y'y + ۴ - ۲y' = ۰$

$-y'(۱ - y) = -x - ۲ \rightarrow y' = \frac{x + ۲}{۱ - y} \rightarrow$ مماس $m = \frac{۰ + ۲}{۱ - ۲} = -۲$

قائم $m = -۱ \rightarrow -۲ \times$ قائم $m = -۱ \rightarrow$ قائم $m = ۰/۵$ $\times$ مماس m

$y - y_M = m(x - x_M) \rightarrow y = ۰/۵x + ۲$

۸۱۷ – ک ۸۳ـ ص ۵۱ـ معادله قائم بر منحنی $y = (x - ۱) \div (x + ۱)$ را از نقطه $M(۲ و -۲)$ بنویسید.

پای قائم $x=\alpha \rightarrow y=\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$

$y'=\frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow$ قائم $m=\frac{-(\alpha+1)^2}{2}$

$y-\frac{\alpha-1}{\alpha+1}=-\frac{(\alpha+1)^2}{2}(x-\alpha)$

$-2-\frac{\alpha+1}{\alpha+1}=\frac{-(\alpha+1)^2}{2}(2-\alpha)$

$\alpha^3+\alpha^2-2\alpha^2+\alpha=0 \rightarrow \alpha=0$ و 1 و $-1\pm\sqrt{2}$

$A(0$ و $-1)$

$B(1,0)$ و $C(-1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$ و $D(-1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$

۸۱۸ – ازمبدأ مختصات قائمی برمنحنی $y^2=x^2-x+1$ رسم کنید ومختصات برخورد آنرا بامنحنی بدست آورید. خرداد ۳۷

حل : $y'=\frac{2x-1}{2y}$، پای قائم $A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ قائم $m=\frac{-2\beta}{2\alpha-1}$

ازطرفی چون خط قائم ازمبدأ میگذرد $m=\frac{\beta}{\alpha}$ قائم میباشد پس

$\frac{-2\beta}{2\alpha-1}=\frac{\beta}{\alpha} \rightarrow 2\alpha-1=-2\alpha \rightarrow \alpha=\frac{1}{4}$

$y^2=x^2-x+1 \rightarrow y^2=\frac{1}{16}-\frac{1}{4}+1=\frac{13}{16} \rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{13}}{4}$

پاهای قائم $A(1\div 4, \sqrt{13}\div 4)$ و $B(1\div 4, -\sqrt{13}\div 4)$

۸۱۹ – تابع $y=\pm\sqrt{x^2-2x}$ مفروض است ثابت کنید که دوقائم باضریب زاویه m برمنحنی میتوان رسم کرد اگر A و B موقعهای دوقائم باشند ثابت کنید که نقطه M وسط خط BA همواره برخط ثابتی حرکت می کند معادله این خط را پیدا کنید . خرداد ۳۸

حل: $y'=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$ و $\frac{-1}{y'}=\frac{\sqrt{x^2-2x}}{1-x}=m$

$x^2-2x=m^2(1+x^2-2x)$

$(m^2-1)x^2-2(m^2-1)x+m^2=0$

اگر Δ' معادله فوق بزرگتر ازصفر باشد دوقائم میتوان رسم کرد.

$$\Delta' > 0 \rightarrow (m^2-1)^2 - m^2(m^2-1) > 0 \rightarrow -m^2+1 > 0$$

پس بازاء $-1 < m < 1$ می‌توان دو قائم برمنحنی رسم کرد ومختصات M وسط AB

$$x_M = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{-b}{2a} = \frac{+2(m^2-1)}{2(m^2-1)} = +1$$ عبارتست از

چون طول نقطه M همواره مساوی $+1$ می‌باشد پس نقطه M همیشه روی خط $x=+1$ است

۸۲۰- تابع $y=(x-1)(2x+1)^2$ مفروض است نقاطی ازمنحنی آن‌را پیدا کنید که قائمشان باجهت مثبت محور طولها زاویه $135°$ تشکیل دهد. شهریور ۳۸

حل: $m = tg135° = -1$ قائم و $\alpha = 135°$ و $y' = 12x^2-3$

$$m = \frac{-1}{y'} \rightarrow -1 = \frac{-1}{12x^2-3} \rightarrow 12x^2 = 4 \rightarrow x^2 = \frac{1}{3}$$ قائم

$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$A\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ و } \frac{-9-5\sqrt{3}}{9}\right) \text{ و } B\left(\frac{-\sqrt{3}}{3} \text{ و } \frac{-9+5\sqrt{3}}{9}\right)$$

۸۲۱- تابع $y=\frac{x^2+1}{x}$ مفروض است ازمبدأ مختصات دوخط برمنحنی نمایش آن عمود می‌کنیم مطلوبست محاسبه مختصات پای این عمودها. خرداد ماه ۴۸

$$y' = \frac{x^2-1}{x^2} \text{ و } y = \frac{\alpha^2+1}{\alpha} \text{ و } x=\alpha$$ پای عمود

$$m = \frac{-\alpha^2}{\alpha^2-1} \rightarrow y - \frac{\alpha^2+1}{\alpha} = \frac{-\alpha^2}{\alpha^2-1}(x-\alpha)$$ قائم معادله قائم

مختصات مبدأ باید در آن صدق کند $-(\alpha^2-1) = \alpha^2 \rightarrow 2\alpha^2 = 1$

$$\alpha = \pm\frac{\sqrt[4]{8}}{2} \text{ و } A \text{ و } A'\left|\begin{matrix}\alpha \\ \frac{\alpha^2+1}{\alpha}\end{matrix}\right. \rightarrow A\left|\begin{matrix}0/5\sqrt[4]{8} \\ 0/5\sqrt[4]{2}(2+\sqrt{2})\end{matrix}\right.$$

$$A'\left|\begin{matrix}-0/5\sqrt[4]{8} \\ -0/5\sqrt[4]{2}(2+\sqrt{2})\end{matrix}\right.$$

۸۲۲- تابع $y=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ مفروض است از نقطه $M(1 \text{ و } \frac{1}{2})$ خط MN را بر

منحنی نمایش آن عمود میکنیم (N پای عمود است) ثابت کنید طول نقطه N از معادله: $(x-1)^3+(x-1)^2=2$ بدست می‌آید. خرداد ۴۷

حل: $y'=\frac{2}{(x-1)^2}$ و $y=\frac{\alpha^2-2\alpha}{(\alpha-1)^2}$ و $x=\alpha$ پای عمود

$$m=\frac{-(\alpha-1)^3}{2} \text{ قائم}$$

$$y-\frac{\alpha^2-2\alpha}{(\alpha-1)^2}=\frac{-(\alpha-1)^3}{2}(x-\alpha) \text{ معادله قائم}$$

اگر مختصات M را در معادله قائم قرار دهیم و خلاصه کنیم نتیجه میشود.

$$(\alpha-1)^2-2(\alpha^2-2\alpha)=-(\alpha-1)^5(1-\alpha)$$

$$(\alpha-1)^2-2(\alpha^2-2\alpha+1-1)=(\alpha-1)^6$$

$$(\alpha-1)^6+(\alpha-1)^2-2=0$$

برای حل این معادله $(\alpha-1)^2=K$ فرض می‌کنیم.

۸۲۳ - تابع $y=x^3+ax^2+b$ مفروض است ضرائب a و b را طوری تعیین کنید که قائم بر منحنی در نقطه N بطول ۲ واقع بر آن خط (D) بمعادله $24y=-x+2$ باشد شهریور ۴۶

حل: پای قائم $x=2\to 24y=-2+2\to y=0\to N(2,0)$

قائم $m=-1\div 24\to$ مماس $m=24$ و $y'=3x^2+2ax$

$$\begin{cases} 24=32+2a(2)\to a=-2 & \text{مشتق} \\ 0=16+4a+b\to 16-8+b=0\to b=-8 & \text{تابع} \end{cases}$$

در هر یک از مسائل زیر معادله یک منحنی و مختصات یک نقطه یا طول یا عرض یک نقطه از آن داده شده است معادلات قائم بر منحنی نمایش آنها را در آن نقاط بنویسید

۸۲۴ - شهریور ۴۸ $x^3-2xy+2y^2-4y=0$ و $A(0,2)$

جواب: $y=-x+2$

۸۲۵ - خرداد ۴۰ $x=4$ $y=x\sqrt{x}-1$

جواب: $2y+x=25$

۸۲۶ - $x=\frac{1}{2}$ $y=(x^2-1)\div(x^2+1)$

جواب: $320y+250x+67=0$

درهر یك ازمسائل زیرمعادله یك منحنی ومختصات یك نقطه درخارج آن داده شده است معادلات قائم بر منحنی ومختصات پای قائم را بدست آورید.

۸۲۷- $A(-۳و۰)$ $y=۵۴\div(x^۲+۸x+۹)$

جواب: $N'(-۹و۳)$ و $N(۱و۳)$ و $۵y+۳x+۱۲=۰$ و $۵y=۳x+۱۲$

۸۲۸- $O(۰و۰)$ $y=۱۶\div(x^۲+۳)$

جواب: $N'(\pm\sqrt{۵}و۲)$ و N و $y=\pm ۰/۴\times\sqrt{۵}x$

۸۲۹- $A(-۰/۵و۳)$ $y=۰/۵x^۲-۲x+۱$

جواب: $N(۳و-۰/۵)$ و $۲y+۲x=۵$

۸۳۰- $A(۳و-۱)$ $y=(x^۲-۱)\div(x^۲)$

$y=-۰/۵(x-۱)$ و $۶y=۲(\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}-۲)x+\sqrt[۳]{۴}-۴\sqrt[۳]{۲}-۲$

جواب: $N'[-۰/۵\sqrt[۳]{۴}و(۲-\sqrt[۳]{۲})\div\sqrt[۳]{۴}]$ و $N(۱و۰)$

۸۳۱- $A(۳و۱)$ $y=(x+۱)\div(x-۳)$

جواب: $N'(۵و۳)$ و $N(۱و-۱)$ و $y=x-۲$

۸۳۲- $A(۱/۵و۰)$ $y=۲\div(x^۲-۳x+۲)$

جواب: $N'(۳و۱)$ و $N(۰و۱)$ و $۳y\pm۲x=\pm۳$

۸۳۳- $A(-۲و۰)$ $y=-۲\div(x^۲+۴x+۵)$

جواب: $N'(-۳و-۱)$ و $N(-۱و-۱)$ و $y=-x-۲$

۸۳۴- ك ۵- ص۷۴ تابع $y=\frac{۱}{x-a}-\frac{۱}{x-b}$ مفروض است و y' و y'' مشتقات اول ودوم آنست ثابت کنید که اندازه عبارت $\frac{۲y'^۲-yy''}{y^۲}$ ثابت است (a و b مقادیر ثابتند)

حل:

$$y=\frac{x-b-x+a}{(x-a)(x-b)}=\frac{a-b}{x^۲-(a+b)x+ab}$$

$$\frac{۱}{y}=\frac{x^۲-(a+b)x+ab}{a-b}\rightarrow\frac{-y'}{y^۲}=\frac{۲x-(a+b)}{a-b}$$

$$\frac{-y''y^۲+۲y'^۲y}{y^۴}=\frac{۲}{a-b}\rightarrow\frac{۲y'^۲-yy''}{y^۲}=\frac{۲}{a-b}$$

چون a و b مقادیر ثابتند پس عبارت بالا برابر مقدار ثابت است.

۸۳۵- ثابت کنید بین y' و y'' مشتقات اول ودوم تابع $y=(x+\sqrt{x^۲-۱})^n$ رابطه $(x^۲-۱)y''+xy'-n^۲y=۰$ برقرار است. کنکور فنی ۴۱

حل: $y'=n(x+\sqrt{x^2-1})^{n-1}\times(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}})$

$$y'=\frac{n(x+\sqrt{x^2-1})^n}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{ny}{\sqrt{x^2-1}}\rightarrow y'\sqrt{x^2-1}=ny$$

$$y''\sqrt{x^2-1}+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\times y'=ny'\rightarrow y''(x^2-1)+xy'=ny'\sqrt{x^2-1}$$

اگر بجای $y'\sqrt{x^2-1}$ مساویش ny را قرار دهیم نتیجه میشود

$$y''(x^2-1)+xy'-n^2y=0$$

۸۳۶- گر بین متغیر x و y رابطه $y^2+2y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x$ برقرار باشد ثابت کنید که مشتقات اول و دوم y نسبت به x در معادله:

$$2(y+1)y''+2y'^2+9y^2+18y=0$$

صدق می‌کند c_1 و c_2 مقادیر ثابتند و y' و y'' مشتقات اول و دوم تابع y نسبت به x می‌باشد.

فنی ۴۲

حل:

$$2y'y+2y'=-3c_1\sin 3x+3c_2\cos 3x$$

$$2y^2y+2y'^2+2y''=-9c_1\cos 3x-9c_2\sin 3x$$

$$2y''(y+1)+2y'^2=-9(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)$$

$$2y''(y+1)+2y'^2=-9(y^2+2y)$$

$$2y''(y+1)+2y'^2+9y^2+18y=0$$

ثابت کنید که بین y' و y'' و مشتقات اول و دوم هر یک از توابع زیر روابط روبروی به آنها برقرار است

۸۳۷- $y=\frac{2}{(x-3)^2}$ $\qquad 2y'^2-yy''=y^2$

حل:

$$y=\frac{2}{(x-3)^2}\rightarrow\frac{1}{y}=\frac{(x-3)^2}{2}$$

$$\frac{-y'}{y^2}=\frac{2(x-3)}{2}=x-3\rightarrow\frac{-y''y^2+2y'^2y}{y^4}=1$$

$$2y'^2-y''y=y^2$$

۸۳۷- $y=a\sin mx+b\cos mx$ $\qquad y''+m^2y=0$

a و b و m عددند

حل:

$$y'=am\cos mx-bm\sin mx$$

$$y''=-am^2\sin mx-bm^2\cos mx=-m^2(a\sin mx+b\cos mx)$$

$y''=-m^2y \Rightarrow y''+m^2y=0$

۸۳۹- $(n+1)y'^2-y''y=(2n-1)y^2$ $\quad y=2\div x^2$

راهنمائی: $\frac{1}{y}=\frac{x^2}{2} \rightarrow (\frac{1}{y})^n=(\frac{x^2}{2})^n$

۸۴۰- $y'^2+yy''=2$ $\quad y^2-3x^2-2ax-b=0$

۸۴۱- $y''^2-2yy''=b^2-4ac$ $\quad y=ax^2+bx+c$

۸۴۲- $2y'^2=(y-1)y''$ $\quad y=(x-3)\div(x+4)$

۸۴۳- $y''=2yy'$ $\quad y=tg\,x$

۸۴۴- $yy''=2y^2+3y'^2$ $\quad y=\sqrt{\cos ec\,2x}$

۸۴۵- $y'^2=(c-1)y''$ $\quad y=\sqrt{ax+b}+c$

۸۴۶- $y'^2+y''(y-1)=1$ $\quad y=1-\sqrt{x^2-3x}$

۸۴۷- $y'^2+yy''=3(y^2-1)^2$ $\quad y=\sqrt{x^2+1}\div x$

۸۴۸- $y+y''=3y^5$ $\quad y=\sqrt{\sec 2x}$

۸۴۹- $4(1+x^2)y''+4xy'-y=0$ $\quad y=\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$

۸۵۰- $y=\cos x\,(1+tg\,x\,tg\frac{x}{2})+tg\frac{x}{2}$

۸۵۱- $2(y'+y)=y^2+2$

$y^2-bx^2+\frac{a^2b}{a+b}=0$

$xy(1-y'^2)=y'(x^2-y^2-a^2)$

۸۵۲- $3y^2+yy''=2y'^2$ $\quad y=1\div(x^2-3x+2)$

۸۵۳- $y=2+\sqrt{1-2\sin 3x}$

$2(y''y+y'^2-2y'')=-9(y^2-4y+5)$

۸۵۴- ثابت کنید که بین تابع $y=\frac{K}{x}$ ومشتقات متوالی آنرا بطه زیر برقرار است

$y(x+1)+y'(x+2)+y''(x+3)+\ldots\ldots$
$+y^{(n-1)}(x+n)+y^{(n)}x=K$

تذکر: $y^{(2)}$ یعنی مشتق ثانی (y''') و $y^{(3)}$ یعنی مشتق سوم y'''' و $y^{(5)}$ یعنی مشتق پنجم و $y^{(n)}$ یعنی مشتق n ام است

۸۵۵- $x^2(y''y-y'^2)=-2y^2(3x^2+1)$ $\quad y=x^2\div(x^2+1)$

۸۵۶- $2y'(y-x)=y''x^2$ $\quad y=x\div(2x+1)$

۸۵۷- $y=\frac{2x^2}{2x^2+3}$ $\qquad 2y'(3y-2x^2)=y''x^3$

۸۵۸ $y=\sqrt{x^2-1}$ $\qquad y''y+y'^2=1$

۸۵۹- $y=x+\sqrt{x+1}$ $\qquad y''=2(1-y')^3$

۸۶۰- $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ $\qquad y'^2(1-8x)=y''y^2$

۸۶۱- $y=\sqrt{2x-1}$ $\qquad y''y+2y'^2=0$

۸۶۲- $y=\sqrt[m]{(x+1)^p}$ $\qquad y'^2(P-m)=Py''y$

۸۶۳- $y=1\div\sqrt{x^2+ax+b}$ $\qquad 3y'^2-yy''=y^4$

۸۶۴- $y=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ $\qquad yy''+y'^2=3(y^2-1)^2$

۸۶۵- $y=\frac{\cos x+\cos 2x+\cos 3x}{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}$ $\qquad y''+4yy'=0$

۸۶۶- $y=x+\sqrt{x^2-1}$ $\qquad (x^2-1)y''+xy'+y=0$

۸۶۷- $y=x+\sqrt{x^2-4}$ $\qquad y''(y-x)+y'^2-2y'=0$

۸۶۸- $y=3+tg2x$ $\qquad y''=4y'(y-3)$

در توابع زیر ضرایب a و b را چنان تعیین کنید که روابط روبروی آنها بین تابع و مشتق اول و مشتق دوم آنها برقرار باشد

۸۶۹- $y=ax\sin bx$ $\qquad y''+y=2\cos x$

۸۷۰- $y=x\sin ax$ $\qquad y+y''=2\cos x$

پوش یا لفاف یك خط یا یك منحنی

اگر در معادله یك خط یا یك منحنی پارامتری مانند a و b یا m وجود داشته باشد میدانیم اگر پارامتر تغییر کند جای خط یا منحنی در صفحه مختصات تغییر می کند بعضی از این خطوط یا منحنی بر یك خط یا بر یك منحنی ثابت مماس میباشند این خط ثابت یا منحنی ثابت را پوش یا لفاف خطوط یا منحنی های پارامتری مینامند.

قاعده ۱۳۳

طریقه تعیین معادله پوش یا لفاف : از معادله خط یا منحنی نسبت به پارامتر مشتق گرفته و سپس بین این رابطه و معادله خط یا معادله منحنی پارامتر را حذف می نمائیم.

۸۷۱- معادله پوش خط $y+2mx-m^2-2m=7$ را بدست آورید.

$y+2mx-m^2-2m=7$ و $2x-2m-2=0 \rightarrow m=x-1$

$y+2x(x-1)-(x-1)^2-2(x-1)=7 \rightarrow y=-x^2+2x+6$

۸۷۲- معادله پوش منحنی $x^2+2y^2-2mx+4my+m^2=7$ را بدست آورید

$-2x+4y+2m=0 \rightarrow m=x-2y$

$x^2+2y^2-2x(x-2y)+4y(x-2y)+(x-2y)^2=7$

$4xy-2y^2=7$

۸۷۳- منحنی بمعادله $y=\dfrac{5x^2+2ax+a^2}{x+2a}$ مفروض است ثابت کنید بازاء جمیع مقادیر a این منحنی بر دو خط ثابت که معادله آنرا تعیین خواهید کرد مماس است.

حل: از طرفین وسطین کردن معادله نتیجه میشود.

$xy+2ay-5x^2-2ax-a^2=0$

حال معادله پوش این منحنی را بدست می‌آوریم

$2y-2x-2a=0 \rightarrow a=y-x$

$xy+2y(y-x)-5x^2-2x(y-x)-(y-x)^2=0$

$y^2-xy-4x^2=0 \Longrightarrow \qquad y=\frac{x}{2}\times(1\pm\sqrt{17})$

۸۷۴- معادله پوش بالفاف منحنی $y=\dfrac{x^2+3a}{ax^2-x+a^2}$ را بدست آورید

حل:

$ax^2y-xy+a^2y-x^2-3a=0$

$x^2y+2ay-3=0 \rightarrow a=\dfrac{3-x^2y}{2y}$

$\dfrac{3-x^2y}{2y}\times x^2y-xy+\dfrac{(3-x^2y)^2}{4y^2}\times y-$

$x^2-3\times\dfrac{3-x^2y}{2y}=0$

$x^4y^2-2x^2y+4xy^2+9=0$

خواص مشتق ثانی

قاعده ۱۳۴

تعریف نقطه عطف: نقطه عطف منحنی نقطه‌ایست که در آن نقطه تحدب و تقعر منحنی تغییر می‌کند.

قاعده ۱۳۵

۱- برای پیدا کردن مختصات نقطه عطف: مشتق ثانی تابع را بدست آورده و سپس بجای y'' صفر قرار می‌دهیم و طول نقطه عطف منحنی را بدست می‌آوریم و سپس این طول را در تابع بجای x قرار می‌دهیم و عرض نقطه عطف منحنی را بدست می‌آوریم :

۸۷۵- مختصات نقطه عطف منحنی $y=x^3-3x^2+1$ را بدست آورید .

حل: $y'=3x^2-6x \to y''=6x-6 \to y''=0 \to 6x-6=0$

$x=1 \to y=(1)^3-3(1)^2+1=1-3+1=-1$ پس $I(1,-1)$

۸۷۶- مختصات نقاط عطف منحنی $y=x^4-4x^3+2x-1$ را بدست آورید:

حل: $y'=4x^3-12x^2+2 \to y''=12x^2-24x=12x(x-2)$

$y''=0 \to x=0$ و $x=2$

$x=0 \to y=0-0+0-1=-1$ پس $A(0,-1)$

$x=2 \to y=(2)^4-4(2)^3+2(2)-1=-13$ پس $B(2,-13)$

۸۷۷- تابع $y=x^3-3x^2+4$ مفروض است مطلوبست معادله مماس بر منحنی در نقطه عطف آن.

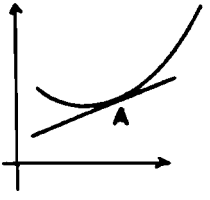
$y'=3x^2-6x \to y''=6x-6 \to y''=0 \to 6x-6=0 \to x=1$

$x=1 \to y=1-3+4=2$ پس $A(1,2)$

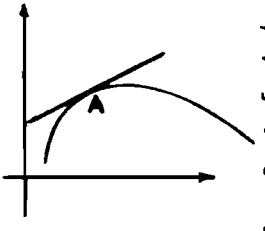
مماس $m=y'=3-6=-3 \to y-y_A=m_A(x-x_A)$

$y=-3x+5$

انحنای منحنی



تعریف: اگر در نقطه A از منحنی $y=f(x)$ مماسی برمنحنی رسم کنیم اگر نقاط مجاور A از منحنی بالای این مماس قرار گیرند میگویند **انحنای منحنی در نقطه A مثبت است** ویا میگویند **تقعر** منحنی بطرف بالاست ویا **تحدب** منحنی بطرف پائین است



تعریف: اگر در نقطه A از منحنی $y=f(x)$ مماسی بر منحنی رسم کنیم اگر نقاط مجاور A از منحنی زیر مماس برمنحنی در نقطه A قرار گیرند میگویند **انحنای منحنی منفی** است ویا میگویند تقعر منحنی بطرف پائین است ویا تحدب منحنی بطرف بالا است .

تذکر: اگر مماس برمنحنی در نقطه A از منحنی $y=f(x)$ موازی محور عرضها باشد اگر نقاط مجاور A از منحنی طرف راست مماس باشند میگویند تقعر منحنی بطرف راست و تحدب منحنی بطرف چپ است و اگر نقاط مجاور A طرف چپ مماس باشند میگویند تقعر منحنی بطرف چپ و یا تحدب منحنی بطرف راست میباشد.

قاعده ۱۳۶

اگر مشتق ثانی تابعی بازاء جمیع مقادیر x مثبت باشد تقعر منحنی در جمیع نقاطش بطرف yهای مثبت است و اگر مشتق ثانی بازاء جمیع مقادیر x منفی باشد تقعر منحنی درجمیع نقاطش بطرف yهای منفی است.

قاعده ۱۳۷

اگر علامت مشتق ثانی تابعی بازاء مقادیری از x که بین دو مقدار a و b قراردارند مثبت باشد تقعر منحنی درفاصله a و b بطرف y های مثبت است و اگر مشتق ثانی بازاء مقادیری از x که بین a و b قراردارند منفی باشد تقعر منحنی بطرف yهای منفی است.

قاعده ۱۳۸

برای تعیین تحدب و تقعر منحنی علامت مشتق ثانی را بدست می‌آوریم و برای این عمل بجای y'' صفر قرار میدهیم و ریشه‌های آنرا بدست می‌آوریم و سپس طبق قاعده (۷۴) و (۷۵) علامت مشتق ثانی را بدست می‌آوریم و سپس طبق قاعده (۱۳۷) تحدب و تقعر منحنی را مشخص می‌نمائیم.

تعیین کنید درچه فاصله‌ای از متغیر منحنی نمایش هریك از توابع زیر محدب و یا مقعر ند و همچنین مختصات نقطه عطف آنها را پیدا کنید.

۸۷۸- ك ۸۴- ص ۵۱-

$y = 2x^2 - 4x + 1$

حل: $y' = 4x - 4 \rightarrow y'' = 4$

چون $y'' > 0$ است پس تقعر منحنی بطرف yهای مثبت است و نقطه عطف ندارد.

۸۷۹- ك ۸۵- ص ۵۱-

$y = -x^2 + 6x + 1$

حل: $y' = -2x$ و $y'' = -2$

چون $y'' < 0$ است پس تقعر منحنی بسمت yهای منفی بوده و نقطه عطف ندارد.

۸۸۰- ك ۸۶- ص ۵۲-

$y = x^3$

حل: $y' = 3x^2 \rightarrow y'' = 6x \rightarrow y'' = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y''	$-$	0	$+$
تقعر	بطرف yهای منفی	0	بطرف yهای مثبت است

۸۸۱- ك ۸۷- ص ۵۲-

$y = (x-1)^4 + 4x$

$y' = 4(x-1)^3 + 4$ و $y'' = 12(x-1)^2 > 0$

چون $y'' > 0$ است پس تقعر منحنی بطرف yهای مثبت است و نقطه عطف ندارد

قاعده ۱۳۹

وقتی ریشه مشتق ثانی طول نقطه عطف است که علامت مشتق ثانی در جدول در دو طرف جوابهای مشتق ثانی تغییر نماید.

۸۳۵- ك ۸۸ ص ۵۲-

$y = x^4 - 3x^2 + 4$

$y' = 3x^2 - 6x$ و $y'' = 6x - 6 \rightarrow y'' = 0 \rightarrow x = 1$ و $y = 2$

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
y''		$-$	۰	$+$	
	بطرف y های مثبت است		۲	بطرف y های منفی است	تقعر

۸۷۸- ک۸۹-ص۵۲- $y=-۲x^۳+۳x^۲-۴x$

$y'=-۶x^۲+۶x$ و $y''=-۱۲x+۶\to y''=۰\to x=۰/۵$ و $y=-۱/۵$

x	$-\infty$		۰/۵		$+\infty$
y''		$+$	۰	$-$	
	بطرف y های منفی است		۱/۵-	بطرف y های مثبت	تقعر

۸۷۹- ک۹۰- ص۵۲- $y=(x-۱)^۳$

جواب: بازاء $x>۱$ تقعر منحنی بطرف y های مثبت و بازاء $x<۱$ تقعر منحنی بطرف y های منفی است و نقطه $A(۱و۰)$ نقطه عطف منحنی است.

۸۸۰- ک۹۱- ص۵۲- $y=x^۴-۱$

$y'=۴x^۳\to y''=۱۲x^۲>۰$

پس بازاء جمیع مقادیر x تقعر منحنی بطرف y های مثبت است و نقطه عطف ندارد.

۸۸۱- ک۹۲- ص۵۳- $y=x^۴-۴x^۲+۱$

$y'=۴x^۳-۸x$ و $y''=۱۲x^۲-۸$

بازاء $\frac{-\sqrt{۶}}{۳}<x<\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ تقعر بطرف y های منفی است و بازاء

$x=\pm\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ دارای نقطه عطف است و بازاء سایر مقادیر تقعر منحنی بطرف y های مثبت است.

۸۸۲- ک۹۳- ص۵۲- $y=x^۴-۲x^۲+۱$

$y'=۴x^۳-۴x$ و $y''=۱۲x^۲-۴$

بازاء $\frac{-\sqrt{۳}}{۳}<x<\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ تقعر بطرف y های منفی است و بازاء

$x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ دارای نقطه عطف است که عرض آنها ۹÷۴ می باشد و بازاء سایر مقادیر تقعر بطرف y های مثبت است.

۸۸۳- ک۹۴- ص۵۲- $y=x^۴+x^۲+۱$

$y'=۴x^۳+۲x\to y''=۱۲x^۲+۲>۰$

بازاء جمیع مقادیر x تقعر منحنی بطرف y های مثبت است.

۸۸۴- ک۹۵- ص۵۲-

$$y=(x+1)^4$$

$$y'=4(x+1)^3 \quad و \quad y''=12(x+1)^2>0$$

پس تقعر منحنی بطرف y های مثبت است

۸۸۵- ک۹۶- ص۵۲-

$$y=\frac{2x-1}{x+2}$$

حل:

$$y'=\frac{5}{(x+2)^2} \quad و \quad y''=\frac{-10}{(x+2)^3}$$

چون قومخرج فرداست پس ریشه آنرا بدست می‌آوریم پس باز ۲ − > x تقعر بطرف yهای منفی و باز ۲ − < x تقعر منحنی بطرف yهای مثبت است.

۸۸۶- ک۹۷- ص۵۲-

$$y=\frac{x+1}{1-x}$$

حل:

$$y'=\frac{2}{(1-x)^2} \quad و \quad y''=\frac{4}{(1-x)^3}$$

باز ۱ < x تقعر بطرف yهای منفی است و باز ۱ > x تقعر بطرف yهای مثبت است.

۸۸۷- ک۹۸- ص۵۲-

$$y=\frac{x^2-2x+1}{x+3}$$

حل:

$$y'=\frac{x^2+6x-7}{(x+3)^2} \quad و \quad y''=\frac{32}{(x+3)^3}$$

باز ۳ − < x تقعر بطرف yهای مثبت است و باز ۳ − > x تقعر بطرف yهای منفی است.

۸۸۸- ک۹۹- ص۵۲

$$y=\frac{x^2-1}{(x+2)^2}$$

$$y'=\frac{4x+2}{(x+2)^3} \quad و \quad y''=\frac{-8x+2}{(x+2)^4}$$

باز ۰/۲۵ < x تقعر بطرف yهای منفی و باز ۰/۲۵ > x تقعر بطرف yهای مثبت است.

۸۸۹- شهریور ماه ۴۸

$$y=(x-2)\div(x-1)^2$$

$$y''=\frac{2x-8}{(x-1)^4}$$

x	$-\infty$		۴		$+\infty$
y''		−	۰	+	
تقعر	بطرف yهای منفی است		$y=۲\div۹$	بطرف yهای مثبت است	

عطف

۸۹۰- شهریور ماه ۴۶ $y=x^۴-۲x^۲-۸$

مانند مسأله شماره (۸۳۹) حل میشود.

۸۹۱- خرداد ماه ۴۶ $y=۲۷(x-۱)\div(۲x-۳)^۳$

$$y''=\frac{۲۲۴(۲x-۸)}{(۲x-۳)^۵}$$

x	$-\infty$		$\frac{۱}{۲}$		$\frac{۳}{۲}$		$+\infty$
y''		+	۰	−	∞	+	
انحنا	منحنی	مقعر	$y=۲۷\div۱۶$	محدب		مقعر	

عطف

۸۹۲- خرداد ماه ۴۴ $y=\frac{۱}{۳}x^۳+۲x^۲-\frac{۱۶}{۳}$

$y'=x^۲+۴x$

$y''=۲x+۴$

x	$-\infty$		-۲		$+\infty$
y''		−	۰	+	
تقعر	بطرف yهای منفی		$y=۰$	بطرف yهای مثبت	

عطف

۸۹۳- خرداد ماه ۴۱ $y=x^۳-x-۲$

بازاء $x>۰$ تقعر بطرف بالا و بازاء $x<۰$ تقعر بطرف پائین است و $A(۰و-۲)$ نقطه عطف است.

۸۹۴- خرداد ماه ۳۹ $y=x^۳-۶x-۴$

۸۹۵- شهریور ماه ۳۸ $y=(x-۱)(۲x+۱)^۲$

۸۹۶- خرداد ماه ۳۷ $y=۳x\div(x^۳-۲)$

$$y''=\frac{۱۸x^۲(x^۳+۴)}{(x^۳-۲)^۳}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y''		+	0	−	0	−	∞	+	
انحناء منحنی		مقعر	$\frac{\sqrt{3}}{2}$		محدب			مقعر	

عطف

۸۹۷- گروه فرهنگی کارون $y=\frac{x^2-2}{x+1}$

بازاء $x>-1$ محدب و بازاء $x<-1$ مقعر است.

۸۹۸- $y=\frac{1}{x^2-1}$ و $y''=\frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$

چون توان پرانتز مخرج فرد است

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y''		+	∞	−	∞	+	
تقعر		بطرف yهای مثبت		پائین		بطرف yهای مثبت	

۸۹۹- $y=\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}$

$$y''=\frac{-2}{(x+2)\sqrt[3]{(x-1)^3(x+2)^2}}$$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y''		+	∞	−	∞	−	
تقعر		بالا	$y=0$	پائین	$y=0$	پائین	

۹۰۰- $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ و $y''=\frac{-4(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$

بازاء $\frac{-\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$ مقعر است و بازاء $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ دارای دو نقطه عطف بعرض $-0/5$ است و بازاء سایر مقادیر محدب می‌باشد.

۹۰۱- $y=\frac{x^2+1}{1-x^2}$ و $y''=\frac{4(3x^2+1)}{(1-x^2)^3}$

منحنی بازاء $-1<x<1$ مقعر است و بازاء سایر مقادیر محدب است و نقطه عطف ندارد.

۹۰۲- $y=\frac{1-x}{x^2}$ و $y''=\frac{-6(x-2)}{x^5}$

منحنی بازاء $0<x<2$ مقعر و $x=2$ طول نقطه عطف آنست و بازاء سایر مقادیر x محدب است

۹۰۳- $y=\frac{x^3}{1-x}$ و $y''=\frac{2x(x^2-3x+3)}{(1-x)^3}$

x	$-\infty$			$+\infty$
$2x$	$-$		$+$	$+$
$(1-x)^3$	$+$		$+$	$-$
x^2-3x+3	$+$		$+$	$+$
y''	$-$	∞	$+$	$-$
نتیجه	محدب	نقطه‌عطف	مقعر	محدب

۹۰۴- $y=(x+1)^4(1-x)^2$

$y''=6(x+1)^2(1-x)(7x^2-2x-1)$

منحنی بازاء $x<\frac{1-2\sqrt{2}}{7}$ و $1>x>\frac{1+2\sqrt{2}}{7}$ محدب وبازاء x مساوی این‌سه‌مقدار دارای نقطه عطف‌است وبازاء سایرمقادیرمقعر است.

قاعده ۱۴۰	مشتق‌ثانی (y'') بازاء طول نقطه‌ماکزیمم منحنی منفی میشود.
قاعده ۱۴۱	مشتق‌ثانی (y'') بازاء طول نقطه می‌نیمم منحنی مثبت میشود
قاعده ۱۴۲	درتوابعی‌که بصورت $y=k(ax+b)^m$ میباشند(kوaوbوm عددند وmعددصحیح‌است) جواب‌مشتق‌اول مشتق‌دوم‌را هم صفر می‌کند اگرmفرد باشد جواب‌مشتق‌طول نقطه عطف‌منحنی‌است و اگر m زوج باشد جواب مشتق طول نقطه ماکزیمم ومی‌نیمم منحنی است.

طولهای نقاط ماکزیمم و می‌نیمم هریك ازتوابع زیر را تعیین‌نموده بدون استفاده‌ازجدول تحقیق کنید که کدام طول‌نقطه ماکزیمم و کدام‌طول نقطه می‌نیمم است .

۹۰۵- ک ۱۰۰ص۵۲- $y=x^2-2x+1$

حل: $y'=2x-2$و$y'=0\to x=1$ و $y''=2>0$

چون $y''>0$ است پس $x=1$ طول‌نقطه می‌نیمم است.

۹۰۶- ک ۱۰۱ص۵۲- $y=-x^2+4x+1$

$y'=-2x+4\to y'=0\to x=2$ و $y''=-2$

چون $y''<0$ است پس $x=2$ طرل‌نقطه ماکزیمم است.

۹۰۷- ک ۱۰۲ص۵۲ $y=x^3+x^2$

$y'=3x^2+2x$ و $y''=6x+2$

$y'=0\to x=0$و$-\frac{2}{3}\to x=\frac{-2}{3}\to y''=6(-\frac{2}{3})+2=-2$

پس $x=-2\div 3$ طول‌نقطه‌ماکزیمم است.

پس $x=0$ طول‌نقطه می‌نیمم است. $x=0\to y''=0+2=2$

۹۰۸- ک ۱۰۳ص۵۲- $y=-x^3+3x^2$

$y'=-3x^2+6x$ و $y''=-6x+6$

$y'=0\to -3x(x-2)=0\to x=0$ و $x=2$

پس $x=0$ طول‌نقطه می‌نیمم‌است $x=0\to y''=0+6=6$

$x=2\to y''=-6\times 2+6=-6$

پس $x=+2$ طول نقطه ماکزیمم است

۹۰۹- ک ۱۰۴-ص۵۲ $y=\frac{x-1}{x^2+1}$

$y'=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$ و $y''=\frac{2(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^4}$

$y'=0\to -x^2+2x+1=0\to x=1\pm\sqrt{2}$

چون عبارت $(x^2+1)^2$ بازاء جمیع مقادیر xمثبت‌است.

پس فقط برای‌بدست‌آوردن علامت y'' بازاء طول‌های نقاط ماکزیمم و می‌نیمم کافی است علامت $A=(x+1)(x^2-4x+1)$ را بدست‌آوریم.

$x=1-\sqrt{2}\to A=2\sqrt{2}(2-\sqrt{2})$

پس $x=1-\sqrt{2}$ طول‌نقطه می‌نیمم است .

$x=1+\sqrt{2}\rightarrow A=-2\sqrt{2}(2+\sqrt{2})$

پس $x=1+\sqrt{2}$ طول نقطه Max است.

۹۱۰- ک ۱۰۵- ص ۵۲

$$y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$y'=\frac{4x}{(x^2+1)^2} \quad \text{و} \quad y''=\frac{-4(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

$y'=0\rightarrow 4x=0\rightarrow x=0$

$x=0\rightarrow y''=4$ پس $x=0$ طول نقطه می‌نیمم است

۹۱۱- ک ۱۰۶- ص ۵۲-

$$y=\frac{x^2-2x+1}{x+3}$$

$$y'=\frac{x^2+6x-7}{(x+3)^2} \quad \text{و} \quad y''=\frac{32}{(x+3)^3}$$

$y'=0\rightarrow x^2+6x-7=0\rightarrow x=-7$ و 1

$x=1\rightarrow y''=0/5$ پس $x=1$ طول نقطه می‌نیمم است

$x=-7\rightarrow y''=-0/5$ پس $x=-7$ طول نقطه ماکزیمم است

صور مبهم و رفع ابهام

تعریف: گاهی درموقع بدست آوردن مقدار تابع به‌ازاء بعضی‌ازمقادیر متغیرمقدار تابع بیکی ازصورتهای $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ و $0\times\infty$ و $\infty-\infty$ و 1^{∞} و ∞^0 و 0^0 درمی‌آیدکه دراین‌صورت مقدار تابع مبهم‌است‌وبرای بدست‌آوردن مقدارحقیقی‌تابع بایدطبق‌قواعدزیر رفع ابهام‌نمود.

قاعده ۱۴۳

حد $\frac{\sin mx}{mx}$ وحد وقتی‌که x میل کند بسمت صفر برابر یك میباشد:

(m عدد است) مثالهای‌زیر مانند

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

قاعده ۱۴۴

حد $\frac{tg\,mx}{mx}$ و حد $\frac{mx}{tg\,mx}$ وقتیکه x میل کند بسمت صفر برابر یك میباشد : مانند مثالهای زیر

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,3x}{3x}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0}\frac{3x}{tg\,3x}=1$$

قاعده ۱۴۵

در توابع جبری وقتیکه مقدار $f(x)$ بازاء $x=a$ صفرمیشود نتیجه میشودکه a یکی ازریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ میباشد پس $f(x)$ بر $x-a$ قابل قسمت است بنابراین وقتی مقدار $\frac{f(x)}{g(x)}$ بازاء $x=\alpha$ برابر $\frac{0}{0}$ میشود نتیجه میشودکه هم $f(x)$ وهم $g(x)$ بر $x-a$ قابل قسمت‌اند پس میتوان نوشت:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{(x-a)f_1(x)}{(x-a)g_1(x)}=\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

قاعده ۱۴۶

برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ باید عملی انجام داد که درصورت ومخرج عامل مشترکی که بازاء $x=a$ صفر میشود بوجود آورد وسپس ساده نمود وبعدبجای x مساویش a را قرارداد.

رفع ابهام $\frac{0}{0}$ بطریقه دستور هوپیتال:

قاعده ۱۴۷

هرگاه مقدارتابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ بازاء $x=a$ برابر $\frac{0}{0}$ شود حد y وقتیکه x بسمت a میل کندازفرمول $\lim_{x\to a} y=\frac{f'(x)}{g'(x)}$ بدست می‌آید ودراینصورت اگر $f'(a)$ و $g'(a)$ ویاهردومخالف‌صفر باشند مقدارواقعی y بازاء $x=a$ حساب می‌شود و درغیر این صورت میتوان‌نوشت: $\lim_{x\to a} y=\frac{f''(x)}{g''(x)}$ یعنی‌ازصورت ومخرج تابع آنقدرمشتق می‌گیریم تابالاخره مشتق nام صورت ویامشتق nامهمخرج ویامشتق nامهردو مخالف‌صفرباشند .

مقدار حقیقی هریك از تابع‌های زیر را در ازاء اندازه مخصوص متغیر که درمقابل آنها نوشته‌شده است بدست آورید:

۹۱۲- ك۱-ص۷۴ $y = \frac{\cos^2 x}{\cos x} \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

طریقه مستقیم $y = \frac{\cos^2 270^\circ}{\cos 90^\circ} = \div \rightarrow y = \frac{4\cos^2 x - 3\cos x}{\cos x}$

$y = 4\cos^2 x - 3$ و $x = 90^\circ \rightarrow y = 4\cos^2 90^\circ - 3 = -3$

طریقه هوپیتال

$$y = \lim_{x \to 90^\circ} \frac{-3\sin 3x}{-\sin x} = \frac{3\sin 270^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{-3}{1} = -3$$

۹۱۳- ك۲- ص۷۴- $y = \frac{tg 2x}{tg x}$ $x = 0^\circ$

$x = 0^\circ \rightarrow y = \frac{tg 0^\circ}{tg 0^\circ} = \div \rightarrow y = \frac{2tg x}{1 + tg^2 x} \div tg x$

$y = \frac{2}{1 + tg^2 x}$ و $x = 0^\circ \rightarrow y = \frac{2}{1 + tg 0^\circ} = \frac{2}{1} = 2$

طریقه‌هوپیتال $\lim_{x \to 0} y = \lim \frac{2(1 + tg^2 2x)}{1 + tg^2 x} = \frac{2(1 + tg^2 0^\circ)}{1 + tg^2 0^\circ} = 2$

۹۱۴- ك۳- ص۷۴- $y = \frac{x^2 - x}{x + 1}$ $x = -1$

مبهم‌است $x = -1 \rightarrow y = \frac{-1 + 1}{-1 + 1} = \div$

$y = \frac{x(x+1)(x-1)}{x+1} = x(x-1)$ و $x = -1 \rightarrow y = -1(-1-1) = 2$

طریقه هوپیتال $\lim_{x \to -1} y = \lim \frac{3x^2 - 1}{1} = \frac{3 - 1}{1} = 2$

۹۱۵- ك۴ ص۷۳- $y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$ $x = 2$

حل: چون بازاء $x = 2$ بصورت $\div$ درمی‌آید پس مبهم‌است

$$y=\frac{(x-2)(x-3)}{(x+2)(x-2)}=\frac{x-3}{x+2} \quad , \quad x=2\to y=\frac{-1}{4}$$

طریقه هوپیتال

$$y=\lim_{x\to 2}\frac{2x-5}{2x}=\frac{4-5}{4}=\frac{-1}{4}$$

-۹۱۶

$$y=\frac{tg3x}{x} \qquad x=0^\circ$$

$$x=0\to y=\frac{tg0^\circ}{0}=\frac{0}{0} \quad , \quad y=\lim_{x\to 0}3\frac{tg3x}{3x}=3\lim_{x\to 0}\frac{tg3x}{3x}$$

$$y=3\times 1=3$$

طریقه هوپیتال

$$y=\lim_{x\to 0}\frac{3(1+tg^2 3x)}{1}=\frac{3(1+0)}{1}=3$$

-۹۱۷

$$y=\frac{\sin 2x-\sin 60^\circ}{x-30^\circ} \qquad x=30^\circ$$

$$x=30^\circ\to y=\frac{\sin 60^\circ-\sin 60^\circ}{30^\circ-30^\circ}=\frac{0}{0}$$

طریقه هوپیتال

$$y=\lim_{x\to 30^\circ}\frac{2\cos 2x}{1}=2\times\cos 60^\circ=1$$

$$y=\frac{2\sin(x-30^\circ)\cos(x+30^\circ)}{x-30^\circ}$$

$$y=\lim_{x\to 30^\circ}2\cos(x+30^\circ)\times\frac{\sin(x-30^\circ)}{x-30^\circ}=2\cos 60^\circ\times 1=1$$

-۹۱۸

$$y=\frac{5\sin 3x}{2x} \qquad x=0\to y=\frac{5\sin 0^\circ}{0}=\frac{0}{0}$$

طریقه مستقیم

$$y=\frac{15\sin 3x}{2\times 3x}=\frac{15}{2}\times\frac{\sin 3x}{3x}=\frac{15}{2}\times 1=\frac{15}{2}$$

طریقه هوپیتال

$$y=\lim_{x\to 0}\frac{15\cos 3x}{2}=\frac{15\cos 0^\circ}{2}=\frac{15}{2}$$

۹۱۹- $y = \dfrac{\sin 3x}{\cos\frac{x}{2}}$ $x = \pi$ $y = 6$ جواب

جواب: $y = \dfrac{x - \sin x}{x^2}$ $x = 0$ $y = 0$

جواب: $y = \sin\left(\dfrac{2}{x}\right) \div \dfrac{1}{x}$ $x = \infty$ $y = 2$

اتحادهای زیر بخاطر بسپارید:

۱- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

۲- $a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)(a^2+b^2)$

۳- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2+b^2-ab)$

۴- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+b^2+ab)$

۵- $a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$

۶- $a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - ba^{n-2} + b^2a^{n-3} - b^3a^{n-4} + \dots + b^{n-1})$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + b^2a^{n-3} + b^3a^{n-4} + \dots + b^{n-1})$

طریقه مستقیم رفع ابهام ÷ توابع رادیکالی

قاعده ۱۴۸

اگر فرجهٔ رادیکال زوج باشد از اتحاد مزدوج استفاده می‌نمائیم (از فرمولهای ۱ و ۲) اگر در مخرج کسر رادیکال باشد صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج و اگر در صورت کسر رادیکال باشد صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت و اگر در صورت و مخرج رادیکال باشد صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت و مخرج ضرب می‌نمائیم.

قاعده ۱۴۹

اگر فرجه رادیکال فرد باشد از اتحادهای ۳ و ۴ و ۵ و ۶ استفاده می‌کنیم توجه کنید که اگر در صورت یا مخرج که رادیکال فرجهٔ فرد دارد دو جمله که بصورت $a+b$ یا $a-b$ باشد صورت و مخرج کسر را در پرانتزهای دوم اتحادهای ۳ و ۴ و ۵ و ۶ ضرب میکنیم و در غیر اینصورت برعکس عمل میکنیم.

۹۲۰- $y = \dfrac{2x-6}{4-\sqrt{5x+1}}$ $x = 3 \to y = \div$ ص ۷۱

طریقه مستقیم

$$y=\frac{(2x-6)(4+\sqrt{5x+1})}{16-5x-1}$$

$$y=\frac{2(x-3)(4+\sqrt{5x+1})}{-5(x-3)}$$

$$y=-0/4\,(4+\sqrt{5x+1})=-0/4(4+4)=-3/2$$

طریقه هوپیتال:

$$y=\lim_{x\to 3}\frac{2}{\frac{-5}{2\sqrt{5x+1}}}=\lim_{x\to 3}\frac{4\sqrt{5x+1}}{-5}=\frac{-16}{5}$$

۹۲۱- ک۶-ص۷۵ $x=-1$

$$y=\frac{x+1}{3-\sqrt{2-7x}}$$

$$y=\frac{0}{0}\to y=\frac{(x+1)(3+\sqrt{2-7x})}{9-2+7x}=\frac{(3+\sqrt{2-7x})}{7}$$

بطریقه مستقیم

$$x=-1\to y=(3+\sqrt{9})\div 7=6\div 7$$

۹۲۲- $x=\frac{-1}{2}$

$$y=\frac{\sqrt[3]{2x+1}}{2x+1}$$

$$y=\frac{0}{0}\to y=\frac{1}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{0}}=\infty$$

۹۲۳- $x=-1$

$$y=\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}\to$$

بطریقه مستقیم

$$y=\frac{0}{0}\to y=\frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}{(x+1)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}$$

$$x=-1\to y=1\div(1+1+1)=1\div 3$$

طریقه هوپیتال

$$y=\lim_{x\to -1}\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{1}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3}$$

۹۲۴- ک۹- ص۷۵ $x=0$

$$y=\frac{\cot g\,x}{\cot g\,3x}$$

$$y=\frac{\infty}{\infty}\to y=\frac{1}{tg\,x}\div\frac{1}{tg\,3x}=\frac{tg\,3x}{tg\,x}\to y=\frac{tg\,0}{tg\,0}=\frac{0}{0}$$

$$y=\lim_{x\to 0}\frac{3(1+tg^2 3x)}{1+tg^2 x}=\frac{3(1+tg^2 0)}{1+tg^2 0}=3$$

۹۲۵- ک ۱۰- ص۷۵-

$$y=\frac{tg3x}{tgx} \qquad x=\frac{\pi}{2}$$

$$y=\frac{tg270^\circ}{tg90^\circ}=\frac{\infty}{\infty} \rightarrow y=\frac{1}{cotg\,3x}\div\frac{1}{cotg\,x}$$

$$y=\frac{cotg\,x}{cotg\,3x}\rightarrow y=\frac{cotg90^\circ}{cotg270^\circ}=\div y=\lim_{x\to 90^\circ}\frac{-(1+cotg x^2)}{-3(1+cotg^2 3x}$$

$$y=\frac{1+cotg^2 90^\circ}{3(1+cotg270^\circ)}=\frac{1}{3}$$

قاعده ۱۵۰

مقدار حقیقی توابعی که بصورت

$$y=\frac{ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+\dots}{a'x^n+b'x^{n-1}+c'x^{n-2}+\dots}$$

می‌باشد بازاء $x=\pm\infty$ بمقادیر m و n بستگی دارد واز دستورهای زیر استفاده میکنیم.

$$\begin{cases} m>n \\ x=\pm\infty \\ y=\pm\infty \end{cases} \quad و \quad \begin{cases} m=n \\ x=\pm\infty \\ y=\frac{a}{a'} \end{cases} \quad و \quad \begin{cases} m<n \\ x=\pm\infty \\ y=0 \end{cases}$$

تذکر: میدانیم وقتی که $m>n$ میباشد مقدار y بازاء $x=\pm\infty$ برابر بینهایت است وبرای بدست‌آوردن علامت آن بهتر است که ax^m را بر $a'x^n$ تقسیم کرده وحاصلش راکه مساوی $\frac{a}{a'}x^{m-n}$ میباشد بازاء $x=\pm\infty$ بدست‌می‌آوریم.

۹۲۶- ک ۱۱- ص۷۵-

$$y=\frac{x+3}{x^2-2x+1} \qquad x=\pm\infty$$

حل: چون $m<n$ است $x=\pm\infty\rightarrow y=0$

۹۲۷- ک ۱۲ ص۷۵-

$$y=\frac{3x^2-5x+1}{x^2+1} \qquad x=\pm\infty$$

حل: چون $m=n$ میباشد $x=\pm\infty \to y=3$

۹۲۸- ک۱۳ص۷۵- $y=\frac{x^2-x+1}{x^2+2x+1}$

حل: چون $m>n$ است $x=\pm\infty \to y=\pm\infty$

۹۲۹- ک۱۴ ص۷۵- $x=\pm\infty$ $y=\frac{1-2x^2}{x^2+x}$

حل: چون $m=n=2$ میباشد $x=\pm\infty \to y=-2$

۹۳۰- ک۱۵ ص۷۵- $x=3$ $y=(x+1+\frac{x+1}{x-3})\div(x+\frac{x^2}{x-3})$

حل: بازاء $x=3$ مقدار y برابر $\frac{\infty}{\infty}$ میشودو برای رفع ابهام کسر مرکب را به کسر ساده تبدیل می‌نمائیم

$$y=\frac{x^2-x-2}{2x^2-3x}\to x=3 \text{ و } y=\frac{4}{9}$$

۹۳۱- ک۱۶ص۷۵- $x=\pm\infty$ $y=\frac{-x+3\sqrt{x}+4}{7\sqrt{x}+2x-2}$

حل: چون $m=n=1$ می‌باشد $x=\pm\infty \to y=-0/5$

۹۳۲- ک۱۷-ص۷۵- $x=2$ $y=(x^2-4)\times\frac{x+1}{x^2-3x+2}$

حل: مبهم است $x=2\to y=0\times\infty$

$$y=\frac{(x+2)(x-2)(x+1)}{(x-2)(x-1)}=\frac{(x+2)(x+1)}{x-1}\to\left|\begin{array}{l}x=2\\y=12\end{array}\right.$$

۹۳۳- ک۱۸ص۷۵- $x=3$ $y=(9-x^2)\times\frac{x+2}{x^2+x-12}$

$x=3\to y=0\times\infty$ مبهم است

$$y=\frac{(3-x)(3+x)(x+2)}{(x+4)(x-3)}=\frac{(3+x)(x+2)}{-(x+4)}$$

$$\left|\begin{array}{l}x=3\\y=-30\div7\end{array}\right.$$

قاعده ۱۵۱

اگر تابع $y=f(x)\cdot g(x)$ بازاء $x=a$ مساوی $0\times\infty$ شود مبهم است و برای رفع ابهام آن تابع‌را مساوی کسری قرار میدهیم که صورتش عاملی که صفر شده است و مخرجش معکوس عاملی است که ∞ شده است در نتیجه مقدار تابع بصورت $\frac{0}{0}$ در می‌آید. و طبق دستور هوپیتال رفع ابهام مینمائیم.

۹۳۴- $y=\cos 3x\cdot tg\,x \qquad x=90^\circ$ ۱۹ ک

$$x=90^\circ\rightarrow y=\cos 270^\circ tg\,90^\circ=0\times\infty$$

$$y=\lim_{x\to 90^\circ}\frac{\cos 3x}{cotg\,x}\rightarrow y=\frac{0}{0}$$

$$y=\lim_{x\to 90^\circ}\frac{-3\sin 3x}{-(1+cotg^2 x)}=\frac{3\sin 270^\circ}{1+cotg^2 90^\circ}=-3$$

۹۳۵- $y=(x-a)\,tg\,\frac{\pi x}{2a} \qquad x=a\rightarrow y=\frac{-2a}{\pi}$

۹۳۶- $y=(x-3)cotg\frac{\pi x}{3} \qquad x=3 \qquad y=\frac{3}{\pi}$

۹۳۷- $y=tg\,3x\,cotg\,5x \qquad x=\pi \qquad y=0/6$

۹۳۸- $y=x\,tg\frac{3}{x} \qquad x=\infty \qquad y=3$

۹۳۹- $y=\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right) \qquad x=0 \qquad y=0$

۹۴۰- $y=\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \qquad x=0 \qquad y=0$

۹۴۱- $y=\frac{1-\cos x}{x\cos x} \qquad x=0 \qquad y=0$

۹۴۲- $y=\frac{tg\,x-\sin x}{x^2} \qquad x=0 \qquad y=0$

۹۴۳- $y=\frac{tg\,x-\sin x}{x^3} \qquad x=0 \qquad y=\frac{1}{2}$

۹۴۴- $y=1$ $x=\pi$ $y=\frac{\sin x}{\pi-x}$

۹۴۵- $y=\frac{1}{2}$ $x=0$ $y=\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$

۹۴۶- ک۲۱ص۷۵- $x=\pm\infty$ $y=\frac{(x^2-1)(x-1)^4}{x^2(x+1)^2}$

حل: چون $m>n$ می‌باشد $x=\pm\infty\rightarrow y=\pm\infty$

۹۴۷- ک۲۱- $x=0$ $y=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$

$$x=0\rightarrow y=\infty-\infty\rightarrow y=\frac{1-x}{x^2}=\frac{1-0}{0}=\infty$$

۹۴۸- ک۲۲- $x=-1$ $y=\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2-x-2}$

$$x=-1\rightarrow y=\infty-\infty$$

$$y=\frac{1}{(x+1)(x-1)}-\frac{1}{(x+1)(x-2)}=\frac{x-2-x+1}{(x+1)(x-1)(x-2)}$$

$$y=\frac{-1}{(x^2-1)(x-2)}=\frac{-1}{0(-3)}=\infty$$

قاعده ۱۵۲

. اگر درتوابع اصم بازاء $x=\infty$ مقدار y برابر $\infty-\infty$ شود مبهم است وبرای رفع ابهام اگر فرجه رادیکال زوج باشد ازاتحاد مزدوج واگر فرجه فردباشد باید از اتحادهای صفحه (۱۶۲) استفاده کرد.

۹۴۹- ک۲۳- ص۷۳- $x=+\infty$ $y=x-\sqrt{x^2-x}$

$$x=+\infty\rightarrow y=\infty-\infty$$

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-x})(x+\sqrt{x^2-x})}{x+\sqrt{x^2-x}}$$

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x(1+\sqrt{1-\frac{1}{x}})}=\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=\frac{1}{2}$$

۹۵۰- ک۲۴ص۷۶- $x=+\infty$ $y=-x+\sqrt{4x^2-3x}$

$x=+\infty \to y=-\infty+\infty$ مبهم است

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{4x^2-3x}-2x)(\sqrt{4x^2-3x}+2x)}{\sqrt{4x^2-3x}+2x}$$

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x}{x(\sqrt{4-\frac{3}{x}}+2)}=\frac{-3}{\sqrt{4-\frac{3}{x}}+2}=\frac{-3}{4}$$

۹۵۱- ک۲۵ص۷۶- $x=-\infty$ $y=\sqrt{9x^2+2x}-3x$

$x=-\infty \to y=+\infty+\infty \to y=+\infty$

۹۵۲- ک۲۶ص۷۶- $y=x+\sqrt{x^2-3}$

$x=-\infty \to y=-\infty+\infty$ مبهم است

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+\sqrt{x^2-3})(x-\sqrt{x^2-3})}{x-\sqrt{x^2-3}}$$

$$y=\lim\frac{3}{x(1+\sqrt{1-\frac{3}{x^2}})}=\frac{3}{\infty(1+1)}=0$$

۹۵۳- ک۲۷-ص۷۶- $x=\pm\infty$ $y=2x-\sqrt{x^2-x+1}$

$x=+\infty \to y=\infty-\infty$

$$y=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-\sqrt{x^2-x+1})(2x+\sqrt{x^2-x+1})}{2x+\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$y=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x^2+x-1}{2x+\sqrt{x^2-x+1}}=\pm\infty$$

چون توان صورت از مخرج یك واحد بیشتر است.

۹۵۴- ک ۲۸- ص۷۶-

$x=\pm\infty$ $y=\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{x^2-7x+2}$

$x=-\infty \to y=-\infty-\infty=-\infty$

$$y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{x^2-7x+3})(\sqrt{x^2-3x+1}+\sqrt{x^2-7x+3})}{\sqrt{x^2-3x+1}+\sqrt{x^2-7x+3}}$$

$$y=\frac{4x-2}{\sqrt{x^2-3x+1}+\sqrt{x^2-7x+3}}$$

$y\to+\infty$

$$y=\frac{4-\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}}=2$$

و به‌ازاء $x=-\infty$ علامت جلوی رادیکالها عوض می‌شود و $y=-2$ میگردد.

۹۵۵- ک ۲۹- $y=\sqrt{x-1}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1})$ $x=\pm\infty$

حل: چون تابع بازاء $x<1$ نامعین است پس تابع بازاء $x=-\infty$ نامعین است و بازاء $x=+\infty$ برابر $\infty-\infty$ است که مبهم است.

$$y=\sqrt{x^2+x-2}-x+1=\frac{x^2+x-2-x^2-1+2x}{\sqrt{x^2+x-2}+x-1}$$

$$y=\frac{3x(1-\frac{1}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+1-\frac{1}{x})}\quad y=\frac{3(1-0)}{(1+1)}=\frac{3}{2}$$

$x\to+\infty$

۹۵۶- ک ۳۰- $y=\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$ $x=\pm\infty$

حل: چون تابع بازاء $x<0$ نامعین است پس بازاء $x=-\infty$ نامعین میشود و بازاء $x=+\infty$ بصورت $\infty-\infty$ در می‌آید که مبهم است.

$$y=\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{x}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)}=\frac{1}{2}$$

۹۵۷- ک ۳۱- $y=\sqrt{x^2-4x+3}-2x+5$ $x=\pm\infty$

$x=-\infty\to y=+\infty+\infty=+\infty$

$x=+\infty\to y=\infty-\infty$ مبهم است

$$y=\frac{x^2-4x+3-4x^2-25+20x}{\sqrt{x^2-4x+3}+2x-5}=\frac{-3x^2+16x-22}{\sqrt{x^2-4x+3}+2x-5}$$

چون $m>n$ است وحاصل تقسیم‌صورت بمخرج $x-$ میشود پس‌بازاء $x=+\infty$ مقدار $y=-\infty$ میشود.

۹۵۸- جواب: $y=\frac{5}{1+\sqrt[3]{4}}$ $\quad y=\frac{2x^2-7+\sqrt{9x^4-2x+2}}{x^2-3+\sqrt[3]{4x^6-5x+2}}$

$x\to\pm\infty$

۹۵۹- جواب: $y=\frac{-7}{12}$ $\quad x=-1$ $\quad y=\frac{-x+1+\sqrt[3]{x^4+2x-5}}{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{2x+3}}$

۹۶۰- $y=2$ $\quad x=1$ $\quad y=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-2}$

۹۶۱- $y=1$ $\quad x=\pm\infty$ $\quad y=x-\sqrt[3]{x^3-3x^2+4}$

$y=\frac{\sqrt[3]{3+x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{4-x}+\sqrt{2x-9}}$ $\quad x=5$ $\quad y=\frac{-1}{4}$

۹۶۲- $y=\frac{5}{12}$ $\quad x=3$ $\quad y=\frac{\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+10}}{\sqrt{4x+13}-\sqrt{x+22}}$

۹۶۳- $y=\frac{7}{12}$ $\quad x=1$ $\quad y=\frac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}}$

۹۶۴- $y=0$ $\quad x=-3$ $\quad y=\frac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}}$

۹۶۵- $y=\frac{1}{3}$ $\quad x=7$ $\quad y=\frac{\sqrt[3]{x-6}-1}{x-7}$

۹۶۶- $y=\frac{-1}{9}$ $\quad x=0$ $\quad y=\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{3x+1}}{6x}$

۹۶۷- $y=\frac{-1}{6}$ $\quad x=1$ $\quad y=\frac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{3x-3}-1}$

۹۶۸- $y=\frac{21}{8}$ $\quad x=0$ $\quad y=\frac{7x}{\sqrt[3]{6x-1}+\sqrt[3]{2x+1}}$

۹۶۹- $y=\frac{1}{2}$ $\quad x=+\infty$ $\quad y=x(\sqrt{x^2+1}-x)$

۹۷۰- $y=0$ $\quad x=+\infty$ $\quad y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$

۹۷۱- $y=0$ $\quad x=\pm\infty$ $\quad y=x\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$

۹۷۲- جواب: $\frac{3\sqrt[3]{\sin^2 a}}{2\cos^2 a\sqrt{tg\,a}}$ $\quad x=a$ $\quad y=\lim\frac{\sqrt{tg\,x}-\sqrt{tg\,a}}{\sqrt[3]{\sin x}-\sqrt[3]{\sin a}}$

۹۷۳- $y=\frac{2}{\pi}$ $\quad y=\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}$

۹۷۴- $y=\frac{+1}{2}$ $\quad y=\frac{tgx-\sin x}{x^3}\quad x=0$

۹۷۵- $y=1$ $\quad y=\frac{\sqrt{1+tgx}-\sqrt{1-tgx}}{\sin x}\quad x=0$

۹۷۶- $y=\frac{1}{2}$ $\quad y=\frac{1+\cos\pi x}{tg^2\pi x}\quad x=1$

۹۷۷- $y=Log2\sqrt{2}$ $\quad y=Log\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2\sqrt{2}}\quad x=2$

قاعده ۱۵۳

اگر تابع $y=[f(x)]^{g(x)}$ بازاء $x=a$ برابر 1^{∞} شود مبهم است و برای رفع ابهام آن دردو طرف تساوی لگاریتم میگیریم تا بصورت $Logy=g(x)Logf(x)$ یعنی بصورت $\infty\times 0$ درمی‌آید که طبق قواعد قبلی رفع ابهام می‌نمائیم.

۹۷۸- حدعبارت $y=(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$ را بازاء $x=0$ بدست آورید.

$$y=(\cos 0)^{\infty}=1^{\infty}\to Logy=\frac{3}{x^2}Log\cos 2x=\infty\times 0$$

$$Log\,y=\frac{3Log\cos 2x}{x^2}=\frac{0}{0}\to \qquad \lim\limits_{x\to 0}Log\,y=\frac{-6tg2x}{2x}$$

$$\lim\limits_{x\to 0}Log\,y=-6\times 1=-6\to y=e^{-6}$$

۹۷۹- $y=0$ $\quad y=(1+x^2)^{\frac{1}{x}}\quad x=0$

۹۸۰- $y=\frac{1}{e}$ $\quad y=x^{\frac{1}{1-x}}\quad x=1$

۹۸۱- $y=e^{\frac{1}{2}}$ $\quad y=\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}\quad x=0$

۹۸۲- جواب: $\frac{1}{2}$ $\quad y = \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2} \quad n=\infty$

۹۸۳- جواب: ۲ $\quad y = 2\sin x - \cos x \times \cot g\, x \quad x = 90^\circ$

۹۸۴- جواب: $\frac{1}{3}$ $\quad y = \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{n^3} \quad n=\infty$

۹۸۵- جواب: ۱ $\quad y = \frac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2} \quad x=2$

۹۸۶- جواب: ۰ $\quad y = \frac{x^3+4x^2+4x}{(x+2)(x-3)} \quad x=-2$

۹۸۷- جواب: $-\frac{2}{5}$ $\quad y = \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6} \quad x=-2$

۹۸۸- جواب: $3x^2$ $\quad y = \frac{(x+h)^3-x^3}{h} \quad h=0$

۹۸۹- جواب: -1 $\quad y = \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \quad x=1$

۹۹۰- جواب: n $\quad y = \frac{x^n-1}{x-1} \quad x=1$

۹۹۱- جواب: $\frac{1}{2}$ $\quad y = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \quad x=0$

۹۹۲- جواب: $\frac{2}{3}$ $\quad y = \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} \quad x=4$

۹۹۳- جواب: $\pm\frac{q}{p}$ $\quad y = \frac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q} \quad x=0$

۹۹۴- جواب: $\frac{2}{3}$ $\quad y = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} \quad x=1$

۹۹۵- جواب: $\frac{1}{m\sqrt[m]{a^{m-1}}}$ $\quad y = \frac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a} \quad x=a$

۹۹۶- جواب: $\frac{1}{2}$ $\quad y = \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} \quad x=0$

۹۹۷- جواب: ۱ $x=+\infty$ $y=\frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$

۹۹۸- جواب: ± 1 $x=\pm\infty$ $y=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

۹۹۹- جواب: ۰ $x=\infty$ $y=(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$

۱۰۰۰ جواب: $-\infty$ و $\frac{1}{2}$ $x=\pm\infty$ $y=x(\sqrt{x^2+1}-x)$

۱۰۰۱- جواب: ۶ $x=0$ $y=\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$

۱۰۰۲- جواب: ۱۰ $x=0$ $y=\frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$

۱۰۰۳- $x=0$ $m>n$ $y=\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$

جواب: $\frac{1}{2}mn(n-m)$

۱۰۰۴- $x=\infty$ $y=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$

جواب: 5^{-5}

۱۰۰۵- جواب: $(\frac{3}{2})^{30}$ $x=\infty$ $y=\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$

۱۰۰۶- جواب: $-\frac{1}{2}$ $x=3$ $y=\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$

۱۰۰۷- جواب: $\frac{1}{2}$ $x=1$ $y=\frac{x^2-3x+2}{x^4-4x+3}$

۱۰۰۸- جواب: ۱ $x=1$ $y=\frac{x^2-3x+2}{x^5-4x+3}$

۱۰۰۹- جواب: $\frac{1}{4}$ $x=2$ $y=\frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$

۱۰۱۰- جواب: $\frac{1}{3}$ $x=-1$ $y=\frac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$

۱۰۱۱- جواب: $(\frac{3}{2})^{10}$ $\quad x=2 \quad y=\frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^2-12x+16)^{10}}$

۱۰۱۲- جواب: $\frac{n(n+1)}{2}$ $\quad x=1 \quad y=\frac{x+x^2+\dots+x^n-n}{x-1}$

۱۰۱۳- جواب: $2\frac{1}{24}$ $\quad x=1 \quad y=\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$

۱۰۱۴- جواب: $\frac{m}{n}$ $\quad y=\frac{x^m-1}{x^n-1} \quad x=1 \quad m>n>0$

۱۰۱۵- $\quad n>0 \quad y=\frac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2} \quad x=a$

جواب: $y=a^{n-2}\times\frac{n(n-1)}{2}$

۱۰۱۶- جواب: $\frac{n(n+1)}{2}$ $\quad x=1 \quad y=\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$

۹۷۵- جواب: $\frac{m-n}{2}$ $\quad m>n \quad y=(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n})x=1$

۱۰۱۸-

$$y=\frac{1}{n}\left[(x+\frac{a}{n})+(x+\frac{2a}{n})+\dots+(x+\frac{(n-1)a}{n})\right] \quad n=\infty$$

جواب: $0/5(2x+a)$

۱۰۱۹- جواب: ۱ $\quad y=\frac{1^2+3^2+5^2+\dots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\dots+(2n)^2}$

۱۰۲۰- جواب: ۱ $\quad x=0 \quad y=\frac{\sin x}{tg\,x}$

۱۰۲۱- جواب: ۴ $\quad x=0 \quad y=\frac{\sin 4x}{x}$

۱۰۲۲- جواب: $\frac{1}{9}$ $\quad x=0 \quad y=\frac{\sin^2(x-3)}{x^2}$

۱۰۲۳- جواب: $\sqrt{2}$ $\quad x=0 \quad y=\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$

۱۰۲۴- جواب: ۱ $y = x\cot g x \qquad x = 0$

۱۰۲۵- جواب: $\sqrt{3}$ $y = \dfrac{1 - 2\cos x}{\sin(x - 60)} \qquad x = 60^\circ$

۱۰۲۶- جواب: $\dfrac{2}{\pi}$ $y = (1 - x)tg\dfrac{\pi x}{2} \qquad x = 1$

۱۰۲۷- جواب: $2\cos a$ $y = \dfrac{\sin(a + x) - \sin(a - x)}{x} \qquad x = 0$

۱۰۲۸- جواب: $\dfrac{1}{2}$ $y = \dfrac{tg x - \sin x}{x^3} \qquad x = 0$

۱۰۲۹- جواب: $\dfrac{1}{2}$ $y = \left(\dfrac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}{n^2} - \dfrac{n}{4}\right) \qquad n = \infty$

۱۰۳۰- ج: ۳ $y = \dfrac{1^3 + 4^3 + 7^3 + \dots (3n - 2)^3}{[1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2)]^2} \qquad x = \infty$

۱۰۳۱- جواب: ۱ $y = \dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}} \qquad x = +\infty$

۱۰۳۲- جواب: $-\dfrac{1}{16}$ $y = \dfrac{\sqrt{x + 13} - 2\sqrt{x + 1}}{x^2 - 9} \qquad x = 3$

۱۰۳۳- جواب: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $y = \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x}}{\sqrt{2x + 1}} \qquad x = +\infty$

۱۰۳۴- جواب: ∞ $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2 - 4}}{x^3 + 8} \qquad x = -2$

۱۰۳۵- جواب $\dfrac{2}{3}$ $y = \dfrac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} \qquad x = 4$

۱۰۳۶- جواب: $\dfrac{1}{4}$ $y = \dfrac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4} \qquad x = 16$

۱۰۳۷- جواب: $-\infty$ $y = \dfrac{\sqrt{1 - x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}} \qquad x = -\infty$

۱۰۳۸- جواب: ∞ $\quad x=8 \quad y=\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$

۱۰۳۹- جواب: $\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$ $\quad x=a \quad y=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

۱۰۴۰- جواب: $\dfrac{1}{n}$ $\quad x=0 \quad y=\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$

۱۰۴۱- جواب: -2 $\quad x=0 \quad y=\dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$

۱۰۴۲- جواب: $\dfrac{4}{27}$ $\quad x=7 \quad y=\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$

۱۰۴۳- جواب: $\dfrac{1}{4}$ $\quad x=0 \quad y=\dfrac{\sqrt[3]{8+2x-x^2}-2}{x+x^2}$

۱۰۴۴- جواب: $\dfrac{7}{36}$ $\quad x=0 \quad y=\dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$

۱۰۴۵- جواب: $\dfrac{2}{27}$ $\quad x=0 \quad y=\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^2}}$

۱۰۴۶- جواب: $-\dfrac{1}{2}$ $\quad x=0 \quad y=\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$

۱۰۴۷- جواب: $\dfrac{3}{2}$ $\quad x=0 \quad y=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

۱۰۴۸- $\quad x=0 \quad m>n \quad y=\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$

جواب: $\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}$

۱۰۴۹- $y=\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\times\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$ $x=0$ $m>n$

جواب: $\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}$

۱۰۵۰- جواب: $\frac{n}{m}$ $m>n$ $x=1$ $y=\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$

۱۰۵۱- جواب: $\frac{1}{2}$ $x=1$ $y=\left(\frac{3}{1-\sqrt{x}}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$

۱۰۵۲- جواب: $\frac{1}{n!}$ $x=1$ $y=\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$

توجه کنید: این ! علامت فاکتوریل می‌باشد مثلا: فاکتوریل ۳ را بصورت ۳! و فاکتوریل n را بصورت n! نمایش میدهند. ومنظورآن بصورت‌زیراست:

$2!=1\times2$ و $3!=1\times2\times3$ و $5!=1\times2\times3\times4\times5$

$n!=1\times2\times3\times4\times\cdots\cdots\times n$

۱۰۵۳- جواب: $\frac{1}{2}(a+b)$ $x=+\infty$ $y=\left[\sqrt{(x+a)(x+b)-x}\right]$

۱۰۵۴- جواب: $\frac{1}{2}$ $x=+\infty$ $y=\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x-\sqrt{x}}}}\right)$

۱۰۵۵- جواب: $\frac{-1}{4}$ $x=\infty$ $y=x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)$

۱۰۵۶- $\lim\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right)$

$x\to0$ جواب: ۱

۱۰۵۷- جواب: ۲ $x=\infty$ $y=(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})$

۱۰۵۸- جواب : $\frac{۴}{۳}$ $x=\infty$ $y=x^{\frac{۱}{۳}}[(x+۱)^{\frac{۲}{۳}}-(x-۱)^{\frac{۲}{۳}}]$

۱۰۵۹- جواب : $\frac{-۱}{۴}$ $x=\infty$ $y=x^{۱/۵}(\sqrt{x+۲}-۲\sqrt{x+۱}+\sqrt{x})$

۱۰۶۰- جواب $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt[n]{(x+a_۱)\cdots\cdots(x+a_n)}-](a_۱+a_۲+\cdots)$

۱۰۶۱ $x=\infty$ $y=\frac{(x-\sqrt{x^۲-۱})^n+(x+\sqrt{x^۲-۱})^n}{x^n}$

جواب: ۲^n

۱۰۶۲- $x=۰$ $y=\frac{(\sqrt{۱+x^۲}+x)^n-(\sqrt{۱+x^۲}-x)^n}{x}$

جواب: $۲n$ (n زوج میباشد.)

۱۰۶۳- جواب: $\frac{m}{n}$. $(-۱)^{m-n}$ $x=\pi$ $y=\frac{\sin mx}{\sin nx}$

۱۰۶۴- جواب: $\frac{۱}{۲}$ $x=۰$ $y=\frac{tg\,x-\sin x}{\sin^۳ x}$

۱۰۶۵- جواب: ۲ $x=۰$ $y=\frac{\sin ۵x-\sin ۳x}{\sin x}$

۱۰۶۶- جواب: ۵ $x=۰$ $y=\frac{\cos x-\cos ۳x}{x^۲}$

۱۰۶۷- جواب: $\frac{۱}{p}$ $x=۰$ $y=\frac{۱+\sin x-\cos x}{۱+\sin px-\cos px}$

۱۰۶۸- جواب: $\frac{۱}{۲}$ $x=۴۵^\circ$ $y=tg\,۲x\,tg(۴۵-x)$

۱۰۶۹- جواب: $\frac{۱}{۲}$ $x=۰$ $y=\frac{۱-\cos x}{x^۲}$

۱۰۷۰- جواب: $\frac{۱}{۳}$ $x=۰$ $y=x\cot g\,۳x$

۱۰۷۱- جواب: $\cos a$ $x=a$ $y=\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$

۱۰۷۲ـ جواب: ۲۴ $x=60^\circ$ $y=\frac{tg^2x-3tgx}{\cos(x+30)}$

۱۰۷۳ـ جواب: $-\sin a$ $x=a$ $y=\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$

۱۰۷۴ـ جواب: $\frac{\cos 2a}{\cos^2 a}$ $x=0$ $y=\frac{tg(a+x)tg(a-x)-tg^2a}{x^2}$

۱۰۷۵ـ جواب: $\sec^2 a$ $x=a$ $y=\frac{tgx-tga}{x-a}$

۱۰۷۶ـ جواب: $\frac{3}{4}$ $x=45^\circ$ $y=\frac{1-cotg^2x}{2-cotgx-cotg^3x}$

۱۰۷۷ـ جواب: $\frac{1}{\sin^2 a}$ $x=a$ $y=\frac{cotgx-cotga}{x-a}$

۱۰۷۸ـ جواب: $\frac{\sin a}{\cos^2 a}$ $x=a$ $y=\frac{\sec x-\sec a}{x-a}$

۱۰۷۹ـ جواب: $\frac{1}{4}$ $x=0$ $y=\frac{\sqrt{1+tgx}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

۱۰۸۰ـ جواب: $\frac{4}{3}$ $x=0$ $y=\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$

۱۰۸۱ـ جواب: $\frac{\cos a}{\sin^2 a}$ $x=a$ $y=\frac{\operatorname{cosec}x-\operatorname{cosec}a}{x-a}$

۱۰۸۲ـ $x=0$ $y=\frac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}$

جواب: $-\sin a$

۱۰۸۳ـ $x=0$ $y=\frac{\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a}{x^2}$

جواب: $-\cos a$

۱۰۸۴ـ $x=0$ $y=\frac{tg(a+2x)-2tg(a+x)+tga}{x^2}$

جواب: $\frac{2\sin a}{\cos^3 a}$

۱۰۸۵- $x=0$ $y=\dfrac{\cot g(a+2x)-2\cot g(a+x)+\cot g\, a}{x^2}$

جواب: $\dfrac{2\cos a}{\sin^2 a}$

۱۰۸۶- $x=0$ $y=\dfrac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{x}$

جواب: $\dfrac{3\sin 2a}{2}$

۱۰۸۷- جواب: $-\dfrac{1}{12}$ $x=0$ $y=\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

۱۰۸۸- جواب: -3 $x=30^\circ$ $y=\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$

۱۰۸۹- جواب: $\sqrt{2}$ $x=0$ $y=\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{\sqrt{1-\cos x}}$

۱۰۹۰- جواب: 12 $x=0$ $y=\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$

۱۰۹۱- جواب: 0 $x=0$ $y=\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos(\sqrt{x})}$

۱۰۹۲- جواب: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $x=60^\circ$ $y=\dfrac{\sin(x-60)}{1-2\cos x}$

۱۰۹۳- جواب: 3 $x=0$ $y=\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$

۱۰۹۴- جواب: $x=+\infty$ $y=(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$

۱۰۹۵- حاصل عبارت زیر را بازاء $x=0$ و $x=1$ و $x=+\infty$ بدست آورید:

$$y=\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$$

جواب: $\dfrac{1}{2}$ و $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ و 1

۱۰۹۶- جواب: ۰ $x=\infty$ $y=\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$

۱۰۹۷- جواب: $n=\infty$ $y=\left(\sin^n\frac{2\pi n}{3n+1}\right)$

۱۰۹۸- جواب: ۱ $x=90^\circ$ $y=(\sin x)^{tg\,x}$

۱۰۹۹- جواب: ۰ $x=45^\circ$ $y=[tg(22/5+x)]^{tg\,2x}$

۱۱۰۰- جواب: ۱ $x=\infty$ $y=\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

۱۱۰۱- جواب: ۱ $x=\infty$ $y=\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{\frac{1}{x}}$

۱۱۰۲- جواب: ۰ $x=\infty$ $a_1>0$ $a_2>2$ $y=\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x$

۱۱۰۳- جواب: ۱ $x=1$ $y=\frac{tg(1-x)}{x-1}$

۱۱۰۴- جواب: ۱ $x=0$ $y=\left(\frac{1+tg\,x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

۱۱۰۵- جواب: $\frac{1}{a}$ $x=a$ $a>0$ $y=\frac{\mathrm{Log}\,x-\mathrm{Log}\,a}{x-a}$

۱۱۰۶- جواب: -2 $x=\infty$ $y=\log\frac{100+x^2}{1+100x^2}$

۱۱۰۷- جواب: $\mathrm{Log}\,a$ $x=0$ $a>0$ $y=\frac{a^x-1}{x}$

۱۱۰۸- جواب: $\frac{\alpha}{\beta} a^{\alpha-\beta}$ $\quad y=\frac{x^{\alpha}-a^{\alpha}}{x^{\beta}-\alpha^{\beta}} \quad x=a \quad a>0$

۱۱۰۹- جواب: $a^{b}\cdot Loga$ $\quad y=\frac{a^{x}-a^{b}}{a-b} \quad x=b \quad a>0$

۱۱۱۰- جواب: $\frac{a}{b}$ $\quad y=\frac{\sin ax}{\sin bx} \quad x=0$

۱۱۱۱- جواب: ۲ $\quad y=\frac{tg\,x-x}{x-\sin x} \quad x=0$

۱۱۱۲- جواب: ۲- $\quad y=\frac{2\,tg\,3x-12\,tg\,x}{3\sin 3x-12\sin x} \quad x=0$

۱۱۱۳- جواب: $\frac{1}{3}$ $\quad y=\frac{tg\,3x}{tg\,x} \quad x=90^{\circ}$

۱۱۱۴- جواب: $-\frac{1}{3}$ $\quad y=\frac{x\,cotg\,x-1}{x^{2}} \quad x=0$

۱۱۱۵- جواب: $\frac{1}{3}$ $\quad y=\frac{\sqrt{tg\,x}-1}{2\sin^{2}x-1} \quad x=45^{\circ}$

۱۱۱۶- جواب: $\frac{1}{6}$ $\quad y=\frac{x(e^{x}+1)-2(e^{x}-1)}{x^{3}} \quad x=0$

۱۱۱۷- جواب: $\frac{1}{2}$ $\quad y=\frac{1-\cos x^{2}}{x^{2}\sin x^{2}} \quad x=0$

۱۱۱۸- جواب: ۱ $\quad y=\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^{3}} \quad x=0$

۱۱۱۹- $y=\frac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}\,arctg\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{b}\,arctg\sqrt{\frac{x}{b}}\right)$

جواب: $\frac{a-b}{3ab}$

۱۱۲۰- جواب: $\frac{1}{6}\log a$ $\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-a\sin x}{x^{3}} \quad x=0 \quad a>0$

۱۱۲۱- جواب: ۱ $x=0$ $y=\frac{\mathrm{Log}(\sin ax)}{\mathrm{Log}(\sin bx)}$

۱۱۲۲- جواب: $(\frac{a}{b})^2$ $x=90^\circ$ $y=\frac{\mathrm{Log}(\cos ax)}{\mathrm{Log}(\cos bx)}$

۱۱۲۳- جواب: $\frac{1}{6}$ $x=0$ $y=\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$

۱۱۲۴- جواب: ۲ $x=0$ $y=\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

۱۱۲۵- جواب: ۲ $x=0$ $y=\frac{tg\,x-x}{x-\sin x}$

۱۱۲۶- جواب: $\sqrt{2}$ $x=0$ $y=\frac{\sin nx}{\sqrt{1-\cos x}}$

۱۱۲۷- جواب: $-\frac{1}{8}$ $x=90$ $y=\frac{\mathrm{Log}\sin x}{(\pi-2x)^2}$

۱۱۲۸- جواب: $\mathrm{Log}\frac{a}{b}$ $x=0$ $y=\frac{a^x-b^x}{x}$

۱۱۲۹- جواب: $-\frac{1}{6}$ $x=0$ $y=\frac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$

۱۱۳۰- جواب: $\cos a$ $x=a$ $y=\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$

۱۱۳۱- جواب: $\frac{3}{2}$ $x=\infty$ $y=\frac{3x-1}{2x+5}$

۱۱۳۲- جواب: ۱ $x=\infty$ $y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

۱۱۳۳- جواب: ۱ $x=0$ $y=\frac{\mathrm{Log}\sin 3x}{\mathrm{Log}\sin x}$

۱۱۳۴- جواب: ۱ $x=0$ $y=\frac{\mathrm{Log}\,tg\,7x}{\mathrm{Log}\,tg\,2x}$

۱۱۳۵- جواب: $y=1$ $\quad x=1 \quad y=\frac{\mathrm{Log}(x-1)-x}{tg(\pi\div 2x)}$

۱۱۳۶- جواب: $y=-\frac{1}{2}$ $\quad x=1 \quad y=[\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}]$

۱۱۳۷- جواب: $y=-1$ $\quad x=1 \quad y=[\frac{1}{\mathrm{Log}\,x}-\frac{x}{\mathrm{Log}\,x}]$

۱۱۳۸- جواب: $y=\frac{-4}{5}$ $\quad y=\frac{\sqrt[5]{1+x^2}-\sqrt[5]{1-x}}{\sqrt[5]{1+x^2}-\sqrt[5]{2-x^2}}$

۱۱۳۹- جواب: $y=9$ $\quad x=-1 \quad y=\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+1}{x^2+2x+1}$

۱۱۴۰- جواب: $y=0$ $\quad x=+\infty \quad y=x+\sqrt[3]{1-x^3}$

۱۱۴۱- جواب: $y=e^{-1}$ $\quad x=\frac{\pi}{4} \quad y=(tg\,x)^{tg\,2x}$

۱۱۴۲ جواب: $y=1$ $\quad x=\frac{\pi}{4} \quad y=(\sin x)^{tg\,x}$

۱۱۴۳- جواب: $y=^{-2}$ $\quad x=0 \quad y=[tg(45+x)]^{tg\,x}$

۱۱۴۴- جواب: $y=e$ $\quad x=\infty \quad y=(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^x$

۱۱۴۵- $y=e^{-1}$ $\quad x=1 \quad y=(1+\sin\pi x)^{cotg\,\pi x}$

۱۱۴۶- - تابع $y=\frac{(a-b+3)x^3+(a+b+3)x^2+3x-1}{2x^2-x-3}$

مفروض است مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که مقدار تابع بازاء $x=\pm\infty$ برابر ۴ شود.

حل: چون مقدار تابع بازاء $x=\mp\infty$ برابر عدد است پس باید توان صورت با مخرج مساوی باشد

پس :
$$\begin{cases} a-b+3=0 \\ \dfrac{a+b+3}{2}=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a-b=-3 \\ a+b=5 \end{cases}$$

$a+b=5 \rightarrow 1+b=5 \rightarrow b=4$ و $2a=2 \rightarrow a=1$ ← از جمع دو رابطه

۱۱۴۷- تابع $y=ax+\sqrt{x^2+bx+1}$ مفروض است a و b را چنان تعیین کنید که مقدار تابع بازاء $x=\infty$ برابر ۳ گردد .

حل: چون مقدار تابع مساوی عدد ۳ شده است پس باید $a<0$ باشد زیرا اگر a مثبت باشد مقدار تابع بازاء $x=\infty$ برابر $+\infty$ میشود. و درحالتیکه برابر ۳ میباشد ابتداء مقدار تابع بازاء $x=\infty$ برابر $y=-\infty+\infty$ میشود که مبهم است پس:

$$y=\frac{x^2+bx+1-a^2x^2}{\sqrt{x^2+bx+1}-ax}=\frac{(1-a^2)x^2+bx+1}{\sqrt{x^2+bx+1}-ax}$$

$$y=\frac{(1-a^2)\,x+b+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}-a}$$

برای اینکه مقدار این تابع بازاء $x=\infty$ برابر ۳ شود باید در صورت $(1-a^2)x$ وجود نداشته باشد. پس:

$$1-a^2=0 \rightarrow a^2=1 \rightarrow a=-1$$

میدانیم بازاء $a=-1$ و $x=\infty$ مقدار تابع برابر مقدار زیر میشود:

$$y=\frac{b}{1-a} \rightarrow 3=\frac{b}{1+1} \rightarrow \boxed{b=6}$$

۱۱۴۸- تابع $y=ax+b+\sqrt{4x^2+4}$ مفروض است a و b را چنان تعیین کنید که مقدار تابع بازاء $x=-\infty$ برابر ۴ شود. جواب: $b=3$ و $a=2$

۱۱۴۹- تابع $y=\dfrac{(3a+b)x^3+(b+c)x^2+(c-3)x+2a}{cx+b}$ مفروض است. ضرایب را چنان تعیین کنید که مقدار تابع بازاء $x=\pm\infty$ برابر ۲ شود .

جواب: $c=-3$ و $b=3$ و $a=-1$

۱۱۵۰ – تابع $y=\frac{-3x^2+ax+b}{ax^2+2b}$ مفروض است a و b را چنان تعیین کنید که مقدار تابع بازاء $x=\pm\infty$ برابر ۲ و بازاء $x=-2$ برابر یك شود .

جواب : $a=-2$ و $b=-3$

۱۱۵۱ – تابع $y=\frac{\sin ax}{tg 2x}$ مفروض است a را چنان تعیین کنید که مقدار تابع بازاء $x=0$ برابر ۳ شود .

جواب: $a=6$

مجانبهای منحنی

تعریف شاخه بی نهایت یك منحنیـ نقطه $A(\alpha و \beta)$ یك نقطه ثابت و مشخص از منحنی (C) و نقطه دیگری مانند $M(x و y)$ که در روی منحنی (c) تغییر مکان می دهد در نظر میگیریم وقتی نقطه M بتواند بی نهایت از نقطه A دور شود می گویند منحنی (c) دارای شاخه بی نهایت است .

تذکرـ موقعی یك منحنی دارای شاخه بی نهایت است که حداقل قدر مطلق یکی از مقادیر x و y یعنی مختصات یك نقطه از منحنی بی نهایت بزرك شود.

تعریف مجانب یك منحنیـ مجانب نمایش یك تابع خطی است یا یك منحنی دیگری است که در شاخه بی نهایت بر منحنی نمایش تابع مماس می شود.

تعریف خط مجانبـ خط راست Δ را مجانب شاخه‌ای از منحنی (c) مینامند اگر وقتی که نقطه متحرك M روی شاخه مزبور بی نهایت دور شود فاصله آن از خط Δ بسمت صفر میل کند .

چند قاعده برای پیدا کردن معادله مجانب های توابع کسری

قاعده ۱۵۴	**مجانب قائم** : برای پیدا کردن معادله مجانبهای قائم مخرج کسر را مساوی صفر قرار میدهیم و x را بدست می آوریم مثلا اگر ریشه‌های مخرج α و β باشد خطوط $x=\alpha$ و $x=\beta$ مجانب‌های قائم منحنی میباشند.
قاعده ۱۵۵	**مجانب افقی** : اگر مقدار تابع به ازاء $x=\pm\infty$ برابر عدد K شود (یعنی بینهایت نشود) خط $y=K$ مجانب افقی منحنی میباشد.

تذکر: لطفاً قواعد صفحه (۱۵۴) را دوباره مطالعه فرمائید.

تذکر مهم: اگر بزرگترین توان صورت یك واحد بیشتر از بزرگترین توان مخرج باشد منحنی دارای مجانب مایل است که طبق یکی از دو قاعده زیر معادله آنرا بدست می‌آوریم.

قاعده ۱۵۶ — **طریقه پیدا کردن مجانب مایل:** صورت کسر را بر مخرج کسر تقسیم می نمائیم و خارج قسمت را مساوی y قرار میدهیم (خارج قسمت = y) معادله مجانب مایل است. (با باقیمانده تقسیم کاری نداریم).

اگر باقیمانده صفر شود تابع یك تابع کسری نیست و در حقیقت تابع بصورت (خارج قسمت = y) میباشد و مجانب هم ندارد

قاعده ۱۵۷ — **طریقه تقاطع:** معادله منحنی را با معادله خط $y = mx + n$ حل می‌نمائیم و سپس معادله بدست آمده را برحسب x مرتب می‌نمائیم و ضرایب دوجمله متوالی را که توانشان از همه بیشتر است مساوی صفر قرار میدهیم و m و n را بدست می‌آوریم و سپس در معادله خط بجای m و n مقادیر بدست آمده را قرار میدهیم تا معادله مجانب منحنی بدست آید.

قاعده ۱۵۸ — در توابع اسم m و n (یعنی ضریب زاویه مماس و عرض از مبدأ مجانب از فرمولهای زیر بدست میآیند

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} \quad \text{و} \quad n = \lim_{x \to \infty} (y - mx)$$

تذکر مهم: اگر در یك تابع کسری بزرگترین توان صورت دو واحد یا سه واحد یا... از بزرگترین توان مخرج بیشتر باشد منحنی نمایش آن تابع دارای یك مجانب منحنی میباشد که برای پیدا کردن معادله آن صورت کسر را بر مخرج کسر تقسیم می کنیم و خارج قسمت را مساوی y قرار میدهیم در اینصورت (خارج قسمت = y) معادله مجانب منحنی میشود.

معادلات مجانبهای هریك از توابع زیر را بدست آورید:

۱۱۵۲ — ك۱ ص۷۶ —

$$y = \frac{2x + 1}{x - 2}$$

معادله مجانب افقی $x = \pm\infty \to y = 2$

معادله مجانب قائم $y = \pm\infty \to x - 2 = 0 \to x = 2$

۱۱۵۳ — ك۲ ص۷۶ —

$$y = \frac{1}{x - 3}$$

معادله مجانب افقی $x = \pm\infty \to y = 0$

معادله مجانب قائم $y=\pm\infty \to x-3=0 \to x=3$

۱۱۵۴ ـ ک۳ص۷۷ـ $y=\frac{1}{x}$

معادله مجانب افقی $x=\pm\infty \to y=0$

معادله مجانب قائم $y=\pm\infty \to x=0$

۱۱۵۵ ـ ک۴ص۷۷ـ $y=\frac{2x^3+1}{x^2-1}$

مجانب افقی ندارد $x=\pm\infty \to y=\pm\infty$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+1 & x^2-1 \\ \hline -2x^3+2x & 2x \\ \hline 2x+1 & \end{array} \to y=2x+\frac{2x+1}{x^2-1}$$

خط $y=2x$ مجانب مایل است.

معادله مجانبهای قائم $y=\pm\infty \to x^2-1=0 \to x=\pm 1$

۱۱۵۶ ـ ک۵ص۷۷ـ $y=\frac{3x^2-2x}{x^2-4}$

معادله مجانب افقی $x=\pm\infty \to y=3$

معادله مجانبهای قائم $y=\pm\infty \to x^2-4=0 \to x=\pm 2$

۱۱۵۷ ـ ک۶ص۷۷ـ $y=\frac{(x^2-1)}{x^2-5x+6}$

معادله مجانب افقی $x=\pm\infty \to y=1$

معادله مجانبهای قائم $y=\pm\infty \to x^2-5x+6=0 \to x=3$ و $x=2$

۱۱۵۸ ـ ک۷ص۷۷ـ $y=\frac{4x+1}{x^2-9}$

معادله مجانب افقی $x=\pm\infty \to y=0$

معادله مجانبهای قائم $y=\pm\infty \to x^2-9=0 \to x=\pm 3$

۱۱۵۹ ـ ک۸ص۷۷ـ $y=\frac{x^3-1}{x^2+x+1}$

حل: $y=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1} \to y=x-1$

پس معادله فوق معادله یك خط میباشد نه معادله یك منحنی.

۱۱۶۰ - ك۹ص۷۷-

$$y = \frac{x^2}{x+1}$$

مجانب افقی ندارد $x = \pm\infty \rightarrow y = \pm\infty$

$$y = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x+1 \\ \hline -x & x-1 \\ \hline -x & \\ x+1 & \\ \hline +1 & \end{array}$$

پس خط $y = x - 1$ مجانب مایل است.

معادله مجانب قائم $y = \pm\infty \rightarrow x = -1$

۱۱۶۱ - ك۱۰ص۸۷-

$$y = \frac{2x^2+1}{x^2-2x+1}$$

مجانب افقی ندارد $x = \pm\infty \rightarrow y = \pm\infty$

مجانب مایل $y = 2x + 4 + \frac{6x-3}{x^2-2x+1} \rightarrow y = 2x + 4$

معادله مجانب قائم $y = \pm\infty \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = 1$

۱۱۶۲ - ك۱۱ص۷۷-

$$y = x + 3 + \frac{1}{x}$$

مجانب افقی ندارد $x = \pm\infty \rightarrow y = \pm\infty$

معادله مجانب مایل $y = x + 3$

معادله مجانب قائم $y = \pm\infty \rightarrow x = 0$

۱۱۶۳ - ۱۲ص۷۷-

$$y = 2x - 1 - \frac{x-1}{x^2-4}$$

مجانب افقی ندارد $x = \pm\infty \rightarrow y = \pm\infty$

معادله مجانب مایل $y = 2x - 1$

معادلات مجانبهای قائم $y = \pm\infty \rightarrow x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2$

۱۱۶۴ - ك۱۳ص۷۷-

$$y = \frac{x^2}{x+1}$$

مجانب افقی ندارد $x = \pm\infty \rightarrow y = \pm\infty$

پس $y=x-1$ مجانب مایل است. $y=x-1+\frac{1}{x+1}$

معادله مجانب قائم $y=\pm\infty \to x+1=0 \to x=-1$

۱۱۶۵ - ک۱۴ص۷۷ $y=\frac{2x^3-x^2+1}{x-2}$

مجانب افقی ندارد $y=\pm\infty \to y=\pm\infty$

$$y=2x^2+3x+6+\frac{13}{x-2}$$

پس منحنی نمایش تابع $y=2x^2+3x+6$ مجانب است.

معادله مجانب قائم $y=\pm\infty \to x-2=0 \to x=2$

۱۱۶۶ - ک۱۵ص۷۷ $y=\frac{2x^4-1}{x^3+x}$

مجانب افقی ندارد $x=\pm\infty \to y=\pm\infty$

پس $y=2x$ مجانب مایل است. $y=2x-\frac{2x^2+1}{x^3+x}$

مجانب قائم $y=\pm\infty \to x^3+x=0 \to x(x^2+1)=0 \to x=0$

۱۱۶۷ - ک۱۶ص۷۷ $y=\frac{x^4}{x+1}$

مجانب افقی ندارد $x=\pm\infty \to y=\pm\infty$

$$y=x^3-x^2+x-1+\frac{1}{x+1}$$

پس منحنی نمایش تابع $y=x^3-x^2+x-1$ مجانب منحنی فوق میباشد.

معادله مجانب قائم $y=\pm\infty \to x+1=0 \to x=-1$

چند تذکر و قاعده برای تعیین مجانبهای توابع اصم

تذکر ۱ : در توابع اصم اگر فرجه رادیکال زوج باشد ابتداء مشخص می‌نمائیم که تابع درجه فاصله‌ای از x معین است (طبق حل مسائل صفحه ۷۸ و ۷۹)

تذکر ۲- فقط توابع اصم و کسری ممکن است دارای مجانب قائم باشند و برای بدست آوردن معادله آنها مخرج کسر را مساوی صفر قرار میدهیم اگر بازاء ریشه‌های مخرج تابع معین باشد تابع دارای مجانب قائم است درغیر اینصورت دارای مجانب قائم نیست.

تذکر ۳ـ برای بدست‌آوردن مجانبهای قائم وافقی ومایل توابع اسم طبق، قاعده‌های (۱۵۲) و (۱۵۵) عمل می‌نمائیم.

تذکر ۴ـ اگر مقدار n یا m بی‌نهایت شود منحنی دارای مجانب مایل نیست .

تذکر ۵ـ اگر تابع مقادیر $+\infty$ یا $-\infty$ یا هردوی آنها را قبول کند . ممکن است تابع دارای مجانب مایل یا مجانب افقی باشد .

تذکر ۶ـ اگر تابع بازاء $x=\pm\infty$ برابر ∞ شود ممکن است دارای مجانب مایل باشد .

تذکر ۷ـ اگر تابع بازاء $x=+\infty$ یا $x=-\infty$ مساوی عدد K شود خط $y=K$ مجانب افقی است.

۱۱۶۸ — ک۱۷ـ ص۷۷ـ

$$y=\sqrt{x^2-1}$$

$$x^2-1\geq 0\rightarrow x^2-1=0\rightarrow x=1$$

بازاء $x>1$ تابع معین است و تابع دارای مجانب قائم نیست.

$$x=+\infty\rightarrow y=+\infty$$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\pm\infty$$

پس منحنی مجانب مایل وافقی ندارد.

۱۱۶۹ — ک۱۸ـ ص۷۷

$$y=\sqrt{x^2-4x-3}$$

$$x^2-4x-3\geq 0\rightarrow x^2-4x-3=0\rightarrow x=2\pm\sqrt{7}$$

تابع بازاء $2+\sqrt{7}>x>2-\sqrt{7}$ نامعین است :

اولاـ بازاء $x=+\infty$

$$x=+\infty\rightarrow y=+\infty$$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x-3}}{x}=1$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}(y-mx)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-4x-3}-x)=\infty-\infty$$

مبهم است

$$n=\lim\frac{x^2-4x-3-x^2}{\sqrt{x^2-4x-3}+x}$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}=\frac{x(-2-\frac{3}{x})}{x(\sqrt{1-\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}+1)}$$

معادله یک مجانب مایل $n=-2\to y=x-2$

ثانیاً ـ باداء $x=-\infty$ $x=-\infty\to y=+\infty$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x-3}}{x}=-1$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}(y-mx)=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-4x-3}+x)=\infty-\infty$$

مبهم است

$$n=\lim\frac{x^2-4x-3-x^2}{\sqrt{x^2-4x-3}-x}=\frac{x(-4-\frac{3}{x})}{x(-\sqrt{1-\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}-1)}$$

معادله مجانب دیگر $n=2\to y=mx+n\to y=-x+2$

طریقهٔ دوم: باخط $y=ax+b$ منحنی‌را قطع‌میدهیم.

$$\sqrt{x^2-4x-3}=ax+b\to x^2-4x-3=a^2x^2+b^2+2abx$$

$$x^2(a^2-1)+2x(ab+2)+b^2+3=0$$

$$\begin{cases} a^2-1=0 \to a=\pm1 \\ ab+2=0 \to a=1\to b=-2 \text{ و } a=-1\to b=2 \end{cases}$$

معادلات مجانبها $y=ax+b\to y=\pm x\mp2$

۱۱۷۰ - ک۱۹ـص۷۷ $y=x-\sqrt{x^2+1}$

چون x^2+1 همواره مثبت‌است پس‌تابع‌همیشه معین‌است.

اولاـ $x=+\infty$ $x=+\infty\to y=\infty-\infty$ مبهم‌است

$$y=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2-1}{x+\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}=0$$

پس خط $y=0$ یعنی محور طولها مجانب افقی می‌باشد.

ثانیاً ـ $x=-\infty$

$$x=-\infty \to y=-\infty-\infty=-\infty$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x}$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})}{x}=2$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}(y-mx)=\lim_{x\to-\infty}(x-\sqrt{x^2+1}-2x)$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}(-x-\sqrt{x^2+1})=\infty-\infty$$

مبهم است

$$n=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-1}{-x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{-1}{-x+\sqrt{x^2+1}}=0$$

معادله مجانب مایل

$$y=mx+n\to y=2x$$

۱۱۷۱ ـ ک ۲۰ ص ۷۷ ـ

$$y=x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

حل: تابع بازاء $x>1$ و $x<-1$ نامعین است

مجانب قائم

$$y=\pm\infty\to x-1=0\to x=1$$

پس ممکن است مجانب مایل داشته باشد

$$x=+\infty\to y=+\infty$$

$$m=\lim_{x=+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=1$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}(y-mx)=\lim_{x\to\infty}\frac{x(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{\sqrt{x-1}}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{x(x+1-x+1)}{(\sqrt{x^2-1}+x-1)}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1-\frac{1}{x})}=1$$

معادله مجانب مایل $y=mx+n\to y=x+1$

پس ممکن است مجانب مایل داشته باشد $x=-\infty\to y=-\infty$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=+1$$

مبهم است $n=\lim(x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-x)=\infty-\infty$

$$n=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{\sqrt{x-1}}=\lim\frac{x(x+1-x+1)}{\sqrt{x^2-1}+x-1}$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x(-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1-\frac{1}{x})}=\frac{2}{0}=\infty$$

بازاء $x=-\infty$ مجانب مایل ندارد

۱۳۷۲ - ک ۲۱ ص ۷۷ - $y=\sqrt{\frac{x^2-1}{x+2}}$

مجانب قائم $y=\pm\infty\to x+2=0\to x=-2$

پس ممکن است مجانب مایل داشته باشد $x=\infty\to y=\infty$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+2x^2}}=1$$

مبهم است $n=\lim_{x\to\infty}(y-mx)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{\frac{x^2-1}{x+2}}-x)=\infty-\infty$

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1-x^2(x+2)}{\sqrt{x+2}(\sqrt{x^2-1}+x\sqrt{x+2})}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1-x^2(x+2)}{\sqrt{x+2}(\sqrt{x^2-1}+x\sqrt{x+2})}$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2-1}{\sqrt{x^4+2x^2-x-2}+x(\sqrt{x+2})}$$

$$n=\lim_{x\to\infty} \frac{x^2(-2-\frac{1}{x^2})}{x^2(\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}} = -2$$

معادله مجانب مایل $y=mx+n \to y=x-2$

پس ممکن است مجانب مایل داشته باشد $x=-\infty \to y=+\infty$

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^4-1}{x^4+2x^2}} = 1$$

مبهم است $n=\lim_{x\to-\infty}(y-mx) = \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{\frac{x^4-1}{x+2}}-x) = \infty-\infty$

$$n = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-1-x^2(x+2)}{\sqrt{x+2}(\sqrt{x^4-1})+x\sqrt{x+2}}$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2-1}{\sqrt{(x+2)(x^4-1)}+x\sqrt{(x+2)}}$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2-1}{\sqrt{x^6+2x^4-x-2}+x\sqrt{(x+2)}}$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2(-2-\frac{1}{x^2})}{x^2(\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^4}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}} = -2$$

معادله مجانب مایل $y=mx+n \to y=x-2$

۱۱۷۳ - ك۲۲ص۷۷ - $y=1-x+\sqrt{x^2+4x}$

مبهم است $x=\infty \to y=-\infty+\infty$

$$y = \lim_{x\to\infty} \frac{1+x^2-2x-x^2-4x}{1-x-\sqrt{x^2+4x}}$$

$$y = \lim_{x\to\infty} \frac{-6x+1}{1-x-\sqrt{x^2+4x}} = 3$$ معادله مجانب افقی

۱۱۷۴ ـ ک۲۳ص۷۷

$$y = \frac{4x}{\sqrt{x^3-1}}$$

تابع معین است $x^3-1>0 \to x>1$

مجانب قائم $y=\pm\infty \to x^3-1=0 \to x=1$

معادله مجانب افقی $x=+\infty \to y=0$

۱۱۷۵ ـ ک۲۴ص۷۷ ـ

$$y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$$

تابع بازاء $-2<x\leq 2$ نامعین است.

معادله مجانب افقی $x=\pm\infty \to y=1$

معادله مجانب قائم $y=\pm\infty \to x=-2$

۱۱۷۶ ـ ک۲۵ص۷۷ ـ

$$y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$\frac{1-x}{1+x}>0 \to 1>x>-1$$

بازاء $x=\pm\infty$ تابع نامعین است پس مجانب افقی مایل ندارد.

معادله مجانب قائم $y=\pm\infty \to x=-1$

۱۱۷۷ ـ ک۲۶ص۷۷ ـ

$$y=\sqrt{x^2-4x^2}$$

$$x=+\infty \to y=+\infty$$

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x^2}}{x} = \lim\sqrt{x-4} = \infty$$

بنابراین مجانب مایل وافقی ندارد .

۱۱۷۸ - ک۲۷ص۷۷-

$$y=3x+\sqrt{x^2+1}$$

پس ممکن است مجانب مایل داشته باشد $x=+\infty \to y=+\infty$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\sqrt{x^2+1}}{x}=4$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}(y-mx)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\infty-\infty$$

مبهم است

$$n=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

معادله مجانب مایل $y=mx+n\to y=4x$

مبهم است $x=-\infty\to y=-\infty+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} y=\frac{9x^2-x^2-1}{3x-\sqrt{x^2+1}}=-\infty$$

مجانب افقی. ۲۹۸ $m=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}3-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$

۱۱۷۹ - ک۲۸ص۷۷-

$$y=3x-\sqrt{x^2+4x-5}$$

مبهم است $x=+\infty \to y=\infty-\infty$

$$y=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x^2-4x+5}{3x+\sqrt{x^2+4x-5}}=\infty$$

پس ممکن است مجانب مایل داشته باشد

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(3-\sqrt{1+\frac{4}{x}-5}\right) = 2$$

$$n = \lim_{x\to+\infty}(y-mx) = \lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+4x-5}\right) = \infty-\infty$$

مبهم است

$$n = \lim_{x\to+\infty}\frac{-4+\frac{5}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}}} = -2$$

$$y = mx+n \to y = 2x-2$$

معادله مجانب مایل

$$y = \sqrt{x^2+4x+3}$$

۱۱۸۰ –

حل: معادله منحنی را با معادله خط $y=mx+n$ حل می‌نمائیم

$$\sqrt{x^2+4x+3} = mx+n$$

$$x^2+4x+3 = m^2x^2+n^2+2mx^2n+2n^2mx$$

$$x^2(m^2-1)+2m^2nx^2+x(2n^2m-4)+n^2-3=0$$

$$m^2-1=0 \to m=1 \text{ و } 2m^2n=0 \to n=0 \to y=x$$

۱۱۸۱ – ک۲۹ ص۷۷ – a را طوری بدست آورید که منحنی $y = \frac{ax+2}{3x-1}$

دارای مجانبی بمعادله $y=2$ باشد.

حل: $x=\pm\infty \to y=\frac{a}{3} \to 2=\frac{a}{3} \to a=6$

۱۱۸۲ – ک۳۰ ص۷۸ – m را چنان تعیین کنید که منحنی $y = \frac{ax+1}{2x-m}$ دارای

مجانبی بمعادله $x=3$ باشد.

حل: $y=\pm\infty \to 2x-m=0 \to x=\frac{m}{2} \to 3=\frac{m}{2} \to m=6$

۱۱۸۳ – ک۳۱ ص۷۸ – a و b را چنان تعیین کنید که مجانبهای منحنی :

$$y = \frac{ax+2b}{bx+1}$$

بمعادله‌های $x=2$ و $y=-3$ باشند.

حل: $y=\pm\infty \to bx+1=0 \to b\times 2+1=0 \to b=-0/5$

$x=\pm\infty \to y=\frac{a}{b} \to -3=\frac{a}{-0/5} \to a=1/5$

۱۱۸۴ - ک۳۲ص۷۸- m و n را چنان پیدا کنید که منحنی $y=\frac{3mx^2+nx+1}{mx+2}$

دارای دو مجانب به معادله $y=3x$ و $x=1$ باشد.

حل:

$y=\pm\infty \to mx+2=0$ و $x=1 \to m+2=0 \to m=-2$

مجانب $m=-2 \to y=\frac{-6x^2+nx+1}{-2x+2}$ و $y=3x$

طریقه تقاطع: $\frac{-6x^2+nx+1}{-2x+2}=3x$

$-6x^2+nx+1=-6x^2+6x \to n=6$

۱۱۸۵ - ک۳۳ص۷۸- a و b را بقسمی بیابید که مجانب منحنی $y=\frac{ax^2+bx-7}{x-1}$

به معادله $y=2x+3$ باشد.

حل: ابتداء صورت کسر را بر مخرج کسر تقسیم می‌نمائیم و معادله مجانب مایل را بدست می‌آوریم و با معادله مجانب داده شده مقایسه می‌کنیم.

$$\begin{array}{l|l} ax^2+bx-7 & x-1 \\ \pm ax^2\mp ax & ax+b+a \\ \hline (b+a)x-7 & \\ \pm(b+a)x\mp b\mp a & \\ \hline b+a-7 & \end{array} \to \begin{cases} y=ax+b+a \\ y=2x+3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=2 \text{ و } b+a=3 \\ b+2=3 \to b=1 \end{cases}$$

۱۱۸۶ - تابع $y=\frac{x^2+2}{x^2+ax+b}$ مفروض است a و b را چنان تعیین کنید که خطوط $x=2$ و $x=-1$ مجانبهای قائم آن باشند.

حل:

$y=\pm\infty \to x^2+ax+b=0$

$$\begin{cases} x=2 \to 4+2a+b=0 \\ x=-1 \to 1-a+b=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4+2a+b=0 \\ 2-2a+2b= \end{cases} \quad \begin{cases} b=-2 \\ a=-1 \end{cases}$$

۱۱۸۷ - تابع $y=\frac{ax^2+3x+b}{bx^2+cx+3}$ مفروض است a و b و c را چنان تعیین کنید که خط $y=2$ مجانب افقی و خطوط $x=3$ و $x=1$ مجانبهای قائم آن باشند

حل:

$$x=\pm\infty\rightarrow y=\frac{a}{b}\rightarrow 2=\frac{a}{b}\ \boxed{a=2b}$$

$$y=\pm\infty\rightarrow bx^2+cx+3=0$$

$$\begin{cases} x=3\rightarrow 9b+3c+3=0 \\ x=1\rightarrow b+c+3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 9b+3c+3=0 \\ -3b-3c-9=0 \end{cases}$$

$6b=6\rightarrow b=1$ و $9+3c+3=0\rightarrow c=-3$ - از جمع دو رابطه

$$a=2b\rightarrow a=2\times 1=2$$

۱۱۸۸ - تابع $y=\frac{x^3}{x^2+ax+b}$ مفروض است a و b را چنان تعیین کنید که تابع فوق فقط دارای یک مجانب قائم بمعادله $x=-3$ باشد.

حل:

$$y=\pm\infty\rightarrow x^2+ax+b=0$$

$x=-3$ ریشه مضاعف معادله فوق است پس:

$$x'=x''=\frac{-b}{2a}\rightarrow x'=x''=\frac{-a}{2}\rightarrow -3=\frac{-a}{2}\rightarrow a=6$$

$$x=-3\rightarrow 9+a(-3)+b=0\rightarrow 9+6(-3)+b=0\rightarrow b=9$$

۱۱۸۹ - تابع $y=\frac{ax^3+bx^2+cx+1}{(a-2)x^2+2x-1}$ مفروض است ضرایب a و b و c را چنان تعیین کنید که منحنی نمایش تابع $y=x^2+3x-2$ مجانب منحنی نمایش تابع فوق باشد.

حل: چون معادله مجانب از درجه دوم است پس باید مخرج از درجه اول باشد.

پس:

$$a-2=0\rightarrow a=2$$

حال صورت کسر را بر مخرج کسر تقسیم کرده و معادله منحنی مجانب را بدست می آوریم.

$$a=2\rightarrow y=\frac{2x^3+bx^2+cx+1}{2x-1}$$

$$\begin{array}{l|l} 2x^3+bx^2+cx+1 & 2x-1 \\ \pm 2x^3 \mp x^2 & x^2+\frac{(b+1)}{2}x+\frac{(c+0/5b+0/5)}{2} \\ \hline (b+1)x^2+cx+1 & \\ \pm(b+1)x^2 \mp 0/5(b+1)x & \\ \hline (c+0/5b+0/5)x+1 & \\ \pm(c+0/5b+0/5)x \mp 0/5(c+0/5b+0/5) & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{cases} y = x^2+\frac{b+1}{2}x+\frac{c+0/5b+0/5}{2} \\ y=x^2+3x-2 \end{cases}$$

$$\frac{b+1}{2}=3 \rightarrow \boxed{b=5} \text{ و } \frac{c+0/5b+0/5}{2}=-2$$

$$c+2/5+0/5=-4 \rightarrow c=-7$$

۱۱۹۰ - تابع $y=ax+\sqrt{x^2+2x+3}$ مفروض است بازاء چه مقادیری از a تابع فوق‌دارای مجانب مایل است.

حل: میدانیم برای اینکه منحنی دارای مجانب مایل باشد باید مقدار m مخالف صفر و n مخالف ∞ باشد.

حل:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\frac{ax}{x}+\sqrt{\frac{x^2+2x+3}{x^2}}$$

$$m=a+1 \rightarrow m\neq 0 \rightarrow a+1\neq 0 \rightarrow a\neq -1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(y-mx)=\lim[ax+\sqrt{x^2+2x+3}-(a+1)x]$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+2x+3}-x \rightarrow n=\infty-\infty$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+2x+3}+x} \rightarrow n=\frac{2}{2}=1$$

۱۱۹۱ - تابع $y=\sqrt{\frac{ax^3+bx^2+3}{3x+2}}$ مفروض است a و b را چنان تعیین کنید که

خط $y=2x-3$ مجانب شاخه $x=+\infty$ باشد.

حل:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{ax^3+bx^2+3}{3x+2}}}{x}$$

$$m=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{ax^3+bx^2+3}{3x^3+2x^2}}$$

$$m=\sqrt{\frac{a}{3}}\to 2=\sqrt{\frac{a}{3}}\to \boxed{a=12}$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}(y-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{12x^3+bx^2+3}{3x+2}}-2x\right)=\infty-\infty$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{12x^3+bx^2+3}{3x+2}-4x^2}{\sqrt{\frac{12x^3+bx^2+3}{3x+2}}+2x}$$

$$n=\lim\frac{(b-8)x^2+3}{(3x+2)\left(\sqrt{\frac{12x^3+bx^2+3}{3x+2}}+2x\right)}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{b-8+\frac{3}{x^2}}{(3+\frac{2}{x})\left(\sqrt{\frac{12x^3+bx^2+3}{3x^3+2x^2}}+2\right)}=\frac{b-8}{3\times(2+2)}$$

$$-3=\frac{b-8}{12}\to b-8=-36\to\boxed{b=-28}$$

۱۱۹۲ – تابع $y=3x-\sqrt{ax^2+x}$ مفروض است مقدار a را چنان تعیین کنید که منحنی مجانبی موازی محور xها داشته باشد.

حل: باید ضریب x را به مجانب برابر صفر شود $m=0$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x-\sqrt{ax^2+x}}{x}=\frac{3\mp\sqrt{a}}{1}$$

$$۳ \mp \sqrt{a} = ۰ \rightarrow a = ۹$$

۱۱۹۳ - تابع $y = ax + ۲ + \sqrt{۴x^۲ - ۳x + ۱}$ مفروض است a را چنان تعیین کنید که مجانبهای مایل منحنی برهم عمود باشند.

$$m \text{ و } m' = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax + ۲ + \sqrt{۴x^۲ - ۳x + ۱}}{x} = \frac{a \pm ۲}{۱}$$

$$mm' = -۱ \rightarrow (a+۲)(a-۲) = -۱ \rightarrow a^۲ = ۳ \rightarrow a = \pm\sqrt{۳}$$

۱۱۹۴ - معادلات مجانبهای توابع زیر را بدست آورید.

$$y = x + ۲ + \sqrt{x^۲ - ۴}$$

جواب: $x = +\infty \rightarrow y = ۲x + ۲$ و $x = -\infty \rightarrow y = ۲$

۱۱۹۵ - $y = \pm\sqrt{x^۲ - ۲x}$

جواب: $y = x - ۱$ و $y = -x + ۱$

۱۱۹۶ - $y = x - \sqrt{x^۲ + ۴x}$

جواب: $x = +\infty \rightarrow y = ۲x + ۲$ و $x = -\infty \rightarrow y = -۲$

۱۱۹۷ - $y = \sqrt[۳]{۲x^۳ + ۳x - ۵}$ (جواب: $y = ۲x$)

۱۱۹۸ - $y = x\sqrt{\frac{۳ - x}{۳ + x}}$

مجانب قائم: $x = -۳$

۱۱۹۹ - $y = \sqrt{\frac{۲x - ۱}{۱ - x}}$

جواب: مجانب قائم $x = ۱$

۱۲۰۰ - $(y - ۳x)(y + x) = ۹$

جواب: $y = ۳x$ و $y = -x$

۱۲۰۱ - $y^۲ + xy - ۱ = ۰$

جواب: $y = -x$ و $y = ۰$

۱۲۰۲ - $y = \pm\frac{\sqrt{(x-۱)^۲ - ۹}}{x - ۱}$

جواب: مجانبهای افقی $y = ۱$ و $y = -۱$

۱۲۰۳ - $y = \sqrt[۳]{x^۳ - ۳x^۲ + ۲}$ (ج: $y = x - ۱$)

۱۲۰۴ - $y = \pm x\sqrt{\frac{x - ۱}{x + ۱}}$

جواب: $y=x-1$ و $y=-x+1$

۱۲۰۵ $y=\pm x\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$

$y=x+2$ و $y=-x-2$

۱۲۰۶ — $y=\sqrt{x^2-x^2}$ (جواب: $y=x-\frac{1}{3}$)

۱۲۰۷ — $y=\sqrt{x^2-x^2}$ (ج: $y=-x+\frac{1}{3}$)

۱۲۰۸ — تابع $y=\frac{(a+b)x^2+(b-2)x^2+3x}{2x+cx+d}$ مفروض است ضرایب را چنان تعیین کنید که خطوط $x=3$ و $x=-1$ مجانبهای قائم و خط $y=-2$ مجانب افقی آن باشد.

جواب: $a=2$ و $b=-2$ و $c=-3$ و $d=-6$

۱۲۰۹ — تابع $y=\frac{ax^3+bx^2+3}{x^2+2x+3}$ مفروض است a و b را چنان تعیین کنید که خط $y=2x-3$ مجانب مایل منحنی نمایش تابع فوق باشد.

حل: ابتدا صورت کسر را بر مخرج کسر تقسیم کرده و معادله مجانب مایل را بدست می‌آوریم.

جواب: $a=2$ و $b=1$

۱۲۱۰ — تابع $y=\frac{ax^3+bx^2+cx^2}{(d-1)x^3+x^2+1}$ مفروض است ضرایب را چنان تعیین کنید که منحنی نمایش تابع $y=-x^2+2x-4$ مجانب منحنی نمایش تابع فوق باشد.

جواب: $c=-5$ و $b=3$ و $a=-1$ و $d=1$.

۱۲۱۱ — تابع $y=\frac{ax^3+bx^2+5}{cx^2+dx+4}$ مفروض است ضرایب را چنان تعیین کنید که منحنی نمایش تابع فوق فقط یك مجانب قائم بمعادله $x=2$ داشته باشد و معادله مجانب مایل آن بصورت $y=3x-4$ باشد.

جواب: $d=-4$ و $c=1$ و $b=-16$ و $a=3$

۱۲۱۲ -- $y=\sqrt{\frac{ax^2+bx^2-1}{x-1}}$ مفروض است a و b را بقسمی تعیین کنید که خط $y=x+2$ مجانب شاخه $x=-\infty$ باشد.

جواب: $a=1$ و $b=-5$

۱۲۱۳ - تابع $y=ax+2-\sqrt{x^2+bx}$ مفروض است a و b را چنان تعیین کنید که معادله مجانب مایل تابع مربوط بشاخه $x=-\infty$ برابر $y=3x-1$ باشد

جواب: $a=2$ و $b=-6$

قاعده خیلی مهم: معادلات مجانبهای توابعی که بصورت :

$y=ax+b\pm\sqrt[m]{cx^m+dx^{m-1}+\cdots}$ میباشد از فرمولهای زیر بدست می‌آید.

الف: اگر m زوج باشد $y=ax+b\pm\sqrt[m]{c}\,(x+\frac{d}{mc})$

ب: اگر m فرد باشد $y=ax+b+\sqrt[m]{c}(x+\frac{d}{mc})$ مانند مثالهای زیر

$$y=2x+4\pm\sqrt[4]{2x^4-16x^3+7x-1}$$

معادله مجانبها

$$y=3x+3\pm\sqrt[3]{2}(x-2)$$

$$y=2x-1+\sqrt[5]{2x^5-6x^4+7x^2-x+2}$$

معادلات مجانبها $y=2x-1+\sqrt[5]{2}(x-\frac{3}{5})$

طریقه رسم توابع درجه‌دوم وسوم وچهارم

برای رسم توابع درجه‌دوم‌وسوم وچهارم اعمال زیررا انجام‌میدهیم

۱ـ ازتابع مشتق گرفته وبجای y' صفرقرار میدهیم ومقدار xرا حساب میکنیم این مقادیرطولهای نقاط ماکزیمم ومی‌نیمم می‌باشند. (اگرریشه‌مضاعف نباشند)

تذکر: اگرمشتق توابع درجه‌سوم یك ریشه‌داشته باشدآن ریشه‌طول نقطه‌عطف‌منحنی‌است. (بطورکلی ریشه‌مضاعف‌مشتق طول نقطه‌عطف‌منحنی‌است)

۲ـ طولهای نقاط ماکزیمم و می‌نیمم‌را درتابع بجای x میگذاریم و عرضهای نقاط ماکزیمم‌ومی‌نیمم‌را بدست‌می‌آوریم.

۳ـ درتوابع درجه‌سوم مشتق‌ثانی‌را بدست‌آورده وبجای y'' صفرقراردهیم تاطول نقطه‌عطف‌منحنی بدست‌آید وسپس این‌طول‌را درتابع بجای x میگذاریم تا عرض نقطه‌عطف منحنی بدست‌آید.

تذکر: عمل‌فوق (دستور شماره ۳) درتوابع‌درجه‌سوم همیشه لازم نیست فقط وقتیکه مشتق‌اول ریشه‌ندارد ازمشتق‌ثانی استفاده‌میکنیم.

۴ـ درتابع‌بجای x صفرقراردهیم تاعرض‌نقطه‌تقاطع منحنی بامحورعرضها بدست آید وyرا حساب میکنیم (مختصات نقطه‌تقاطع منحنی بامحورعرضهارا بدست‌می‌آوریم).

۵ـ درتابع‌بجایx منهای‌بینهایت ($-\infty$) را قرارمی‌دهیم وyرا حساب‌می‌کنیم) در اینصورت حاصل‌جمله‌ای‌را بدست می‌آوریم‌که توانش ازهمه بیشتراست)

۶ـ درتابع‌بجایxباضافه‌بینهایت ($+\infty$)راقراردهیم و y را حساب می‌کنیم (در اینصورت حاصل جمله‌ای‌را بدست‌میآوریم که‌توانش ازهمه‌بیشتر است)

۷ـ در تابع بجای y صفر قرار میدهیم و طول های نقاط تلاقی منحنی را با محور طول ها بدست میآوریم

تذکر: اگر معادله درجه سوم یا درجه چهارمی که بدست می آید نتوانستیم تجزیه کنیم از محاسبه x صرف نظر می کنیم و بقیه عملیات مسأله را ادامه می دهیم چون بدون اینکه این حل را انجام دهیم می توانیم منحنی را رسم کنیم.

۸ـ اگر نقاطی که بطریقه بالا بدست می آید یکی بوده یا نه داد آنها کم باشد به x مقادیر مختلف می دهیم (بهتر است عدد صحیح باشد) و y را حساب میکنیم البته این مقادیر باید از طول های نقاط ماکزیمم و می نیمم یا عطف کمتر و یا بیشتر باشد.

۹ـ جدولی مطابق نمونه زیر رسم می کنیم:

x	$-\infty$		$+\infty$
y'			
y			

در ستون افقی x مقادیری را که برای x بدست آورده ایم قرار میدهیم.

در ستون افقی y' زیر ریشه های مشتق صفر قرار داده و علامت مشتق را طبق قواعد گذشته بدست می آوریم.

در ستون افقی y مقادیری را که برای y بدست آورده ایم قرار میدهیم.

۱۰ـ محورهای مختصات را رسم کرده و از روی جدول نقاط بالا را روی صفحه مختصات بدست آورده و بهم وصل می نمائیم تا منحنی رسم شود.

رسم منحنی‌های کتاب درسی

۱۲۱۴ - ک۱ص۱۱۶-

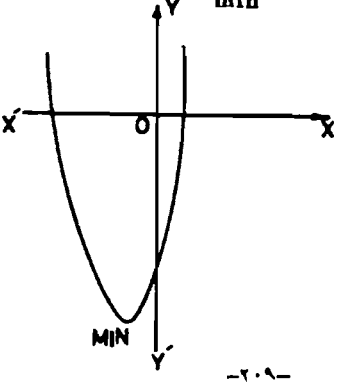
$y=2x^2+2x-3$

$y'=8x+2 \to y'=0 \to 8x+2=0 \to x=\frac{-1}{2}$

$x=-\frac{1}{2} \to y=2(\frac{-1}{2})^2+2(\frac{-1}{2})-3=-4$

$y=0 \to 2x^2+2x-3=0 \to x=\frac{1}{2}$ و $\frac{-3}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	−	−	0	+	+	
y	$+\infty$ ↘	0 ↘	−4 min ↗	−3	↗ 0 ↗	$+\infty$



x	y
$y'=0 \begin{cases} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$	−4 0
0	−3
$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$

۱۲۱۵ - ک۲ص۱۱۶ـ

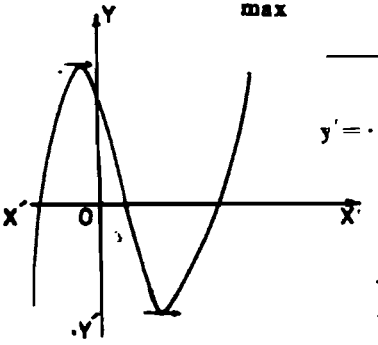
$$y=(x+۲)(x-۱)(x-۳)$$

$$y'=(x-۱)(x-۳)+(x+۲)(x-۳)+(x+۲)(x-۱)$$

$$y'=۳x^۲-۴x-۵\to y'=۰\to ۳x^۲-۴x-۵=۰\to x=\frac{۲\pm\sqrt{۱۹}}{۳}$$

$$y=۰\to(x+۲)(x-۱)(x-۳)=۰\to x=-۲و۱و۳$$

x	$-\infty$		-۲		$\frac{۲-\sqrt{۱۹}}{۳}$		۱		$\frac{۲+\sqrt{۱۹}}{۳}$		۳		$+\infty$
y'		$+$		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	۰	$\nearrow$	$\frac{۵۶+۳۸\sqrt{۱۹}}{۲۷}$ max	$\searrow$	۰	$\searrow$	$\frac{۵۶-۳۸\sqrt{۱۹}}{۲۷}$ min	$\nearrow$	۰	$\nearrow$	$+\infty$



$$y'=۰\begin{cases}\frac{۲+\sqrt{۱۹}}{۳} & \frac{۵۶-۳۸\sqrt{۱۹}}{۲۷}\\ \frac{۲-\sqrt{۱۹}}{۳} & \frac{۵۶+۳۸\sqrt{۱۹}}{۲۷}\end{cases}$$

x	y
$-۲و۱و۳$	۰
۰	۶
$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$

۱۲۱۶ - ک۳ص۱۱۶ـ

$$y=(x-۳)(۲x+۱)^۲$$

$$y'=(۲x+۱)(۶x-۱۱)$$

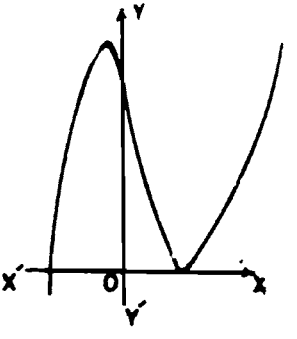
x	$-\infty$		$\frac{-۱}{۲}$		۰		$\frac{۱۱}{۶}$		۳		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$			
y	$-\infty$	$\nearrow$	۰ max	$\searrow$	-۳	$\searrow$	$\frac{-۶۸۶}{۲۷}$ min	$\nearrow$	۰	$\nearrow$	$+\infty$

۱۲۱۷ - ک۴ص۱۱۶-

$y=(x+2)(2x-1)^2$

$y'=(2x-1)(6x+11)$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{11}{6}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'			$+$		0		$-$		0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{686}{27}$ max	$\searrow$	2	$\searrow$	0 min	$\nearrow$	$+\infty$



۱۲۱۸ - ک۵ص۱۱۷-

$y=x^3-x^2-2x+1$

$y'=3x^2-2x-2$

x		$-\infty$		-2		$-0/8$		0		$1/5$		2		$+\infty$
y'			$+$		0		$-$		0		$+$			
y	$\nearrow$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\nearrow$	$2/9$ max	$\searrow$	1	$\searrow$	$-2/6$ min	$\nearrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

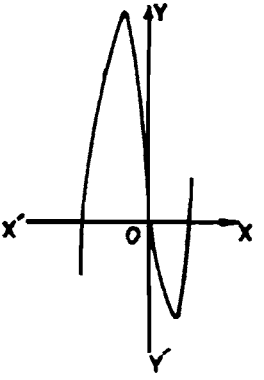
$$y'=0 \begin{cases} \frac{1-\sqrt{13}}{13} \# -0/8 & \frac{26\sqrt{13}-11}{27} \# 2/9 \\ \frac{1+\sqrt{13}}{3} \# 1/5 & \frac{-26\sqrt{13}-11}{27} \# 3/6 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ -2 & -3 \\ 2 & -3 \\ \pm\infty & \pm\infty \end{array}$$

۱۲۱۹ - ص۶ ص۱۱۷

$y = 4x^3 + 3x^2 - 12x$

$y' = 6x^2 + 6x - 12$



x	y
$y' = 0 \begin{cases} \frac{-3+\sqrt{93}}{6} \# 1/1 \\ \frac{-3-\sqrt{93}}{6} \# -2/1 \end{cases}$	$-9/1$ $23/1$
$\begin{cases} 0 \\ 2 \\ \frac{-7}{2} \end{cases}$ $\pm\infty$	$\pm\infty$

۱۲۲۰ - ص۷ ص۱۱۷

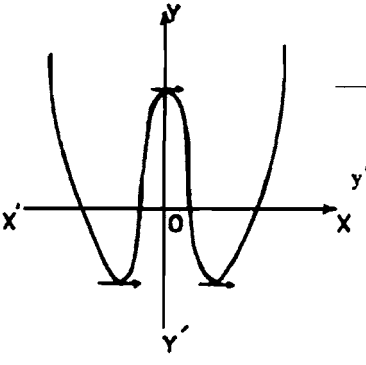
$y = x^4 - 5x^2 + 4$

$y' = 4x^3 - 10x \to y' = 0 \to 2x(2x^2 - 5) = 0$

$$y' = 0 \begin{cases} x = 0 \to y = 4 \\ 2x^2 - 5 = 0 \to x^2 = \frac{5}{2} \to x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \to y = -\frac{9}{4} \end{cases}$$

$y = 0 \to x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \to (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0 \to x = \pm 2 , \pm 1$

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{\frac{5}{2}}$		-1		0		1		$\sqrt{\frac{5}{2}}$		2		$+\infty$
y'				$-$			0	$+$		0		$-$			0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\frac{-9}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\searrow$	$\frac{-9}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
					min				max				min				



x	y
	۴
$y'=0\begin{cases}+\sqrt{\frac{5}{2}}\\-\sqrt{\frac{5}{2}}\end{cases}$	$-\frac{9}{4}$
	$-\frac{9}{4}$
۱± و ۲±	۰
∞±	∞+

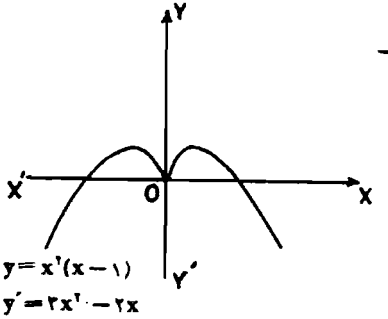
۱۳۲۱ - ک۸ص۱۱۷-

$y=-x^4+2x^2$

$y'=-4x^3+4x\to y'=0\to -4x(x^2-1)=0$

$$y'=0\begin{cases}x=0\to y=0\\ x^2-1=0\to x^2=1\to x=\pm 1\to y=+1\end{cases}$$

$y=0\to -x^4+2x^2=0\to -x^2(x^2-2)=0\to x=0,\pm\sqrt{2}$



x	y
	۰
$y'=0\begin{cases}-1\\+1\end{cases}$	$+1$
	$+1$
۰ و $\pm\sqrt{2}$	۰
∞±	∞−

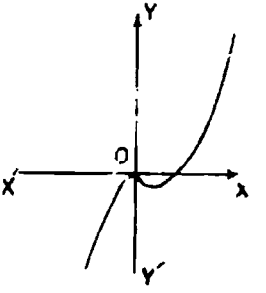
۱۳۲۲ - ک۹ص۱۱۷-

$y=x^2(x-1)$

$y'=2x^2-2x$

x	$-\infty$		$\frac{۲}{۳}$		۱		$+\infty$
y'	+		۰	−	۰	+	+
y	$-\infty$	↗	۰	↘	$-\frac{۱}{۲۷}$	↗ ۰ ↗	$+\infty$

max min



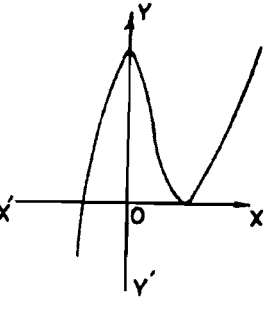
۱۲۲۳ ك۱۰ص۱۱۷-

$y=(x-۲)^۲(x+۱)$

$y'=۳x(x-۲)$

x	$-\infty$		-۱		۰		۲		$+\infty$
y'			+		۰	−	۰	+	
y	$-\infty$	↗	۰	↗	۴	↘	۰	↗	$+\infty$

max min



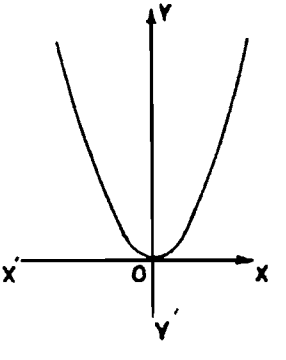
۱۲۲۴ ك۱۲ص۱۱۷-

$y=x^۲(x^۲+۱)^۲$

$y'=۲x(x^۲+۱)(۳x^۲+۱)$

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
y'		−		−	۰		+	+	
y	$+\infty$	↘	۴	↘	۰	↗	۴	↗	$+\infty$

min



۱۲۲۵ - ک۱۱ص۱۱۷-

$$y = 2x^2(x^2-1)^2$$

$$y' = 6x^2(x^2-1)^2 + 2\times 2x(x^2-1)\times 2x^2$$

$$y' = 6x^2(x^2-8)^2 + 8x^2(x^2-1) = 0$$

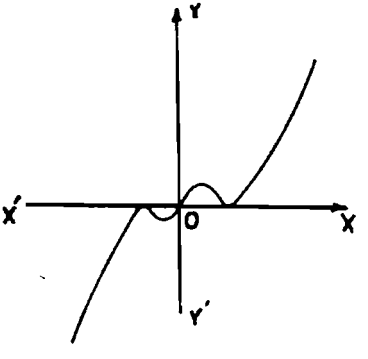
$$x^2(x^2-1)[6(x^2-1)+8x^2] = 0$$

$$\begin{cases} x^2 = 0 \to x = 0 \to y = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \to x^2 = +1 \to x = \pm 1 \to y = 0 \\ 6(x^2-1)+8x^2 = 0 \to 14x^2 - 6 = 0 \to x^2 = \frac{3}{7} \to x = \pm\sqrt{\frac{3}{7}} \end{cases}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{3}{7}} \to y = 2\left(\pm\sqrt{\frac{3}{7}}\right)^2\left(\frac{3}{7}-1\right)^2 [\to y \neq \pm 0/25]$$

$$x = \pm\infty \to y = (\pm\infty)^7 \to y = \pm\infty$$

x	$-\infty$		-1		$-\sqrt{\frac{3}{7}}$		0		$+\sqrt{\frac{3}{7}}$		$+1$		$+\infty$
y'	$+$		0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-0/25$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$0/25$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
			max		min				max		min		



x	y
0	0
$+1$	0
-1	0
$-\sqrt{\frac{3}{7}}$	$-0/25$
$+\sqrt{\frac{3}{7}}$	$0/25$
$\pm\infty$	$\pm\infty$

۱۲۲۶ - ک۱۳ص۱۱۷-

$$y = -(x^2-1)^2(x^2-4)$$

$$y' = -[4x(x^2-1)(x^2-4) + 2x(x^2-1)^2]$$

$$y' = -2x(x^2-1)[2(x^2-4)+x^2-1] = 2x(x^2-1)(3x^2-9)$$

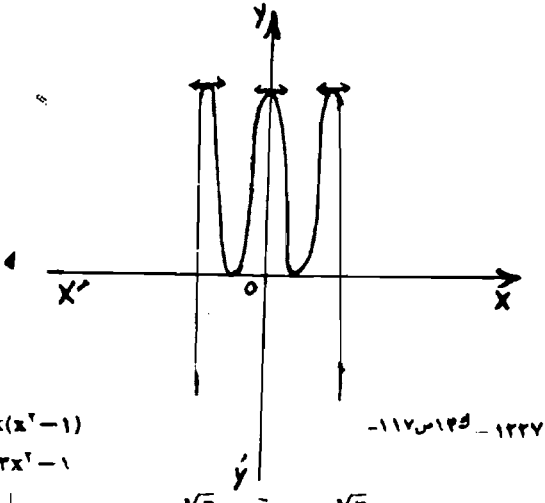
$$\begin{cases} x=0 \to y=-1\times -4=4 \\ x^2-1=0 \to x^2=1 \to x=\pm 1 \to y=0 \\ 3x^2-9=0 \Longrightarrow x^2=3 \Longrightarrow x=\pm\sqrt{3} \Longrightarrow y=-(2)^2(+1)=-4 \end{cases}$$

$x=\pm\infty \to \quad y=-\infty$

$$y=0 \to \begin{cases} (x^2-1)^2=0 \to x=\pm 1 \\ x^2-4=0 \to x=\pm 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	2	$+\infty$
y'	+	0 −	0 +		0	− 0	+ 0		−
y	$-\infty$ ↗	0 ↗	4 ↘	0 ↗	4 ↘	0 ↗	4 ↘	0 ↘	$-\infty$

max min max min max

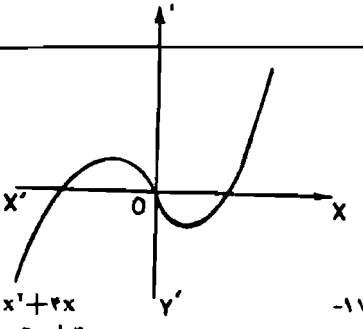


$y=x(x^2-1)$ ۱۲۲۷ ـ ص۱۱۷ ـ

$y'=3x^2-1$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$+\infty$
y'	+	+	0 −	−	0 +	+	
y	$-\infty$ ↗	0 ↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$ ↘	0 ↘	$\frac{-2\sqrt{3}}{9}$ ↗	0 ↗	$+\infty$

min



۱۳۲۸ ـ ک۱۵ص۱۱۷ـ

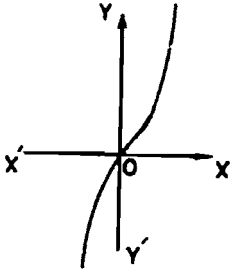
$y = x^3 - x^2 + 4x$

$y' = 3x^2 - 2x + 4$

$y'' = 6x - 2$

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		+		+		+		+		+	
y	$-\infty$	↗	-6	↗	0	↗	$\frac{34}{27}$	↗	4	↗	$+\infty$

عطف



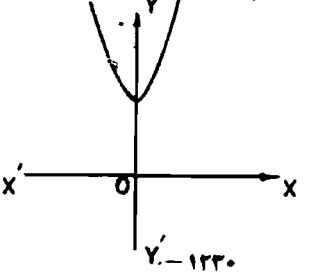
۱۳۲۹ ـ ک۱۶ص۱۱۷ـ

$y = x^4 + x^2 + 1$

$y' = 4x^3 + 2x$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		−		−	0	+		+	
y	$+\infty$	↘	3	↘	1	↗	3	↗	$+\infty$

min



۱۳۳۰ ـ

$y = (x-1)^3 - 8$

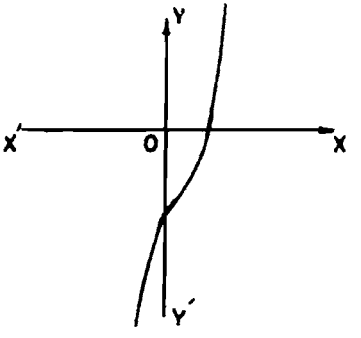
$y' = 3(1)\ (x-1)^2 = 3(x-1)^2$

$y = 0 \to (x-1)^3 - 8 = 0 \to (x-1)^3 = 8 \to x - 1 = 2 \to x = 3$

x	$-\infty$		-1		0		1		2		3		$+\infty$
y'						+				+			
y	$-\infty$	↗	-16	↗	-9	↗	-8	↗	-7	↗	0	↗	$+\infty$

عطف

x	y
$y' = ۰ \left\{ \begin{array}{l} ۱ \\ \\ \end{array} \right.$	-۸
۰	-۹
$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$
۳	۰
نقاط اضافی ۲	-۷
نقاط اضافی -۱	-۱۶

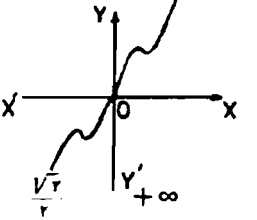


۱۲۳۱ - شهریور ماه ۴۴

$y = ۸x^۵ - ۱۰x^۳ + ۵x$

$y' = ۴۰x^۴ - ۳۰x^۲ + ۵$

$y' = ۰ \quad \left| \begin{array}{l} x = \pm\frac{۱}{۲} \text{ و } \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ y = \pm ۱/۵ \text{ و } \pm\sqrt{۲} \end{array} \right.$



x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$		$-\frac{۱}{۲}$		۰		$\frac{۱}{۲}$		$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$		$+\infty$
y'		+	۰	−	۰	+			۰	−	۰	+	
y	$-\infty$	↗	$-\sqrt{۲۰}$	↘	$-۱/۵$	↗	۰	↗	$۱/۵$	↘	$\sqrt{۲}$	↗	$+\infty$

تمرین: جدول ومنحنی نمایش هریك از توابع زیر را رسم کنید.

۱۲۳۲ - کنکور فنی تبریز سال ۳۷ $y = (x+۱)(x^۲+۳x+۱)$

x	$-\infty$		$\frac{-۳-\sqrt{۵}}{۲}$		-۲		-۱		$\frac{-۲}{۳}$		$\frac{-۳+\sqrt{۵}}{۲}$		۰		$+\infty$
y'			+		۰		−		۰		+				
y	$-\infty$	↗		↗	۰	↗	۱	↘	۰	↘	$\frac{-۵}{۲۷}$	↗	۰	↗	۱	↗	$+\infty$

max min

کنکور دانشکده علوم (رشته زمین‌شناسی) ۳۸

۱۲۳۳ - $y=2x^3-12x^2+18x-8=2(x-4)(x-1)^2$

x	$-\infty$		0		1		3		4		$+\infty$
y′			+		0	−	0		+		
y	$-\infty$	↗	−8	↗	0	↘	−8	↗	0	↗	$+\infty$

max min

۱۲۳۴ - شهریور ۴۲ $y'=3(x^2-1)$ و $y=(x-1)^2(x+2)$

x	$-\infty$		−2		−1		0		1		$+\infty$
y′			+		0	−		−	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↗	4	↘	2	↘	0	↗	$+\infty$

max min

۱۲۳۵ - دانشکده علوم (زمین‌شناسی) ۴۱ $y=x^2-3x-2$

x	$-\infty$		−1		0		1		2		$+\infty$
y′		+		0		−		0	+		
y	$-\infty$	↗	0	↘	−2	↘	−4	↗	0	↗	$+\infty$

max min

۱۲۳۶ - شهریور ۳۷ $y'=3x^2+6x$ و $y=x^3+3x^2+1$

x	$-\infty$		−2		−1		0		$+\infty$
y′		+	0		−		0	+	
y	$-\infty$	↗	5	↘	3	↘	1	↗	$+\infty$

max min

۱۲۳۷ - خرداد ۴۴ $y'=x^2+4x$ و $y=\frac{1}{3}x^3+2x^2-\frac{16}{3}$

x	$-\infty$		$-2-2\sqrt{3}$		-4		-2		0		$-2+2\sqrt{3}$		$+\infty$
y′		+			0	−		−	0		+		
y	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{16}{3}$	↘	0	↘	$\frac{-16}{3}$	↗	0	↗	$+\infty$

۱۲۳۸ - شهریور ۴۶ $y'=4x^3-4x$ و $y=(x^2-4)(x^2+2)$

۱۲۳۹ - شهریور ۳۷ - $y = x^{۲} - ۲x + ۲$

x	$-\infty$		-۲		-۱		۰		۱		۲		$+\infty$
y'			$-$		۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$			
y	$+\infty$	↘	۰	↘	-۹	↗	-۸	↘	-۹	↗	۰	↗	$+\infty$
					min				max				

۱۲۴۰ - شهریور ۴۸ - $y = x^{۲} - ۲x$

x	$-\infty$		-۲		$\frac{-۲\sqrt{۳}}{۳}$		۰		$\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$		۲		$+\infty$
y'			$+$		۰		$-$		۰		$+$		
y	$-\infty$	↗	۰	↗	$\frac{۱۶\sqrt{۳}}{۹}$	↘	۰	↘	$\frac{-۱۶\sqrt{۳}}{۹}$	↗	۰	↗	$+\infty$
					max				min				

راه حل تقریبی

معادلات درجه‌دوم ودرجه‌سوم ودرجه‌چهارم ازراه‌ترسیم

برای‌حل‌معادلات فوق ازراه‌ترسیم جملات‌معادله‌را تفکیک میکنیم یعنی در معادلات درجه‌دوم ودرجه‌سوم جملاتیکه توان آنها دو و سه میباشد در طرف چپ نگهداشته وبقیه جملات‌را بطرف‌راست تساوی میبریم ودرمعادلات درجه‌چهارم جملاتیکه توان آنها سه و چهار میباشد درطرف‌چپ نگهداشته‌وبقیه‌جملات‌را بطرف‌راست میبریم وسپس جملات طرف چپ‌را مساوی y وهمچنین جملات طرف‌راست‌را نیز مساوی y می‌گذاریم وسپس‌دوتابعی‌که بدست‌می‌آید در یکدستگاه محورهای مختصات رسم‌می‌نمائیم و بعد ازمحل برخورد آنها عمودهائی برمحورطولها رسم‌می‌کنیم فاصله‌های پای عمودها را تا مبدأ مختصات اندازه میگیریم این مقادیر ریشه‌های معادلات‌فوق‌می‌باشند.

جوابهای‌معادلات زیررا ازراه ترسیم‌منحنی تعیین‌کنید.

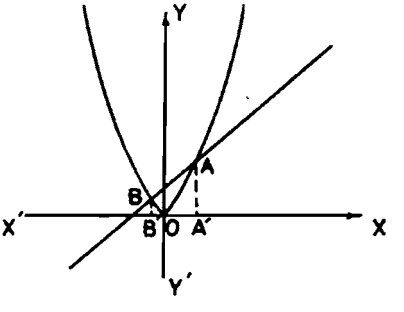
۱۲۴۱ — حل: $x^2 - x - 1 = 0$

$x^2 = x + 1$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

$x_1 = OA' \approx 1/6$

$x_2 = OB' \approx -0/6$



۱۲۴۲ -

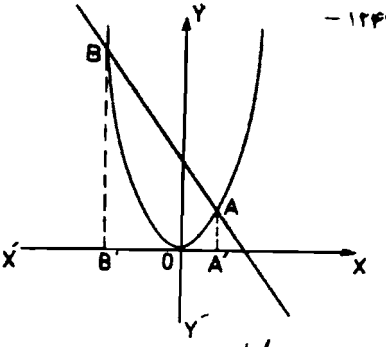
$x^2+2x-5=0$

$x^2=-2x+5$

$\begin{cases} y=x^2 \\ y=-2x+5 \end{cases}$

$x_1=OA' \approx 1/2$

$y_2=OB' \approx -3/4$



۱۲۴۳ -

$x^3-x^2-4x+4=0$

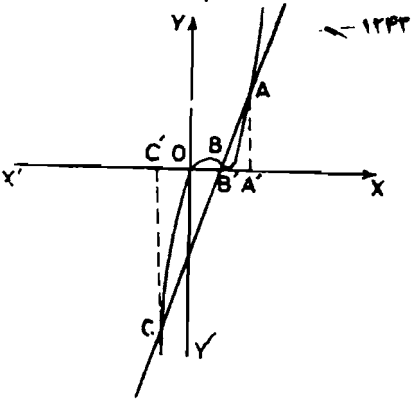
$x^3-x^2=4x-4$

$\begin{cases} y=x^3-x^2 \\ y=4x-4 \end{cases}$

$x_1=OA'=2$

$x_2=OB'=1$

$x_3=OC'=-2$



۱۲۴۴ -

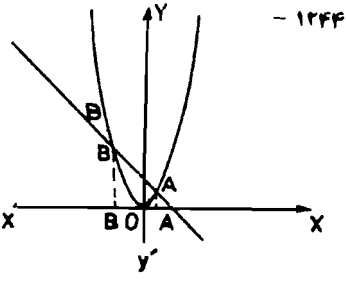
$3x^2+x-1=0$

$3x^2=-x+1$

$\begin{cases} y=3x^2 \\ y=-x+1 \end{cases}$

$x_1=OA' \approx 0/3$

$x_2=OB' \approx -0/8$



تذکر مهم: لطفاً در مسائل زیر شکل را خودتان بکشید و از نقاط تقاطع سهمی‌ها بر محور طولها رسم کنید و فواصل را اندازه بگیرید و با جوابی که در کتاب داده شده مقایسه کنید.

۱۲۴۵ $x^2-5x+2=0 \rightarrow x^2=5x-2$

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=5x-2 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x_1 &= OA' = 2 \\ x_2 &= OB' \neq 0/4 \\ x_3 &= OC' \neq -2/4 \end{aligned}$$

۱۲۴۶ $8x^3-4x^2+2x-1=0 \rightarrow 8x^3-4x^2=-2x+1$

$$\begin{cases} y=8x^3-4x^2 \\ y=-2x+1 \end{cases} \qquad x_1 \quad \frac{1}{2}$$

۱۲۴۷ $x^4-2x^2+3=0 \rightarrow x^4-2x^2=-3$

$$\begin{cases} y=x^4-2x^2 \\ y=-3 \end{cases} \qquad x_1=-1$$

۱۲۴۸ $x^3+x+1=0 \rightarrow x^3=-x-1$

$$\begin{cases} y=x^3 \\ y=-x-1 \end{cases} \qquad x_1 \neq -0/7$$

۱۲۴۹ ـ معادله $x^3-x-5=0$ چند ریشه دارد؟ با استفاده از رسم منحنی اندازه ریشه‌ها را با دو رقم اعشار بدست آورید. جواب: $x \neq 1/61$

علوم و رشته ریاضی ۴۲

طریقه رسم توابع کسری

برای رسم توابع کسری اعمال زیر را انجام میدهیم.

۱ـ از تابع مشتق گرفته و خلاصه می‌نمائیم و صورت آنرا مساوی صفر قرار میدهیم تا طول نقاط ماکزیمم و می‌نیمم بدست آید (اگر موجود باشد) و سپس این طولها را در تابع بجای x قرار میدهیم و عرض نقاط ماکزیمم و می‌نیمم را حساب می‌کنیم.

تذکر ۱ـ اگر مشتق دارای ریشه مضاعف باشد ریشه مضاعف طول نقطه عطف منحنی است.

تذکر ۲ـ بجای اینکه طول نقطه ماکزیمم و می‌نیمم را در تابع قرار دهیم تا عرض نقطه

ماکزیمم و می‌نیمم را حساب کنیم میتوانیم در تابع $y_1 = \frac{f'(x)}{g'(x)}$ یعنی در تابعی که مساوی مشتق صورت به مشتق مخرج میباشد بجای x طول نقطه ماکزیمم و می‌نیمم را قرار داده و عرض نقاط ماکزیمم و می‌نیمم را حساب کنیم.

۲ـ در تابع بجای x صفر قرار میدهیم و y را حساب می‌کنیم (یعنی مختصات محل تلاقی منحنی را بامحور عرضها بدست می‌آوریم).

۳ـ در تابع بجای y صفر قرار میدهیم و x را حساب می‌کنیم (دراینصورت صورت کسر را مساوی صفر قرار میدهیم و x را حساب میکنیم).

(یعنی مختصات محل تلاقی منحنی بامحور طولها را بدست می‌آوریم).

۴ـ در تابع بجای x باضافه ومنهای بی‌نهایت قرار میدهیم و y را حساب می‌کنیم طبق قاعده‌های (۱۵۰) و ( ) حساب می‌نمائیم.

۵ـ در تابع بجای y باضافه ومنهای بینهایت ($y = \pm\infty$) را قرار میدهیم و x را حساب می‌کنیم (دراینصورت مخرج کسر را مساوی صفر قرار میدهیم و x را حساب می‌کنیم)

۷ـ جدولی مطابق جدول زیر را میکنیم.

x	$-\infty$	$+\infty$
y'		
y	خط انفصال	

تذکر ۱ـ درستون افقی x مقادیری که برای x بدست آورده‌ایم قرار میدهیم.

تذکر ۲ـ درستون افقی y' پس از جوابهای مشتق صفر قرار داده و علامت مشتق را بدست میآوریم

تذکر ۳ـ درستون افقی y مقادیر متناظر را که بدست آورده‌ایم قرار میدهیم.

تذکر ۴ـ تابع بازاء ریشه‌های مخرج منفصل است در جدول زیر آن خط انفصال را میکشیم و بازاء این مقدار y هم برابر $+\infty$ وهم برابر $-\infty$ وگاهی فقط $+\infty$ ویا فقط برابر $-\infty$ میشود.

تذکر ۵ ـ اگر بازاء $x = \pm\infty$ مقدار y برابر عدد $y = K$ مجانب افقی است (مجانب موازی محور طولها می‌باشد)

تذکر ۶ـ میدانیم بازاء $y = \pm\infty$ مقدار x برابر ریشه‌های مخرج میباشد و جواب ریشه مخرج = x مجانب منحنی می‌باشد (مجانبهای قائم منحنی).

تذکر ۷ـ پس از رسم محورهای مختصات ابتدا مجانبها را رسم می‌کنیم وسپس منحنی را بوسیله نقطه یابی رسم می‌نمائیم.

تذکر ۸ـ اگر مخرج مشتق در اثر فاکتورگیری درصورت ساده شود وتوانش فرد شود

y' را مساوی ∞ قرار داده و x را حساب می‌کنیم و در اینصورت علامت مخرج کسر در علامت مشتق تأثیر دارد.

رسم منحنی‌های کسری کتاب درسی

۱۳۵۰ - ک۱۷ص۱۱۲-

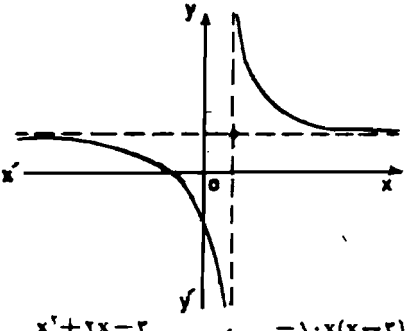
$$y=\frac{2x+1}{3x-1}$$

$$y'=\frac{-5}{(3x-1)^2}<0$$

$$x=0\to y=-1 \quad \text{و} \quad y=0\to 2x+1=0\to x=-0/5$$

$$x=\pm\infty\to y=\frac{2}{3} \quad \text{و} \quad y=\pm\infty\to 3x-1=0\to x=\frac{1}{3}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$			
y	$\frac{2}{3}$	↘	0	↘	-1	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	$\frac{2}{3}$



x	y
$y'<0$	↘
$-\frac{1}{2}$	0
$\frac{2}{3}$	$\pm\infty$
0	-1
$\pm\infty$	$\frac{2}{3}$

۱۳۵۱ - ک۱۸-

$$y=\frac{x^2+2x-3}{x^2-8x+12} \qquad y'=\frac{-10x(x-3)}{V^2}$$

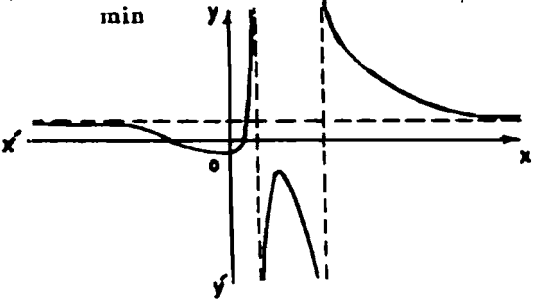
$$y'=0\to -10x(x-3)=0\to x=0 \text{ و } 3\to y=\frac{-1}{3} \text{ و } -3$$

$y=0 \to x^2+2x-3=0 \to x=-3,1$

$x=\pm\infty \to y=1$ و $y=\pm\infty \to x^2-8x+12=0 \to x=2,6$

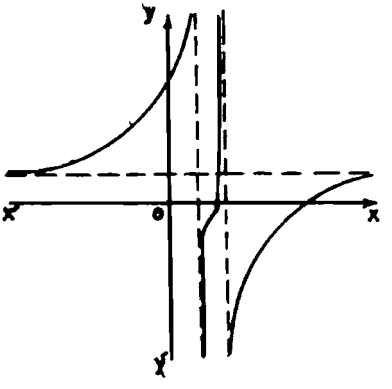
x	$-\infty$		-3		0		1		2		3		6		$+\infty$
y'		$-$			0			$+$		$+$	0		$-$		
y	1	↘	0	↘	$\frac{-1}{3}$	↗	0	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$	$+\infty$ ↘ 1

min



$$y=\frac{x^2-9x+12}{x^2-3x+2} \qquad y'=\frac{2(3x^2-10x+9)}{V^2}>0 \quad -195 - 1252$$

x	$-\infty$		0		1		$\frac{9-\sqrt{33}}{2}$		2		$\frac{9+\sqrt{33}}{2}$		$+\infty$
y'		$+$				$+$			$+$			$+$	
y	1	↗	6	↗	$+\infty$		$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$		$-\infty$ ↗ 0 ↗ 1



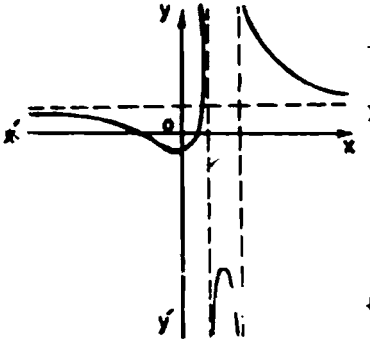
x	y
y' > 0	↗
$\frac{9\pm\sqrt{33}}{2}$	0
1 و 2	$\pm\infty$
	6
$\pm\infty$	1

۱۲۵۳ - ص ۲۰۹

$$y=\frac{3x^2+2x-3}{3x^2-10x+7} \qquad y'=\frac{-4(9x^2-15x+4)}{7^2}$$

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{10}}{3}$	$\cdot$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1+\sqrt{10}}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{3}$	$+\infty$
y′	$-$	$-$		$+$		$+$	$\cdot$ $-$	$-$	
y	$1\searrow$	$\cdot\searrow$	$\frac{-3}{7}\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\cdot\cdot+\infty$	$-\infty\nearrow-5\searrow$	$-\infty$	$\infty\searrow 1$

min max



x	y
$y'=\cdot$	$\frac{1}{3}$
	$-\frac{1}{2}$
	$\frac{4}{3}$
	-5
	$\frac{1}{3}$
	$\pm\infty$
$\frac{-1\pm\sqrt{10}}{3}$	$\cdot\cdot$
$\pm\infty$	$\frac{1}{3}$
	$\cdot$

۱۲۵۴ - ص ۲۱۰

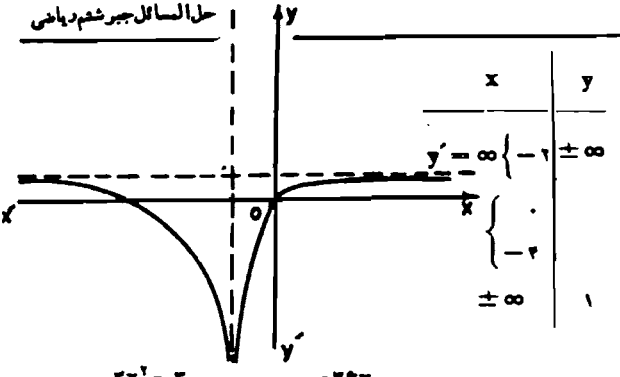
$$y=\frac{x^2+2x}{x^2+2x+4}$$

حل:

$$y=\frac{x^2+2x}{(x+2)^2}\ ,\ y'=\frac{8}{(x+2)^3}$$

$$y'=\infty\rightarrow x+2=\cdot\rightarrow x=-2$$

x	$-\infty$	-4	-2	$\cdot$	$+\infty$
y′	$-$	$-$	∞ $+$	$+$	$+$
y	$1\searrow$	$\cdot\searrow$	$-\infty$ $-\infty$	$\nearrow\cdot\nearrow$	1

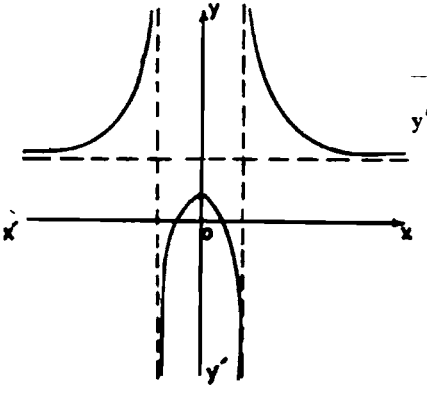


x	y
$y' = \infty$ -۲	$\pm\infty$
$\cdot$	
-۲	
$\pm\infty$	۱

۱۲۵۵ - ص۲۲۷ $y = \frac{۲x^۲-۳}{۲x^۲-۸}$ و $y' = \frac{-۲۶x}{۷^۲}$

x	$-\infty$	-۳		-۲		-۱		$\cdot$		۱		۲		۳	$+\infty$
y'					+		+				−		−		−
y	$\frac{۳}{۲}$	↗	۲/۴	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	$\cdot$	↗	$\frac{۳}{۸}$	↘	$\cdot$ ↘	$-\infty$	$+\infty$	↘ ۲/۴ ↘ $\frac{۳}{۲}$

max



x	y
$y' = \cdot$ $\cdot$	$\frac{۳}{۸}$
±۱	$\cdot$
±۲	$\pm\infty$
$\pm\infty$	۱/۵
۳	۲/۴
-۳	۲/۴

۱۲۵۶ - ص۲۲۵ $y = \frac{۲x-۳}{x^۲+x-۳}$ $y' = \frac{-۲x^۲+۶x-۳}{۷^۲}$

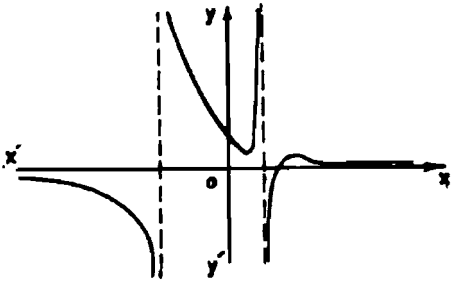
$$y' = 0 \to -2x^2 + 6x - 3 = 0 \to x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{3+\sqrt{3}}{2} \to y = y_1 = \frac{2}{2x+1} = \frac{2}{3+\sqrt{3}} = \frac{2(3-\sqrt{3})}{13} \approx 0/35$$

$$x = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \to y = \frac{2}{3-\sqrt{3}} = \frac{2(3+\sqrt{3})}{13} = 0/8$$

x	$-\infty$		-3		$-2/2$		0		$0/6$		$1/2$		$1/5$		$2/3$		$+\infty$
y'			$-$				$-$		0		$+$		$+$		0	$-$	
y	0	↘	-3	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	-1 min	↗	$0/8$	↗	∞ | $-\infty$	↗	0	↗	$0/35$ max	↘	0

x	y
$y' = 0 \begin{cases} \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{2} \approx 2/3 \\ 0/6 \end{cases}$	$\frac{2(3 \mp \sqrt{3})}{13} \approx 0/35$ $0/8$
$\frac{3}{2}$	0
$\begin{cases} \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} = 1/2 \\ -2/2 \end{cases}$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	0
-3	-3



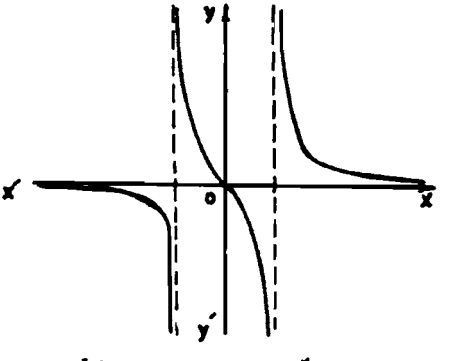
۱۲۵۷ - ص ۲۴

$$y=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}$$

حل:

$$y=\frac{2x}{x^2-4} \quad و \quad y'=\frac{-2x^2-8}{4^2}<0$$

x	$-\infty$		-3		-2		0		2		3		$+\infty$
y'			$-$			$-$		$-$		$-$			
y	0	↘	$\frac{-6}{5}$	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	$\frac{6}{5}$	↘	0



x	y
y'<0	↘
0	0
±2	±∞
±∞	0
−3	−1/2
3	1/2

۱۲۵۸ - ص ۲۵

$$y=\frac{2x^2+4x-5}{x+1} \qquad y'=\frac{2x^2+4x+9}{(x+1)^2}>0$$

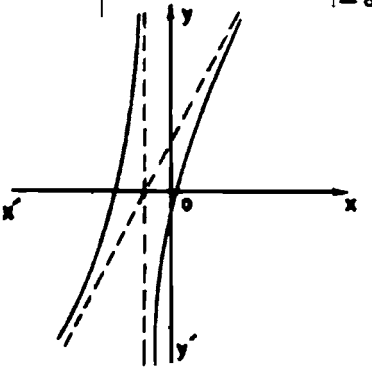
$$\begin{array}{l|l} 2x^2+4x-5 & x+1 \\ \pm 2x^2 \pm 2x & 2x+2 \\ \hline 2x-5 & \\ \pm 2x \pm 2 & \\ \hline -7 & \end{array}$$

$y=2x+2$

معادله مجانب مایل

$A\left|\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}1\\4\end{matrix}\right.$ دو نقطه از مجانب

x	$-\infty$		$\frac{-2-\sqrt{14}}{2}$		-1		0		$\frac{-2+\sqrt{14}}{2}$		$+\infty$
y'		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow 0 \nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow -5$	$\nearrow$	0	$\nearrow$			$+\infty$



x	y
$y'>0$	$\nearrow$
$\frac{-2\pm\sqrt{14}}{2} \begin{matrix} 0/8 \\ -2/8 \end{matrix}$	0
-1	$\pm\infty$
0	-5
$\pm\infty$	$\pm\infty$

$$y=\frac{x^2-3x+2}{3-x} \text{ و } y'=\frac{-x^2+8x-10}{(3-x)^2}$$

-۲۶۵ — ۱۳۵۹

$$y'=0 \rightarrow -x^2+8x-10=0 \qquad x=3\pm\sqrt{6}$$

$$x=3+\sqrt{6}\rightarrow y=y_1=-2x+3=-8-2\sqrt{6}+3$$

$$y=-5-2\sqrt{6}\cong -9/8$$

$$x=3-\sqrt{6}\rightarrow y=-8+2\sqrt{6}+3=-5+2\sqrt{6}\cong 0/2$$

$$\begin{array}{l|l} x^2-3x+2 & -x+3 \\ \hline \pm x^2\mp 3x & -x-1 \\ \hline x+2 & \\ \pm x\mp 3 & \\ \hline 5 & \end{array}$$

$y=-x-1$

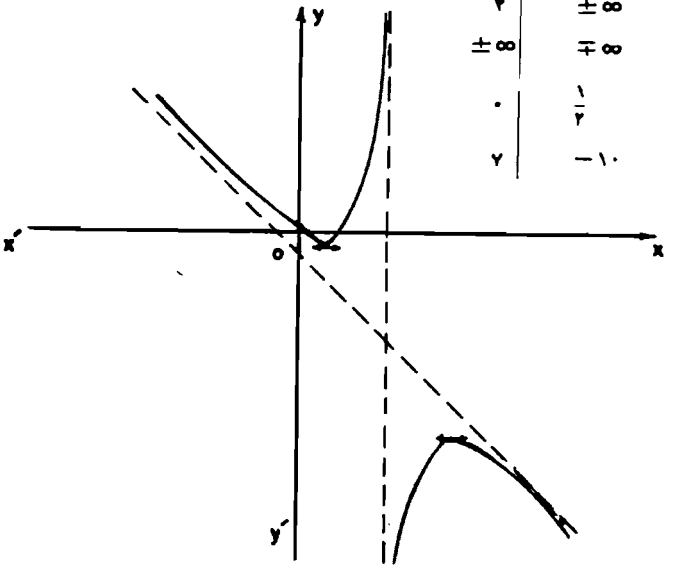
معادله مجانب مایل

$A\left|\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right.$ دو نقطه از مجانب

x	$-\infty$	۰		۱		$۴-\sqrt{۶}$		۲		۴		$۴+\sqrt{۶}$		۷		$+\infty$
y'			−		−	۰	+		+		+	۰	−			
y	∞	↘	$\frac{۱}{۲}$	↘	۰	↘	$-۵+۲\sqrt{۶}$	↗	۰	↗	$+\infty$ / $-\infty$	↗	$-۵-۲\sqrt{۶}$	↘	-۱۰	↘ $-\infty$
												min				max

$$y' = ۰ \begin{cases} ۴+\sqrt{۶} \# ۶/۴ & -۵-۲\sqrt{۶} \# -۹/۸ \\ ۴-\sqrt{۶} \# ۱/۶ & -۵+۲\sqrt{۶} \# -۰/۲ \end{cases}$$

x	y
۱ و ۲	۰
۴	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$\mp\infty$
۰	$\frac{۱}{۲}$
۷	-۱۰



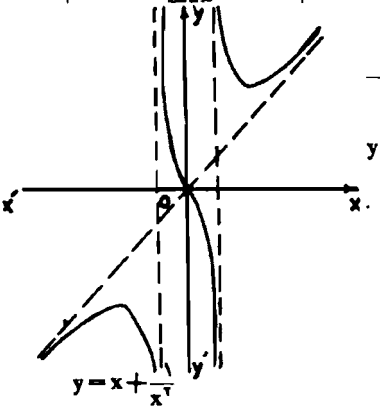
۱۲۶۰ - ک۲۸-

$y=\frac{x^2}{x^2-1}$ و $y'=\frac{x^2(x^2-3)}{v^2}$

$A(0,0)$ و $B(1,1)$ معادله مجانب مایل $y=x$

تذکر: چون $x^2>0$ میباشد پس علامت مشتق همان علامت x^2-3 میباشد.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		+	0		−		0		−		0	+	
y	$-\infty$	↗	$\frac{-3\sqrt{3}}{2}$ max	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ min	↗	$+\infty$



x	y
$y'=0$ $\pm\sqrt{3}$	$\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}\neq\pm 2/6$
0	0
± 1	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$

۱۲۶۱ - ک۲۷-

$y=x+\frac{1}{x^2}$

حل:

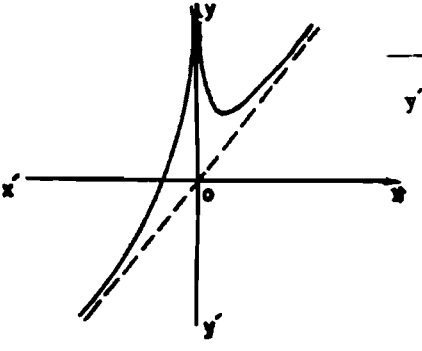
$y=\frac{x^2+1}{x^2}$ و $y'=\frac{x^2-2}{x^2}$

$y'=0\to x^2-2=0\to x=\sqrt{2}$ و $y'=\infty\to x=0$

$x=\sqrt{2}\to y=\frac{2+1}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\neq 1/8$

$A(2,2)$ و $O(0,0)$ مجانب مایل $y=x$

x	$-\infty$		-1		0		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
y'		+			∞	−	0	+			
y	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ | $+\infty$	↘	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$ min	↗	$\frac{9}{4}$	↗	$+\infty$



x	y
$y'=0$ $\begin{cases}\sqrt{2}\\ \cdot\end{cases}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}\approx 1/8$
$\cdot$	∞
$\pm\infty$	$\pm\infty$
-1	$\cdot$
2	$\frac{9}{4}$

۱۲۶۲ - ۲۹ ه

$$y=\frac{(1+x)^3}{(x-1)^2} \qquad y'=\frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$$

برای علامت مشتق چون $\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$ همواره مثبت است پس باید علامت $\frac{x-5}{x-1}$ را بدست آورد.

$y'=0 \to x=-1$ و 5 و $y'=\infty \to x=1$

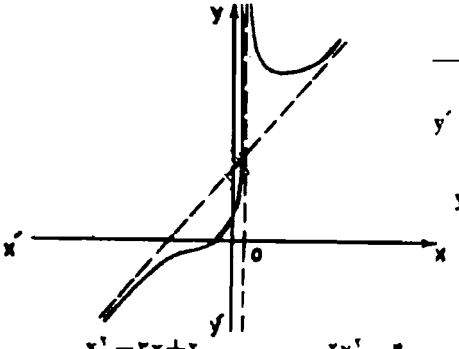
$$\begin{array}{l|l} x^3+3x^2+3x+1 & x^2-2x+1 \\ \pm x^3 \mp 2x^2 \pm x & x+5 \\ \hline 5x^2+2x+1 & \\ \pm 5x^2 \mp 10x \pm 5 & \\ \hline 12x-4 & \end{array}$$

$y=x+5$

معادله مجانب مایل

$A\left|\begin{matrix}0\\5\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}-2\\3\end{matrix}\right.$

x	$-\infty$		-1		0		1		5		$+\infty$
y'		$+$	0		$+$		∞	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty \mid +\infty$	$\searrow$	$13/5$	$\nearrow$	$+\infty$
			عطف						min		



x	y
$y' = 0 \begin{cases} -1 \\ 5 \end{cases}$	0
	$13/5$
$y' = \infty \begin{cases} 1 \\ 0 \\ \pm\infty \end{cases}$	$+\infty$
	1
	$\pm\infty$

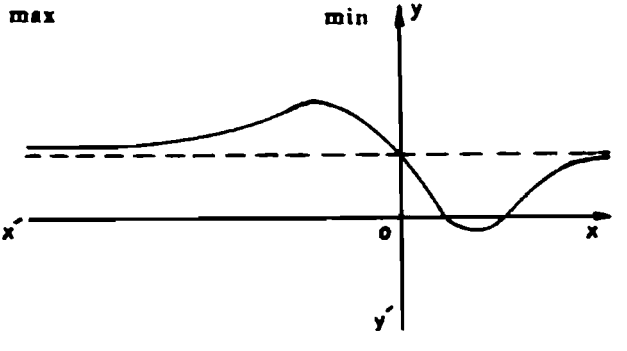
$$y = \frac{x^2-2x+2}{x^2-x+2} \qquad y' = \frac{2x^2-4}{y^2} \qquad \text{۳۰ دی} \quad -۱۲۶۳$$

$$y' = 0 \rightarrow 2x^2-4 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$x = \sqrt{2} \rightarrow y = y_1 = \frac{2x-3}{2x-1} \rightarrow y = \frac{2\sqrt{2}-3}{2\sqrt{2}-1} = \frac{5-4\sqrt{2}}{7} \# -0/1$$

$$x = -\sqrt{2} \rightarrow y = \frac{-2\sqrt{2}-3}{-2\sqrt{2}-1} = \frac{2\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}+1} = \frac{5+4\sqrt{2}}{7} \# 1/5$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		1		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
y'		+	0	−		−			0	+		+	
y	1	↗	$\frac{5+4\sqrt{2}}{7} \# 1/5$	↘	1	↘	0	↘	$\frac{5-4\sqrt{2}}{7} \# -0/1$	↗	0	↗	1



۱۲۶۴ ـ ص ۳۱

$$y=\frac{x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$y=\frac{x^3-x}{(x^2+1)^2} \qquad y'=\frac{-(x^4-6x^2+1)}{(x^2+1)^3}$$

$$y'=0\rightarrow x^4-6x^2+1=0\rightarrow x^2=3\pm2\sqrt{2}=(\sqrt{2}\pm1)^2$$

$$x^2=(\sqrt{2}+1)^2\rightarrow x=+\sqrt{2}+1 \text{ و } -\sqrt{2}-1$$

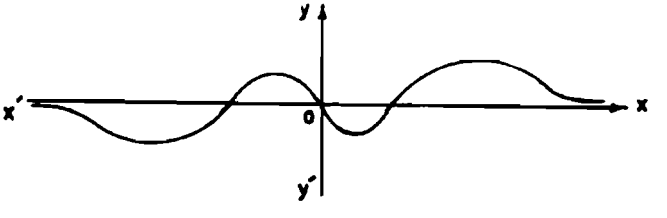
$$x^2=(\sqrt{2}-1)^2\rightarrow x=\sqrt{2}-1 \text{ و } \sqrt{2}+1$$

$$x=\sqrt{2}+1 \rightarrow y=\frac{(\sqrt{2}+1)(2+1+2\sqrt{2}-1)}{(2+1+2\sqrt{2}+1)^2}$$

$$y=\frac{2(\sqrt{2}+1)^2}{8(\sqrt{2}+1)^2}=\frac{1}{4}$$

درمخرج از داخل پرانتز از $2\sqrt{2}$ فاکتور گیری شده و به‌قوه دو رسیده است.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}-1$		-1		$-\sqrt{2}+1$		0		$\sqrt{2}-1$		1		$\sqrt{2}+1$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$			0	$-$			0	$+$		$+$	0	$-$	
y	0	↘	$\frac{-1}{4}$	↗	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0	↘	$\frac{-1}{4}$	↗	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0
			min				max				min				max		



۱۲۶۶ ص ۳۲

$$y=\frac{x^4+x^2-1}{x^4+4x^2+1} \qquad y'=\frac{2x(3x^4+4x^2+5)}{v^2}$$

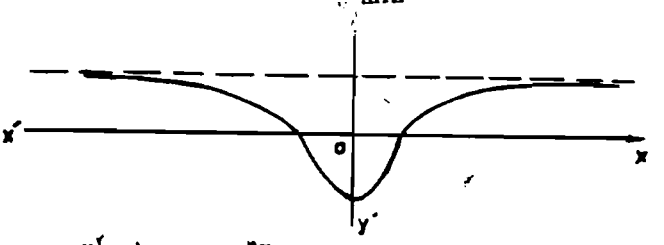
ریشه ندارد $3x^4+4x^2+5=0$ و $y'=0\rightarrow x=0$

$$y=0\rightarrow x^4+x^2-1=0$$

$$x^2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \to x = \pm\frac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2} \neq \pm 0/8$$

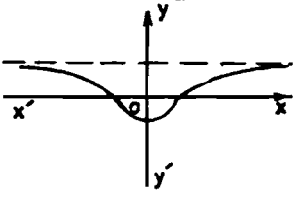
$$x^2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$ ریشه ندارد

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}$		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1 min	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1



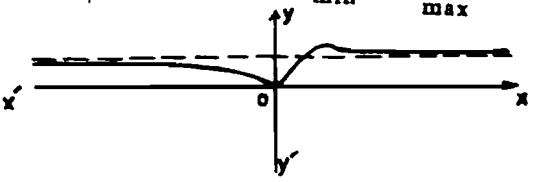
۱۳۶۵ - ل ۲۳ $y' = \frac{4x}{v^2}$ و $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'			$-$		0		$+$		
y	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1 min	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1



۱۳۶۶ - ل ۲۴ $y' = \frac{-x^2+2x}{v^2}$ $y = \frac{x^2}{x^2-x+1}$

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'			$-$		0	$+$	0	$-$	
y	1	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$ max	$\searrow$	1



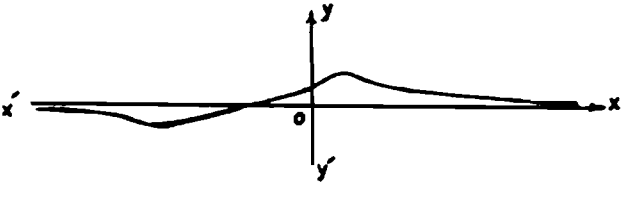
$$y=\frac{x+2}{x^2+4} \qquad y'=\frac{-x^2-4x+4}{(x^2+4)^2}$$ ۲۵۵ - ۱۲۶۷

$$y'=0\to x^2+4x-4=0\to x=2(\pm\sqrt{2}-1)$$

$$x=2(\sqrt{2}-1)\to y=y_1=\frac{1}{2x}=\frac{\sqrt{2}+1}{4}\approx 0/6$$

$$x=2(-\sqrt{2}-1)\to y=\frac{1}{-2(\sqrt{2}+1)}=\frac{\sqrt{2}-1}{-4}\approx -0/1$$

x	$-\infty$		$-2(\sqrt{2}+1)$		-2		0		$2(\sqrt{2}-1)$		$+\infty$
y'		$-$	0				$+$	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$\frac{1-\sqrt{2}}{4}$ min	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}+1}{4}$ max	$\searrow$	0



۱۲۶۸ - ص ۲۶۵

$$y = \frac{x^2+x}{x^2-2x+3} \qquad y' = \frac{-3x^2+8x+3}{y^2}$$

$$y' = 0 \to -3x^2+8x+3 = 0 \to 3x^2-8x-3 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{16+12}}{3} = \frac{3 \pm 2\sqrt{7}}{3} \begin{cases} 3/1 \\ -0/3 \end{cases}$$

$$x = \frac{3+2\sqrt{7}}{3} \to y = 7/1 = \frac{2x+1}{2x-3} = \frac{\frac{8+3\sqrt{7}}{3}+1}{\frac{8+3\sqrt{7}}{3}-2} = \frac{11+3\sqrt{7}}{2+3\sqrt{7}}$$

$$y = \frac{(3\sqrt{7}+11)(3\sqrt{7}-2)}{108} = \frac{25+18\sqrt{7}}{53} \approx 1/7$$

$$x = \frac{3-2\sqrt{7}}{3} \to y = \frac{25+18\sqrt{7}}{-53} \approx -1/7$$

$$y = 0 \to x^2+x = 0 \to x = 0 \text{ و } -1$$

لطفاً جدول و منحنی را خودتان رسم کنید.

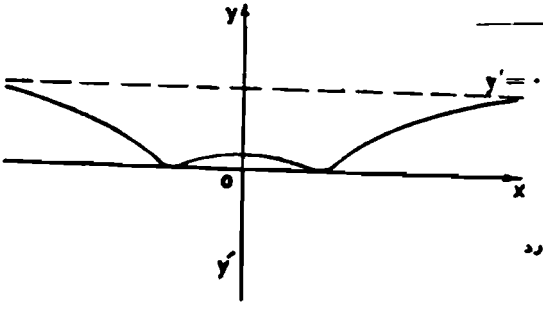
۱۲۶۹ -

$$y = \frac{x^4-2x^2+1}{x^4+6x^2+9} \qquad y' = \frac{16x(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$$

معادله مجانب افقی

$y = 1$

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{9}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1
			min		max		min		

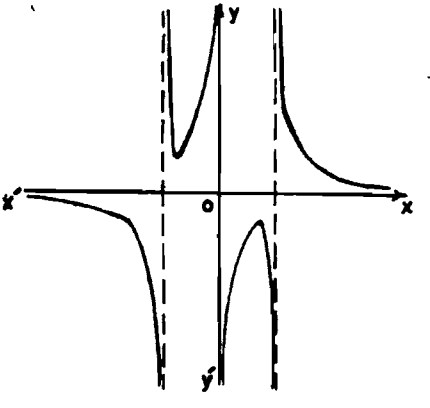


x	y
$y' = 0 \begin{cases} 0 \\ -1 \\ +1 \end{cases}$	$\frac{1}{9}$
± 1	0
$\pm\infty$	$+1$
مجانب ندارد	$\pm\infty$

۱۲۷۰- $y = \frac{1}{x^3 - 3x}$ $\quad y' = \frac{-(3x^2-3)}{(x^3-3x)^2}$

مجانب افقی $y = 0$ ومعادلات مجانب قائم $x = \pm\sqrt{3}$ و $x = 0$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$				$+$		$+$		$-$			
y	0	↘	$-\infty$	↘	$+\infty$	↗	$\frac{1}{2}$ min	↗	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{2}$ max	↘	$-\infty$	↘	$+\infty$	↘	0

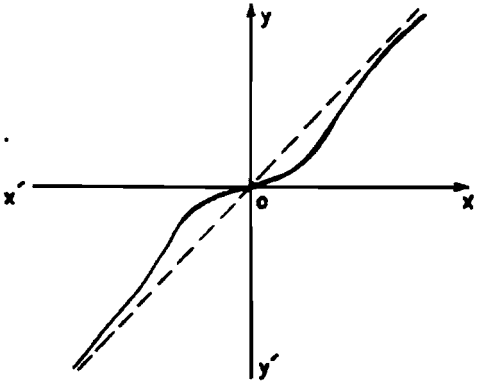


x	y
$y' = 0$	
1	$-\frac{1}{2}$
-1	$\frac{1}{2}$
$\sqrt{3}$	$\pm\infty$
$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$
0	0
$\pm\infty$	

۱۲۷۱- $y = \frac{x^3}{x^2+1}$ $\quad y' = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$

معادله مجانب مایل $y = x$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$			$+$		0		$+$		$+$		
y	$-\infty$	↗	$-\frac{8}{5}$	↗	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↗	$\frac{1}{2}$	↗	$\frac{8}{5}$	↗	$+\infty$



x	y
$y' = 0 \begin{cases} 0 \\ \text{ریشه ندارد} \end{cases}$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$
1	$\frac{1}{2}$
-1	$-\frac{1}{2}$
2	$\frac{8}{5}$
-2	$-\frac{8}{5}$

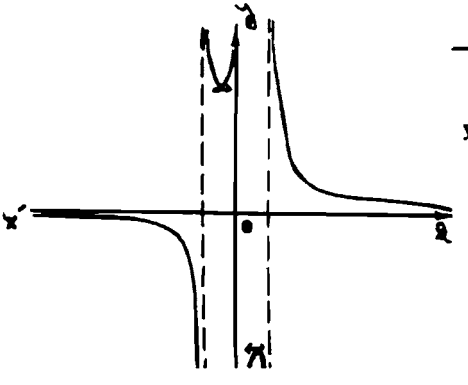
-۱۳۷۲

$$y = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x}$$

$$y = \frac{2}{x(x+1)(x-1)} \qquad y' = \frac{-2(3x^2-1)}{(x^2-1)^2 x^2}$$

معادلات مجانبها $x = \pm 1$ و $y = \pm\infty$ و 0

x	$-\infty$		-1		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+1$		2		$+\infty$
y'		$-$			0	$+$			0	$-$					
y	0	↘	$-\infty$	$+\infty$ ↘	$3\sqrt{3}$ min	↗	$+\infty$	$-\infty$ ↗	$-3\sqrt{3}$ max	↘	$-\infty$	$+\infty$ ↘	$\frac{1}{2}$	↘	0



x	y
$y' = 0 \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-\sqrt{3}}{3} \end{cases}$	$-2\sqrt{3}$ $2\sqrt{3}$
0	$\pm\infty$
$\pm\infty$	0
± 1 و 0	$\pm\infty$

۱۲۷۳ — $y = \frac{(x+2)^3}{x+1}$ $\quad y' = \frac{(x+2)^2(2x+1)}{(x+1)^2}$

معادله منحنی مجانب تابع $y = x^2 + 5x + 7$ و مجانب قائم $x = -1$

x	$-\infty$		-2		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
y′		$-$	0		$-$		0		$+$		
y	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	$\frac{27}{4}$ min	↗	8	↗	∞

جدول معادله منحنی مجانب

x	$-\infty$		-3		$-\frac{5}{2}$		0		$+\infty$
y′		$-$		$-$	0	$+$			
y	∞	↘	1	↘	$\frac{3}{4}$ min	↗	7	↗	∞

$y' = 0 \begin{cases} -2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$

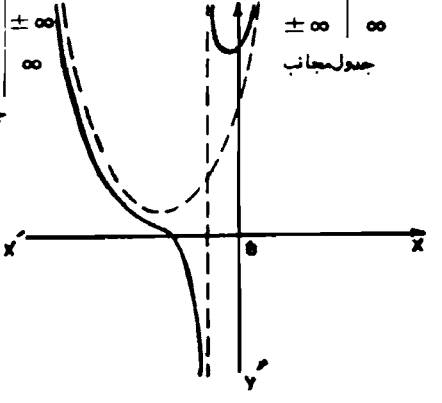
x	y
-2	0
$-\frac{1}{2}$	$\frac{27}{4}$
-2	0
0	8
-1	$\pm\infty$
$\pm\infty$	∞

جدول تابع

$y' = 0$

x	y
$-\frac{5}{2}$	$\frac{3}{4}$
0	7
0	غیر ممکن
$\pm\infty$	∞

جدول مجانب



۱۲۷۴ — $y = \frac{x^3+3}{x}$ $\qquad y' = \frac{3(x^2-1)}{x^2}$

معادله مجانب منحنی مجانب $y = x^2$ و معادله مجانب قائم $x = 0$

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
y'		+	0		−		0	+	
y	$-\infty$	↗	-3 max ↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

جدول منحنی مجانب

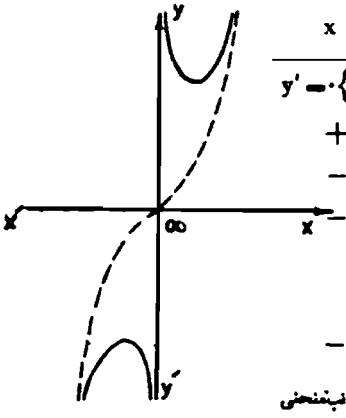
x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'			+				0		+				
y	$-\infty$	↗	-8	↗	-1	↗	0	↗	1	↗	8	↗	$+\infty$

x	y
$y' = 0 \{$ 0	0
$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$
-1	-1
1	1
2	8
-2	-8

جدول مجانب منحنی

x	y
$y' = 0 \{$ 1	3
-1	-3
غیرممکن	
0	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$

جدول منحنی

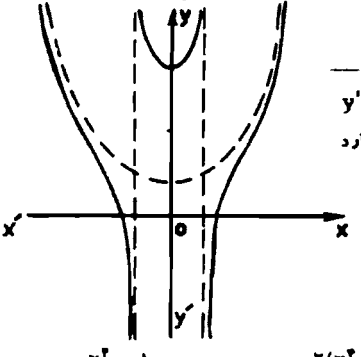


۱۲۷۵ — $y = \frac{x^3-3}{x^2-1}$ $\qquad y' = \frac{2x(x^2-2x^2+3)}{(x^2-1)^2}$

منحنی مجانب $y = x^2+1$ و معادلات مجانب‌های قائم $x = \pm 1$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y′			$-$				0		$+$				
y	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$	↘	4	↗	$+\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		-1		0		2		3		$+\infty$
y′			$-$		0		$+$				
y	$+\infty$	↘	2	↘	1	↗	5	↗	10	↗	$+\infty$



x	y
$y'=0$	1
ریشه ندارد	0
$\pm\infty$	$+\infty$
-1	2
2	5
3	10

x	y
$y'=0$	4
$\pm\sqrt{2}$	0
± 1	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$+\infty$

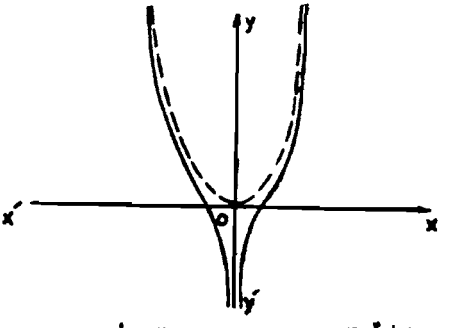
۱۳۷۶ - $y'=\frac{2(x^2+1)}{x^3}$ $\qquad y=\frac{x^2-1}{x^2}$

مجانب منحنی $y=x^2$ و مجانب قائم $x=0$

جدول منحنی مجانب

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
y′			$-$		0		$+$				
y	$+\infty$	↘	1	↘	0	↗	1	↗	4	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y′	$-$		$-$		$-$		∞		$+$		$+$		$+$
y	$+\infty$	↘	$\frac{15}{4}$	↘	0	↘	$-\infty$ $\mid$ $-\infty$	↗	0	↗	$\frac{15}{4}$	↗	$+\infty$

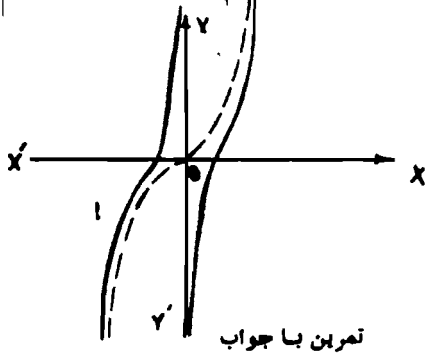


x	y
$y' = \infty \begin{cases} \cdot \\ \end{cases}$	$-\infty$
$\pm\infty$	$+\infty$
$\begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$	$\cdot$

۱۳۷۷ – $y' = \frac{3x^3+2}{x^2} > \cdot$ $\qquad y = \frac{x^4-2}{x}$

مجانب منحنی $y = x^2$ $\qquad$ مجانب قائم $x = \cdot$

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{2}$		$\cdot$		1		$\sqrt[3]{2}$		2		$+\infty$
y'		+		+		+		+		+		+	
y	$-\infty$	↗	$\cdot$	↗	$+\infty \mid -\infty$	↗	-1	↗	$\cdot$	↗	7	↗	$+\infty$



تمرین با جواب

۱۳۷۸ – $y' = \frac{2(x^3+1)}{x^2}$ $\qquad y = \frac{x^3-2}{x}$

مجانب منحنی $y=x^2$ و مجانب قائم $x=0$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'			$-$		$-$		∞		$+$				
y	$+\infty$	↘	5	↘	3	↘	$-\infty$ | $-\infty$	↗	-1	↗	3	↗	$+\infty$

۱۲۷۹ - $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ $\quad y'=\dfrac{x^2(x^2-3)}{V^2}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0		$-$		0		$-$		0		$+$
y	$-\infty$	↗	$\frac{-3\sqrt{3}}{2}$	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	$+\infty$
			max				مطلق				min		

۱۲۸۰ - $y=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+2}$ $\quad y'=\dfrac{-3x^4-16}{x^2(x^2-4)^2}<0$

x	$-\infty$		-2		$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		2		$+\infty$
y'		$-$		$-$			$-$						
y		0 ↘ $-\infty$	| $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0 ↘ $-\infty$	| $+\infty$	↘	0	

۱۲۸۱ - $y=\dfrac{x^3-3x^2+3x-3}{x-1}$ $\quad y'=\dfrac{2x^3-6x^2+6x}{(x-1)^2}$

مجانب منحنی $y=x^2-2x+1$

x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
y'		−	۰	+		+		+	
y	$+\infty$	↘	۳ (min)	↗	$+\infty$ / $-\infty$	↗	−۱	↗	$+\infty$

۱۲۸۲ − شهریور ۲۳ $y=\frac{x^2-2x+3}{x^2-1}$ و $y'=\frac{2(x-2)(2x-1)}{(x^2-1)^2}$

x	$-\infty$		−۱		۰		$\frac{1}{2}$		۱		۲		$+\infty$
y'				+			۰	−		−	۰	+	
y	۱	↗	$+\infty$ / $-\infty$	↗	−۳	↗	−۳ (max)	↘	$-\infty$ / $+\infty$	↘	۰ (min)	↗	۱

۱۲۸۳ − خرداد ۲۳ $y=\frac{2x^2+6x+1}{2x-1}$ و $y'=\frac{4(x^2-x-2)}{(2x-1)^2}$

معادله مجانب مایل منحنی $y=x+3/5$

x	$-\infty$		$\frac{-3-\sqrt{7}}{2}$		−۱		$\frac{-3+\sqrt{7}}{2}$		$\frac{1}{2}$		۲		$+\infty$
y'			+		۰		−			−	۰	+	
y	$-\infty$	↗	۰	↗	۱ (max)	↘	۰	↘	−۱ / $-\infty$	↘	۷ (min)	↗	$+\infty$

۱۲۸۴ − شهریور ۲۳ $y=\frac{2x^2-6}{5x-9}$ و $y'=\frac{10x^2-36x+30}{(5x-9)^2}$

معادله مجانب مایل منحنی $y=\frac{2}{5}x+\frac{18}{25}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		۰		$\frac{9-\sqrt{6}}{5}$		$\sqrt{3}$		$\frac{9}{5}$		$\frac{9+\sqrt{6}}{5}$		$+\infty$
y'				+			۰			−			۰	+	
y	$-\infty$	↗	۰	↗	$\frac{2}{3}$	↗	$\frac{4(9-\sqrt{6})}{5}$ (max)	↘	۰	↘	$-\infty$ / $+\infty$	↘	$\frac{4(9+\sqrt{6})}{5}$ (min)	↗	$+\infty$

۱۲۸۵ – خرداد ۲۶ $y=1-\frac{4}{x^2}$ و $y'=\frac{8}{x^3}$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$			∞		$+$		
y	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty \mid -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

۱۲۸۶ – خرداد ۲۹ و شهریور ۳۵ $y=x+\frac{4}{x^2}$ و $y'=1-\frac{8}{x^3}$

معادله مجانب مایل $y=x$

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{4}$		0		2		$+\infty$
y'		$+$			∞	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \mid +\infty$	$\searrow$	3 min	$\nearrow$	$+\infty$

۱۲۸۷ – خرداد ۳۰ $y=\frac{2x^2+1}{x-2}$ و $y'=\frac{2x^2-8x-1}{(x-2)^2}$

معادلهٔ مجانب مایل $y=2x+4$

x	$-\infty$		$\frac{4-3\sqrt{2}}{2}$		0		2		$\frac{4+3\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0		$-$		$-$		0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$8-6\sqrt{2}$ max	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$	$8+6\sqrt{2}$ min	$\nearrow$	$+\infty$

۱۲۸۸ – خرداد ۳۱ $y=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x}$, $y'=\frac{2x^4+4x^2-4x^2+2}{x^2(x^2-1)^2}$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1		$+\infty$
y'			$-$		0		$+$		0		$-$		
y	0	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$	$3\sqrt{3}$ min	$\nearrow$	$+\infty \mid -\infty$	$\nearrow$	$-3\sqrt{3}$ max	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$	0

۱۲۸۹ – خرداد ۳۲ $y=\frac{2(x^2-1)}{(x^2+x+1)^2}$ و $y=\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}$

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
y'		+			−			+	
y	1	↗	4 max	↘	1	↘	0 min	↗	1

۱۲۹۰ – شهریور ۳۲ $y'=\frac{x^2-1}{x^2}$ و $y=\frac{x^2+2x+1}{x}$

معادلهٔ مجانب مایل $y=x+2$

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
y'		+			−			+	
y	$-\infty$	↗	0 max	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	4 min	↗	$+\infty$

۱۲۹۱ – خرداد ۳۵ $y'=\frac{2x^2-8x+4}{x^2(x-1)^2}$ و $y=\frac{(x-2)^2}{x(x-1)}$

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		1		2		$+\infty$
y'	0		+		0		−		0	+	
y	$+1$	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	-8 max	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0 min	↗	$+1$

۱۲۹۲ – خرداد ۳۶ $y'=\frac{9(2x-3)}{x^3}$ و $y=\frac{9(1-x)}{x^2}$

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
y'			−		−		0		+		
y	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0	↘	$\frac{-4}{3}$ min	↗	$\frac{-9}{8}$	↗	0

۱۲۹۳ – خرداد ۳۷ $y'=\frac{-6(x^2+1)}{(x-2)^2}$ و $y=\frac{3x}{x^2-2}$

x	$-\infty$		-1				$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
y'		+	۰		−	،		−	
y	۰	↗	۱ max	↘	۰	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	۰

۱۲۹۴ − . خرداد ۳۸ $y' = \frac{(3x-1)}{(x+1)^3}$ و $y = \frac{x(x-1)}{(x+1)^2}$

x	$-\infty$		-1		۰		$\frac{1}{3}$		$+1$		$+\infty$
y'		+	∞		−		۰	+			
y	۱	↗	۰ $+\infty$	$+\infty$	↘	۰	↘ $\frac{-1}{8}$ min	↗	۰	↗	۱

۱۲۹۵ − خرداد ۳۹ $y' = \frac{5x^2-2x+10}{(x^2-2)^2}$ و $y = \frac{-5x+1}{x^2-2}$

x	$-\infty$	۰	$-\sqrt{2}$		۰		$۰/۲$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'			+		+				+		
y	۰	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	$\frac{-1}{2}$	↗	۰	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	۰

۱۲۹۶ − شهریور ۳۹ $y' = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$ و $y = \frac{x-1}{x^2+1}$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		۰		۱		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		−	۰		+				۰	−	
y	۰	↘	$\frac{-(1+\sqrt{2})}{2}$ min	↗	-1	↗	۰	↗	$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ max	↘	۰

۱۲۹۷ − شهریور ۳۹ $y' = \frac{-2(2x-1)}{(x^2-x-2)^2}$ و $y = \frac{x^2-x}{x^2-x-2}$

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
y'			+			+	0		−		−		
y	1	↗	0	$+\infty$ | $-\infty$	↗	0	↗ $\frac{1}{9}$ max	↘	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	1

۱۲۹۸ – خرداد ۴۰ $y=2x+3+\frac{2}{x-1}$ و $y'=\frac{2x^2-4x}{(x-1)^2}$

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
y'			+		0			−			0		+
y	$-\infty$	↗	0	↗	1 max	↘	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0 min	↗	$+\infty$

۱۲۹۹ – متفرقه آبان ۴۱ $y=\frac{x^2-3x}{3x^2-1}$ و $y'=\frac{3(x^2+1)^2}{(3x^2-1)^2}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\frac{-\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'			+					+				+	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

۱۳۰۰ – خرداد ۴۲ $y=\frac{(x-1)^2-9}{(x-1)^2}$ و $y'=\frac{18}{(x-1)^3}$

x	$-\infty$		-2		0		1		4		$+\infty$
y'		−		−			∞	+			
y	1	↘	0	↘	-8	↘	$-\infty$ | $-\infty$	↗	0	↗	1

۱۳۰۱ – آبانماه ۴۳ (۲ نمره) $y=\frac{3x-2}{x^2}$ و $y'=\frac{-3x+4}{x^3}$

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{2}{3}$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
y'		$-$		$-$	∞		$+$		0	$-$	
y	0	↘	-5	↘	$-\infty$ | $-\infty$	↗	0	↗	$\frac{9}{8}$ max	↘	0

۱۳۰۲ - خرداد ۴۴ $y=\frac{x+2}{x^2-x-2}$ و $y'=\frac{-x^2-4x}{(x^2-x-2)^2}$

x	$-\infty$		-4		-2		-1		0		2		$+\infty$
y'		$-$		0		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
y	0	↘	$\frac{-1}{9}$ min	↗	0	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	-1 max	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0

۱۳۰۳ - شهریور ۴۴ $y=\frac{x-2}{x^2-1}$ و $y'=\frac{-x^2+4x-1}{(x^2-1)^2}$

x	$-\infty$		-1		0		$2-\sqrt{3}$		1		2		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	|	$-$		0		$+$	|	$+$		0		$-$	
y	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	2	↘	$\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ min	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	0	↗	$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ max	↘	0

۱۳۰۴ - خرداد ۴۵ $y=\frac{2(x+1)}{(x-2)^2}$ و $y'=\frac{-2(x+4)}{(x-2)^3}$

x	$-\infty$		-4		-1		0		2		$+\infty$
y'		$-$		0		$+$			∞	$-$	
y	0	↘	$\frac{-1}{6}$ min	↗		↗	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$ | $+\infty$	↘	0

۱۳۰۵ – شهریور ۴۵ $y = \frac{x^2+8x+12}{x^2-2x-3}$, $y' = \frac{-10x(x+3)}{(x^2-2x-3)^2}$

x	$-\infty$		-6		-3		-2		-1		0		2		$+\infty$
y′		$-$		$-$	0		$+$		‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
y	1	↘	0	↘	$\frac{-1}{4}$ min	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-4 max	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

۱۳۰۶ – خرداد ۴۶ $y = \frac{27(x-1)}{(2x-3)^2}$ و $y' = \frac{27(-4x+3)}{(2x-3)^3}$

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{4}$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y′		$+$		$+$	0	$-$		$-$	‖ ∞ ‖	$-$	
y	0	↗	1	↗	2 max	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

۱۳۰۷ – شهریور ۴۶ $y = \frac{x^2+x+2}{x^2+x-2}$, $y' = \frac{-4(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}$

x	$-\infty$		-2		$\frac{-1}{2}$		0		1		$+\infty$
y′		$+$		$+$	0	$-$		$-$			
y	$+1$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{-7}{9}$ max	↘	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$+1$

۱۳۰۸ – خرداد ۴۷ $y = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$, $y' = \frac{2}{(x-1)^3}$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y′		$-$		$-$	∞	$+$		$+$	
y	1	↘	0 ↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$		↗	0	↗	1

شهریور ۴۷

۱۳۰۹ – (۳/۵ نمره) $y' = \frac{5(-x^2+1)}{v^2}$ و $y = \frac{2x^2-5x+2}{3x^2-10x+3}$

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		1		3		$+\infty$
y'		$-$		0			$+$		$+$		0		$-$		
y	$\frac{2}{3}$	↘	$\frac{9}{16}$ min	↗	$\frac{2}{3}$	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	0	↗	$\frac{1}{4}$ max	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	$\frac{2}{3}$

خرداد ۴۸

۱۳۱۰ – (۳ نمره) $y' = \frac{x^2-1}{x^2}$ $y = \frac{x^2+1}{x}$

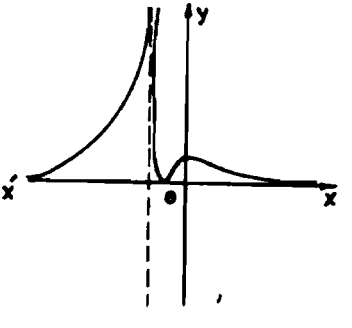
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$		0		$-$		$-$ 0 $+$	
y	$-\infty$	↗	-2 max	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	2 min	↗	$+\infty$

گروه فرهنگی کارون (ثلث دوم)

۱۳۱۱ –

$$y = \frac{(2x+1)^2}{(x+1)^4}$$

$$y' = \frac{-4x(2x+1)}{(x+1)^5}$$



x	$-\infty$		-1		$\frac{-1}{2}$		0		$+\infty$
y'		$+$	∞	$-$		$+$		$-$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

min

۱۳۱۲ – شهریور ۴۸ $y' = \frac{3-x}{(x-1)^3}$ $y = \frac{x-2}{(x-1)^2}$

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
y'		$-$			∞		$+$		0	$-$	
y	0	$\searrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$ 0

max

طریقه رسم توابع اصم

تذکر ۱ـ ابتداء قواعد صفحه ۷۸ راجع به توابع معین را مطالعه کنید و چند نمونه از مسائل آنرا حل نمائید.

تذکر ۲ـ لطفاً ـ قواعد و تذکرهای صفحه ۱۹۱ راجع به مجانبهای توابع اصم را مطالعه کنید و چند مسأله آنرا حل کنید.

برای رسم توابع اصم عملیات زیر را انجام میدهیم:

۱ـ ابتداء طبق قواعد صفحه ۷۸ مشخص می‌نمائیم که تابع در چه فاصله‌ای از x معین میباشد.

۲ـ اگر طبق تذکرهای صفحه ۱۹۱ تابع دارای مجانب باشد معادلات مجانبهای آنرا بدست می‌آوریم.

۳ـ مشتق تابع را بدست آورده و ساده می‌کنیم وسپس بجای y' صفر قرارداده و x را حساب می‌کنیم جوابهای بدست آمده را درتابع بجای x قرار میدهیم و y را حساب می‌کنیم.

تذکر: وقتی جوابهای مشتق قابل قبول است که اولا بازاء آن تابع معین باشد. ثانیاً ـ جوابهای خارجی معادله حل شده نباشد جوابهای معادلات اصم را باید در معادله قرارداد تا معلوم شود جواب بدست آمده جواب خارجی است یا جواب معادله.

۴ـ درتابع بجای y صفر قرارداده و x را حساب می‌کنیم (جوابهای بدست آمده را آزمایش می‌کنیم تا جواب خارجی نباشند و بازاء آن تابع معین باشد).

۵ـ درتابع بجای x جوابهائی را که زیر هر یك از رادیکالها را صفر می‌نماید قرارداده و y را حساب می‌کنیم.

۶ـ اگر تابع بازاء $x=0$ معین باشد بجای x صفر قرار میدهیم و y را حساب میکنیم.

۷ـ حد تابع را بازاء $x=\pm\infty$ بدست می‌آوریم (اگر تابع بازاء $x=\pm\infty$ معین باشد).

۸ ـ جدول تغییرات رسم منحنی را رسم کرده و علامت مشتق را در خانه‌های مختلف بدست می‌آوریم.

۹ـ سپس محورهای مختصات را رسم کرده وابتداء اگر مجانب داشته باشد مجانبها را رسم می‌کنیم وسپس بوسیله نقطه یابی منحنی را رسم می‌کنیم.

تذکر ۱ـ توابع اصمی که بصورت $y=mx+n+\sqrt{ax^2+bx+c}$ میباشند (زیر رادیکال حداکثر از درجه دوم است و خارج رادیکال از درجه اول است) به توابع مخروطی معروفند

تذکر ۲ـ اگر درتوابع فوق $m=0$ و $a=-1$ باشد معادله داده شده معادله یك دایره است وتابع دارای مجانب نیست مانند مسائل زیر:

$$y=\pm\sqrt{4x-x^2} \quad \text{و} \quad y=3\pm\sqrt{9+8x-x^2} \quad \text{و} \quad y=2\pm\sqrt{4-x^2}$$

$$y=\frac{1}{2}\sqrt{7-9x-4x^2}-3 \quad \text{و} \quad y=7\pm\frac{1}{2}\sqrt{5x-4x^2}$$

تذکر ۳ـ اگر $a<0$ باشد (بجز حالتی که $a=-1$ و $m=0$) است معادله داده شده معادله یك بیضی است وتابع مجانب ندارد مانند مثالهای زیر:

$y=2\pm\sqrt{2x-6x^2+1}$ و $y=3\pm\sqrt{-4x^2+5}$

$y=x+3\pm\sqrt{-x^2+4}$ و $y=3\pm\sqrt{-x^2-4x}$

تذکر ۶ـ اگر $a=0$ باشد منحنی نمایش تابع آن یک سهمی است که مجانب مایل ندارد ودراین نوع مسائل خط $y=mx$ را امتداد مجانب منحنی مینامند یعنی شاخه‌ی نهایت منحنی بموازات خط $y=mx$ میباشد مانند مثالهای زیر:

$y=3x+2\pm\sqrt{4x+5}$ و $y=1\pm\sqrt{3-x}$

$y=2x\pm\sqrt{-5x}$ و $y=4\pm\sqrt{3x+1}$

تذکر ۷ـ اگر $a>0$ باشد معادله داده شده معادله یک هذلولی است که دارای دو مجانب میباشند وبرای پیدا کردن معادلات مجانبهای آن علاوه براینکه طبق قواعد پیدا کردن مجانبها می‌توانیم عمل کنیم می‌توانیم ازفرمول زیرهم معادلات مجانبهارا پیدا کنیم

$$y=mx+n\pm\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)$$

مانند مثالهای زیر :

معادلات مجانبها $y=\pm\sqrt{4x^2+3}$ $\quad$ $y=\pm 2x$

$y=\pm\sqrt{4x^2-8x+9}$ $\quad$ $y=\pm 2(x-1)$

$y=3x+2\pm\sqrt{x^2+4x+3}$

$$y=3x+2\pm 1(x+2)\rightarrow\begin{cases}y=4x+4 & \text{معادلات}\\ y=2x & \text{مجانبها}\end{cases}$$

معادلهٔ مجانبها $y=x-3\pm\sqrt{x^2-6x-7}\rightarrow y'=x-3\pm(x-3)$

تذکر ۶ـ مشتق بازاء جوابهای زیر رادیکال برابر ∞ می‌باشد پس منحنی نمایش توابع اصم در نقاطی که بازاء جوابهای زیر رادیکال بدست می‌آیند برخطی که موازی محور yها می‌باشد مماسند .

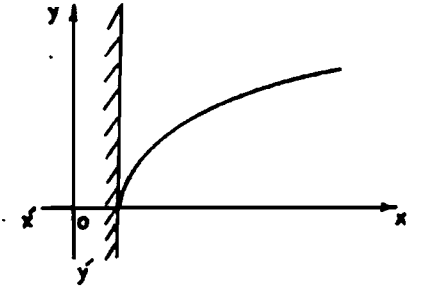
تذکر ۷ـ برای اینکه منحنی دقیق‌تر رسم شود (اگر نقاط بدست آمده کم باشد) بهتر است بجای x مقادیر مختلفی که تابع بازاء آنها معین هستند قرارداده و y را حساب کرد

۱۳۱۳ - ۳۷ص۱۱۷ $y=\sqrt{x-1}$

حل: اگر $x-1\geq 0$ باشد یعنی $x\geq 1$ شود تابع معین است چون $a=0$ است پس منحنی فوق یک سهمی است که مجانب ندارد ولی امتداد مجانب آن موازی محور طولهاست.

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}>0 \quad \text{و} \quad \left[\begin{array}{l} y=0\to x-1=0\to x=1 \\ x=\infty\to y=\infty \end{array}\right.$$

x	۱		۲		۳		۵		$+\infty$
y'	∞		+		+		+		
y	۰	↗	۱	↗	$\sqrt{2}$	↗	۲	↗	∞



۱۳۱۴ - ۳۸ص۱۱۷ $y=\sqrt{x(x-1)}$

حل: اگر $x(x-1)\geq 0$ باشد یعنی بازاء $x\geq 1$ و $x<0$ تابع معین است وچون $a>0$ است منحنی فوق یک هذلولی است پس مجانب دارد

معادلات مجانبها $y=mx+n\pm\sqrt{a}\,(x+\frac{b}{2a})\to y=\pm(x-\frac{1}{2})$

طریقه دوم $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{x^2-x}}{x}\to m=\pm 1$

$$n=\lim_{x\to\infty}(y-mx)=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-x}-x=\infty-\infty$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-x^2}{\sqrt{x^2-x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x}=\frac{-1}{2}$$

معادلات مجانبها $y=x-0/5$ و $y=-x+0/5$

$A(0 , -0/5)$ و $B(1 , 0/5)$ $A'(0 , 0/5)$ و $B'(-1 , 1/5)$

طریقه‌دوم: (طریقه‌تقاطع) $\sqrt{x(x-1)}=mx+n$

$x^2-x=m^2x^2+n^2+2mnx \rightarrow (m^2-1)x^2+(2mn+1)x+n^2=0$

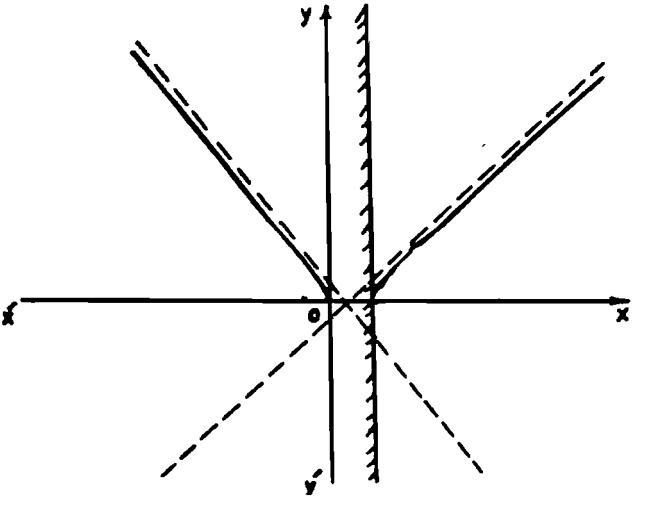
$m^2-1=0 \rightarrow m=\pm 1$ و $2mn+1=0$

$m=1 \rightarrow n=\frac{-1}{2}$ و $m=-1 \rightarrow n=\frac{1}{2} \rightarrow y=\pm(x-\frac{1}{2})$

$y'=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$ و $y'=0 \rightarrow 2x-1=0 \rightarrow x=0/5$ قابل‌قبول نیست چون‌تابع نامعین است

$y=0 \rightarrow x(x-1)=0 \rightarrow x=0$ و $x=1$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		3		$+\infty$
y'			$-$				∞		∞		$+$		$+$		
y	$+\infty$	↘	$\sqrt{6}$	↘	$\sqrt{2}$	↘	0		0	↗	$\sqrt{2}$	↗	$\sqrt{6}$	↗	$+\infty$



۱۳۱۵ - ک۳۹ص۱۱۸ $y=\sqrt{1-x^2}$

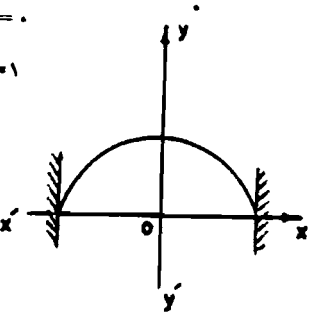
تابع معین است $1-x^2\geq 0 \to 1\geq x\geq -1$

چون $a=-1$ و $m=0$ است منحنی نمایش تابع فوق نیم‌دایره است و مجانب ندارد.

$$y'=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ و } \left| \begin{array}{l} y'=0\to x=0 \\ x=0\to y=1 \end{array}\right.$$

$x=\pm 1 \to y=0$

x	-1		0		$+1$
y'	∞	$+$	0	$-$	∞
y	0	$\nearrow$	1 Max	$\searrow$	0



۱۳۱۶ - ک۴۰ص۱۱۸ $y=1\pm\sqrt{x^2-4x}$

حل: تابع معین است $x^2-4x\geq 0\to x\geq 4$ و $x\leq 0$

چون $a>0$ است منحنی هذلولی است و دارای مجانب است

طریقه اول $y=mx+n\pm\sqrt{a}\,(x+\frac{b}{2a})\to y=1\pm(x-2)$

معادلات مجانبها $y=x-1$ و $y'=-x+3$

طریقه دوم (تقاطع) $1\pm\sqrt{x^2-4x}=mx+n$

$\pm\sqrt{x^2-4x}=mx+n-1\to(m^2-1)x^2+2(mn-m+2)x+$
$n^2-2n+1=0$

$$\begin{cases} m^2-1=0\to m=\pm 1 \\ mn-m+2=0\to m=1\to n=-1 \text{ و } m=-1\to n=3 \end{cases}$$

$y=mx+n\to y=x-1 \to A(0,-1)$ و $B(1,0)$

$y=-x+3\to A'(0,3)$ و $B'(3,0)$

$$y' = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}} \left| \begin{array}{l} y' = 0 \to x-2 = 0 \to x = 2 \\ \text{قابل قبول نیست چون تابع نامعین است} \end{array} \right.$$

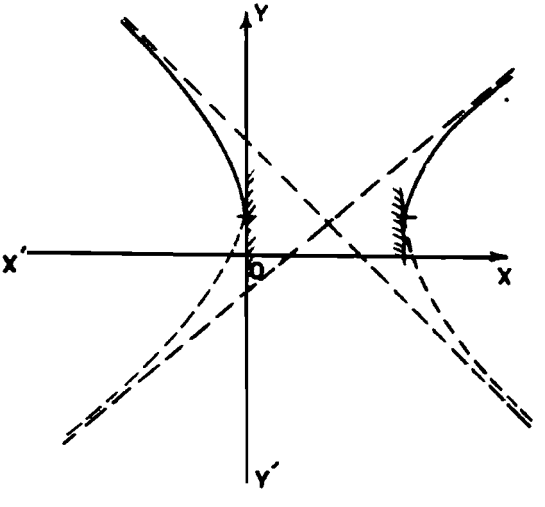
تذکر: ابتدا منحنی $y = 1 + \sqrt{x^2-4x}$ را رسم می‌کنیم و سپس قرینهٔ آنرا نسبت بخط $y = 1$ نقطه‌چین رسم میکنیم تا منحنی مربوط به $y = 1 - \sqrt{x^2-4x}$ رسم شود.

$$y = 0 \to 1 + \sqrt{x^2-4x} = 0 \to x^2-4x = 1 \to x^2-4x-1 = 0$$

$x = 2 \pm \sqrt{5}$ که هر دو مربوط به $1 - \sqrt{x^2-4x} = 0$ میباشد

$x = 0 \to y = 1$ و $x = 4 \to y = 1$

x	$-\infty$		-1		0		4		5		6		$+\infty$
y'		$-$			∞	‖	∞		$+$		$+$		
y	$+\infty$	↘	$1+\sqrt{5}$	↘	1		1	↗	$1+\sqrt{5}$	↗	$1+2\sqrt{3}$	↗	$+\infty$



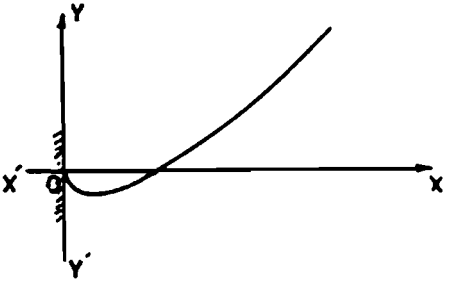
۱۳۹۷ - ک ۴۱ ص ۱۱۸ وخرداد ۳۸ $y=x-\sqrt{x}$

حل: تابع بازاء $x>0$ معین است وچون $a=0$ است پس منحنی فوق یک سهمی است که مجانب ندارد ولی امتداد مجانب موازی خط $y=x$ میباشد

$$y'=\frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}} \quad \left| \begin{array}{l} y'=0\to 2\sqrt{x}-1=0\to 4x=1\to x=0/25 \\ x=0/25\to y=0/25-0/5=-0/25 \end{array}\right.$$

$$y=0\to x-\sqrt{x}=0\to x^2=x\to x=0 \text{ و } 1$$

x	0		0/25		1		4		5		$+\infty$
y'	∞	−	0	+				+			
y	0	↘	−0/25 min	↗	0	↗	2	↗	$5-\sqrt{5}$	↗	$+\infty$



۱۳۱۸ - ک ۴۲ ص ۱۱۸ $y=x+\sqrt{x^2-3x+2}$

حل: تابع معین است $x^2-3x+2\geq 0\to x\geq 2$ و $x\leq 1$

چون $a>0$ میباشد هذلولی است ومجانب هم دارد

$$y=mx+n\pm\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\to y=x\pm\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

$y=2x-1/5-1(0 \text{ و } -1/5)$ و $B(1و0/5)$

مجانب افقی $y=1/5$

$$y'=\frac{2\sqrt{x^2-3x+2}+2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}}$$

$y' = 0 \to 2\sqrt{x^2-3x+2} = -2x+3$

$8 = 9$ غیرممکن است

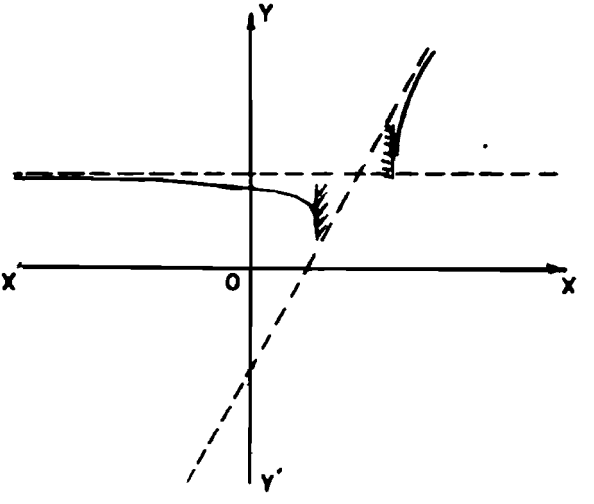
$y = 0 \to \sqrt{x^2-3x+2} = -x \to x = 2 \div 3$ قابل قبول نیست

$x = \infty \to y = +\infty$ و $x = -\infty \to y = -\infty + \infty$ مبهم است

$x = -\infty \to y = 1/5$ و $x = 2 \to y = 2$ و $x = 1 \to y = 1$

$x = 0 \to y = \sqrt{2}$

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
y'		$-$			∞	‖	∞		$+$	$+$	
y	$1/5$	↘	$\sqrt{2}$	↘	1		2	↗	$3+\sqrt{3}$	↗	$+\infty$



۱۳۱۹ - ک۴۳ص۱۱۸ $y=2x+\sqrt{-x^2+4x+5}$

تابع معین است مجانب ندارد $-x^2+4x+5\geqslant 0\to 5\geqslant x\geqslant -1$

چون $a<0$ و $m\neq 0$ است منحنی فوق بیضی است ومجانب ندارد

$y'=0\to 5x^2-20x-16=0$ و $y'=\frac{2\sqrt{-x^2+4x+5}-x+2}{\sqrt{-x^2+4x+5}}$

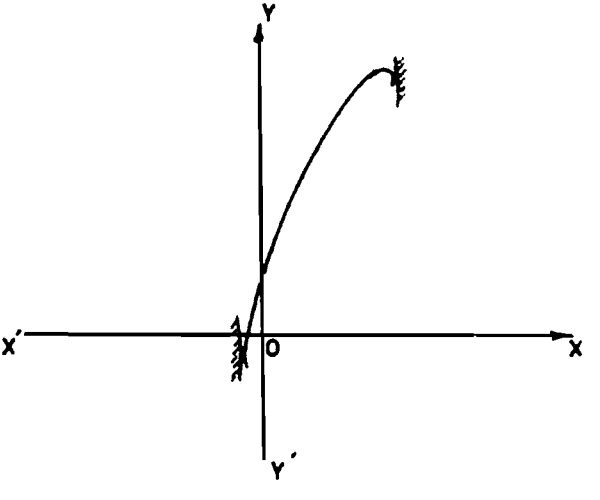
$x=\frac{10+6\sqrt{5}}{5}\neq 10/74$ و $y\neq 4/7$ وقابل قبول نیست $x=\frac{10-6\sqrt{5}}{5}$

$y=0\to\sqrt{-x^2+4x+5}=-2x\to 5x^2-4x-5=0$

$x=0/2(2-\sqrt{29})$ وغیرقابل قبول $x=0/2(2+\sqrt{29})$

$x=5\to y=10$ و $x=-1\to y=-4$ و $x=0\to y=\sqrt{5}$

x	$-\infty$		-1		$0/2(2-\sqrt{29})$		0		$4/7$		5
y'			∞		$+$			$+$	0	$-$	∞
y			-4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{5}$	$\nearrow$	$10/74$	$\searrow$	10



$y=-x+\sqrt{x^2+2x+5}$ ۱۳۲۰ ـ ک۴۴ص۱۱۸

حل: چون $x^2+2x+5=0$ ریشه ندارد پس همواره مثبت است پس تابع همواره معین است وچون $a>0$ است شکل منحنی هذلولی میباشد و دارای مجانب است که معادله آنها ازفرمول زیر بدست می‌آید.

$$y=mx+n\pm\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right) \rightarrow y=-x\pm 1(x+1)$$

$y=1$ ومجانب افقی $y=-2x-1$ مجانب مایل $\rightarrow A(0,-1)$ و $B(1,-2)$

$$y'=\frac{-\sqrt{x^2+2x+5}+x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$$

$y'=0\rightarrow x+1=\sqrt{x^2+2x+5}$

$1=5$ غیرممکن است

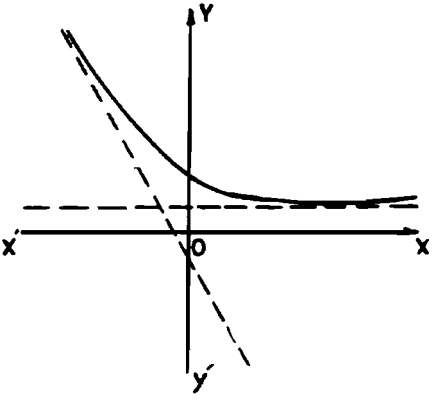
$y=0\rightarrow\sqrt{x^2+2x+5}=x\rightarrow x=-2/5$ ریشه خارجی است

$x=0\rightarrow y=\sqrt{5}$ و $x=+\infty\rightarrow y=-\infty+\infty$ مبهم است

$x=+\infty\rightarrow y=1$ پس ازرفع ابهام

$x=-\infty\rightarrow y=+\infty$ و $x=-1\rightarrow y=3$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
y'			$-$		$-$				$-$		
y	$+\infty$	↘	$2+\sqrt{5}$	↘	3	↘	$\sqrt{5}$	↘	$2\sqrt{2}-1$	↘	1



۱۳۲۱ - ک۴۵ص۱۱۸ $y=1+x+\sqrt{x^2+x+1}$

حل: چون $x^2+x+1=0$ دارای ریشه نمیباشد پس همواره مثبت است پس تابع همواره معین است وچون $a>0$ است شکل منحنی هذلولی است ودارای مجانب میباشد.

$$y=mx+n\pm\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\Longrightarrow y=x+1\pm1\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

مجانب افقی $y=0/5$ و $B(1و3/5)$ و $A(0و1/5)$ و $y=2x+1/5$

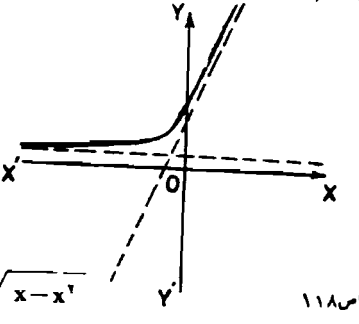
$$y'=\frac{2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\rightarrow y'=0\rightarrow 2=1$$ غیرممکن

$y=0\rightarrow x=0$ وریشه خارجی $x=0\rightarrow y=2$

پس از رفع ابهام $x=+\infty\rightarrow y=+\infty$ و $x=-\infty\rightarrow y=0/5$

$x=-1\rightarrow y=1$ و $x=1\rightarrow y=2+\sqrt{3}$

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
y'			$+$		$+$		$+$		
y	$0/5$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$2+\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$



۱۳۲۲ - ک۴۶ص۱۱۸ $y=1-\sqrt{x-x^2}$

تابع معین است $x-x^2\geqslant0\rightarrow x\geqslant0$ و $x<1$

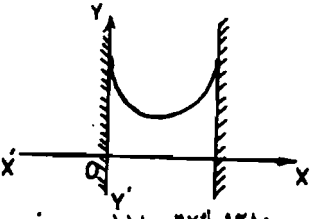
چون $a=-1$ و $m=0$ میباشد پس شکل دایره است ومجانب هم ندارد.

$$y'=-\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}\rightarrow y'=0\rightarrow x=\frac{1}{2}\ \text{و}\ y=\frac{1}{2}$$

$x=0\rightarrow y=1$ و $x=1\rightarrow y=1$

x	۰		۰/۵		۱
y'		−	۰	+	
y	۱	↘	۰/۵	↗	۱

Min



۱۲۸۰ـ ک۲۷ص ۱۱۸

$$y=(1-x)\sqrt{1+x}$$

حل: $x+1\geq 0 \rightarrow x\geq -1$

چون تابع بازاء $x=+\infty$ معین است پس ممکن است مجانب داشته باشد.

چون توان صورت از مخرج بیشتر است

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\frac{(1-x)\sqrt{1+x}}{x}=\infty$$

پس مجانب مایل ندارد

$$y'=-\sqrt{x+1}+\frac{1-x}{2\sqrt{x+1}}=\frac{-2x-2+1-x}{2\sqrt{x+1}}=\frac{-3x-1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$y'=0\rightarrow -3x-1=0\rightarrow x=-1\div 3$$

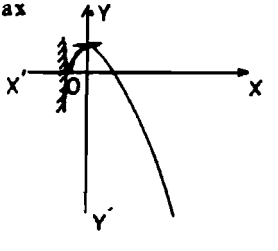
$$x=\frac{-1}{3}\rightarrow y=(1+\frac{1}{3})\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{4\sqrt{6}}{9}\approx 1/06$$

$$y=0\rightarrow(1-x)\sqrt{1+x}=0\rightarrow x=1 \text{ و } x=-1$$

$$x=0\rightarrow y=1 \text{ و } x=3\rightarrow y=-4 \text{ و } x=+\infty\rightarrow y=-\infty$$

x	−۱		$\frac{-1}{3}$		۰		۱		۳		$+\infty$
y'	∞	+	۰		−		−		−		
y	۰	↗	۱/۰۶	↘	۱	↘	۰	↘	−۴	↘	$-\infty$

Max



۱۳۲۳ – ک۴۸ وخرداد۴۸

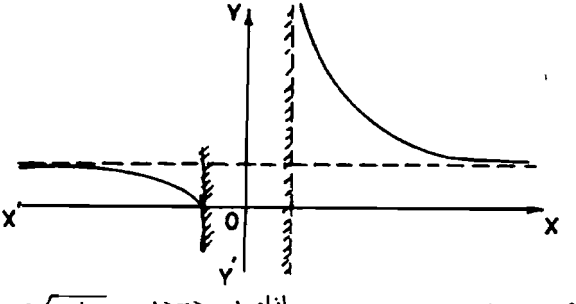
$$y=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \qquad y'=\frac{-1}{(x-1)^2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$$

$(x+1)\div(x-1)>0 \Longrightarrow x>1$ و $x<-1$

مجانب قائم $y=\pm\infty \Longrightarrow x-1=0 \Longrightarrow x=1$

مجانب افقی $x=\pm\infty \Longrightarrow y=1$

x	$-\infty$		-1		1		2		3		$+\infty$
y′		$-$	∞	‖	∞	$-$		$-$			
y	1	↘	0		∞	↘	$\sqrt{3}$	↘	$\sqrt{2}$	↘	1



۱۳۲۴ – ک۴۹ ص ۱۱۸

$$y=x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

بازاء $-1<x<1$ تابع معین است

$$y'=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\frac{x}{(1-x)^2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \qquad y'=\frac{-x^2+x+1}{(1-x)^2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$$

$y'=0 \Longrightarrow x^2-x-1=0$

$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ وقابل قبول نیست $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\neq -0/6 \Longrightarrow y\neq -0/3$

x	-1		$-0/6$		0		$+1$
y′	∞	$-$	0	$+$		$+$	∞
y	0	↘	$-0/3$	↗	0	↗	$+\infty$

Min

۱۳۲۵ - ک ۵۰ ص ۱۱۸ $y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

تابع معین است $x^2-1 \geq 0 \quad x \geq 1$ و $x \leq -1$

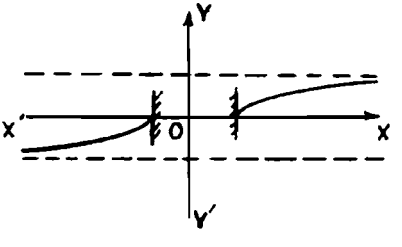
چون x مقادیر $+\infty$ و $-\infty$ را قبول می‌کند پس تابع دارای مجانب است

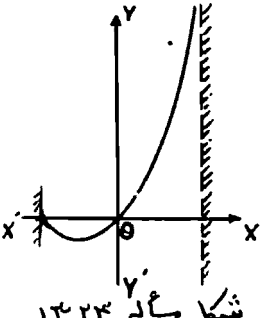
مجانبهای افقی $x = \pm\infty \Longrightarrow y = \pm 1$

قابل قبول نیست $y = \pm\infty \Longrightarrow x = 0$

$$y' = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \times x - 1 \times \sqrt{x^2-1}}{x^2} = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}} > 0$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	$-\infty$	‖	∞	+	
y	-1	↗	0		0	↗	1





شکل مسأله ۱۳۲۴

۱۳۲۶ – ک۵۱ص۱۱۸

$$y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

حل: تابع معین است

$1-x^2 \geq 0 \Longrightarrow +1 \geq x \geq -1$

مجانب قائم

$y = \pm\infty \Longrightarrow x = 0$

$$y' = \frac{\frac{-x \times x}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}}{x^2} = \frac{-1}{x^2\sqrt{1-x^2}} < 0$$

x	-1		0		1
y'	$-$	$-$		$-$	
y	0	↘	$-\infty \mid +\infty$	↘	0

شکل در صفحه مقابل است

۱۳۲۷ – ک۵۲ص۱۱۸

$y^2 = (x-2)(x^2-9)$

حل:

$y = \pm\sqrt{(x-2)(x^2-9)} = \sqrt{x^3-2x^2-9x+18}$

$(x-2)(x^2-9) \geq 0$ $\qquad x = 2$ و $x = \pm 3$

x	$-\infty$		-3		2		3		$+\infty$
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
x^2-9		$+$	0	$-$	|		0	$+$	
زیر رادیکال		$-$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	

پس بازاء $2 \leq x \leq -3$ و بازاء $x \geq 3$ تابع معین است چون تابع بازاء $x = +\infty$ معین است پس ممکن است مجانب داشته باشد و چون $m = \infty$ میشود پس مجانب ندارد

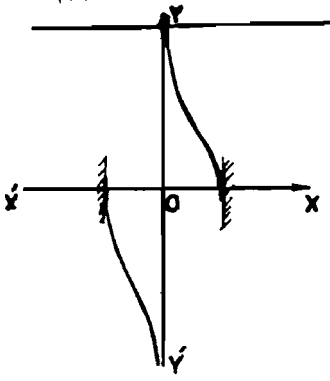
$$y = \sqrt{x^3-2x^2-9x+18} \quad \text{و} \quad y' = \frac{3x^2-4x-9}{2\sqrt{x^3-2x^2-9x+18}}$$

$y' = 0 \Longrightarrow 3x^2-4x-9 = 0$

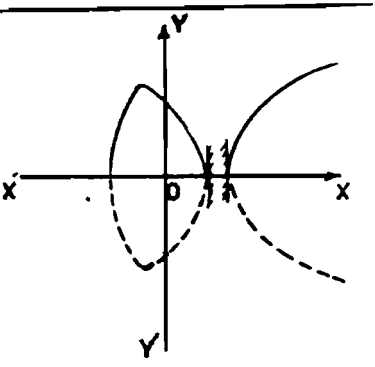
$x = \frac{2+\sqrt{31}}{3} \# 2/6$ و $x = \frac{2-\sqrt{31}}{3} \# -1/2 \Longrightarrow y \# 4/8$

تابع معین است

x	-3		$-1/2$		2		3		4		5		$+\infty$
y'	∞	$+$	0	$-$	∞	‖	∞	$+$		$+$			
y	0	↗	$4/8$	↘	0		0	↗	$\sqrt{14}$ ↗	$4\sqrt{3}$	↗		$+\infty$



شکل مسئله ۱۳۲۶



شکل مسئله ۱۳۲۷

۱۳۲۸ - ک ۵۳ ص ۱۱۸

$y' = x^2(x-5)^2(2x-3)$

$y = \pm x(x-5)\sqrt{2x-3} \Rightarrow 2x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1/5$

چون تابع بازاء $x = +\infty$ معین است ممکن است دارای مجانب باشد چون $m = \infty$ میشود پس مجانب ندارد. $y = x(x-5)\sqrt{2x-3} = (x^2-5x)\sqrt{2x-3}$

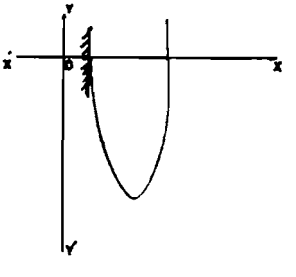
$$y' = (2x-5)\sqrt{2x-3} + \frac{1 \times (x^2-5x)}{\sqrt{2x-3}} = \frac{5x^2-21x+15}{\sqrt{2x-3}}$$

$y' = 0 \Rightarrow 5x^2-21x+15 = 0$

$x = \frac{21+\sqrt{141}}{10} \neq 3/3 \Rightarrow y \neq -10$ و $x = \frac{21-\sqrt{141}}{10}$ قابل قبول نیست

x	1/5		2		3/3		5		$+\infty$
y'	∞	−		−	0		+	+	
y	0	↘	−6	↘	−10	↗	0	↗	$+\infty$

Min



۱۳۲۹ - ک۵۴ص۱۱۸ $(y-x)^2 = 16 - x^2$

$y - x = \pm\sqrt{16-x^2} \Rightarrow y = x \pm \sqrt{16-x^2}$

تابع معین است $16 - x^2 \geq 0 \Rightarrow 4 \geq x \geq -4$

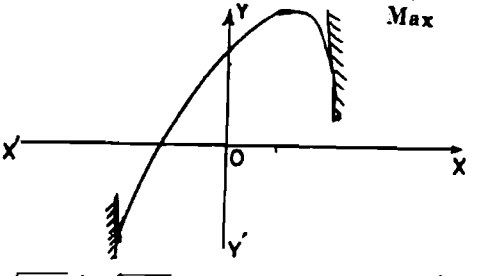
چون $a < 0$ است بیضی است و مجانب ندارد.

$$y = x + \sqrt{16-x^2} \Rightarrow y' = \frac{\sqrt{16-x^2} - x}{\sqrt{16-x^2}}$$

$y' = 0 \Rightarrow \sqrt{16-x^2} = x \Rightarrow 2x^2 = 16 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$

$x = 2\sqrt{2} \Rightarrow y = 4\sqrt{2}$ و $x = -4 \Rightarrow y = -4$ و $x = 4 \Rightarrow y = 4$

x	-4		$-2\sqrt{2}$		0		$2\sqrt{2}$		4
y'		$+$		$+$			0	$-$	
y	-4	↗	0	↗	4	↗	$4\sqrt{2}$	↘	$+4$



۱۳۳۰ - ک۵۵ص۱۱۸ $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$

حل: باید زیر هر دو رادیکال مثبت باشد تا تابع معین باشد.

$1 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$ و $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

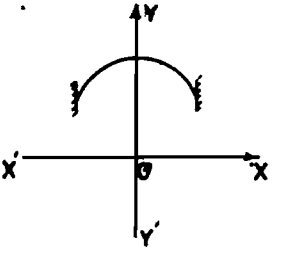
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
تابع		نامعین		معین		نامعین	

چون تابع در فاصله $-1 \leq x \leq 1$ معین است پس مجانب ندارد.

$$y' = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} + \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$y' = 0 \Longrightarrow \sqrt{1-x} = \sqrt{1+x} \Longrightarrow x = 0$ و $y = 2$

x	-1		0		1
y'	∞	$+$	0	$-$	∞
y	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\sqrt{2}$



۱۳۳۱ ـ ک ۵۶ ص ۱۱۸

$$y = \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
تابع		نامعین		نامعین		معین	

چون تابع در فاصله $x \geq 1$ معین میباشد پس ممکن است مجانب هم داشته باشد

$x = \infty \rightarrow y = \infty - \infty$ مبهم است

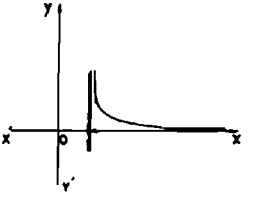
مجانب افقی:

$$y = \lim_{x \to \infty} \frac{x - x + 1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} = 0$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x(x-1)}}$$

$y' = 0 \Longrightarrow \sqrt{x-1} = \sqrt{x} \Longrightarrow -1 = 0$ غیرممکن است

x	1		$+\infty$
y'	∞	$-$	
y	1	$\searrow$	0



۱۳۳۲ - ک ۵۷ ص ۱۱۸ $y=\sqrt[3]{x^2-1}$

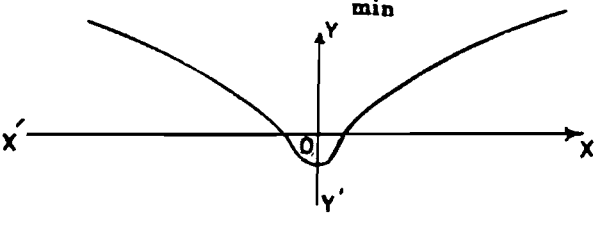
تذکر: کلیه توابع اصم که فرجه رادیکال آنها فرد می‌باشد بازاء جمیع مقادیر x معین می‌باشند.

$$y'=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} \quad ; \quad y'=0 \to x=0 \quad \text{و} \quad y=-1$$

$$y=0 \Rightarrow x^2-1=0 \to \pm 1$$

x	$-\infty$		-3		-2		0		1		3		4		$+\infty$
y'					$-$		0	$-$	0	$+\infty$	$+$		$+$		
y	$+\infty$	↘	2	↘	3	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	2	↗	$\sqrt[3]{15}$	↗ $+\infty$

min



تذکر: مسأله ۵۸ کتاب درسی در صفحه (۲۷۹) طی شماره (شماره ۱۳۵۰) حل شده است.

تمرین: جدول و منحنی نمایش تغییرات هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

۱۳۳۳ - خرداد ۳۵ $y=2x\pm\sqrt{x^2+3}$

معادلات مجانبها $y=x$ و $y=3x$

$$y'=\frac{2\sqrt{x^2+3}+x}{\sqrt{x^2+3}}$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		$+$		$+$		$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

۱۳۳۴ - خرداد ۳۶ $y=x+2\sqrt{x^2+3}$

معادلات مجانبها $y=3x$ و $y=-x$

$$y'=\frac{\sqrt{x^2+3}+2x}{\sqrt{x^2+3}}$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	
y	$-\infty$	↘	3	↗	$2\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

Min

۱۳۳۵ - خرداد ۳۷ $y = x + \sqrt{x+1}$ و $y' = \dfrac{2\sqrt{x+1}+1}{2\sqrt{x+1}}$

x	-1		$0/5(1-\sqrt{5})$		0		$+\infty$
y'	∞	$+$		$+$		$+$	
y	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

۱۳۳۶ - خرداد ۳۸ $y = \pm\sqrt{x^2-2x}$

معادلات $y = x - 1$

مجانبها $y = -x + 1$

و $y' = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$

x	$-\infty$		0		2		3		4		$+\infty$
y'		$-$	∞		∞	$+$			$+$		
y	$+\infty$	$\searrow$	0		0	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

۱۳۳۷ - شهریور ۳۸ $y = 2x + 1 \pm \sqrt{2x(2x+1)}$

معادلات $y = 0/5$

مجانبها $y = 4x + 1/5$

$y' = \dfrac{2\sqrt{2x(2x+1)}+4x+1}{\sqrt{2x(2x+1)}}$

x	$-\infty$		$-0/5$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	∞		∞	$+$			
y	$0/5$	$\searrow$			0	$\nearrow$	$3+\sqrt{6}$	$\nearrow$	$+\infty$

۱۳۳۸ - خرداد ۳۹ $y = \pm x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

معادلات $x = -1$

مجانبها $y = x - 1$

$y' = \dfrac{x^2+x-1}{(x+1)^2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}$

x	$-\infty$		$-1/6$		-1		$+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	∞		∞	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-3/2$	$\searrow$	$-\infty$		0	$\nearrow$	$+\infty$

۱۳۳۹- خرداد ۴۰ $y=\pm x\sqrt{x-1}$ و $y'=\pm 1/5\sqrt{x}$

تذکر: خط $y=-1$ محور تقارن منحنی می باشد پس ابتدا منحنی $y=x\sqrt{x-1}$ را رسم میکنیم و سپس قرینهٔ آنرا نسبت بخط $y=-1$ بدست می آوریم تا منحنی $y=-x\sqrt{x-1}$ رسم شود .

x	۰		۱		۴		$+\infty$
y'			+		+		
y	-1	↗	۰	↗	۷	↗	$+\infty$

۱۳۴۰- شهریور ۴۰ $y=2\pm\sqrt{1-4x^2}$ و $y'=\dfrac{-4x}{\sqrt{1-4x^2}}$

x	$-0/5$		۰		$0/5$
y'	∞	+	۰	−	
y	۲	↗	۳	↘	۲

۱۳۴۱- خرداد ۴۱ $y=2x+4\pm\sqrt{2x+4}$

$$y'=\frac{2\sqrt{2x+4}+1}{\sqrt{2x+4}} \quad , \quad y''=\frac{2\sqrt{2x+4}-1}{\sqrt{2x+4}}$$

x	-2		۰		$+\infty$
y'	∞ +		+	+	
y	۰	↗	۶	↗	$+\infty$

x	-2		$-\frac{15}{8}$		$-\frac{3}{2}$	,		$+\infty$
y'	∞	−	۰		+		+	
y	۰	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	۰	↗	۲ ↗	$+\infty$

۱۳۴۲- خرداد ۴۲ $y=\pm\dfrac{\sqrt{(x-1)^2-9}}{x-1}$

$$y'=\frac{9}{(x-1)^2\sqrt{(x-1)^2-9}} \quad , \quad \left|\begin{array}{l} y=-1 \text{ مجانبهای} \\ y=1 \text{ منحنی} \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
y′		+	∞	‖	∞	+	
y	-1	↗	0		0	↗	$+1$

۱۳۴۳ - شهریور ۴۲ $y = \sqrt{x^2-1} + x$

معادلات $y = 2x$

مجانبها $y = 0$

و $y' = \dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$-\infty$		-1		$+1$		2		3		$+\infty$
y′		−	∞	‖	∞	+			+		
y	0	↘	-1		1	↗	$2+\sqrt{3}$	↗	$3+2\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

۱۳۴۴ - خرداد ۴۵ $y = x \pm 2\sqrt{5-x^2}$ و $y' = \dfrac{\sqrt{5-x^2}-2x}{\sqrt{5-x^2}}$

x	$-\sqrt{5}$		-2		0		1		$\sqrt{5}$
y′	∞		+				0	−	∞
y	$-\sqrt{5}$	↗	0	↗	$2\sqrt{5}$	↗	5	↘	$\sqrt{5}$

۱۳۴۵ - شهریور ۴۵ $y = x - 2\sqrt{x}$ و $y' = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

x	0		1		4		$+\infty$
y′	∞	—	0		+		+
y′	0	↘	-1	↗	0	↗	∞

۱۳۴۶ - خرداد ۴۶ $y = x + 2 \pm \sqrt{4-x^2}$ و $y' = \dfrac{-x+\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}$

x	-2		0		$\sqrt{2}$		2
y′	∞		+		0	−	∞
y	0	↗	4	↗	$2\sqrt{2}+2$	↘	4

۱۳۴۷ - شهریور ۴۶ $y = x + \sqrt{x^2+4x}$

معادلات $y = -2$

مجانبها $y = 2x+2$

و $y' = \dfrac{\sqrt{x^2+4x}+x+2}{\sqrt{x^2+4x}}$

x	$-\infty$		-۴		۰		۱		۲		$+\infty$
y'		$-$	∞	‖	∞	$+$		$+$		$+$	
y	-۲	↘	-۴		۰	↗	$۱+\sqrt{۵}$	↗	$۲+۲\sqrt{۳}$	↗	$+\infty$

۱۳۴۸ - خرداد ۳۷

$$y = \pm \frac{\sqrt{x^۲-۲x}}{x-۱}$$

$$y' = \frac{۱}{(x-۱)^۲\sqrt{x^۲-۲x}}$$

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
y'		$+$	∞	‖	∞	$+$	
y	-۱	↗	۰		۰	↗	۱

۱۳۴۹ - شهریور ۳۷

$$y = \pm\sqrt{x^۲-۲x}$$

$$y' = \frac{x-۱}{\sqrt{x^۲-۲x}} \text{ و } \begin{cases} y = x-۱ & \text{معادلات} \\ y = -x+۱ & \text{مجانبها} \end{cases}$$

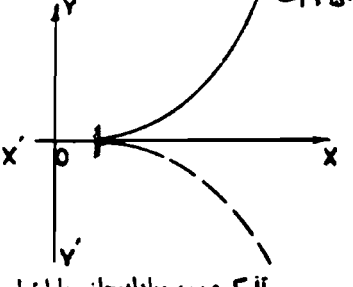
x	$-\infty$		-۱		۰		۲		۴		$+\infty$
y'		$-$		∞	‖	∞	$+$		$+$		
y	$+\infty$	↘	$\sqrt{۲}$	↘	۰		۰	↗	$۲\sqrt{۲}$	↗	$+\infty$

۱۳۵۰-

$$y = \pm(x-۱)\sqrt{x-۱}$$

$$y' = ۱/۵\sqrt{x-۱}$$

x	۱		۲		∞
y'	۰		$+$		$+$
y	۰	↗	۱	↗	∞



تذکر مهم: معادله مجانب مایل توابعی که معادله آنها بصورت

$$y = mx+n + \sqrt[۳]{ax^۳+bx^۲+cx+d}$$

میباشند (اگر $a \neq ۰$ باشد) از رابطه زیر بدست می‌آید.

تذکر: توابع اصمی که فرجه آنها فرد می‌باشند بازاء کلیه مقادیر x معین می‌باشند.

$$y = mx + n + \sqrt[3]{a}\left(x + \frac{b}{3a}\right)$$

۱۳۵۰ — ص۵۸ ت ۱۱۸

$$y = \sqrt[3]{x^3 - 4x + 2}$$

طریقه اول برای پیدا کردن مجانب

$$y = mx + n + \sqrt[3]{a}\left(x + \frac{b}{3a}\right)$$

معادلهٔ مجانب مایل

$$y = 1(x + 0) \Longrightarrow y = x$$

طریقه دوم (تقاطع)

$$\sqrt[3]{x^3 - 4x + 3} = ax + b$$

$$(a^3 - 1)x^3 + 3a^2bx^2 + (3ab^2 + 4)x + b^3 - 3 = 0$$

$$a^3 - 1 = 0 \Longrightarrow a = 1 \text{ و } a^2b = 0 \Longrightarrow 3b = 0 \Longrightarrow b = 0$$

معادلهٔ مجانب

$$y = x$$

$$y' = \frac{3x^2 - 4}{3\sqrt[3]{(x^3 - 4x + 3)^2}}$$

$$y = 0$$

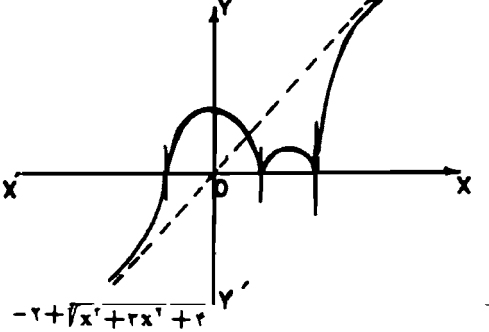
$$x = \pm 2\sqrt{3} \div 3 \# \pm 1/2$$

$$x \# \pm 1/2 \Longrightarrow y \# 2/2 \text{ و } y \# 1/8$$

$$y = 0 \Longrightarrow x^3 - 4x + 3 = 0 \Longrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 3) = 0$$

$$x = 1 \text{ و } x \# 2/3 \text{ و } x \# -1/3$$

x	$-\infty$		$-1/3$		$-1/2$		0		1		$1/2$		$2/3$		$+\infty$
y'		+	∞	+	0	−		−	∞	+	0	−	∞	+	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$1/8$	↘	$\sqrt[3]{3}$	↘	0	↗	$0/2$	↘	0	↗	$+\infty$



۱۳۵۱ — $y = -2 + \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 4}$

۱۳۵۲ — $y = 2 - \sqrt[3]{3x^2 - x^3 + 9x - 15}$

خرداد ماه ۳۹

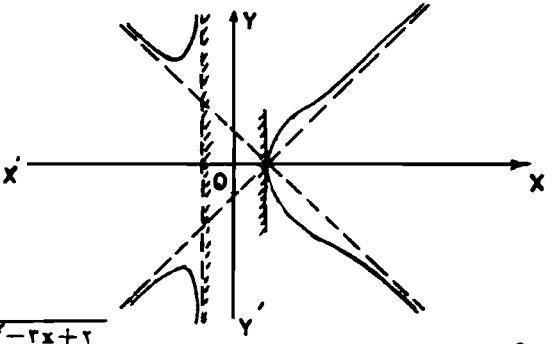
۱۳۵۳- $y' = \dfrac{x^2+x-1}{(x+1)^2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}$ $\qquad y = \pm x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

$y' = 0 \Longrightarrow (x \neq 0/6$ و $y \neq -3/2)$ و (تابع نامعین $x \neq -1/6$)

$y = x - 1 \qquad A(0,-1)$ و $B(1,0)$

$y = -x + 1 \qquad A'(0,1)$ و $B'(1,0)$

x	$-\infty$		$-1/6$		-1		1		2		3		$+\infty$
y'		$+$	$+$	$\cdot$	$+$	∞	∞		$+$		$+$		
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-3/2$	$\nearrow$	∞	$\cdot$		$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$



۱۳۵۴- $y = 1 \pm \dfrac{\sqrt{x^2-2x+2}}{x}$

$$y' = \frac{2x-4}{2x^2\sqrt{x^2-2x+2}} > 0$$

ثلث دوم گروه فرهنگی کارون (دسته B)

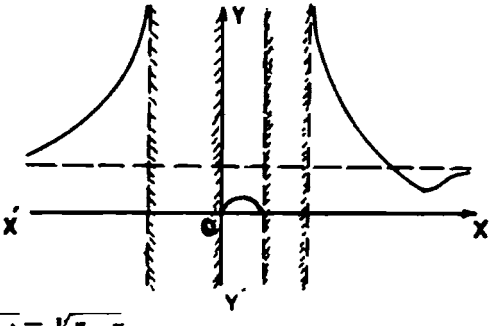
۱۳۵۵- $y = \sqrt{\dfrac{x^2-x}{x^2-4}}$

$(x^2-x)(x^2-4) > 0 \Longrightarrow x < -2$ و $1 > x > 0$ و $x > 2$

$$y' = \frac{(x^2-8x+3)}{2(x^2-3)\sqrt{(x^2-3)(x^2-x)}} \quad \text{و} \quad y'=0$$

$(x \# 7/3$ و $y \# 0/96)$ و $(x \# 0/6$ و $y \# 0/99)$

x	$-\infty$		-3		-2		0		$0/6$		1		2		$7/3$		$+\infty$
y'		+			∞	‖	∞	+	0	$-\infty$	‖	∞		−	0		+
y	1	↗	$1/5$	↗	∞		0	↗	$0/99$ max	↘	0	∞	↘		$0/96$	↗	1



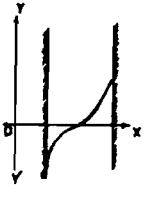
$$y=\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}$$

−۱۳۵۶

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-1$		−	0	+		+	
$-x+3$		+		+	0	−	
تابع		نامعین		معین		نامعین	

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + \frac{1}{2\sqrt{-x+3}} > 0$$

x	1		2		3
y'	∞	+			∞
y	$-\sqrt{2}$	↗	0	↗	$\sqrt{2}$



۱۳۵۷-

$$y = \pm\frac{\sqrt{-x^2+4}}{x-3}$$

تابع معین است $-x^2+4>0 \Longrightarrow 2>x>-2$

مجانب قائم $y=\pm\infty \Longrightarrow x=3$

$$y' = \frac{3x-4}{(x-3)^2\sqrt{-x^2+4}} \Longrightarrow y'=0 \Longrightarrow x=\frac{4}{3}$$

$x=0 \Longrightarrow y=-\frac{2}{3}$ و $y=0 \Longrightarrow x=\pm 2$

x	-2		0		$\frac{4}{3}$		2
y	∞		$-$		0	$+$	∞
y	0	$\searrow$	$-\frac{2}{3}$	$\searrow$	$\frac{-2\sqrt{5}}{5}$ min	$\nearrow$	0

۱۳۵۸-

$$y=\pm\frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{x}$$

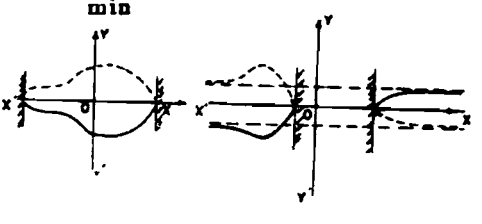
تابع معین است $x^2-2x-3>0 \Longrightarrow x>3$ و $x<-1$

$$y' = \frac{x+3}{x^2\sqrt{x^2-2x-3}} \Longrightarrow y'=0 \Longrightarrow x=-3$$

$y=0 \Longrightarrow x=-1$ و 3

مجانب قائم $y=\pm\infty \Longrightarrow x=0$

x	$-\infty$		-3		-1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	∞		∞	$+$	
y	-1	$\searrow$	$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$ min	$\nearrow$	0		0	$\nearrow$	$+1$

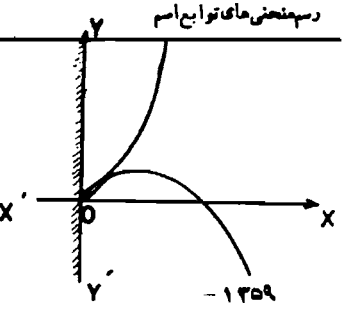


$$y = x^2 \pm \sqrt{x^5}$$

$$y' = 2x \pm 2/5x\sqrt{x}$$

$$y'' = 2 \pm 3/75\sqrt{x}$$

$$\max\left(\frac{16}{25} \text{ و } 0/75\right)$$



$$y = \pm\sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$$

$$x(x^2-4) \geq 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ و } 2 \text{ و } -2$$

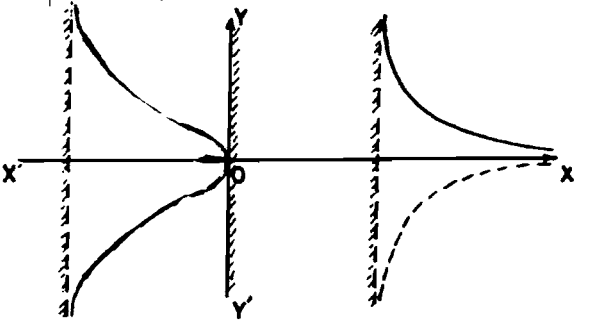
x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
دیر رادیکال		$-$	∞	$+$	0	$-$	∞	$+$	
		نامعین		معین		نامعین		معین	

$$y = 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ و } x = -2 \Longrightarrow y = \infty$$

$$x = 2 \Longrightarrow y = \infty \Longrightarrow x = +\infty \Longrightarrow y = 0$$ مجانب افقی

$$y' = \frac{-x^2-4}{2\sqrt{x(x^2-4)^3}} < 0$$

x	-2		-1		0		2		3		$+\infty$
y'	∞		$-$		∞		∞		$-$		
y	∞	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0		∞	$\searrow$	$\frac{\sqrt{15}}{5}$	$\searrow$	0



۱۳۶۰- $y = x\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}$

مبین است $(x+3)(x-1)\geq 0 \Longrightarrow x\geq 1 \text{ و } x\leq -3$

$y=\pm\infty \rightarrow x-1=0 \rightarrow x=1 \text{ و } x=\pm\infty \Longrightarrow y=\pm\infty$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}=1$$

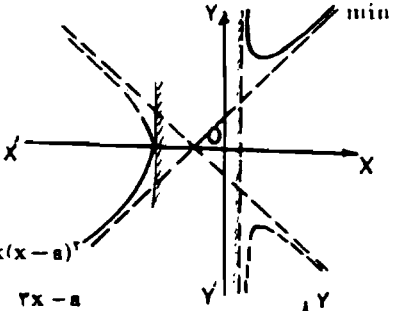
$$n=\lim(y-mx)=\lim\left(\frac{x\sqrt{x+3}-x\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}\right)$$

$$n=\lim\frac{4x^2}{x\sqrt{x^2-4}+x^2-2x}=2$$

$$y'=\frac{x^2-3}{(x-1)^2\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}} \qquad \rightarrow y'=0 \rightarrow x=\sqrt{3}$$

$y=x+2 \rightarrow A(0,2)$ و $B(1,3)$

x	$-\infty$		-3		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$+$	∞	‖	∞	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0		∞	↘	$4/4$	↗	$+\infty$

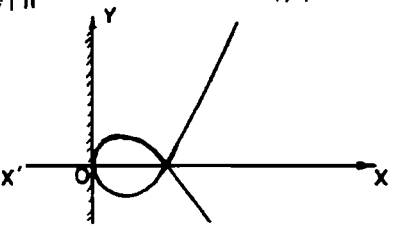


$y^2=x(x-a)^2$

۱۳۶۱-

$$y'=\frac{3x-a}{2\sqrt{x}}$$

$$\min \text{ و } \max\left(\frac{a}{3} \text{ و } \frac{\pm 2a\sqrt{a}}{3\sqrt{3}}\right)$$

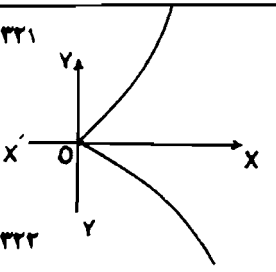


-۱۳۲۱

$y^2 - x^3 = 0$

$y' = 1/5\sqrt{x}$

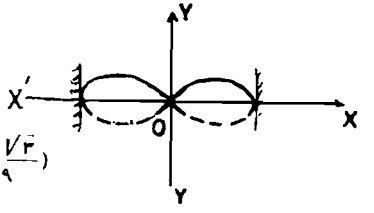
$y'' = \frac{3}{2\sqrt{x}}$



-۱۳۲۲

$y^2 - x^4 + x^6 = 0$

$y' = \frac{x(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$



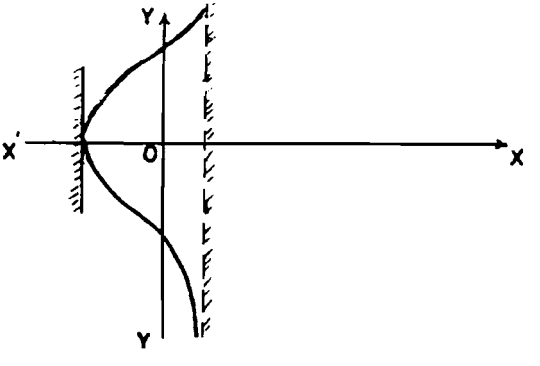
min و max $(\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ و $\pm\frac{2\sqrt{3}}{9})$

عطف $(0$ و $0)$

-۱۳۶۲

$y = \pm(x-2)\sqrt{\frac{x+2}{1-x}}$ $\qquad y' = \frac{-2x^2+x-2}{(1-x)^2\sqrt{\frac{x+2}{1-x}}}$

x	-2		0		1
y'	∞	$-$		$-$	∞
y	0	↘	$-2\sqrt{2}$	↘	$-\infty$



۱۳۶۳ - $y = x^2 \pm \sqrt{1-x^2}$

تابع معین است $1 - x^2 \geq 0 \rightarrow 1 \geq x \geq -1$

مجانب ندارد چون با تغییر x به $-x$ معادله منحنی تغییر نمیکند پس محور عرضها محور تقارن منحنی است.

$$y' = 2x \pm \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x(2\sqrt{1-x^2} \mp 1)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y' = 0 \rightarrow (x = 0 \text{ و } y = 0) \text{ و } 2\sqrt{1-x^2} = \pm 1 \rightarrow 4 - 4x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{3}{4} \rightarrow (x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } y = \frac{5}{4}) \text{ و } x = \pm 1 \rightarrow y = 1$$

$$y = 0 \rightarrow x^2 = \pm\sqrt{1-x^2} \rightarrow x^4 + x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ و قابل قبول نیست } x^2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

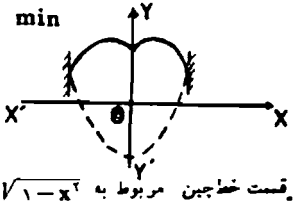
$$x = \pm\frac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}$$

جوابهای بالا جواب معادله $x^2 - \sqrt{1-x^2} = 0$ می باشد

$$x = 0 \rightarrow y = \pm 1$$

x	-1		$-0/5\sqrt{3}$		0		$0/5\sqrt{3}$		1
y'	∞	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	∞
y	1	↗	$1/25$ max	↘	1 min	↗	$1/25$	↘	1

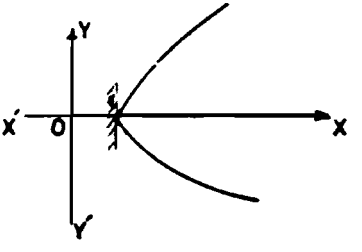
x	-1		0		1
y'	$-\infty$	$-$	0	$+$	
y	1	↘	-1 min	↗	1



قسمت خط چین مربوط به $y = x^2 - \sqrt{1-x^2}$ میباشد

$$y^2 = x^2(x-1)$$

$$y' = \frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}$$



گروه فرهنگی کاردن

۱۳۶۴ـ $y=\pm x\sqrt{\frac{x}{x-2}}$

تابع معین است $x(x-2)>0 \to x<0$ و $x>2$

$y'=\frac{(x-3)}{(x-2)\sqrt{x(x-2)}}$ و $y'=0 \to x=3$ و 0

قائم $x=2$ و مجانب مایل $y=-x-1$

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
y'		$+$	∞	‖	∞	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0		$+\infty$	↘	$2\sqrt{3}$ min	↗	$+\infty$

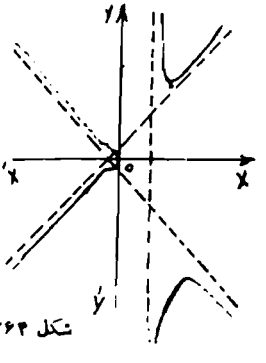
۱۳۶۵ـ $y=\sqrt{x^2-x^3}$

تابع معین میباشد $x^2-x^3>0 \to x<1$

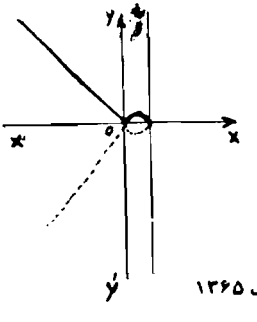
$y'=\frac{x(2-3x)}{2\sqrt{x^2-x^3}}$ و $y=0 \to x=0$ و $\frac{2}{3}$

$x=0 \to y=0$ و $y=0 \to x=0$ و 1

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		1
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	∞
y	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$ max	↘	0



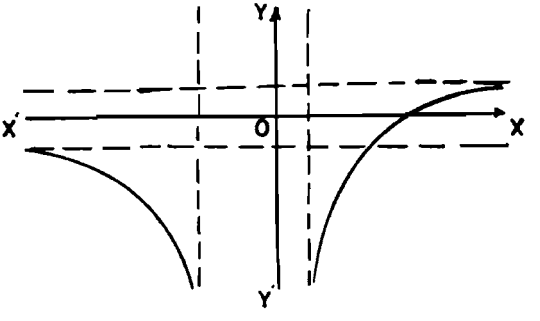
شکل ۱۳۶۴



شکل ۱۳۶۵

۱۳۶۶ - $y=\pm\frac{x-3}{\sqrt{x^2+x-3}}$ و $y'=\frac{7x-3}{2\sqrt{(x^2+x-2)^3}}$

x	$-\infty$		-3		-2		1		3		$+\infty$
y'		$-$			∞	‖	∞			$+$	
y	-1	↘	-3	↘	$-\infty$		$-\infty$	↗	0	↗	1



۱۳۶۷ - $y=\pm x\sqrt{\frac{3-x}{3+x}}$ $\quad y'=\frac{-x^2-3x+9}{\sqrt{(3-x)(3+x)^3}}$

x	-3		0		$\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}\approx 1/8$		3
y'	$+$		$+$		0	$-$	
y	$-\infty$ ↗		0	↗	$\frac{3(29-13\sqrt{5})}{4}\approx 0/8$ max	↘	0

۱۳۶۸ - خرداد ۳۵ $y=x=2\sqrt{x^2+3}$ و $y'=\frac{\sqrt{x^2+3}+2x}{\sqrt{x^2+3}}$

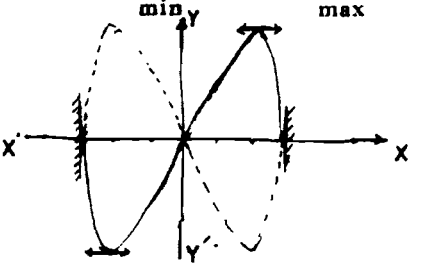
معادله مجانب مایل $y=-x$ و $y=3x$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		$-$	0		$+$		
y	$-\infty$	↘	3 min	↗	$2\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

گروه فرهنگی کارون

۱۳۶۹- $y=\pm x\sqrt{8-x^2}$ $\qquad y'=\dfrac{\pm 2(4-x^2)}{\sqrt{8-x^2}}$

x	$-2\sqrt{2}$		-2		0		2		$2\sqrt{2}$
y'		$-$	0	$+$	$+$		0	$-$	
y	0	↘	-4	↗	0	↗	4	↘	0
			min				max		



تمرین: هریك از توابع زیر را رسم کنید:

۱۳۷۰- $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^2}$

۱۳۷۱- $y=\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x-2)^2}$

۱۳۷۲- $y=\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}$

$$y=2x-1+\sqrt[5]{3}\left(x-\frac{2}{5}\right)$$

تذکر مهم: توابع ضمنی درجه دوم که بصورت زیر میباشند .

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

معمولا یا دایره یا بیضی یا هذلولی و یا سهمی میباشند .

حالت اول: اگر $a=c$ و $b=0$ باشد یعنی اگر ضریب x^2 و y^2 برابر بوده وجمله xy نداشته باشد شکل **دایره** است

حالت دوم: اگر $b^2-4ac>0$ باشد شکل **هذلولی** است.

حالت سوم: اگر $b^2-4ac<0$ باشد شکل **بیضی** است.

حالت چهارم: اگر $b^2-4ac=0$ باشد شکل **سهمی** است.

قاعده: برای رسم این نوع توابع معادله داده شده را برحسب y مرتب می‌نمائیم وسپس y را برحسب x طبق فرمول محاسبه ریشه‌های معادله درجه دوم بدست می‌آوریم وسپس منحنی تابع اصم بدست آمده را رسم می‌نمائیم .

۱۳۷۳ ـ جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع $y^2+xy-1=0$ را رسم کنید.

شهریور ۳۶

حل: پس شکل هذلولی است $b^2-4ac=1-0=1>0$

چون $a>0$ است هذلولی است $y=\dfrac{-x\pm\sqrt{x^2+4}}{2}$

$$y'=\frac{-x-\sqrt{x^2+4}}{2\sqrt{x^2+4}}$$

مجانب مایل $y=-x$

افقی $y=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	0	↗	1	↗	$+\infty$

شکل درصفحه مقابل است .

۱۳۷۴ ـ جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع $y^2-x^2+x-1=0$ را رسم کنید.

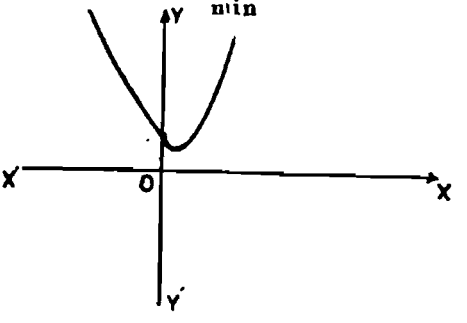
خرداد ماه ۳۷

حل: شکل هذلولی است $b^2-4ac=0+4=4>0$

$$y^2=x^2-x+1\to y=\pm\sqrt{x^2-x+1}$$

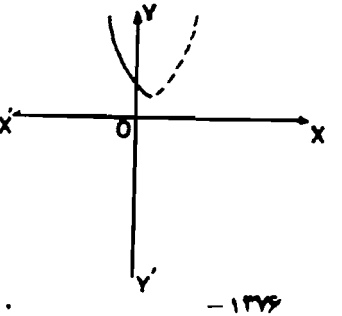
چون $a>0$ است شکل هذلولی است لطفاً خودتان رسم کنید و با شکل صفحه بعد مقایسه کنید :

x	$-\infty$		0		$0/5$		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y	$+\infty$	↘	1	↘	$0/5\sqrt{3}$ min	↗	1	↗	$+\infty$



۱۳۷۵ $x^2+2xy+y^2-2x-3y+2=0$

$b^2-4ac=0$ شکل سهمی است



x	$-\infty$		-1		0		1
y'		$-$		$-$			∞
y	$+\infty$	↘	5	↘	$2+\sqrt{3}$	↘	1

۱۳۷۶ - $3x^2-4xy+y^2+3x-2y+3=0$

$b^2-4ac=16-12=4>0$ هذلولی است

x	$-\infty$		-2		$0/5(1-2\sqrt{3})$		1		$+\infty$
y'	$+$		0	$+$	∞	∞		$+$	
y	$-\infty$	↗	-3	↗	$-1/5\sqrt{2}\ 3$			↗	$+\infty$

تعیین ماکزیمم و می‌نیمم بدون استفاده از مشتق

قاعده ۱۵۹ — برای تعیین ماکزیمم و می‌نیمم یك تابع بدون استفاده از مشتق راه‌حل اینست که ابتداء طرفین وسطین می‌نمائیم (اگر تابع کسری باشد) وسپس تمام جملات را بیك طرف آورده و برحسب x خلاصه و مرتب می‌نمائیم وسپس شرط داشتن ریشه مضاعف را تحقیق می‌نمائیم یعنی اگر درجه دوم باشد دلتای آنرا مساوی صفر قرار می‌دهیم و اگر درجه سوم باشد طبق قواعد معادله درجه سوم که در صفحه (۳۸۱) ذکر شده است شرط داشتن ریشه مضاعف را تحقیق میکنیم.

۱۳۷۷ — بدون استفاده از مشتق مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم تابع $y=\frac{x^2-4x+1}{x}$ را بدست آورید.

حل:

$$y=\frac{x^2-4x+1}{x}\rightarrow x^2-4x+1=xy$$

$$x^2-(4+y)x+1=0\rightarrow\Delta=(4+y)^2-4=0$$

عرضهای نقاط ماکزیمم و می‌نیمم $y^2+8y+12=0\rightarrow y=-6$ و -2

۱۳۷۸ — اگر y' و y'' عرضهای نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع $y=\frac{x^2+x+1}{x-1}$ باشد حاصل عبارت $y'^2y''+y'y''^2$ را بدست آورید.

حل: پس از طرفین وسطین کردن و خلاصه نمودن نتیجه میشود:

$$x^2+(1-y)x+y+1=0 \quad \text{و} \quad \Delta=0\rightarrow y^2-6y-3=0$$

$$y'^2y''+y'y''^2=y'y''(y'+y'')=\frac{-cb}{a^2}=\frac{-\times-3\times-6}{1}=-18$$

۱۳۷۹ - تابع $y=\frac{x^2+x+a}{x+3}$ مفروض است a را چنان تعیین کنید که یکی از مقادیر ماکزیمم یا می‌نیمم تابع برابر ۲ - باشد.

حل: پس از طرفین وسطین نتیجه میشود $x^2+(1-y)x+a-3y=0$

$$\Delta=0\rightarrow y^2-2y+1-4a+12y=0\rightarrow y^2+10y-4a+1=0$$

$$y=-2\rightarrow 4-20-4a+1=0\rightarrow a=-3/75$$

۱۳۸۰- تابع $y=\frac{x^2+3x+b}{2x+b}$ مفروض است b را چنان تعیین کنید که مجموع ماکزیمم و می‌نیمم تابع دو برابر حاصلضرب آنها باشد.

حل: پس از طرفین وسطین کردن و خلاصه کردن نتیجه می‌شود.

$$x^2+x(3-2y)-by+b=0$$

$$\Delta=0\Longrightarrow 2y^2-4y(3-b)+9-4b=0$$

$$y'+y''=2y'y''\rightarrow -\frac{b}{a}=\frac{2c}{a}\rightarrow -b=2c$$

$$4(3-b)=2(9-4b)\rightarrow b=1/5$$

۱۳۸۱- تابع $y=\frac{x^2+ax+b}{x-5}$ مفروض است a و b را چنان تعیین کنید که مقدار ماکزیمم تابع برابر ۱ و مقدار می‌نیمم تابع برابر ۹ باشد.

حل:

$$x^2+(a-y)x+b+5y=0$$

$$\Delta=0\rightarrow y^2-2(a+10)y+a^2-4b=0$$

$$y=1\rightarrow 1-2a-20+a^2-4b=0\rightarrow a^2-4b-2a=19$$

$$y=9\rightarrow 81-18a-180+a^2-4b=0\Longrightarrow a^2-4b-18a=99$$

$$\begin{cases}-a^2+4b+2a=-19\\ a^2-4b-18a=99\end{cases} \quad \text{از جمع دو رابطه} \quad \begin{matrix}-16a=80\\ a=-5\end{matrix}$$

$$a^2-4b-2a=19\rightarrow 25-4b+10=19\rightarrow b=4$$

۱۳۸۲ـ تابع $y=\frac{2x^2+ax+b}{2x-1}$ مفروض است a و b را چنان تعیین کنید که مجموع ماکزیمم و می‌نیمم تابع فوق برابر واحد بود و حاصلضرب آنها برابر ۲ ـ باشد.

حل: پس از طرفین وسطین کردن و خلاصه نمودن نتیجه می‌شود.

$$2x^2+(a-2y)x+b+y=0$$
$$\Delta=(a-2y)^2-8(b+y)=4y^2-4(a+2)y+a^2-8b$$
$$\Delta=0\to 4y^2-4(a+2)y+a^2-8b=0$$
$$y'+y''=1\to\frac{-b}{a}=1\to -b=a\to 4(a+2)=4\to a=-1$$
$$y'y''=-2\to\frac{c}{a}=-2\to\frac{a^2-8b}{4}=-2\to 1-8b=-8\to b=\frac{9}{8}$$

۱۳۸۳ـ تابع $y=\frac{x^2+ax-3}{x^2-2x+b}$ مفروض است a و b را چنان تعیین کنید که ماین عرضهای نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع فوق روابط $y'^2y''+y'y''^2=-2$ و $y'+y''=1$ برقرار باشد.

$$\begin{cases} y'^2y''+y'y''^2=-2\to y'y''(y'+y'')=-2 \\ y'+y''=1=S \quad \text{و} \quad y'y''(1)=-2\to y'y''=-2=P \end{cases}$$
$$X^2-SX+P=0\to X^2-X-2=0\to X=2 \quad \text{و} \quad -1\to y'=2 \quad \text{و}$$
$$y''=-1$$

از طرفین وسطین کردن و خلاصه کردن نتیجه می‌شود:

$$(y-1)x^2-(2y+a)x+by+3=0$$
$$\Delta=(2y+a)^2-4(y-1)(by+3)=0$$
$$y=-1\to(-2+a)^2-0=0\to a=2$$
$$y=2\to(4+2)^2-4(2-1)(2b+3)=0$$
$$36-8b-12=0\to -8b=-24\to b=3$$

۱۳۸۴ـ ثابت کنید که تابع $2x^2+ayx-1=0$ دارای ماکزیمم یا می‌نیمم نیست.

چون مبین همیشه مثبت است پس تابع $\Delta=0$ دارای ماکزیمم یا می‌نیمم نیست. $\Delta=a^2y^2+12>0$

۱۳۸۵ـ بازاء چه‌مقادیری از a تابع‌زیردارای ماکزیمم یامی‌نیمم‌نیست.

$$ax^2-xy+3x+2=0$$

$$ax^2-(y-3)x+2=0$$

$$\Delta=0\rightarrow y^2+9-6y-8a=0\rightarrow y^2-6y-8a+9=0$$

بازاء مقادیری از a که مبین‌معادلهٔ فوق‌را منفی‌می‌کنند تابع دارای ماکزیمم یا می‌نیمم‌نیست .

$$\Delta'=9+8a-9=8a<0\rightarrow a<0$$

۱۳۸۶ـ رابطه‌ای مستقل از a مابین عرضهای‌نقاط‌ماکزیمم و می‌نیمم تابع زیر بدست‌آورید.

$$y=\frac{x^2-ax+2}{x+a}$$

حل:

$$x^2-x(a+y)-ay+2=0$$

$$\Delta=y^2+6ay+a^2-8=0$$

$$\begin{cases} y'+y''=-6a & (1) \\ y'\times y''=a^2-8 & (2) \end{cases}$$

ازرابطه(۱) a را بدست‌آورده دررابطه(۲) میگذاریم.

$$a=\frac{y'+y''}{-6} \quad و \quad y'y''=\frac{y'^2+y''^2+2y'y''}{36}-8$$

۱۳۸۷ـ تابع $y=\frac{-2ax^2+3ax-1}{4x-3}$ مفروض‌است‌a را چنان‌تعیین‌کنید که رابطه $8y'+4y''=1$ بین‌عرضهای‌نقاط ماکزیمم ومی‌نیمم‌تابع‌وجودداشته‌باشد.

$$-2ax^2+3ax-1-4xy+3y=0$$

$$-2ax^2-x(4y-2a)+3y-1=0$$

$$\Delta=0\rightarrow 16y^2+9a^2-24ay+24ay-8a=0$$

$$16y^2+9a^2-8a=0 \Longrightarrow y'+y''=0$$

$$8y'+4y''-1\rightarrow 4(y'+y'+y'')=1$$

$$4(y'+0)=1\rightarrow y'=\frac{1}{4}$$

اگر این‌مقداررا دررابطه(۱) قراردهیم نتیجه‌می‌شود :

$$9a^2-8a+1=0\rightarrow a=\frac{4\pm\sqrt{7}}{9}$$

درهریك ازتوابع زیرمقادیر a و b راچنان تعیین کنید که روابط روبروی آنها بین مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم آنها موجود باشد.

-۱۳۸۸ $\begin{cases} y'+y''=۲ \\ y'y''=۱۳ \end{cases}$ $\quad y=\dfrac{ax^۲+bx+۱}{x+۲}$

جواب : $a=-۱$ و $b=-۳$ و $b=۴$ و $-۳\div۴$

-۱۳۸۹ $y'=\dfrac{۱}{y''}$ $\quad y=\dfrac{x^۲+ax+۲}{x^۲+۲x-۳}$

جواب: $a=\pm۲\sqrt{۶}$

-۱۳۹۰ $y'+y''-y'y''=-۱$ $\quad y=\dfrac{۲x^۲-۳ax-۱}{x^۲-a}$

جواب: $a=۶$

-۱۳۹۱ $۴y'+y''=\dfrac{۱}{۳}$ $\quad y=\dfrac{۲ax^۲-۳ax+۱}{۴x+۳}$

جواب: $a=۴\div۹$

-۱۳۹۲ $۲y'y''+y'+y''=-۲$ $\quad y=\dfrac{ax-۱}{x^۲+ax+۱}$

جواب: $a=\pm\dfrac{\sqrt{۶}}{۳}$

-۱۳۹۳ $y'^۳+y''^۳=۵$ $\quad y=\dfrac{ax^۲+x-۲}{۲x}$

جواب: $a=-(۱۹\div۲۴)$

-۱۳۹۴ $۲y'y''+y'+y''=-۴$ $\quad y=\dfrac{ax^۲+۳x-۱}{x-۵}$

جواب: $a=-۱$

۱۳۹۵ - تابع $y=\dfrac{x^۲-x}{x^۲-x-۲}$ مفروض است، بدون استفاده از مشتق تحقیق کنید که تابع فوق فقط یك ماکزیمم و یا یك می‌نیمم دارد و این مقدار را حساب کنید. **خرداد ۴۰**

ماکزیمم یا می‌نیمم ($\frac{۱}{۹}$ و $\frac{۱}{۲}$)

۱۳۹۶ - تابع $y=\dfrac{۹(۱-x)}{x^۳}$ مفروض است . بدون استفاده از مشتق ، مختصات نقطه

ماکزیمم یا می‌نیمم منحنی‌را تعیین کنید. **خرداد ۳۶**

$y = -\frac{۴}{۳}$ عرض نقطه $\rightarrow$ $x = \frac{۳}{۲}$

۱۲۹۷ - تابع $y = \frac{x + ۲m}{x^۲ - mx - ۲}$ مفروض‌است. بدون‌استفاده‌ازمشتق‌ثابت کنید که‌ماکزیمم‌ومی‌نیمم این‌تابع بفرض‌آنکه موجود باشد متحدالعلامه‌اند. mرا آنطور بیابید که ماکزیمم تابع۹ برابر می‌نیمم‌آن‌باشد. **خرداد۳۴**

جواب: چون $\frac{۱}{a} > ۰$ یعنی $\frac{۱}{۸ + m^۲}$ پس‌متحدالعلامه‌اند و $m = \pm ۱$

۱۳۹۸ تابع $y = \frac{x^۲ - ۲mx + ۱}{x - ۲m}$ مفروض‌است. mرا طوری‌تعیین کنیدتافقط یکی ازدومقدارماکزیمم‌ومی‌نیمم تابع‌صفرشود ومقداردیگری را حساب کنید، خواهیددید برایm دومقدار بدست‌می‌آید تحقیق کنیدبازاء هریك ازاین‌دومقدارکدام‌یك از دو مقدار ماکزیمم ومی‌نیمم صفرمی‌شود. **اردیبهشت ۴۱**

$m = \pm ۱$

$m = ۱ \rightarrow y = ۰$ و اگر $m = -۱ \rightarrow y = ۰$ و -۴

۱۳۹۹ - تابع $y = \frac{ax + b}{(x - ۲)^۲}$ مفروض‌است، aو b را حساب کنیدبطریقی که‌خط $۲y - ۲x = ۱$ درنقطه واقع‌درروی‌محور yy' بامنحنی نمایش‌تابع مماس باشد ، بدون استفاده ازمشتق‌مقادیرماکزیمم ومی‌نیمم تابع‌را حساب‌کنید. **خرداد ۴۵**

$b = ۲$ و $a = ۲$ و $y = -\frac{۱}{۶}$

۱۴۰۰ - تابع $y = \frac{x - ۲a}{x^۲ - a}$ مفروض‌است، aرا آنطوربیابیدکه‌طول‌های‌نقاط‌ماکزیمم و می‌نیمم منحنی‌تابع‌عکس یکدیگر باشند وتحقیق‌کنیدکه بازاء جمیع‌مقادیر a حاصل‌جمع مقادیرماکزیمم‌ومی‌نیمم‌تابع‌مقداریست‌ثابت این‌مقدارثابت‌را بدست‌آورید. **شهریور۳۴**

$a = ۱$ و $y_۱ + y_۲ = \frac{۸a}{۴a} = ۲$ مقدارثابت

۱۴۰۱ - تابع $y^۲ - ۲y(x + ۲) + (a - ۱)x^۲ + ۴x = ۰$ مفروض‌است، a را چنان‌تعیین کنیدکه‌عرض نقطهٔ ماکزیمم منحنی‌تابع‌فوق$۲ + ۲\sqrt{۲}$ باشد. **خرداد ۳۶**

جواب: $a = -1$

۱۴۰۲ — تابع $y = \frac{x^2+4ax+12}{x^2-ax-3}$ مفروض است. بدون استفاده از مشتق ثابت کنید که بازاء جمیع مقادیر a یکی از مقدار ماکزیمم یا می‌نیمم تابع مقدار ثابت است. و مقادیر a را حساب کنید بطریقی که مقدار دیگر ماکزیمم یا می‌نیمم تابع برابر $\frac{-1}{4}$ باشد **شهریور ۴۵**

مقدار ثابت $y = -4$

$a = \pm 2$

۱۴۰۳ — $x^2 - 2x - y^2 = 0$ که منحنی تغییرات آنرا (c_2) می‌نامیم مفروض است. بدون استفاده از مشتق ثابت کنید که منحنی (c_2) دارای نقطه ماکزیمم یا می‌نیمم نیست.

شهریور ۴۷

$x^2 - 2x - y^2 = 0 \rightarrow \Delta' = 1 + y^2 > 0$

چون مبین بزرگتر از صفر است پس تابع دارای ماکزیمم و می‌نیمم نیست.

۱۴۰۴ — $y = \frac{ax^2-5x+a}{3x^2-5ax+3}$ مفروض است، مختصات ماکزیمم و می‌نیمم تابع فوق را پیدا کنید. خواهید دید که طول این نقاط بستگی به a ندارد. سپس پارامتر a را بطریقی تعیین کنید که مقدار ماکزیمم یا می‌نیمم تابع فوق برابر $\frac{1}{4}$ شود. **شهریور ۴۷**

$(-1 \text{ و } \frac{2a+5}{5a+6})$ و $(1 \text{ و } \frac{2a-5}{6-5a})$

$a = -\frac{14}{3}$ و 2

چند قاعده برای پیدا کردن a و b و c

قاعده ۱۶۰	مشتق بازاء طول نقطه ماکزیمم یا می‌نیمم منحنی برابر صفر است یعنی اگر درمشتق بجای x طول نقطه ماکزیمم یامی‌نیمم را قراردهیم بجای y' هم صفرقراردهیم
قاعده ۱۶۱	مختصات نقطه‌ماکزیمم یا می‌نیمم درمعادله منحنی صدقمی‌کند.

۱۴۰۵ – تابع $y=x^3+ax+b$ مفروض‌است a و b را چنان تعیین کنید که تابع بازاء $x=-1$ دارای ماکزیممی برابر ۴ – باشد.

حل: نقطه $A(-1,-4)$ نقطه‌ماکزیمم منحنی است.

$y=x^3+ax+b$ و $y'=3x^2+a$

$$\begin{cases} 0=3(-1)^2+a\rightarrow a=-3 & \text{مشتق} \\ -4=(-1)^3+(-3)(-1)+b\rightarrow b=-6 & \text{تابع} \end{cases}$$

۱۴۰۶ – تابع $y=-x^3+ax^2+bx$ مفروض‌است a و b را چنان‌تعیین کنید که تابع‌دارای می‌نیممی بطول ۱ – روی‌خط $y-3x=2$ باشد.

$x=-1\rightarrow y-2(-1)=2\rightarrow y=-1\rightarrow \min(-1,-1)$

$y'=-3x^2+2ax+b$

$$\begin{cases} 0=-3(-1)^2+2a(-1)+b & \text{مشتق} \\ -1=-(-1)^3+a(-1)^2+b(-1) & \text{تابع} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2a+b=3 \\ a-b=-2 \end{cases}$$

$b=1$ و $a=-1$ ← ازجمع‌دورابطه

۱۴۰۷ — تابع $y=x^2+2x+b$ مفروض‌است b را چنان‌تعیین کنید که منحنی دارای ماکزیمی برابر ۳ باشد.

حل: $y'=2x+2$ و $y'=0 \rightarrow x=-2$

نقطه max $A(-2,3) \rightarrow 3=4-8+b \rightarrow b=7$

۱۴۰۸ — تابع $y=-x^3+ax^2+bx$ مفروض‌است a وb را چنان‌تعیین کنید که تابع بازاء $x=-1$ ماکزیمم وبازاء $x=2$ می‌نیمم باشد.

حل: $y'=-3x^2+2ax+b$

مشتق $0=-3(-1)^2+2a(-1)+b \rightarrow b-2a=3$

مشتق $0=-3(2)^2+2a(2)+b \rightarrow b+4a=12$

ازحل‌دومعادله بالانتیجه‌میشود $a=1/5$ و $b=6$

قاعده ۱۶۲	مشتق‌ثانی بازاء طول نقطه عطف‌منحنی‌برابر صفراست یعنی‌اگر درمشتق‌ثانی بجای x طول نقطه‌عطف‌منحنی‌را قراردهیم بجای y″ هم‌صفرقرارمیدهیم.
قاعده ۱۶۳	مختصات‌نقطه عطف‌منحنی درمعادله‌منحنی صدق میکند.

۱۴۰۹ - تابع $y=-x^3+ax^2+bx$ مفروض‌است a وb را چنان‌تعیین کنید که طول نقطه‌عطف‌منحنی‌برابر ۱ — بوده وتابع‌بازاء $x=1$ دارای‌ماکزیمم یامی‌نیمم‌باشد

حل: $y'=-3x^2+2ax+b$ و $y''=-6x+2a$

مشتق‌ثانی $\rightarrow 0=-6(-1)+2a \rightarrow a=-3$

مشتق $\rightarrow 0=-3(1)^2+2(-3)(1)+b \rightarrow b=9$

۱۴۱۰ — تابع $y=x^3+ax^2+bx$ مفروض‌است a وb را چنان‌تعیین کنید که نقطه عطف‌منحنی روی خط $2y+x=4$ وبعرض واحدباشد.

حل: $y=1 \rightarrow 2(1)+x=4 \rightarrow x=2 \rightarrow$ نقطه‌عطف $I(2,1)$

$y'=3x^2+2ax+b$ و $y''=6x+2a$

مشتق‌ثانی $\rightarrow 0=6(2)+2a \rightarrow a=-6$

تابع $\Rightarrow 1=(2)^3-6(2)^2+b(2) \Rightarrow b=8/5$

۱۴۱۱ - تابع $y=x^3+3x^2+ax$ مفروض‌است a را چنان تعیین کنید که عرض نقطه‌عطف‌منحنی برابر ۲ باشد.

حل: ابتداء ازروی مشتق‌ثانی طول‌نقطه‌عطف‌را حسابی کنیم.

وسپس مختصات نقطه عطف را درمعادله منحنی قرار میدهیم.

$y'=3x^2+6x+a$ و $y''=6x+6$

$y''=0\to 6x+6=0\to x=-1$ و $I(-1,2)$ نقطه عطف

تابع $\to 4=(-1)^3+3(-1)^2+a(-1)\to a=-2$

۱۴۱۲ – تابع $y=x^3+bx^2+ax+3$ مفروض است a و b را چنان تعیین کنید که تابع بازاء $x=-2$ ماکزیمم و بازاء $x=2$ می‌نیمم باشد. ج: $a=-12$ و $b=0$

$y'=3x^2+2bx+a\to x_{max}=-2$ و $x_{min}=2$

$$\begin{cases}0=3(-2)^2+2b(-2)+a & \text{مشتق}\\ 0=3(2)^2+2b(2)+a & \text{مشتق}\end{cases}\to\begin{cases}a-4b=-12\\ a+4b=-12\end{cases}$$

$a+4b=-12\to -12+4b=-12\to b=0$ از جمع دو رابطه $2a=-24\to a=-12$

۱۴۱۳ – تابع $y=x^3+ax^2+bx+2$ مفروض است a و b را چنان تعیین کنید که تابع بازای $x=1$ دارای می‌نیمی برابر صفر باشد.

حل: $A_{min}(1,0)$ و $y'=3x^2+2ax+b$

$$\begin{cases}0=1+a+b+2 & \text{تابع}\\ 0=3+2a+b & \text{مشتق}\end{cases}\to\begin{cases}a+b=-3\\ 2a+b=-3\end{cases}\to\begin{cases}a=0\\ b=-3\end{cases}$$

۱۴۱۴ – تابع $y=-x^3+ax^2+bx$ مفروض است. اولاً a و b را طوری تعیین کنید که تابع بازاء $x=-3$ صفر شده و نقطه ماکزیمم منحنی تابع روی مبدا مختصات باشد.

حل: $O_{max}(0,0)$ و $A(-3,0)$ و $y=-x^3+ax^2+bx$

$y'=-3x^2+2ax+b$

$$\begin{cases}0=27+9a-3b & \text{تابع}\\ 0=0+0+b\to b=0 & \text{مشتق}\end{cases}\to\begin{cases}0=27+9a-0\\ a=-3\end{cases}$$

۱۴۱۵ – تابع $y=x^3+ax^2+b$ مفروض است ضرایب را چنان تعیین کنید که نقطه $K(-2,-7)$ نقطه عطف منحنی باشد.

حل: $y'=3x^2+2ax\to y''=6x+2a$

$$\begin{cases}-7=-8+4a+b\to 4a+b=1 & \text{تابع}\\ 0=-12+2a\to a=6 & \text{مشتق ثانی}\end{cases}\to\begin{cases}4a+b=1\\ 24+b=1\to b=-23\end{cases}$$

۱۴۱۶ – تابع $y=x^3+ax^2+b$ مفروض است ضرایب را چنان تعیین کنید که منحنی

از نقطه $A(-1,-3)$ گذشته و طول نقطه عطف منحنی برابر ۱ باشد.

حل: $y'=3x^2+2ax \to y''=6x+2a$

تابع $\begin{cases} -3=-1+a+b \to a+b=-2 \\ \text{مشتق ثانی} \quad 0=6+2a \to a=-3 \end{cases}$

$a+b=-2$
$-3+b=-2$
$b=1$

۱۴۱۷ - تابع $y=x^3+ax^2+b$ مفروض است ضرایب را چنان تعیین کنید که طول نقطه عطف منحنی برابر ۲ بوده و منحنی خط $2y-3x=5$ را در نقطه‌ای بطول ۱ قطع نماید.

$y'=3x^2+2ax \to y''=6x+2a$

$2y-3x=5 \to 2y-3=5 \to 2y=8 \to y=4$ پس $A(1,4)$

مشتق ثانی $\to 0=12+2a \to a=-6$

تابع $\to 4=1+a+b \to a+b=3 \to b=9$

قاعده ۱۶۴ مشتق بازاء طول نقطه تماس برابر با ضریب زاویه خط مماس است یعنی اگر در مشتق بجای x طول نقطه تماس را قرار دهیم بجای y هم ضریب زاویه خط مماس بر منحنی را قرار میدهیم.

قاعده ۱۶۵ مشتق بازاء مختصات نقطه تماس برابر ضریب زاویه خط مماس است یعنی اگر در مشتق بجای x و y مختصات نقطه تماس را قرار دهیم بجای y هم ضریب زاویه خط مماس را قرار میدهیم (این قاعده در دایره و بیضی و هذلولی و سهمی قابل استفاده است)

۱۴۱۸ - تابع $y=-2x^3+ax+b$ مفروض است b و a را چنان تعیین کنید که ضریب زاویه خط مماس بر منحنی در نقطه‌ای بطول ۲ برابر ۳ بوده و منحنی نیمساز ناحیه اول را در نقطه‌ای بطول ۲ قطع نماید.

حل: $y=x=2$ و $x=2$ تماس و $m=3$ مماس

$y'=-6x^2+a$

تابع $\begin{cases} 2=-16+2a+b \to 2a+b=18 \to b=-36 \\ \text{مشتق} \quad 3=-24+a \to a=27 \end{cases}$

۱۴۱۹ - تابع $y=-2x^3+ax+b$ مفروض است b و a را چنان تعیین کنید که منحنی از مبداء مختصات گذشته و ضریب زاویه خط مماس بر منحنی در نقطه‌ای بطول ۲- برابر ۷ باشد.

$y'=-6x^2+a$ و $m=7$ مماس و $x=-2$ (تماس) و $O(0,0)$

$$\begin{cases} \text{تابع} & 0=0+0+b \rightarrow b=0 \\ \text{مشتق} & 7=-24+a \rightarrow a=31 \end{cases}$$

۱۴۲۰- تابع $y=x^3+ax^2+b$ مفروض است a و b را طوری تعیین کنید که منحنی ازمبداء مختصات گذشته ومماس برمنحنی درنقطه‌ای بطول یك واقع برآن موازی نیمساز ربع اول باشد.

$m=1$ مماس و $x=1$ تماس و $O(0,0)$ و $y=x^3+ax^2+b$

$$y'=3x^2+2ax$$

$$\begin{cases} \text{تابع} & 0=0+0+b \rightarrow b=0 \\ \text{مشتق} & 1=3+2a \rightarrow a=-1 \end{cases}$$

۱۴۲۱ - تابع $y=-2x^3+ax+b$ مفروض است a و b را چنان تعیین کنید که منحنی محور طول‌ها را در نقطه‌ای بطول ۲ — قطع نموده و خط مماس بر منحنی در این نقطه موازی خط $y+3x=7$ باشد.

حل: $A(-2,0) \rightarrow y+3x=7 \rightarrow m_1=-3$

مماس $m=m_1=-3$ و $y=-2x^3+ax+b \rightarrow y'=-6x^2+a$

$$\begin{cases} \text{تابع} & 0=16-2a+b \rightarrow b-2a=-16 \rightarrow b=26 \\ \text{مشتق} & -3=-24+a \rightarrow a=21 \end{cases}$$

۱۴۲۲- تابع $y=x^3+ax^2+b$ مفروض است ضرایب a و b چنان تعیین کنید که منحنی در نقطه A بطول ۱ بر خط $y=2x-1$ مماس باشد.

$y=2x-1 \rightarrow m_1=2 \rightarrow$ مماس $m=m_1=2$

$x_A=1 \rightarrow y=2x-1$ پس $y_A=2-1=1$ پس $A(1,1)$

$$y=x^3+ax^2+b \rightarrow y''=3x^2+2ax$$

$$\begin{cases} \text{تابع} & 1=1+a+b \rightarrow a+b=0 \rightarrow b=0/5 \\ \text{مشتق} & 2=3+2a \rightarrow a=-0/5 \end{cases}$$

۱۴۲۳- تابع $y=-2x^3+ax+b$ مفروض است a و b را چنان تعیین کنید که نقطه ماکزیمم یا می‌نیمم منحنی روی محل تلاقی خط $2y+x=2$ با نیمساز ناحیه دوم باشد.

حل: معادله نیمساز ناحیه دوم $x=-y$

$x=-y$ و $2y+x=2 \rightarrow 2y-y=2 \rightarrow y=2 \rightarrow x=-2$

جواب: $a=24$ و $b=32$ و $A(-2,2)$ نقطه max یا min

۱۴۲۴ – تابع $y=-x^3+ax^2+b$ مفروض است مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که منحنی نمایش تغییرات تابع مفروض بر خط $y=4$ در نقطه‌ای بطول ۲ مماس شود (۲ نمره)

حل: $A(2,4)$ نقطه تماس و $y=-x^3+ax^2+b$

$y'=-3x^2+2ax$ و $m=$ خط $m=0$ مماس

$$\begin{cases} 4=-8+4a+b \\ 0=-12+4a \end{cases} \text{تابع} \qquad \begin{cases} b=0 \\ a=3 \end{cases}$$

مشتق

۱۴۲۵ – تابع $y=-2x^3+ax+b$ مفروض است a و b را چنان تعیین کنید که نقطه ماکزیمم یا مینیمم روی محور عرضها بوده و عرض آن برابر ۱ – باشد.

جواب $b=-1$ و $a=0$ نقطه Max یا Min $A(0,-1)$

۱۴۲۶ – تابع $y=x^3+ax^2+b$ مفروض است حضرا بیدا چنان تعیین کنید که منحنی فوق منحنی $y=\frac{2x-1}{x-2}$ را در نقطه‌ای بعرض ۱ قطع نموده و خط مماس بر منحنی در این نقطه بر خط $2x+4y=5$ عمود باشد.

$$y_A=1\rightarrow y=\frac{2x-1}{x-2}\rightarrow 1=\frac{2x-1}{x-2}$$

$2x-1=x-2\rightarrow x=-1$ نقطه تماس $A(-1,1)$

$$m_{\text{خط}}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}\rightarrow \text{مماس } m\times m_{\text{خط}}=-1\rightarrow m\times -\frac{1}{2}=-1$$

$m=2$ و $y=x^3+ax^2+b$ و $y'=3x^2+2ax$ مماس

$$\begin{cases} 1=-1+a+b\rightarrow a+b=2\rightarrow b=1/5 \\ 2=3-2a\rightarrow 2a=1\rightarrow a=0/5 \end{cases} \text{تابع} \quad \text{مشتق}$$

۱۴۲۷ – تابع $y=-2x^3+ax+b$ مفروض است a و b را چنان تعیین کنید که منحنی بازاء $x=1$ دارای ماکزیمم یا مینیمی برابر ۳ – باشد.

حل: $y'=-6x^2+a$ و $A_{max}(1,-3)$

$$\begin{cases} -3=-2+a+b\rightarrow a+b=-1 \\ 0=-6+a\rightarrow a=6 \end{cases} \text{تابع} \quad \text{مشتق} \qquad \begin{cases} a+b=-1 \\ 6+b=-1 \\ b=-7 \end{cases}$$

تذکر: لطفاً بقاعده‌های ۱۶۰ و ۱۶۱ مراجعه کنید و آنرا دوباره مطالعه فرمائید.

۱۴۲۸ – دایره C بمعادله $x^2+y^2+ax+by=-4$ مفروض است a و b را چنان تعیین کنید که دایره از نقطه A(۱و۲) بگذرد و خط مماس بر دایره در این نقطه موازی خطی باشد که دو نقطه B(۳و۲) و C(۵و۴) را بهم وصل می‌کند.

حل: $m_{\text{مماس}}=m_{BC}=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}=\frac{4-2}{5-3}=1$

$$2x+2yy'+a+by'=0\rightarrow 2\times1+2\times2\times1\times a+b\times1=0$$

$$a+b=-6$$

$$x^2+y^2+ax+by=-4\rightarrow 1+4+a+2b=-4\rightarrow a+2b=-9$$

$$\begin{cases}a+b=-6\\a+2b=-9\end{cases}\xrightarrow[1]{\text{از تفریق دو رابطه}}\begin{cases}a=-3\\b=-3\end{cases}$$

۱۴۲۹ – بیضی بمعادله $x^2+4y^2+ax+by=-3$ مفروض است a و b را چنان تعیین کنید که بیضی از نقطه A(−۱و−۲) بگذرد و خط مماس بر بیضی در این نقطه موازی نیمساز ناحیه دوم باشد.

حل:

$$2x+8yy'+a+by'=0$$

$$-2-16(-1)+a+b(-1)=0\Longrightarrow a-b=-14$$

مختصات A در بیضی $\rightarrow 1+16-a-2b=-3$

$$a+2b=20\rightarrow\begin{cases}a-b=-14\\a+2b=20\end{cases}\xrightarrow{\text{از حل دستگاه}}\begin{cases}a=\frac{-8}{3}\\b=\frac{34}{3}\end{cases}$$

۱۴۳۰ – هذلولی بمعادله $4y^2-2x^2+8y+ax+b=85$ مفروض است a و b را چنان تعیین کنید که هذلولی از نقطه A(۳و۴) بگذرد و خط مماس بر هذلولی در این نقطه بر خط $y+4x=5$ عمود باشد.

$$m_{\text{خط}}\times m_{\text{مماس}}=-1\rightarrow -4\times m_{\text{مماس}}=-1\rightarrow m_{\text{مماس}}=\frac{1}{4}$$

$$8yy'-4x+8y'+a+0=0\rightarrow 32y'-12+8y'+a=0$$

$$40y'=12-a\quad\rightarrow\quad y'=\frac{12-a}{40}\rightarrow y'=m=\frac{1}{4}\rightarrow\frac{12-a}{40}=\frac{1}{4}$$

$۲۸-۲a=۴۰ \to -۲a=-۸ \to a=۲$

مختصات A در هذلولی $\to ۲(۴)^۲-۲(۳)^۲+۸(۴)+۲(۳)+b=۸۵$

$۶۴-۱۸+۳۲+۶+b=۸۵ \to ۸۴+b=۸۵ \to b=۱$

۱۴۳۱ - تابع $y=x^۳+ax^۲+bx+c$ مفروض است ضرایب a چنان تعیین کنید که منحنی نمایش این منحنی در نقطه‌ای بطول ۱ روی محور طولها می‌نیم داشته باشد و در نقطه‌ای بعرض ۱ محور عرضها را قطع کند.

A می‌نیم $(۱ \text{ و } ۰)$ و $B(۰ \text{ و } ۱)$

$y=x^۳+ax^۲+bx+c$ و $y'=۳x^۲+۲ax+b$

$$\begin{cases} ۱=۰+۰+۰+c \to c=۱ & \text{در تابع } B \\ ۰=۱+a+b+c \to a+b=-۲ & \text{در تابع } A \\ ۰=۳+۲a+b \to b+۲a=-۳ & \text{در مشتق } A \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=-۲ \\ ۲a+b=-۳ \end{cases} \xrightarrow[\text{دو رابطه}]{\text{از تفریق}} \begin{cases} a=-۱ \\ b=-۱ \text{ و } c=۱ \end{cases}$$

۱۴۳۲ - تابع $y=ax^۳+bx^۲+cx+d$ مفروض است ضرایب a چنان تعیین کنید که تابع بازاء $x=-۱$ دارای ماکزیمی برابر ۸ و بازاء $x=۱$ دارای می‌نیمی برابر ۴ باشد.

$A_{Max}(-۱ \text{ و } ۸)$ و $B_{Min}(۱ \text{ و } ۴)$

$y'=۳ax^۲+۲bx+c$

$$\begin{cases} ۸=-a+b-c+d & \text{در تابع } A \\ ۴=a+b+c+d & \text{در تابع } B \\ ۰=۳a-۲b+c & \text{در مشتق } A \\ ۰=۳a+۲b+c & \text{در مشتق } B \end{cases} \to \begin{cases} a+c=-۲ & \text{از تفریق دو رابطه} \\ b+d=۶ & \text{از جمع دو رابطه} \\ b=۰ & \text{از تفریق دو رابطه} \\ ۳a+c=۰ \end{cases}$$

$$-\begin{cases} a+c=-۲ \\ ۳a+c=۰ \end{cases} \to \begin{cases} -a-c=۲ \\ ۳a+c=۰ \end{cases} \xrightarrow[\text{دو رابطه}]{\text{از جمع}} \begin{cases} a=۱ \\ c=-۳ \text{ و } d=۶ \end{cases}$$

۱۴۳۳ - تابع $y=ax^۳+bx^۲+cx+d$ مفروض است ضرایب a طوری تعیین کنید که نقطه $K(۰ \text{ و } ۶)$ نقطه عطف منحنی بوده و ضریب زاویه خط مماس بر منحنی در نقطه عطف برابر ۳- باشد و منحنی از نقطه $A(-۲ \text{ و } ۴)$ بگذرد.

تذکر: اگر نقطه عطف نقطه تماس هم باشد برای تعیین a و b و c هم از مشتق ثانی و هم از مشتق و هم از تابع استفاده می‌کنیم.

$A(-2,3)$ و $K(0,6)$ و $x=0$ مماس و $m=-3$ مماس

$y'=3ax^2+2bx+c \to y''=6ax+2b$

$$\begin{cases} 6=0+0+0+d & K \text{ در تابع} \\ 3=-8a+4b-2c+d & A \text{ در تابع} \\ -3=0+0+c & K \text{ در مشتق} \\ 0=0+2b & K \text{ در مشتق ثانی} \end{cases} \quad \begin{cases} d=6 \\ a=1 \\ c=-3 \\ b=0 \end{cases}$$

۱۴۳۴ - تابع $y=x^3+ax^2+bx+c$ مفروض است مقادیر a و b و c را چنان تعیین کنید تا منحنی نمایش تغییرات تابع مفروض از مبدأ مختصات بگذرد و بر محور طولها در نقطه‌ای بطول ۲ مماس گردد (۲ نمره).

حل: $m=0$ مماس و $A(2,0)$ نقطه تماس و $O(0,0)$

$y'=3x^2+2ax+b$

$$\begin{cases} 0=0+0+0+c & O \text{ در تابع} \\ 0=8+4a+2b+c & A \text{ در تابع} \\ 0=12+4a+b & A \text{ در مشتق} \end{cases} \quad \begin{cases} c=0 \\ 4a+2b=-8 \\ 4a+b=-12 \end{cases} \xrightarrow[\text{دو رابطه}]{\text{از تفریق}} \begin{cases} a=-4 \\ b=4 \end{cases}$$

۱۴۳۵ - تابع $y=ax^3+bx^2+cx+d$ مفروض است خواص آن را طوری تعیین کنید که نقطه ماکزیمم تابع روی محور yy' واقع بود، و عرض آن ۴ باشد و نقطه می‌نیمم منحنی تابع روی محور xx' واقع بوده و طول آن برابر ۲ باشد.

جواب: $a=1$ و $b=-3$ و $c=0$ و $d=4$

۱۴۳۶ - تابع $y=ax^3+bx^2+cx+d$ مفروض است خواص آن را طوری تعیین کنید که نقطه $A(1,3)$ نقطه‌ای می‌نیمم منحنی بوده و خط مماس بر منحنی در نقطه‌ای بطول ۲ واقع بر منحنی عمود بر خط $x+9y=5$ باشد و نقطه عطف منحنی روی محور عرضها قرار گیرد.

حل: $A(1,3)$ و $x=2$ تماس و $m=9$ مماس و $x=0$ (نقطه عطف)

$y''=6ax+2b \to y''=0$

$$\begin{cases} 4=a+b+c+d & \text{تابع} \\ 9=12a+4b+c & \text{مشتق} \\ 0=3a+2b+c & \text{مشتق} \\ 0=0+2b \to b=0 & \text{مشتق ثانی} \end{cases} \to \begin{cases} a+c+d=4 \\ 12a+c=9 \\ 3a+c=0 \\ b=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12a+c=9 \\ 3a+c=0 \end{cases} \xrightarrow[\text{دو رابطه}]{\text{از تفریق}} \begin{cases} a=1 \\ c=-3 \end{cases}$$

$a+c+d=۴\to ۱-۳+d=۴\to d=۶$

۱۴۳۷ – تابع $y=ax^۳+bx^۲+cx+d$ مفروض است ضرایب را چنان تعیین کنید که منحنی از نقطه $A(-۱ و ۱۲)$ گذشته و نقطه $B(۱ و -۲)$ نقطه عطف منحنی بوده و ضریب زاویه مماس بر منحنی در نقطه عطف برابر ۳ – باشد.

جواب: $(a=-۱ و b=۳ و c=-۶ و d=۲)$

۱۴۳۸ – ک ۵۹ – ص ۱۱۸ – اولاً – جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{۱}{x^۲+x-۲}$ را رسم کنید ثانیاً – معادله مماس بر این منحنی را در نقطه به طول ۲ بدست آورید. ثالثاً – مختصات نقطه برخورد این مماس را (غیر از نقطه تماس) با منحنی حساب کنید. رابعاً – از نقطه $A(۱ و ۰)$ مماسی بر منحنی نمایش تغییرات تابع کشیده معادله مماس را پیدا کنید.

x	$-\infty$		-۲		$-۰/۵$		۰		۱		۲		$+\infty$
y'		$+$		$+$	۰		$-$			$-$			
y	۰	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	$\frac{-۴}{۹}$ max	↘	$\frac{-۱}{۲}$	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	$\frac{۱}{۴}$	↘	۰

ثانیاً – $x=۲\to y=\frac{۱}{۴}\to$ نقطه تماس $K(۲ و \frac{۱}{۴})$

$$y'=\frac{-۲x-۱}{(x^۲+x-۲)^۲} \quad و \quad m_k=\frac{-۵}{۱۶}$$

$$y-y_k=m_k(x-x_k) \to y=\frac{-۵}{۱۶}x+\frac{۷}{۸}$$

ثالثاً – معادله خط را با معادله منحنی حل می‌نمائیم $\frac{۱}{x^۲+x-۲}=\frac{-۵x}{۱۶}+\frac{۷}{۸}$

$$۵x^۳-۹x^۲-۲۴x+۴۴=۰\to(x-۲)^۲(۵x+۱۱)=۰$$

$$۵x+۱۱=۰ \to x=\frac{-۱۱}{۵} \quad و \quad y=\frac{۲۵}{۱۶}\to B(\frac{-۱۱}{۵} و \frac{۲۵}{۱۶})$$

رابعاً – فرض میکنیم طول نقطه تماس α باشد و سپس عرض نقطه تماس و ضریب زاویه خط مماس را برحسب α بدست آورده و معادله آنرا برحسب α مینویسیم و بمختصات نقطه A را در معادله این خط قرار میدهیم و α را حساب می‌کنیم.

نقطه تماس $p(\alpha \text{ و } \frac{1}{\alpha^2+\alpha-2})$ ، $m_p=\frac{-2\alpha-1}{(\alpha^2+\alpha-2)^2}$

$$y-\frac{1}{\alpha^2+\alpha-2}=\frac{-2\alpha-1}{(\alpha^2+\alpha-2)^2}(x-\alpha)$$

$$\cdot-\frac{1}{\alpha^2+\alpha-2}=\frac{(-2\alpha-1)(1-\alpha)}{(\alpha^2+\alpha-2)^2}$$

$$-\alpha^2-\alpha+2=2\alpha^2-2\alpha-1+\alpha \rightarrow 3\alpha^2-3=0 \rightarrow \alpha=\pm 1$$

معادله یک مماس $\begin{cases} x=1\rightarrow y=\infty\rightarrow x=1 \\ x=-1\rightarrow y=-0/5 \text{ و } m=0/25 \end{cases}$ و $x=\pm 1$ تماس

معادله مماس دیگر $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$

۱۴۳۹ - ک ۶۰ ص ۱۱۸ - اولا- مطلوبست رسم جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع

$$y=\frac{x(x^2-2)}{(x^2+1)^2}$$

ثانیاً- معادله مماس بر این منحنی را در نقاط برخورد آن با محور xها بنویسید.

ثالثاً- زاویه بین دو مماس بر منحنی در نقاطی واقع بر منحنی و به طول های ۱± را حساب کنید

حل: $y'=\frac{-x^2+9x^2-2}{(x^2+1)^2}$

$$y'=0\rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{9\pm\sqrt{23}}{2}}\neq\pm 3 \text{ و } \pm 0/5$$

x	$-\infty$		-3		$-\sqrt{2}$		$-0/5$		0		$0/5$		$\sqrt{2}$		3		$+\infty$
y'		$-$		0		$+$				$-$		0		$-$	0	$+$	0	$-$
y	0	↘	$-0/2$ min	↗	0	↗	$0/5$ max	↘	0	↘	$-0/5$	↘	0 min	↗	$0/2$	↘	0

ثانیاً- $y=0\rightarrow x(x^2-2)=0\rightarrow x=0$ و $\pm\sqrt{2}$

نقاط برخورد $A(0,0)$ و $B(\sqrt{2},0)$ و $C(-\sqrt{2},0)$

$$y'=\frac{-x^2+9x^2-2}{(x^2+1)^2} \text{ و } m_A=-2 \text{ و } m_{B,C}=\frac{4}{9}$$

معادله مماس در A $y-y_A=m_A(x-x_A)\rightarrow y=-2x$

معادله مماس در B و C $y = \frac{۳}{۹}(x \pm \sqrt{۲})$

ثالثاً ـ $x = ۱ \to m = \frac{-۱+۹-۲}{۳} = \frac{۳}{۲}$ و $x = -۱ \to m' = \frac{۳}{۲}$

$$tg\alpha = \pm \frac{m - m'}{۱ + mm'} = ۰ \to \alpha = ۰$$

۱۴۴۰ ـ تابع $y = \frac{۳x - ۲}{x^۲}$ مفروض است از مبدأ مختصات چند مماس می‌توان بر منحنی رسم کرد معادلات آنها را بنویسید (۲ نمره) جواب: $y = x$

۱۴۴۱ ـ ک ۶۱ ص ۱۱۹ اولاً ـ در تابع $y = ۱ + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^۲}$ مقدار a و b را طوری تعیین کنید که تابع بازای $x = \frac{۸}{۳}$ دارای ماکزیمی برابر $\frac{۲۵}{۱۶}$ شود. ثانیاً ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع $y = ۱ + \frac{۳}{x} - \frac{۴}{x^۲}$ را رسم کنید.

حل: میدانیم طول نقطه ماکزیمم مشتق را صفر میکند و مختصات نقطه ماکزیمم در معادله منحنی صدق میکند.

$$y' = \frac{-a}{x^۲} - \frac{۲b}{x^۳} = \frac{-ax - ۲b}{x^۳}$$

$$x = \frac{۸}{۳} \to y' = ۰ \to \frac{-۸a}{۳} - ۲b = ۰ \to \boxed{۴a + ۳b = ۰}$$

$$A \text{ در تابع } \to \frac{۲۵}{۱۶} = ۱ + \frac{۳a}{۸} + \frac{۹b}{۶۴} \to \boxed{۸a + ۳b = ۱۲}$$

$$\begin{cases} ۴a + ۳b = ۰ & a = ۳ \\ ۸a + ۳b = ۱۲ & b = -۴ \end{cases}$$

x	$-\infty$		-۴		۰		۱		$۸/۳$		$+\infty$
y'			$-$		∞	$+$		$+$	۰	$-$	
y	۱	↘	۰	↘	$-\infty$ | $-\infty$	↗	۰	↗	$۲۵/۱۶$ max	↘	۱

۱۴۴۲ ـ ک ۶۲ ص ۱۱۹ ـ تابع $y = \frac{x^۲ + ۲ax + b}{x^۲ + ۱}$ مفروض است. اولاً ـ a و b را بقسمی تعیین کنید که بازای $x = ۲$ مقدار تابع برابر صفر و بازاء $x = ۱$ مقدار تابع برابر ۲ شود. ثانیاً ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع را به‌ازای این مقادیر a و b رسم کنید. ثالثاً ـ مختصات نقاطی را بدست آورید که مماس بر منحنی در آن نقاط با محور xها موازی باشد.

حل: اولاً ـ راهنمائی مختصات نقاط A(۰ و ۲) و B(۱ و ۲) را در معادله منحنی قرار میدهیم

جواب: $a=-۳/۵$ و $b=۱۰$

ثانیاً ـ $y'=\frac{۷x^۲-۱۸x-۷}{(x^۲+۱)^۲}$ و $y=\frac{x^۲-۷x+۱۰}{x^۲+۱}$

x	$-\infty$		$-۰/۳$		۰		۲		۲/۹		۵		$+\infty$
y'		+	۰		−		−		۰		+		
y	۱	↗	۱۲	↘	۱۰	↘	۰	↘	$-۰/۳$	↗	۰	↗	۱
			max						min				

ثالثاً ـ $m=۰$ محور طولها = m مماس

پس اگر بجای y' صفر قرار دهیم طولهای نقاط تماس بدست می آید که همان نقاط ماکزیمم و مینیمم میباشد.

۱۴۴۳ – ۵ ص ۶۳ ص ۱۱۹ – در تابع $y=x^۲+\frac{۱}{x}+ax+b$ دو عدد a و b را چنان بگیرید که ماکزیمم تابع در ازای $x=-\frac{۱}{۲}$ برابر صفر باشد سپس جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع را بازای این مقادیر a و b رسم کنید.

حل: $y'=۲x-\frac{۱}{x^۲}+a$ و $\max(\frac{-۱}{۲}$ و $۰)$

$x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow y'=۰\Rightarrow ۰=-۱-۴+a\Rightarrow a=۵$

مختصات ماکزیمم در تابع $\Rightarrow ۰=\frac{+۱}{۴}-۲-\frac{۵}{۲}+b\Rightarrow b=\frac{۱۷}{۴}$

$y=x^۲+\frac{۱}{x}+۵x+\frac{۱۷}{۴}$ و $y'=۲x-\frac{۱}{x^۲}+۵$

معادله مجانب منحنی است $y=x^۲+۵x+۱۷\div ۴$

$y'=\frac{۲x^۳+۵x^۲-۱}{x^۲}\Rightarrow y'=۰\Rightarrow(x+\frac{۱}{۲})(۲x^۲+۴x-۲)=۰$

x	$-\infty$		$-۱-\sqrt{۲}$		$-۰/۵$				$-۱+\sqrt{۲}$		$+\infty$
y'		−	۰	+	۰	−			۰	+	
y	$+\infty$	↘	$-۲/۵$	↗	۰	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	۹	↗	$+\infty$
			Min		Max				Min		

۱۴۴۴ — ک۶۴ص۱۱۹. تغییرات تابع $y=\frac{x^2+3x}{x^2+x+3}$ را معین کرده منحنی (c) نمایش آنرا بکشید. روی این منحنی سه نقطه یافت می‌شود که در آنجا مشتق دوم y صفر است (سه نقطه عطف). اگر A یکی از این سه نقطه باشد نقطه‌های برخورد منحنی (c) را با مماس در A پیدا کنید.

$$y' = \frac{-2x^2+6x+9}{v^2} \quad و \quad y'' = \frac{2x(2x^2-9x-27)}{v^3}$$

x	$-\infty$		$-1/1$		0		$4/1$		$+\infty$
y'		$-$	0		$+$		0	$-$	
y	1	↘	$-0/6$	↗	0	↗	$1/2$	↘	1

$$y''=0 \Longrightarrow 2x(2x^2-9x-27)=0$$

$$x=0 \quad و \quad \frac{9\pm\sqrt{297}}{3} \approx 6/5 \quad و \quad -2 \Longrightarrow A\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right. \quad و \quad B\left|\begin{matrix}6/5\\1/2\end{matrix}\right. \quad و \quad C\left|\begin{matrix}-2\\-0/4\end{matrix}\right.$$

معادله مماس در A

$$m_A = y' = 1 \Longrightarrow y = x$$

$$y=\frac{x^2+3x}{x^2+x+3} \quad و \quad y=x \Longrightarrow \frac{x^2+3x}{x^2+x+3}=x$$

$$x^2=0 \Longrightarrow x=0 \Longrightarrow A(0,0)$$

۱۴۴۵ — ک۶۵ص۱۱۹- عدد α را چنان بگیرید که تفاضل مینیمم و ماکزیمم تابع $y=\frac{-x^2+3x+\alpha}{x-4}$ برابر ۸ باشد. سپس تغییرات y را معین و منحنی نمایش آنرا رسم کنید.

حل:

$$y=\frac{-x^2+3x+\alpha}{x-4}$$

پس از طرفین وسطین کردن بر حسب x خلاصه و مرتب میکنیم سپس Δ را مساوی صفر قرار داده نتیجه میشود

$$y^2+10y+4\alpha+9=0$$

$$\begin{cases} y'-y''=8 \\ y'+y''=10 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'=9 \\ y''=1 \end{cases}$$

$$y'y''=4\alpha+9 \Longrightarrow 9\times 1=4\alpha+9 \Longrightarrow \alpha=0$$

$$\alpha=0 \Longrightarrow y=\frac{-x^2+3x}{x-4} \quad و \quad y'=\frac{-x^2+8x-12}{v^2}$$

$$y=-x-1 \text{ معادله مجانب مایل } \Longrightarrow A(0,-1) \quad و \quad B(-1,0)$$

x	$-\infty$		۰		۲		۴		۶		$+\infty$
y'		−			۰		+		۰	−	
y	$+\infty$	↘	۰	↘	−۱ Min	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	−۹ Max	↘	$-\infty$

۱۴۴۶ ک ۶۶ ص ۱۱۹ـ اولاً ثابت کنید که وقتی که سه جمله‌ای ax^2+bx+c ریشه دارد تابع $y=\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$ همواره در یک جهت تغییر می‌کند. ثانیاً c و b را بر حسب a بقسمی تعیین کنید که منحنی نمایش تغییرات تابع محور xها را در نقطه به طول ۱/۵ − و محور yها را در نقطه به عرض ۱/۵ قطع کند و در این صورت a را نیز چنان بیابید که منحنی از نقطه $(\frac{5}{6}$ و ۱) بگذرد ثالثاً تغییرات تابع $y=\frac{2x+3}{x^2+3x+2}$ را تعیین کرده منحنی آن را رسم کنید.

حل: اولاً چون سه جمله‌ای $ax^2+bx+c=0$ دارای دو جواب است پس باید دلتای آن مثبت باشد یعنی $b^2-4ac>0$ میباشد و برای اینکه تابع همواره در یک جهت تغییر کند باید مشتق آن همواره مثبت یا منفی باشد.

$$y'=\frac{2a(ax^2+bx+c)-(2ax+b)^2}{(ax^2+bx+c)^2}$$

$$y'=\frac{-2a^2x^2-2abx-b^2+2ac}{(ax^2+bx+c)^2}$$

$$y'=0\Longrightarrow -2a^2x^2-2abx-b^2+2ac=0$$

$$\Delta'=-a^2(b^2-4ac)$$

همانطور که ملاحظه می‌شود a^2 مثبت و (b^2-4ac) نیز مثبت پس حاصلضرب آنها مثبت خواهد بود و چون علامت جلوی آنها منفی است لذا مقدار Δ' همواره منفی بوده و معادله درجه دوم جواب نداشته و علامت آن موافق علامت ضریب درجه دوم است یعنی همواره در یک جهت می‌باشد. ثانیاً منحنی باید از نقاط $A(-1/5\text{ و }0)$ و $B(0\text{ و }1/5)$ بگذرد پس مختصات این نقاط باید در معادله منحنی صدق کند بنابراین داریم:

$$\begin{cases}-3a+b=0\Longrightarrow b=3a \quad \text{و} \quad \frac{b}{c}=1/5\Longrightarrow c=2a\end{cases}$$

و اگر مختصات نقطه C را نیز در معادله بگذاریم مقدار a محاسبه می‌شود.

و از اینجا مقدار a برابر ۱ بدست می‌آید $c=2$ و $b=3$ و $a=1$

ثالثاً ـ $y = \frac{2x+3}{x^2+3x+2}$ و $y' = \frac{-2x^2-6x-5}{v^2}$

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'			$-$		$-$		$-$		
y	0	↘	$-\infty$	$+\infty$ ↘	$-\infty$	$+\infty$ ↘	$\frac{3}{2}$	↘	0

چند قاعده و مسئله برای تعیین ماکزیمم و می‌نیمم بعضی از عبارات بدون استفاده از مشتق و طرفین وسطین کردن (برای دانش‌آموزان قوی در رشته ریاضی و داوطلبان کنکور)

قاعده ۱۶۶	حاصلضرب چندین عامل متغیر مثبت که مجموعشان ثابت باشد ماکزیمم است هرگاه جمیع این عوامل متساوی باشند (درصورتی که تساوی آنها ممکن باشد).
قاعده ۱۶۷	حاصلضرب دو عامل متغیر مثبت که مجموعشان ثابت باشد موقعی ماکزیمم است که آن دو عامل باهم مساوی باشند و اگر آن دو عامل نتوانند باهم مساوی شوند وقتی حاصلضرب آنها ماکزیمم است که تفاضل آنها می‌نیمم باشد.
قاعده ۱۶۸	مجموع چندین عامل مثبت متغیر که حاصلضربشان ثابت باشد می‌نیمم است هرگاه جمیع عوامل بایکدیگر مساوی باشند.
قاعده ۱۶۹	هرگاه x و y و z سه عامل مثبت متغیر باشند بطریقی که مجموع آنها $S = x + y + z =$ (ثابت) باشد حاصلضرب قوای آنها : $p = x^m \times y^n \times z^p$ ماکزیمم است هرگاه عوامل فوق متناسب باقوای خود باشند یعنی $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}$ باشد.
قاعده ۱۷۰	هرگاه x و y و z سه متغیر مثبت باشند بطریقی که حاصلضرب قوای آنها $x^m \times y^n \times z^p =$ (ثابت) باشد مجموع : $S = x + y + z$ می‌نیمم است هرگاه $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}$ باشد.

۱۴۳۷- مابین مثلثهای بمحیط ثابت $2p$ مطلوبست مثلثی که مساحت آن ماکزیمم باشد. دستور مساحت مثلث بنامر آنکه اضلاع آن a و b و c و محیط آن $2p$ فرض شود عبارتست از:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

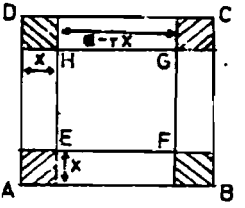
حل: مساحت S ماکزیمم است هرگاه $(p-a)(p-b)(p-c)$ ماکزیمم باشد وچون مجموع عوامل فوق: $p-a+p-b+p-c=p$ (ثابت) میباشد لذا حاصلضرب آنها ماکزیمم است هرگاه:

$$a=b=c \quad \text{و یا} \quad p-a=p-b=p-c$$

باشد پس مثلث بساحت ماکزیمم مثلث متساوی الاضلاع بضلع $\frac{2p}{3}$ میباشد و مساحت ماکزیمم عبارتست از:

$$S_M=\frac{p^2\sqrt{3}}{9}$$

۱۴۳۸- صفحهٔ مقوائی $ABCD$ را بضلع a فرض میکنیم و از چهار گوشهٔ آن چهار مربع بضلع x میبریم و با بقیهٔ آن جعبه‌ای بقاعدهٔ مربع $EFGH$ میسازیم. مطلوبست تعیین x بطریقی که حجم جعبه ماکزیمم باشد. ضلع قاعدهٔ جعبه: $a-2x$ وارتفاع آن x وبنابراین حجم آن



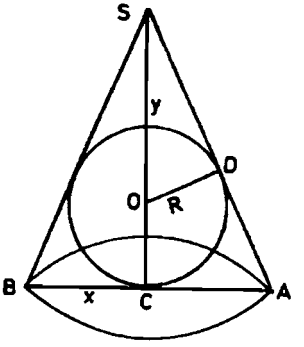
$V=x(a-2x)^2$ میباشد. حجم وقتی ماکزیمم است هرگاه عبارت $2x(a-2x)^2$ ماکزیمم باشد وچون مجموع متغیرهای $2x$ و $a-2x$ ثابت و مساوی با $2x+(a-2x)=a$ میباشد لذا طبق قاعده (۱۶۶) حاصلضرب قوای آنها ماکزیمم است هرگاه $\frac{2x}{1}=\frac{a-2x}{2}$ واز آنجا $x=\frac{a}{6}$ باشد ودراینصورت حجم ماکزیمم عبارت میشود از $V_M=\frac{2a^3}{27}$

۱۴۳۹- مابین مخروطهای بحجم $\frac{1}{3}\pi a^3$ مطلوبست مخروطی که سطح آن می نیمم باشد.

حل: فرض میکنیم x شعاع قاعده و y ارتفاع مخروط باشد دراینصورت بنا بفرض: $\frac{1}{3}\pi x^2y=\frac{1}{3}\pi a^3$ وبنابراین $x^2y=a^3$ خواهد بود. چون سطح جانبی مخروط فوق را حساب کنیم حاصل میشود $S=\pi x\sqrt{x^2+y^2}$ سطح فوق می نیمم است هرگاه $x\sqrt{x^2+y^2}$

ویامجذور آن $x^2(x^2+y^2)$ می نیمم باشدو چون در عبارت اخیر بجای y مساوی آن $\frac{a^2}{x^2}$ راقرار دهیم عبارت فوق بصورت $x^2+\frac{a^6}{x^2}$ درمی آیدو چون حاصل ضرب $(x^2)^{\frac{1}{2}} \times (\frac{a^6}{x^2}) = a^6$ ثابت می باشد لذامجموع $x^6+\frac{a^6}{x^2}$ می نیمم است هر گاه $\frac{x^4}{\frac{1}{2}} = \frac{a^6}{x^2}$ باشد و از آنجا $2x^6 = a^6$ و

$$x = \frac{a}{\sqrt[6]{2}} \quad \text{و} \quad y = a\sqrt[3]{2}$$



۱۴۵۰ - بر کرهٔ بشعاع R مخروطی محیط کنید که حجم آن نمی‌نیمم باشد.

حل: فرض میکنیم x شعاع قاعدهٔ مخروط و y ارتفاع آن باشد دراین صورت $V=\frac{\pi}{3}x^2y$ خواهد بود ولی از تشابه دومثلث SAC و SOD حاصل میشود:

$$\frac{x}{R} = \frac{y}{\sqrt{y(y-2R)}} \quad \text{(چرا؟)}$$

ویا :

$$x = \frac{Ry}{\sqrt{y(y-2R)}}$$

بطوریکه دستور حجم مخروط برحسب y عبارت میگردد از:

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y = \frac{1}{3}\pi R^2 \times \frac{y^2}{y-2R}$$

حال حجم V می نیمم است هر گاه $\frac{y^2}{y-2R}$ می نیمم ویا عکس آن یعنی $\frac{y-2R}{y^2}$ ماکزیمم باشد ولی عبارت اخیر را میتوان مرتباً بصورتهای ذیل نوشت:

$$\frac{y-2R}{y^2} = \frac{1}{y} - \frac{2R}{y^2} = \frac{1}{y}(1 - \frac{2R}{y})$$

کماکزیمم است هر گاه $(1-\frac{2R}{y}) + \frac{2R}{y}$ ماکزیمم باشدو چون مجموع دوعامل فوق یعنی

$\frac{2R}{y}+(1-\frac{2R}{y})=1$ ثابت می‌باشد لذا حاصلضرب آنها درموقعی ماکزیمم می‌گردد که $1-\frac{2R}{y}=\frac{2R}{y}$ وازآنجا $y=2R$ باشدودراینصورت $x=R\sqrt{2}$ و حجم مخروط می‌نیمم $V=\frac{8\pi R^3}{3}$ خواهدبود.

۱۴۵۱ — مطلوبست ابعاد مستطیلی بسطح ماکزیمم درصورتیکه محیطش بطول ثابت $2p$ باشد.

حل: اگر x و y را ابعاد مستطیل فرض کنیم محیط ومساحت آن بترتیب چنین حساب میشود

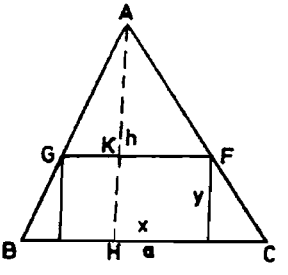
$S=xy$ و $2p=2(x+y)=$ ثابت

طبق قواعد ماکزیمم وقتی مساحت مستطیل ماکزیمم است که داشته باشیم.

$$x=y=\frac{p}{2}$$

۱۴۵۲ — مطلوب است تعیین ابعاد مستطیلی بسطح ماکزیمم که درمثلثی بقاعده a و ارتفاع h محاط باشد.

حل: x و y را ابعاد مستطیل فرض می‌کنیم داریم:



$$\overset{\Delta}{AGF}\sim\overset{\Delta}{ABC}$$

$$\frac{FG}{BC}=\frac{AK}{AH}\rightarrow\frac{x}{a}=\frac{h-y}{h}$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{h}=1$$

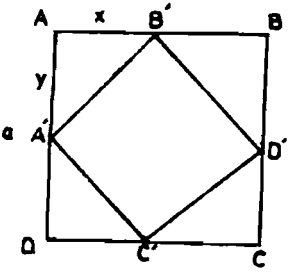
حال اگر $\frac{x}{a}$ و $\frac{y}{h}$ رامتغیر فرض کنیم چون مجموع آنها ثابت است پس حاصلضربشان هنگامی ماکزیمم است که باهم برابر باشند.

$$\frac{y}{h}\times\frac{x}{a}=\frac{S}{ah}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{y}{h}=\frac{x}{a}\Longrightarrow x=\frac{a}{2}\ \text{و}\ y=\frac{h}{2}$$

۱۴۵۳ - مطلوبست تعیین کوچکترین مربعی که در مربع بضلع a محاط باشد.

حل: اگر $A'B'$ یکی از اضلاع مربع مطلوب باشد و قطعاتی که از ضلع a جدا می‌کند به x و y بنامیم نتیجه می‌شود:



$x+y=a$

و $x^2+y^2=A'B'^2$

ویا داریم:

$A'B'^2=(x+y)^2-2xy$

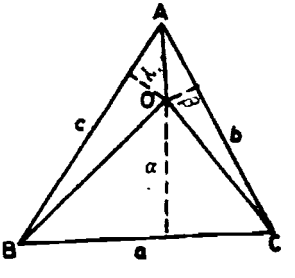
$A'B'^2=a^2-2xy$

از رابطه بالا وقتی $A'B'^2$ یعنی مساحت مربع محاطی می‌نیمم است که xy ماکزیمم شود و چون:

$x+y=a=$ ثابت

می‌باشد پس باید $x=y=\frac{a}{2}$ باشد.

۱۴۵۴ — نقطه‌ای در داخل مثلث ABC بقسمی بیابید که چون از رئوس مثلث بآن نقطه وصل کنیم حاصلضرب مساحات سه مثلث حاصل ماکزیمم شود.



حل: اگر α و β و γ را ارتفاعات این مثلثها فرض کنیم برای اینکه مقدار:

$S_1\times S_2\times S_3=$

$\frac{a\alpha}{2}\times\frac{b\beta}{2}\times\frac{c\gamma}{2}=\frac{abc\gamma\beta\alpha}{8}$

ماکزیمم شود باید $\alpha\times\beta\times\gamma$ ماکزیمم شود زیرا $\frac{a\times b\times c}{8}$ مقدار ثابتی است میتوان نوشت:

$a\alpha+b\beta+c\gamma=2S_{ABC}=ah_a=bh_b=ch_c$

$\frac{\alpha}{h_a}+\frac{\beta}{h_b}+\frac{\gamma}{h_c}=1 \longrightarrow$ ثابت

نتیجه میشود.

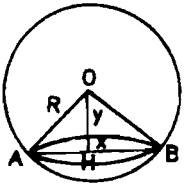
پس حاصلضرب فوق وقتی ماکزیمم است که

$$\frac{\alpha}{h_a}=\frac{\beta}{h_b}=\frac{\gamma}{h_c}=\frac{1}{3}$$

$$\alpha=\frac{h_a}{3}\ ,\ \beta=\frac{h_b}{3}\ ,\ \gamma=\frac{h_c}{3}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که باید نقطه O محل تلاقی میانه‌های مثلث باشد...

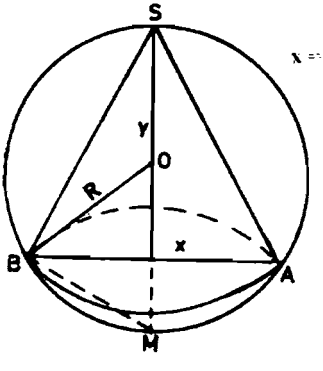
۱۴۵۵ — بین مخروطهائی که رأس مشترکشان مرکز کرهٔ بشعاع R و قاعده‌شان دایره‌ای از سطح این کره باشد مخروطی تعیین کنید که حجمش ماکزیمم باشد.



حل: چون x و y را بترتیب شعاع قاعده و ارتفاع این مخروط فرض کنیم برای تعیین ماکزیمم حجم یعنی $v=\frac{\pi}{3}x^2y$ و یا ماکزیمم x^2y بدینطریق عمل می‌کنیم که x^2y را بتوان ۲ می‌رسانیم می‌شود $(x^2)^2y^2$ و چون $x^2+y^2=R^2$ مقدار ثابتی است پس حاصلضرب آن هنگامی ماکزیمم است که داشته باشیم:

$$\frac{x^2}{2}=\frac{y^2}{1}=\frac{R^2}{3}$$

و یا: $x=\frac{R\sqrt{2}}{3}$ و $y=\frac{R\sqrt{3}}{3}$



۱۴۵۶ - مخروطی ماکزیمم در کره بشعاع R محاط کنید.

حل: اگر x و y بترتیب شعاع قاعده و ارتفاع این مخروط فرض کنیم چنین نتیجه می‌شود:

$$V=\frac{\pi}{3}x^2y$$

باید x^2y و یا $(x^2)^2y^2$ ماکزیمم شود. می‌توانیم بنویسیم:

$$(x^2)^2\, y^2 = (\frac{x^2}{y})^2 y^2$$

وچون‌داریم: درمثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{SBM}$ $\quad x^2 = y(2R - y)$

نتیجه‌میشود: $\frac{x^2}{y} + y = 2R \Longrightarrow$ ثابت

لذا ماکزیمم‌حجم وقتی‌است‌که:

$$\frac{x^2}{2y} = \frac{y}{2} \Longrightarrow \frac{x^2}{y} = \frac{y}{2} = 2R - y$$

و از آنجا : $\boxed{y = \frac{4R}{3}}$ و $x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$

۱۴۵۷ – مطلوب‌است تعیین می‌نیمم عبارت $x^2 + y^2 + z^2$ درصورتی‌که:

$$ax + by + cz = S$$

(a و b و c و S مقادیری معلومند)

ج: $x = \frac{aS}{a^2 + b^2 + c^2}$ و $y = \frac{bS}{a^2 + b^2 + c^2}$ و $z = \frac{cS}{a^2 + b^2 + c^2}$

۱ـ عدد ۱۳ را بدوقسمت x و y چنان تقسیم‌کنیدکه‌عبارت $3\sqrt{x} + 2\sqrt{y}$ می‌نیمم شود : ج : $(x = 9$ و $y = 4)$

۱۴۵۸ – مربع ABCD بضلع a مفروض‌است برضلع CD نقطهٔ متغیر M بفاصله $OM = x$ واقع است (نقطه O وسط ضلع CD است و x بین $-\infty$ و $+\infty$ تغییر می‌کند)

مطلوبست تعیین نقطه M بقسمی که‌نسبت $\frac{MA}{MB}$ ماکزیمم شود:

ج : $(x = a\sqrt{3})$

۱۴۵۹ – مطلوب‌است‌تعیین استوانه‌بحجم ماکزیمم که درکرهٔ بشعاع R محاط باشد .

ج: $(\frac{2R\sqrt{3}}{3} =$ ارتفاع استوانه$)$

۱۴۶۰ – مطلوبست تعیین استوانه محاط در کرهٔ بشعاع R بقسمی‌که سطح جانبیش ماکزیمم شود : ج: $(x = R\sqrt{2}$ ارتفاع استوانه$)$

قواعدی دربارهٔ تقسیم توافقی

قاعده ۱۷۱

هرگاه تصاویر چهار نقطه A و B و C و D بر روی یکی از محورها تشکیل یک تقسیم توافقی بدهند رابطهٔ زیر همواره بین طولها و عرضهای آنها برقرار است.

$$\begin{cases}(x_A+x_B)(x_C+x_D)=2(x_Ax_B+x_Cx_D)\\(y_A+y_B)(y_C+y_D)=2(y_Ay_B+y_Cy_D)\end{cases}$$

قاعده ۱۷۲

اگر چهار نقطهٔ A و B و C و D واقع بر خطی به موازات محور x و x' باشند و تشکیل تقسیم توافقی بدهند رابطه زیر بین طولهای آنها برقرار است.

$$(x_A+x_B)(x_C+x_D)=2(x_Ax_B+x_Cx_D)$$

قاعده ۱۷۳

اگر چهار نقطه A و B و C و D واقع بر خطی به موازات محور y و y' باشند و تشکیل تقسیم توافقی بدهند رابطهٔ زیر بین عرضهای آنها برقرار است.

$$(y_A+y_B)(y_C+y_D)=2(y_Ay_B+y_Cy_D)$$

قاعده ۱۷۴

هرگاه طول یا عرض یکی از نقاط صفر باشد. داریم:

الف: اگر طول نقطه صفر باشد:

$$(x_A+x_B)(x_C)=2x_Ax_B$$

و از تقسیم طرفین بر $x_Ax_Bx_C$ داریم:

$$\boxed{\frac{1}{x_A}+\frac{1}{x_B}=\frac{2}{x_C}}$$

ب: اگر عرض نقطه صفر باشد:

بدلیل مشابه خواهیم داشت:

$$\boxed{\frac{1}{y_A}+\frac{1}{y_B}=\frac{2}{y_C}}$$

تبصره: اگر یکی از نقاط مبدأ مختصات باشد هر دو رابطه دربارهٔ آن صدق می‌کند.

۱۴۶۱ — تابع $y=x^3-3x^2-2x+1$ مفروض است اگر A و B نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع مفروض باشد و A′ و B′ تصاویر این نقاط بر روی محور طولها باشد بر روی محور طولها نقطه p را چنان تعیین کنید که مزدوج توافقی مبدأ مختصات نسبت به دو نقطه A′ و B′ باشد

حل: اگر x_1 و x_2 طول‌های نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع فوق باشد پس x_1 و x_2 طول‌های نقاط A′ و B′ هم خواهند بود و چون طول نقطه O صفر است پس از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$y'=3x^2-6x-2$$

$$(x_1+x_2)(x_3+x_4)=2(x_1x_2+x_3x_4)$$

$$\left(-\frac{b}{a}\right)(0+x_4)=2\left(\frac{c}{a}+0\times x_4\right)\Longrightarrow 2x_4=2\times\frac{-2}{3}$$

$$\boxed{x_4=\frac{-2}{3}}\Longrightarrow p\left(-\frac{2}{3}\text{ و }0\right)$$

۱۴۶۲ — تابع $y=\frac{x^2+2x-9}{x^2-2x}$ مفروض است اگر A و B نقاط ماکزیمم و می‌نیمم این تابع بوده و C و D نقاط تلاقی خط $y=K$ با این منحنی باشد و نقاط A′ و B′ و C′ و D′ تصاویر نقاط A و B و C و D بر روی محور طولها باشد ثابت کنید که بازاء جمیع مقادیر K نقطه C′ مزدوج توافقی نقطه D′ نسبت به نقاط A′ و B′ باشد.

حل: طولهای نقاط A و B یا A′ و B′ (یعنی x_1 و x_2) از معادله $y'=0$ بدست می‌آید

$$y'=\frac{-4x^2+18x-18}{(x^2-2x)^2}\Longrightarrow y'=0\Longrightarrow 2x^2-9x+9=0\quad(1)$$

طولهای نقاط C و D و C′ و D′ (یعنی x_3 و x_4) از حل معادلات خط و منحنی بدست می‌آید.

$$\frac{x^2+2x-9}{x^2-2x}=K\Longrightarrow(K-1)x^2-2(K+1)x+9=0\quad(2)$$

۱۴۶۳ — تابع $y=\frac{4x+5}{5(x^2-1)}$ مفروض است اگر خطی موازی محور طولها این منحنی را در نقطه‌های A و B و محور yها را در نقطه‌ای مانند C قطع می‌نماید مختصات نقطه D مزدوج توافقی C را نسبت به نقاط B و A حساب کنید و معادله مکان هندسی آنرا بنویسید.

خرداد ماه ۳۶ - متفرقه

حل: طولهای نقاط A و B (یعنی x_1 و x_2) از حل معادله منحنی و خط $y=m$ بدست می‌آید

$$\frac{4x+5}{5(x^2-1)}=m\Longrightarrow 5mx^2-4x-5(m+1)=0\text{ و }C(0\text{ و }m)$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{2}{x_D}\rightarrow\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{2}{x_D}\rightarrow\frac{-b}{C}=\frac{2}{x_D}$$

۱۴۶۴ - تابع $y=\frac{2x^2+1}{x-2}$ مفروض است ثابت کنید اگر خط دلخواهی بموازات محور xها رسم شود و منحنی نمایش تابع را در دو نقطه تلاقی نماید تصاویر این دو نقطه و تصاویر ماکزیمم و می‌نیمم بر روی محور xها تشکیل تقسیم توافقی میدهند. خرداد ماه ۳۳

حل: تابع را با خط $y=m$ قطع می‌نمائیم. پس:

$$\begin{cases} y=\frac{2x^2+1}{x-2} \\ y=m \end{cases} \Longrightarrow 2x^2-mx+1+2m=0$$

حال مشتق تابع را بدست می‌آوریم:

$$y'=\frac{4x(x-2)-2x^2-1}{(x-2)^2}=0\rightarrow 2x^2-8x-1=0$$

اگر x_1 و x_2 و x_3 و x_4 طولهای چهار نقطه باشد از رابطه توافقی استفاده می‌کنیم. پس:

$$(x_1+x_2)(x_3+x_4)=2(x_1x_2+x_3x_4)$$

از طرفی می‌دانیم که،

$$x_3x_4=\frac{-1}{2} \quad و \quad x_3+x_4=4 \quad و \quad x_1x_2=\frac{1+2m}{2} \quad و \quad x_1+x_2=\frac{m}{2}$$

$$\frac{m}{2}+4=2\left(\frac{1+2m}{2}-\frac{1}{2}\right)\rightarrow 2m=2m$$

۱۴۶۵ - منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{2x+1}{2x^2+1}$ مفروض است اگر نقطه تلاقی خط $y=K$ را با منحنی M_1 و M_2 بنامیم مطلوب است مکان هندسی نقطه P مزدوج توافقی نقطه D محل تلاقی M_1M_2 با محور yها نسبت به دو نقطه M_1 و M_2

حل: میدانیم x_1 و x_2 طولهای نقاط M_1 و M_2 از حل معادله زیر بدست می‌آید.

$$\frac{2x+1}{2x^2+1}=K\rightarrow 2Kx^2-2x+K-1=0 \quad و \quad D(0,K)$$

$$(x_1+x_2)(x_P+x_D)=2(x_1x_2+x_Dx_P)$$

$$\frac{-b}{a}(x_P+0)=2\left(\frac{c}{a}+0\right)\Longrightarrow -bx_P=2c$$

$$2x_P=2(K-1)\rightarrow x_P=K-1\Longrightarrow P(K-1,K)$$

معادله مکان هندسی نقطه P $x=y-1 \longrightarrow y=x+1$

۱۴۶۶ - تابع $y=\frac{2x^2-3x}{x^2+2}$ مفروض است معادله خطی را بنویسید که از مبداء مختصات گذشته و منحنی را در نقاط A و B و مجانب منحنی را در نقطه C قطع نموده بطوری که نقاط A و B و C و D تشکیل یک دستگاه توافقی دهند

حل: مجانب منحنی $x=\pm\infty \longrightarrow y=2$ میدانیم خطی که از مبداء مختصات میگذرد معادله‌اش بصورت $y=mx$ میباشد که از حل آن با معادله منحنی نتیجه زیر بدست می‌آید.

$$\frac{2x^2-3x}{x^2+2}=mx \longrightarrow x(mx^2-2x+2m+3)=0 \quad \text{و} \quad C(\frac{2}{m} \text{ و } 2)$$

میدانیم طولهای نقاط A و B یعنی x_1 و x_2 ریشه‌های معادله:

$$mx^2-2x+2m+3=0$$

میباشد برای اینکه

$$(x_1+x_2)(x_3+x_4)=2(x_1x_2+x_3x_4)$$

$$(\frac{-b}{a})(\frac{2}{m}+0)=2(\frac{c}{a}+0) \longrightarrow \frac{-2b}{am}=\frac{2c}{a}$$

$$-b=mc \longrightarrow 2=m(2m+3) \longrightarrow 2m^2+3m-2=0$$

$$m=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=-2 \text{ و } \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow y=-2x \text{ و } y=\frac{1}{2}x$$

۱۴۶۷ - تابع $y=\frac{x^2+1}{x^2-2x-3}$ مفروض است خط $y=K$ منحنی را در نقاط M و N و محور yها را در نقطه A قطع میکند مختصات نقطه B مزدوج توافقی نقطه A را نسبت به نقطه M و N پیدا نموده و معادله مکان هندسی آنرا تعیین کنید.

حل: میدانیم که x_1 و x_2 طولهای نقاط M و N از معادله زیر بدست می‌آید.

$$\frac{x^2+1}{x^2-2x-3}=K \longrightarrow (K-1)x^2-2Kx-3K-1=0$$

حال رابطه توافقی را می‌توانیم بنویسیم:

$$(x_1+x_2)(x_B+x_A)=2(x_1x_2+x_Ax_B)$$

$$\frac{2K}{K-1}(x_B+0)=2(\frac{-3K-1}{K-1}+0) \longrightarrow B\left|\begin{array}{l} x=\frac{-3K-1}{K} \\ y=K \end{array}\right.$$

$$x=\frac{-3y-1}{y} \longrightarrow y=\frac{-1}{x+3}$$ معادلهٔ مکان هندسی نقطه B

۱۴۶۸ – تابع $y=\frac{4x-9}{x^2-2x}$ مفروض است اگر A و B نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع فوق باشند و A' و B' تصویر نقاط A و B بر روی محور عرضها باشند مختصات نقطه C را طوری تعیین کنید که نقطه C مزدوج توافقی نقطه O نسبت به نقاط A' و B' باشند (بدون استفاده از مشتق مسئله حل شود). حل: برای اینکه مسئله را بدون استفاده از مشتق حل مینمائیم بصورت زیر عمل می‌نمائیم

$$y=\frac{4x-9}{x^2-2x}\longrightarrow yx^2-2yx=4x-9\longrightarrow yx^2-2(y+2)x+9=0$$

$$\Delta'=0\Longrightarrow{}^2-y5y+4=0$$

y_1 و y_2 طولهای نقاط A و B از معادله بالا بدست می‌آید و از طرفی داریم که:

$$y_0=0 \quad \text{و} \quad x_C=0 \quad \text{و} \quad y_C=K$$

$$(y_1+y_2)(y_C+y_0)=2(y_1y_2+y_Cy_0)$$

$$(-\frac{b}{a})(K+0)=2(\frac{c}{a}+0\times 0)$$

$$5K=2c\longrightarrow 5K=2\times 4=8\Longrightarrow k=1/6 \quad \text{و} \quad c(1 \text{ و } 1/6)$$

۱۴۶۹ – تابع $y=\frac{x-1}{x^2+1}$ مفروض است خط $y=K$ که به موازات محور $x'x$ رسم شده منحنی را در دو نقطه M_1 و M_2 قطع میکند اگر M' و M'' تصاویر M_1 و M_2 روی محور طولها و A و B تصاویر ماکزیمم و می‌نیمم بر این محور باشد ثابت کنید که نقاط M' و M'' نسبت به دو نقطه A و B مزدوج توافقی میباشند.

حل: میدانیم که x_1 و x_2 طولهای نقاط M_1 و M_2 از معادله زیر بدست می‌آید.

$$\frac{x-1}{x^2+1}=K\Longrightarrow kx^2-x+k+1=0$$

$$y'=\frac{x^2+1-2x(x-1)}{(x^2+1)^2}=0\longrightarrow x^2-2x-1=0$$

از طرفی می‌دانیم که اگر x_3 و x_4 طولهای نقاط A و B باشد داریم که:

$$x_3x_4=-1 \quad \text{و} \quad x_3+x_4=2$$

پس:

$$(x_1+x_2)(x_3+x_4)=2(x_1x_2+x_3x_4)$$

$$\frac{+1}{K}\times 2=2\left(\frac{K+1}{K}-1\right)\longrightarrow\frac{1}{K}=\frac{1}{K}$$

۱۴۷۰ – منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x^2-2x-1}{x^2-2x+1}$ مفروض است این منحنی محور $y'y$ را در نقطه A قطع میکند قاطعی از نقطه A با ضریب زاویه m رسم و فرض میکنیم

کمنحنی را در دو نقطه M و N قطع کند در اینصورت حدود m را برای آنکه نقاط M و N وجود داشته باشند پیدا کنید مختصات نقطه B مزدوج توافقی A نسبت بنقاط M و N را حساب کنید و معادله مکان هندسی نقطه B را تعیین کنید.

حل: چون منحنی محور y'y را قطع می کند پس مختصات نقطه A (۰ و ۱-) است و معادله خطی که از A باضریب زاویه m رسم شود $y = mx - 1$ است.

میدانیم اگر x_1 و x_2 طولهای نقاط M و N باشند از معادله زیر بدست می آید. پس:

$$\frac{x^2-2x-1}{x^2-2x+1} = mx-1 \longrightarrow x[mx^2-2(m+1)x+4+m] = 0$$

$$mx^2-2(m+1)x+4+m = 0 \longrightarrow \Delta' = m^2+1+2m-4m-m^2$$

$$\Delta' = -2m+1 \text{ و } \Delta' > 0 \longrightarrow -2m+1 > 0 \Longrightarrow m < 0/5$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} = \frac{2}{x_B} \Longrightarrow \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = \frac{2}{x_B} = \frac{-b}{c} \Longrightarrow \frac{2}{x_B} = \frac{2(m+1)}{m+4}$$

$$x_B = \frac{m+4}{m+1} \text{ و } y = mx-1 \Longrightarrow y = \frac{-x^2+3x+1}{x-1} \quad \text{معادله مکان}$$

۱۴۷۱ - تابع $y = \frac{1-2x}{1-2x^2}$ مفروض است هر گاه خط $y = \lambda$ منحنی را در دو نقطه A و B قطع کند مکان نقطه D مزدوج توافقی نقطه C (محل تلاقی خط AB با محور oy) نسبت به نقاط A و B را تعیین کرده و λ را چنان حساب کنید که طول نقطه D برابر نصف عرض نقطه C باشد.

حل: هر گاه x_1 و x_2 طولهای نقاط A و B باشد مقدار آنها از معادله زیر بدست می آید.

$$\frac{1-2x}{1-2x^2} = \lambda \longrightarrow 2\lambda x^2-2x+1-\lambda = 0 \qquad (1)$$

و $C(0 \text{ و } \lambda)$

$$(x_1+x_2)(x_D+x_C) = 2(x_1x_2+x_Dx_C)$$

$$\frac{1}{\lambda}(x_D+0) = 2\left(\frac{1-\lambda}{2\lambda}+0\right) \longrightarrow x_D = 1-\lambda \longrightarrow D\left|\begin{array}{l} x = 1-\lambda \\ y = \lambda \end{array}\right.$$

$$x = 1-y \longrightarrow y = 1-x \qquad \text{معادله مکان نقطه } D$$

$$x_D = \frac{1}{2}y_C \longrightarrow 1-\lambda = \frac{\lambda}{2} \longrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

۱۴۷۲ - تابع $y = \frac{3x^2-x}{x+5}$ مفروض است اگر خط $y = \lambda$ خط $x = -5$ را در نقطه M و منحنی را در نقاط A و B قطع کند ثابت کنید $\overline{MA} \times \overline{MB}$ مقداری است ثابت

جدول حل و بحث (یادآوری از کلاس چهارم)

اگر داشته باشیم	نتیجه میشود که:
$\Delta < 0$	معادله ریشه ندارد
$\Delta = 0$ ، $\frac{-b}{a} = 0$	ریشه مضاعف صفر دارد $x' = x'' = 0$
$\Delta = 0$ ، $\frac{-b}{a} > 0$	ریشه مضاعف مثبت دارد $x'' = x' > 0$
$\Delta = 0$ ، $\frac{-b}{a} < 0$	ریشه مضاعف منفی دارد $0 > x' = x''$
$\Delta > 0$ ، $\frac{c}{a} < 0$ ، $\frac{-b}{a} =$	دو ریشه قرینه دارد $x'' = -x'$ ، x' و $x'' = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$
$\Delta > 0$ ، $\frac{c}{a} < 0$ ، $\frac{-b}{a} > 0$	دو ریشه مختلف العلامه دارد آنکه قدر مطلقش بزرگتر است مثبت است $x'' > 0 > x'$ و $\lvert x''\rvert > \lvert x'\rvert$

$\begin{cases} \Delta > \\ \frac{c}{a} < 0 \\ \frac{-b}{a} < 0 \end{cases}$	دوریشه مختلف‌العلامه دارد آنکه‌قدرمطلقش بزرگتراست منفی است $\lvert x'\rvert > \lvert x''\rvert$ و $x'' > 0 > x'$
$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{c}{a} = 0 \\ \frac{-b}{a} > 0 \end{cases}$	معادله یک‌ریشه‌صفر ویک‌ریشه مثبت‌دارد $x' = 0$ و $x'' = \frac{-b}{a} > 0$
$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{c}{a} = 0 \\ \frac{-b}{a} < 0 \end{cases}$	معادله یک‌ریشه صفر و یک ریشه منفی دارد $x'' = 0$ و $x' = \frac{-b}{a} < 0$
$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ \frac{-b}{a} > 0 \end{cases}$	دوریشه مثبت دارد. $x'' > x' > 0$
$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ \frac{-b}{a} < 0 \end{cases}$	دو ریشه منفی $0 > x'' > x'$
$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{c}{a} = \infty \end{cases}$	یک‌ریشه بی‌نهایت دارد $x' = \infty$ و $x'' = \frac{-c}{b}$

تمرین:

تعیین کنید که بازاء چه مقادیر m هریك از معادلات زیر دارای ریشه است.

۱۴۷۳ – ك: الف: ص۱۲۸ـ $۴x^۲+۱۲x+m-۱=۰$

حل: $\Delta'\geq ۰ \Longrightarrow b'^۲-ac\geq ۰ \Longrightarrow ۳۶-۴(m-۱)\geq ۰$

$۳۶-۴m+۴\geq ۰ \Longrightarrow m\leq ۱۰$

۱۴۷۴ – ك: ب: ص۱۲۸ـ $۴x^۲+۱۲x+m+۱=۰$

حل: $\Delta'\geq ۰ \Longrightarrow b'^۲-ac\geq ۰ \Longrightarrow ۳۶-۴(m+۱)\geq ۰$

$۳۶-۴m-۴\geq ۰ \longrightarrow m\leq ۸$

۱۴۷۵ – ك: ج: ص۱۲۸ـ $mx^۲+۴۲x+۴۹=۰$

حل: $\Delta\geq ۰ \longrightarrow ۴۴۱-۴۹m\geq ۰ \longrightarrow m\leq ۹.$

۱۴۷۶ – ك: د: ص۱۲۸ـ $(۳m^۲+۳m+۱)x^۲-(۳m+۲)x+۱=۰$

حل: $\Delta>۰ \longrightarrow (۳m+۲)^۲-۴(۳m^۲+۳m+۱)\geq ۰$

$-۳m^۲\geq ۰$ غیر ممکن

فقط در ازاء $m=۰$ دارای جواب میباشد.

۱۴۷۷ – ك: هـ: ص۱۲۸ـ $x^۲-۲x+m^۲-۲m+۷=۰$

حل: $\Delta'>۰ \longrightarrow \Delta'=۱-(m^۲-۲m+۷)>۰$

$-m^۲+۲m-۶>۰ \longrightarrow -m^۲+۲m-۶=۰$

چون معادله درجه دوم بر حسب m دارای جواب نیست پس علامت Δ' همواره همان علامت ضریب درجه دوم است یعنی منفی است پس معادله درجه دوم بر حسب x بازاء هیچ یك از مقادیر m دارای جواب نیست.

۱۴۷۸ – ك: و: ص۱۲۸ـ $(m-۱)x^۲+(m-۳)x+m-۲=۰$

حل: $\Delta>۰ \longrightarrow (m-۳)^۲-۴(m-۱)(m-۲)\geq ۰$

$-۳m^۲+۶m+۱=۰ \longrightarrow m=\frac{۳\pm\sqrt{۱۲}}{۳}$

m	$-\infty$		$\frac{۳-\sqrt{۱۲}}{۳}$		$\frac{۳+\sqrt{۱۲}}{۳}$		$+\infty$
Δ		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
نتیجه		جواب ندارد		دوجواب دارد		جواب ندارد	
			ریشه مضاعف دارد		ریشه مضاعف دارد		

تمرین:

بازای چه مقادیری از k هر یك از معادلات زیر دارای دو ریشه مختلف العلامه است.

۱۴۷۹ – ك: الف: ص۱۲۸–

$$kx^2-36x+1=0$$

حل: باید حاصلضرب ریشه‌ها یعنی $\frac{c}{a}$ منفی باشد.

$$\frac{1}{k}<0 \longrightarrow k<0$$

۱۴۸۰ – ك: ب: ص۱۲۸–

$$kx^2-5x+k^2-4=0$$

حل: $\frac{c}{a}<0 \longrightarrow \frac{k^2-4}{k}<0 \longrightarrow k^2-4=0 \longrightarrow k=\pm 2$ و $k=0$

k	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
k^2-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
k		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{c}{a}$		$-$	0	$+$	∞	$-$	0	$+$	
نتیجه		دو جواب مختلف العلامه				دو جواب مختلف العلامه			

۱۴۸۱ – ك: ج: ص۱۲۸–

$$(k^2+1)x^2-2kx+k^2-k-2=0$$

حل: $\frac{c}{a}<0 \longrightarrow \frac{k^2-k-2}{k^2+1}<0$

مخرج کسر همواره مثبت میباشد پس بایدداشته باشیم.

$$k^2-k-2<0 \longrightarrow k^2-k-2=0 \longrightarrow k=2 \text{ و } -1$$

k	$-\infty$		-1		$+2$		$+\infty$
k^2-k-2		$+$	0	$-$	0	$+$	
نتیجه				دو جواب مختلف العلامه			

۱۴۸۲ – ك: د : ص ۱۲۸–

$$(3k^2-5k+2)x^2-2x+k^2-7k+6=0$$

حل: $\frac{c}{a}<0 \longrightarrow \frac{k^2-7k+6}{3k^2-5k+2}<0$

$$\frac{(k-1)(k-6)}{(k-1)(3k-2)}<0 \longrightarrow \frac{k-6}{3k-2}<0$$

k	$-\infty$	$\frac{2}{3}$		6	$+\infty$
$\frac{c}{a}$	$+$	∞	$-$	0	$+$
نتیجه			دو ریشه مختلف العلامه دارد		

تمرین :

بازای مقادیر مختلف پارامتر m در وجود و علامت ریشه‌های هر یک از معادلات زیر بحث کنید :

۱۴۸۳ – ک: الف: ص۱۲۸ –

$$x^2-2(m+1)x-3m-5=0$$

حل:

$$\Delta'=(m+1)^2+3m+5=0$$

$$m^2+5m+6=0 \Longrightarrow m=-3 \text{ و } -2$$

$$+\frac{c}{a}=\frac{-3m-5}{1} \longrightarrow -3m-5=0 \longrightarrow m=\frac{-5}{3}$$

$$-\frac{b}{a}=\frac{2(m+1)}{1} \longrightarrow 2(m+1)=0 \longrightarrow m=-1$$

m	$-\infty$	-3		-2		$\frac{-5}{3}$		-1		$+\infty$
Δ	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{c}{a}$	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{-b}{a}$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
معادله	$x'<x''<0$		ریشه ندارد		$x'<x''<0$		$x'<0<x''$ $\lvert x'\rvert>\lvert x''\rvert$		$x'<0<x''$ $\lvert x'\rvert>\lvert x'\rvert$	
	$x'=x''$	-2	$x'=x''=-1$		$x'=0$ و $x''=1$				$x''=\sqrt{2}$ $x'=-\sqrt{2}$	

۱۴۸۴ — ۵: ب: ص۱۲۸ — $(m+1)x^2-(m-3)x-(m+3)=0$

حل:

$$\Delta=(m-3)^2+4(m+1)(m+3)=0 \longrightarrow \Delta=5m^2+10m+21=0$$

Δ جواب ندارد وعلامت آن همواره مثبت می‌باشد.

$$\frac{c}{a}=\frac{-(m+3)}{m+1}\left\{\begin{array}{l} m+3=0 \longrightarrow m=-3 \\ m+1=0 \longrightarrow m=-1 \end{array}\right.$$

$$-\frac{b}{a}=\frac{m-3}{m+1}\left\{\begin{array}{l} m-3=0 \longrightarrow m=3 \\ m+1=0 \longrightarrow m=-1 \end{array}\right.$$

m	$-\infty$	-3	-1	$+3$	$+\infty$
Δ	+	+	+	+	
$\frac{c}{a}$	−	0	+	∞ −	−
$-\frac{b}{a}$	+	+	∞ −	0	+
معادله	$x'<0<x''$	$x''>x'>0$	$x'<0<x''$ $\lvert x'\rvert>\lvert x''\rvert$	دو ریشه مختلف‌العلامه $x'<0<x''$ $\lvert x''\rvert>\lvert x'\rvert$	
	$x'=0$ و $x''=3$	$x''=0/5$ $x'=\infty$	$x'=-\sqrt{6}$ $x''=+\sqrt{6}$		

۱۴۸۵ — ۵: ج: ص۱۲۸ — $(m+1)x^2-4x-2(2m+1)=0$

حل:

$$\Delta'=4+2(m+1)(2m+1)$$

$$\Delta'=4m^2+6m+6$$

Δ' همیشه مثبت است

$$\frac{c}{a}=\frac{-4m-2}{m+1}=0 \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} -4m-2=0 \\ m=\frac{-1}{2} \\ m+1=0 \longrightarrow m=-1 \end{array}\right.$$

$$\frac{-b}{a}=\frac{4}{m+1}\left\{m+1=0 \longrightarrow m=-1\right.$$

m	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
Δ		$+$		$+$		$+$	
$\frac{c}{a}$		$-$	∞	$+$	0	$-$	
$-\frac{b}{a}$		$-$	∞	$+$		$+$	
معادله		$x'<0<x''$ $\lvert x'\rvert>\lvert x''\rvert$		دو ریشه مثبت $x''>x'>0$		$x'<0<x''$ $\lvert x'\rvert>\lvert x''\rvert$	
		$x'=\infty$ و $x''=0/5$				$x'=0$ و $x''=8$	

۱۴۸۶ - ک: د: ص۱۲۸ -

$$(3m-2)x^2-2(5m-2)x+3(2m+1)=0$$

حل:

$$\Delta'=(5m-2)^2-3(3m-2)(2m+1)=7m^2-17m+10$$

$$7m^2-17m+10=0 \longrightarrow m=1 \text{ و } \frac{10}{7}$$

$$\frac{c}{a}=\frac{3(2m+1)}{3m-2} \longrightarrow \begin{cases} 2m+1=0 \longrightarrow m=-0/5 \\ 3m-2=0 \longrightarrow m=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$-\frac{b}{a}=\frac{2(5m-2)}{3m-2} \longrightarrow m=\frac{2}{5} \text{ و } m=\frac{2}{3}$$

m	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{2}{5}$		$\frac{2}{3}$		1		$\frac{10}{7}$		$+\infty$
Δ		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\frac{c}{a}$		$+$	0	$-$		$-$	∞	$+$		$+$		$+$	
$-\frac{b}{a}$		$+$		$+$	0	$-$	∞	$+$		$+$		$+$	
معادله	دو ریشه مثبت $x''>x'>0$		$x'<0<x''$ $\lvert x'\rvert>\lvert x''\rvert$		دو ریشه مختلف العلامه $x'<0<x''$ $\lvert x'\rvert>\lvert x''\rvert$		دو ریشه مثبت $x''>x'>0$		ریشه ندارد		دو ریشه مثبت $x''>x'>0$		
	$x'=0$ و $x''=2/7$		دو ریشه قرینه دارد		$x'=\infty$ و $x''=\frac{8}{21}$		$x'=x''=3$		$x'=x''=\frac{9}{4}$				

۱۴۸۷ - ک: ه: ص۱۲۸ - $x^2-4(m-3)x+6(m^2-5m+6)=0$

حل: $\Delta'=4(m-3)^2-6(m^2-5m+6)=-2m^2+6m$

$\Delta'=0 \longrightarrow -2m^2+6m=0 \longrightarrow m=0$ و ۳

$\frac{c}{a}=\frac{6(m^2-5m+6)}{1}=0 \longrightarrow \begin{cases} m=3 \\ m=2 \end{cases}$

$-\frac{b}{a}=\frac{4(m-3)}{1}=0 \longrightarrow m=3$

m	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{c}{a}$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$-\frac{b}{a}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
معادله	جواب ندارد		دو ریشه منفی $x'<x''<0$		$x'<0<x''$ $\lvert x'\rvert>\lvert x''\rvert$			جواب ندارد	
			$x'=x''=-6$				$x'=x''=0$		

۱۴۸۸ - ک: و: ص۱۲۸ - $2x^2+2(m+1)x+m^2+m-12=0$

حل: $\Delta'=(m+1)^2-2(m^2+m-12)=-m^2+25$

$\Delta'=0 \longrightarrow -m^2+25=0 \longrightarrow m=\pm 5$

$\frac{c}{a}=\frac{m^2+m-12}{2} \longrightarrow m=3$ و -4

$\frac{-b}{a}=\frac{-2(m+1)}{2} \longrightarrow m+1=0 \longrightarrow m=-1$

m	$-\infty$		-5		-4		-1		3		5		$+\infty$
Δ'		$-$	0	$+$		$+$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$\frac{c}{a}$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-\frac{b}{a}$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$			
نتیجه	جواب‌دارد		دوریشه‌مثبت $x''>x'>0$		$x'<0<x''$ $\lvert x'\rvert<\lvert x''\rvert$		$x'<0<x''$ $\lvert x'\rvert>\lvert x''\rvert$		دوریشه‌منفی $x'>x'>0$		جواب ندارد		
	$x'=x''=2$		$x'=0$ و $x''=3$		دوریشه قرینه		$x'=0$ و $x''=-3$		$x'=x''=-3$				

۱۴۸۹ ـ ک. ز: ص ۱۲۸ ـ $x^2-2(m-2)x+2m^2-15m-8=0$

حل: $\Delta'=(m-2)^2-(2m^2-15m-8)=-m^2+11m+12$

$\Delta'=0\longrightarrow -m^2+11m+12=0\longrightarrow m=-1$ و 12

$\frac{c}{a}=2m^2-15m-8=0\longrightarrow m=8$ و $-0/5$

$-\frac{b}{a}=\frac{2(m-2)}{1}=0\longrightarrow m=2$

m	$-\infty$		-1		$-0/5$		2		8		12		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$\frac{c}{a}$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-\frac{b}{a}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
معادله	جواب ندارد		دوریشه‌منفی $0>x''>x'$		$x'<0<x''$ $\lvert x'\rvert<\lvert x''\rvert$		$x'<0<x''$ $\lvert x'\rvert>\lvert x''\rvert$		دوریشه‌مثبت $0<x'<x''$		جواب ندارد		
	$x'=x''=-3$		$x'=0$ و $x''=-5$				$x'=0$ و $x''=12$		$x'=x''=10$				

x' و $x''=\pm\sqrt{30}$

۱۴۹۰ ـ گ: ح: ص ۱۲۸ ـ

$$(m^2-5m+6)x^2-2(m^2-6m+8)x+m^2-7m+12=0$$

حل: $\Delta'=(m^2-6m+8)^2-(m^2-5m+6)(m^2-7m+12)$

$$\Delta'=0\to -m^2+6m-8=0\to m=4\text{ و }2$$

$$\frac{c}{a}=\frac{m^2-7m+12}{m^2-5m+6}=\frac{m-4}{m-2}\begin{cases}m=4\text{ و }m=2\end{cases}$$

$$-\frac{b}{a}=\frac{2(m^2-6m+8)}{m^2-5m+6}=\frac{2(m-4)}{m-3}\begin{cases}\to m=4\\ \to m=3\end{cases}$$

m	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
Δ'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{c}{a}$		$+$	∞	$-$		$-$	0	$+$	
$-\frac{b}{a}$		$+$		$+$	∞	$-$	0	$+$	
معادله		جواب ندارد		$x'<0<x''$ $\lvert x'\rvert>\lvert x''\rvert$		$x'<0<x''$ $\lvert x'\rvert>\lvert x''\rvert$		جواب ندارد	
			$x'=x''=\infty$		$x'=\infty$ و $x''=0$		$x'=x''=0$		

۱۴۹۱ ـ گ: ط: ص ۱۲۸ ـ

$$(m+1)x^2+(5m+8)x+10m+16=0$$

$$\Delta=(5m+8)^2-4(m+1)(10m+16)=-15m^2-24m$$

$$\Delta=0\to -15m^2-24m=0\to m=0\text{ و }-1/6$$

$$\frac{c}{a}=\frac{10m+16}{m+1}\begin{cases}\to m=-1/6\\ \to m=-1\end{cases}$$

$$\frac{-b}{a}=\frac{-(5m+8)}{m+1}\begin{cases}\to m=-1/6\\ \to m=-1\end{cases}$$

m	$-\infty$		$-1/6$		-1		0		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{c}{a}$		$+$	0	$-$	∞	$+$		$+$	
$-\frac{b}{a}$		$-$	0	$+$	∞	$-$		$-$	
معادله		جواب ندارد		$x'<0<x''$		$x''<x'<0$		جواب ندارد	
		$x'=x''=0$		$x'=\infty$ و $x''=-2$		$x'=x''=-4$			

۱۴۹۳ - ك: ی: ص۱۲۸-

$$3x+m+\frac{2x+11}{2x-1}=\frac{6x^2-x+4}{2x-3}$$

حل: اگر مخرج مشترك گرفته و خلاصه کنیم نتیجه میشود

$$(4m-12)x^2+8(2-m)x-29+3m=0$$

$$\Delta'=b'^2-ac=(8-2m)^2-(4m-12)(3m-29)=$$

$$\Delta=4(m^2+22m-71)=0\rightarrow m=-11\pm 8\sqrt{3}$$

$$-\frac{b}{a}=-\frac{16-8m}{4m-12}=\frac{2m-4}{m-3}\begin{cases}\rightarrow m=2\\ \rightarrow m=3\end{cases}$$

$$\frac{c}{a}=\frac{3m-29}{4m-12}\begin{cases}\rightarrow m=29\div 3\\ \rightarrow m=3\end{cases}$$

m	$-\infty$		$-11-8\sqrt{3}$		2		$-11+8\sqrt{3}$		3		$\frac{29}{3}$		$+\infty$
Δ		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{c}{a}$		$+$		$+$		$+$		$+$	∞	$-$	0	$+$	
$-\frac{b}{a}$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	∞	$+$		$+$	
معادله		دو ریشه مثبت $0<x'<x''$		ریشه ندارد		ریشه ندارد		دو ریشه منفی $x'<x''<0$		دو ریشه مختلف $x'<0<x''$		دو ریشه مثبت $0<x'<x''$	
		$x'=x''$		ریشه ندارد		$x'=x''$		$x''=\infty$ $x''=-2/5$		$x'=0$ و $x''=2/3$			

۱۴۹۳ - ک: یا: ص ۱۲۹-

$$mx^2+(2m-3)x+3m-6=0$$

$$\Delta=(2m-3)^2-4m(3m-6)=0 \Longrightarrow -12m^2+12m+9=0$$

$$-3m^2+3m+3=0 \Longrightarrow m=1/5 \text{ و } -0/5$$

$$\frac{c}{a}=\frac{3m-6}{m} \begin{cases} \rightarrow m=1/5 \\ \rightarrow m=0 \end{cases}$$

$$-\frac{b}{a}=\frac{-(2m-3)}{m} \begin{cases} \rightarrow m=1/5 \\ \rightarrow m=0 \end{cases}$$

m	$-\infty$	$-0/5$		0		$1/5$	$+\infty$
Δ	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$\frac{c}{a}$	$+$		$+$	∞	$-$	0	$+$
$-\frac{b}{a}$	$-$		$-$	∞	$+$	0	$-$
معادله	جواب ندارد		دو ریشه منفی $x''<x'<0$		$x'<0<x''$ $\lvert x'\rvert>\lvert x''\rvert$		جواب ندارد
		$x'=x''=3$		$x'=\infty$ و $x''=-2$		$x'=x''=0$	

۱۴۹۴ - ک: ب: ص ۱۲۹-

$$(m-3)x^2+(7m+6)x+10m-3=0$$

حل: $\Delta=(7m+6)^2-4(m-3)(10m-3)=9m^2+216m$

$$\Delta=0 \Longrightarrow 9m^2+216m=0 \Longrightarrow m=0 \text{ و } -24$$

$$\frac{c}{a}=\frac{10m-3}{m-3} \begin{cases} \rightarrow m=0/3 \\ \rightarrow m=3 \end{cases}$$

$$-\frac{b}{a}=\frac{-(7m+6)}{m-3} \begin{cases} \rightarrow m=-(6\div 7) \\ \rightarrow m=3 \end{cases}$$

m	$-\infty$		-۲۴		$-\frac{۶}{۷}$		۰		$۰/۳$		۲		$+\infty$
Δ	+		۰	−		−	۰	+		+		+	
$\frac{c}{a}$	+			+		+		+	۰	−	∞	+	
$-\frac{b}{a}$	−			−	۰	+		+		+	∞	−	
R	دو ریشه منفی $x'<x''<۰$			ریشه ندارد		ریشه ندارد		دو ریشه مثبت $x''>x'>۰$	$x'<۰<x''$	دو ریشه	$x'<x''<۰$	دو ریشه منفی	

$x'=x''$ ریشه ندارد $x'=x''$ $x'=۰$ و $x''=۳$ $x''=\infty$ و $x'=-۱$

۱۴۹۵ – گ. بد: ص ۱۲۹–

$$(۲m-۱)x^۲-(۱۳m+۷)x-(۷m+۱۰)=۰$$

$$\Delta=۲۲۵m^۲+۲۳۴m+۹$$

$$\Delta=۰\Longrightarrow ۲۲۵m^۲+۲۳۴m+۹=۰$$

Δ همیشه مثبت است زیرا ریشه ندارد و علامت آن موافق علامت a است.

$$\frac{c}{a}=\frac{-(۷m+۱۰)}{۲m-۱}\begin{matrix}\rightarrow\\ \rightarrow\end{matrix}\begin{cases}m=-(۱۰\div ۷)\\ m=۰/۵\end{cases}$$

$$-\frac{b}{a}=\frac{۱۳m+۷}{۲m-۱}\begin{matrix}\rightarrow\\ \rightarrow\end{matrix}\begin{cases}m=-(۷\div ۱۳)\\ m=۰/۵\end{cases}$$

m	$-\infty$		$-\frac{۱۰}{۷}$		$-\frac{۷}{۱۳}$		$۰/۵$		$+\infty$
Δ	+		+		+		+		
$\frac{c}{a}$	−		۰	+		+	∞	−	
$-\frac{b}{a}$	+			+	۰	−	∞	+	
R	دو ریشه مختلف العلامه $x'<۰<x''$		دو ریشه مثبت $۰<x'<x''$		دو ریشه منفی $x'<x''<۰$		دو ریشه مختلف العلامه $x'<۰<x''$		

$x'=۰$ و $x''=۳$ $x'=-x''$ $x''=\infty$ و $x'=-۱$

۱۴۹۶ — ش‌ص ۱۲۹ اولاً ـ پارامتر y در چه‌حدودی باید تغییر کند تا هر یك از دو معادله:

$$4x^2-6yx+y^2-18x+2y+1=0$$

$$x^2+6yx+y^2+2x+2y+5=0$$

جواب داشته باشند. ثانیاً ـ اگر y را مجهول و x را پارامتر بگیریم، x در چه‌حدود می‌تواند تغییر کند تا هر یك از معادلات فوق ریشه داشته باشند؟

حل: دلتای (مبین) هر دو معادله را تشکیل میدهیم و علامت هر دو Δ را در یك جدول تعیین می‌کنیم جایی که دلتای هر دو معادله مثبت و یا مساوی صفر است جواب مسئله است

$$4x^2-6x(y+3)+y^2+2y+1=0$$

$$\Delta_1'=[3(y+3)]^2-4(y^2+2y+1)=0$$

$$\Delta_1'=5y^2+46y+77=0\Longrightarrow y=-7 \text{ و } -2/2$$

$$x^2+2x(1+3y)+y^2+2y+5=0$$

$$\Delta_2'=(1+3y)^2+y^2-2y-5=0$$

$$\Delta_2=2y^2+y-1=0\Longrightarrow y=-1 \text{ و } 0/5$$

y	$-\infty$		-7		$-2/2$		-1		$0/5$		$+\infty$
Δ'_1		+	0	−	0	+		+		+	
Δ'_2		+		+	0	+	0	−	0	+	
معادله		هر دو معادله جواب دارند				هر دو معادله جواب دارند				هر دو معادله جواب دارند	

هر دو معادله جواب دارند	هر دو معادله جواب دارند	هر دو معادله جواب دارند	هر دو معادله جواب دارند

ثانیاً ـ معادلات به‌اینصورت نوشته‌می‌شود :

$$y^2+2y(1+3x)+x^2+2x+5=0$$

$$\Delta'_1=(1+3x)^2-x^2-2x-5=(+9x^2+6x-x^2-2x-5$$

$$\Delta'_1=2x^2+x-1=0\Longrightarrow x=-1 \text{ و } 0/5$$

$$y^2+2y(1-3x)+4x^2-18x+1=0$$

$$\Delta'_2=(1-3x)^2-4x^2+18x-1=0$$

$\Delta_2' = 5x^2 + 12x = 0 \Longrightarrow x = 0$ و $-2/4$

x	$-\infty$		$-2/4$		-1		0		$0/5$		$+\infty$
Δ'_1		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
Δ'_2		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
نتیجه		هردو معادله جواب دارد		مسأله جواب ندارد						هردو معادله جواب‌دارد	
			هردومعادله جواب‌دارد						هردو معادله جواب‌دارد		

تمرین

برحسب مقادیر مختلف m در وجود وعلامت ریشه‌های معادلات زیر بحث کنید :

۱۳۹۷ — $x^2 - 2(m-1)x + 2m + 1 = 0$

m	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		2		$+\infty$
نتیجه		$x' < 0 < x''$		$x' < x'' < 0$		ریشه‌وجود ندارد		$0 < x' < x''$			
			$x' = -2$ و $x'' = 0$		$x' = x'' = -1$				$x' = x'' = 2$		

۱۳۹۸ — $4(m+4)x^2 - 4(3m+10)x + 9m + 25 = 0$

m	$-\infty$		-4		$\frac{-25}{4}$		$\frac{-10}{3}$		0		$+\infty$
نتیجه		$x'' > x' > 0$		$x'' > 0 > x'$		$x' < x'' < 0$		$x'' > x' > 0$		ریشه ندارد	
		$x' = \infty$ ، $x'' = \frac{11}{8}$		$x' = 0$ و $x'' = \frac{35}{9}$		x' و $x'' = \pm\frac{\sqrt{30}}{4}$		$x' = x'' = \frac{5}{4}$			

۱۴۹۹ — $(m-3)x^2-2(3m-4)x+7m-6=0$

m	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$\frac{6}{7}$		$\frac{4}{3}$		3		$+\infty$
نتیجه	$x''>x'>0$		ریشه ندارد		$x''>x'>0$		$x''>0>x'$		$x''>0>x'$		$x''>x'>0$		
	$x'=x''=2$		$x'=x''=1$		و $x'=0$ ، $x''=\frac{4}{3}$		x' و $x''=\frac{\pm 6\sqrt{5}}{5}$		و $x'=\infty$ ، $x''=1/5$				

۱۵۰۰ — $3mx^2-2(3m-2)x+3(m-1)=0$

m	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
نتیجه	$x''>x'>0$		$x''>0>x'$		$x''>0>x'$		$x''>x'>0$		ریشه حقیقی ندارد		
	$x'=\infty$ ، $x''=\frac{3}{4}$		x' و $x''=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$		و $x'=0$ ، $x''=\frac{2}{3}$		$x'=x''=\frac{1}{2}$				

۱۵۰۱ — $(m-2)x^2-2mx+2m-3=0$

m	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		6		$+\infty$
نتیجه	ریشه وجود ندارد		$x'<x''<0$		$x'<0<x''$		$0<x'<x''$		ریشه وجود ندارد		
	$x'=x''=-1$		و $x'=-6$ ، $x''=0$		$x'=x''=\frac{1}{4}$		$x'=x''=\frac{3}{2}$				

۱۵۰۲ — $(m^2-3m+2)x^2+(m-2)x+1=0$

m	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		2		$+\infty$
نتیجه	ریشه وجود ندارد		$0<x'<x''$		$x'<0<x''$		معادله ریشه ندارد		
			$x'=x''=\frac{3}{2}$		$x=1$		معادله غیر ممکن		

۱۵۰۳ — $(m+2)x^2-4mx+1-m=0$

m	$-\infty$	-3	-1	$0/6$	1	$+\infty$
نتیجه	$x'<0<x''$	$x'<x''<0$	ریشه ندارد	$0<x'<x''$	$x'<0<x''$	
	$x=-\frac{1}{3}$	$x'=x''=-1$	$x'=x''=\frac{1}{3}$	$x''=1$ و $x'=0$		

قاعده ۱۷۵

شرط اینکه یك سه‌جمله‌ای درجه دوم برحسب x بازاء مقادیر مختلف x همواره بزرگتر از صفر باشد این است که:
$\Delta<0$ و $a>0$ باشد

قاعده ۱۷۶

شرط اینکه یك سه‌جمله‌ای درجه‌دوم برحسب x بازاء مقادیر مختلف x همواره کوچکتر از صفر باشد این است که:
$\Delta<0$ و $a<0$ باشد

۱۵۰۴ — بازاء چه مقادیر m نامعادله زیر بازاء جمیع مقادیر x برقرار است
$(2-m)x^2+2mx+2-m>0$

حل: باید $\Delta'<0$ و $a>0$ باشد.

$\Delta'=b'^2-ac=m^2-(2-m)(2-m)=4m-4$

$\Delta'=0\Longrightarrow 4m-4=0\Longrightarrow m=1$ و $a=2-m=0\Longrightarrow m=2$

m	$-\infty$	1		2	$+\infty$
Δ'	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$
a	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$
نتیجه	مسئله دارای جواب است		مسئله جواب ندارد		مسئله جواب ندارد

۱۵۰۵ — بازاء چه مقادیری از m سه جمله زیر بازاء مقادیر مختلف x همواره مثبت است.

حل: $(m-1)x^2+2(m-1)x+2m-5>0$

$\Delta'=b'^2-ac=(m-1)^2-(m-1)(2m-5)$

$\Delta'=(m-1)(-m+4)=0\Longrightarrow m=1$ و 4

$a=m-1=0\Longrightarrow m=1$

m	$-\infty$	1		4	$+\infty$
Δ'	$-$	0	$+$	0	$-$
a	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$
نتیجه	مسئله جواب ندارد				مسئله جواب دارد

جدول مقایسه یك‌عدد با ریشه‌های معادله درجه‌دوم

بطورخلاصه ، وضع یك‌عدد، مانند α نسبت به‌ریشه‌های معادله درجه‌دوم $f(x)=ax^2+bx+c=0$ مطابق یکی ازحالت‌های زیر می‌باشد.

۱ — $\Delta<0$

معادله ریشه ندارد ؛

۲ — $\Delta=0$ و $\alpha+\frac{b}{2a}=0$

α ریشه مضاعف است $x'=x''=\alpha$

۳ — $\Delta=0$ و $\alpha+\frac{b}{2a}>0$

α ازریشه مضاعف بزرگتراست $\alpha>x''=x'$

۴ — $\Delta=0$ و $\alpha+\frac{b}{2a}<0$

α ازریشه‌مضاعف کوچکتراست $\alpha<x'=x''$

۵ — $\alpha+\frac{b}{2a}>0$ و $a\neq 0$ و $af(\alpha)=0$ و $\Delta>0$

α ریشه بزرگتراست $\alpha=x''>x'$

۶ $\Delta > 0$ و $af(\alpha) = 0$ و $a \neq 0$ و $\alpha + \frac{b}{2a} < 0$

α ریشه کوچکتر است $\alpha = x' < x''$

۷ $\Delta > 0$ و $af(\alpha) = 0$ و $a = 0$

یکی از ریشه‌ها برابر ∞ و ریشه دیگر برابر $\frac{-c}{b}$ است.

۸ $\Delta > 0$ و $af(\alpha) = 0 \Longrightarrow a = 0$ و $f(\alpha) = 0$

یکی از ریشه‌ها ∞ و ریشه دیگر برابر α میباشد.

۹ $\Delta > 0$ و $af(\alpha) < 0$

α بین ریشه‌هاست $x'' > \alpha > x'$

۱۰ $\Delta > 0$ و $af(\alpha) > 0$ و $\alpha + \frac{b}{2a} > 0$

α از دو ریشه بزرگتر است $\alpha > x'' > x'$

۱۱ $\Delta > 0$ و $af(\alpha) > 0$ و $\alpha + \frac{b}{2a} < 0$

α از دو ریشه کوچکتر است $\alpha < x' < x''$

تذکر: اگر سه جمله‌ای درجه‌دوم را مساوی صفر قرار دهیم و ریشه نداشته باشد یا فقط یك ریشه مضاعف داشته باشد علامت سه جمله‌ای درجه دوم همواره موافق علامت درجه‌دوم است اگر دارای دو ریشه باشد علامت سه جمله‌ای در داخل دو ریشه مخالف علامت درجه‌دوم و در خارج دو ریشه موافق علامت درجه دوم است.

قاعده ۱۷۷ شرط اینکه عدد α بین ریشه‌های معادله باشد این است که: $af(\alpha) < 0$ باشد.

تمرین ۱: عدد ۱ — را باریشه معادلات زیر مقایسه کنید

۱۵۰۶ — ک: الف: ص۱۳۵ — $x^2-8x+3=0$

حل: $\Delta'=13>0 \qquad af(-1)=1(1+8+3)=+12$

$$\alpha+\frac{b}{2a}=-1-3=-5$$

پس ۱ـ خارج دوریشه وازهردو کوچکتراست یعنی $-1<x'<x''$

۱۵۰۷ — ک: ب: ص۱۳۵ — $2x^2+12x+5=0$

حل: $\Delta'=+26\Rightarrow\Delta'>0$

$af(-1)=2(2-12+5)=-10\Rightarrow x'<-1<x''$

۱۵۰۸ — ک: ج: ص۱۳۵ — $-3x^2-10x+17=0$

حل: $\Delta'=+76>0 \quad af(\alpha)=-3(-3+10+17)=-72<0$

بنابراین داریم: $x'<-1<x''$

۱۵۰۹ — ک: د: ص۱۳۵ — $5x^2-15x+11=0$

حل: $\Delta=+5>0 \quad af(-1)=5(5+15+11)=155>0$

$$\alpha+\frac{b}{2a}=-1+(-1/5)=-2/5<0$$

لذا خواهیم داشت: $-1<x'<x''$

تمرین ۲ـ هریك از اعداد ۳و۱و۲و۰و۳ — را با ریشه‌های هریك از معادلات زیرمقایسه ودرنتیجه وضع ریشه‌های هریك ازمعادلات را نسبت به پنج عددفوق معین کنید.

۱۵۱۰ — ک: الف: ص۱۳۵ — $x^2-2x-20=0$

حل: چون $\Delta'=21>0$ است پس معادله دوریشه‌داردوبایدهریك از اعداد فوقرا با ریشه‌های معادله مقایسه کرد.

$af(3)=1(9-6-20)=-17<0\Rightarrow x''>3>x'$

$af(1)=1(1-2-20)=-21<0\Rightarrow x''>1>x'$

$af(2)=1(4-4-20)=-20<0\Rightarrow x''>2>x'$

$af(0)=1(0-0-20)=-20<0\Rightarrow x''>0>x'$

$af(-3)=1(9+6-20)=-5<0\Rightarrow x''>-3>x'$

پس بطورکلی: $x''>3>2>1>0>-3>x'$ است

۱۵۱۱ ـ ک: ب: ص۱۳۵ — $2x^2-3x-9=0$

حل: اگر مانند مسئله قبل عمل نمائیم نتیجه زیر بدست می‌آید.

$$3=x''>2>1>0>x'>-3$$

۱۵۱۲ – ک: ج: ص۱۳۵– $-3x^2+8x+2=0$

حل: چون $\Delta'=22>0$ است پس اگر مطابق مسئله قبل عمل نمائیم نتیجه میشود :

$$3>x''>2>1>0>x'>-3$$

۱۵۱۳ – ک: د: ص۱۳۵– $2x^2-5x+1=9$

حل. چون $\Delta=89>0$ میباشد پس اگر مطابق مسئله قبل عمل نمائیم نتیجه میشود:

$$3>x''>2>1>0>x'>-3$$

۱۵۱۴ – ک: الف: ص۱۳۵– ریشه‌های معادله $x^2-(2m+3)x+m^2=0$ را با عدد ۳ مقایسه کنید.

حل:

$$\Delta=(2m+3)^2-4m^2=12m+9$$

$$\Delta=0\rightarrow 12m+9=0\rightarrow m=-0/75$$

$$af(3)=1(9-6m-9+m^2)=m^2-6m$$

$$af(3)=0\rightarrow m^2-6m=0\rightarrow m=0 \text{ و } 6$$

$$3+\frac{b}{2a}=3+\frac{-(2m+3)}{2}=\frac{3-2m}{2}=0\rightarrow m=1/5$$

m	$-\infty$	$-0/75$	0	$1/5$	6	$+\infty$
Δ	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$af(3)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$+$
$3+\frac{b}{2a}$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
نتیجه	جواب ندارد	$x'<x''<3$	$x'<3<x''$	$x'<3<x''$	$3<x'<x''$	
	$x'=x''<3$	$x'<x''=3$	$x'<3<x''$	$3=x'<x''$		

۱۵۱۵ – ک: ب: ص۱۳۵ـ ریشه‌های معادله $x^2+(m+4)x+m+7=0$ را با عدد ۲ مقایسه کنید.

حل:

$$\Delta=(m+4)^2-4(m+7)=m^2+4m-12$$

$$\Delta=0\to m^2+4m-12=0\to m=2,-6$$

$$af(2)=3m+19=0\to m=-(19\div 3)$$

$$2+\frac{b}{2a}=2+\frac{m+4}{2}=\frac{m+8}{2}=0\to m=-8$$

m	$-\infty$	-8	$-\frac{19}{3}$	-6	2	$+\infty$
Δ	+	+	+	0 −	0	+
$af(2)$	−	−	0 +	+	+	+
$2+\frac{b}{2a}$	−	0 +	+	+	+	+
نتیجه	$x'<2<x''$	$x'<2<x''$	$x'<x''<2$	جواب ندارد	$x'<x''<2$	
	$x'<2<x''$	$x'<x''=2$	$x'=x''<2$	$x'=x''<2$		

۱۵۱۶ – ک: ج ص۱۳۵ـ با عدد ۳ – $mx^2-2(m+2)x+m+3=0$

حل:

$$\Delta'=(m+2)^2-m(m+3)=m+4=0\to m=-4$$

$$af(-3)=m(16m+15)=0\to m=0 \text{ و } -(15\div 16)$$

$$-3+\frac{b}{2a}=-3-\frac{m+2}{m}=\frac{-4m-2}{m}\to\begin{cases}m=-0/5\\ m=0\end{cases}$$

m	$-\infty$	-4	$-\frac{15}{16}$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
Δ'	−	0 +	+	+	+	+
$af(-3)$	+	+	0 −	−	0	+
$-3+\frac{b}{2a}$	−	−	−	0 +	∞	−
نتیجه	جواب ندارد	$-3<x'<x''$	$x'<-3<x''$	$x'<-3<x''$	$-3<x'<x''$	
	$x'=x''>-3$	$x'=-3<x''$	$x'<-3<x''$			
					$x'=\infty$ و $x''=0/75>-3$	

۱۵۱۷ – گ : د : ص۱۳۵– با عدد ۱ –

$$mx^2+2(3m-2)x+4m-3=0$$

$$\Delta'=(3m-2)^2-m(4m-3)=5m^2-9m+4=0$$

$$\Delta'=0\to 5m^2-9m+4=0\to m=1 \text{ و } 0/8$$

$$af(-1)=m(-m+1)=0\to m=0 \text{ و } 1$$

$$-1+\frac{b}{2a}=-1+\frac{3m-2}{m}=\frac{2m-2}{m}\begin{matrix}\to\\ \to\end{matrix}\begin{cases}m=1\\ m=0\end{cases}$$

m	$-\infty$		0		0/8		1		$+\infty$
Δ		+	|	+	0	−	0	+	
$af(-1)$		−	0	+	|	+	0	−	
$-1+\frac{b}{2a}$		+	∞	−	|	−	0	+	
نتیجه		$x'<-1<x''$		$-1<x'<x''$		جواب ندارد		$x'<-1<x''$	
نتیجه		$x'=\infty$ و $x''=0/75>-1$		$x'=x''>-1$				$x'=x''=-1$	

۱۵۱۸ – گ : ه : ص ۱۳۵– با عدد ۱ –

$$(m+1)x^2-2(m+2)x+2m=0$$

$$\Delta'=(m+2)^2-2m(m+1)=-m^2+2m+4$$

$$\Delta'=0\to -m^2+2m+4=0\to m=1+\sqrt{5} \text{ و } 1-\sqrt{5}$$

$$af(-1)=(m+1)(5m+5)=0\to m=-1 \text{ و } -0/4$$

$$-1+\frac{b}{2a}=-1+\frac{-(m+2)}{m+1}=\frac{-2m-3}{m+1}\begin{matrix}\to\\ \to\end{matrix}\begin{cases}m=-1/5\\ m=-1\end{cases}$$

m	$-\infty$		$-1/5$		$1-\sqrt{5}$		-1		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
Δ'		−		−	0	+		+	0	−	
$af(-1)$		+		+		+	0	+		+	
$-1+\frac{b}{2a}$		−	0	+		+	∞	−		−	
نتیجه		ریشه ندارد				$-1>x''>x'$		$x''>-1>x'$		ریشه ندارد	
				$x'=x''<-1$			$x''=\infty$ و $x'=-1$		$x'=x''>-1$		

قاعده ۱۷۸ | برای اینکه عدد α بین ریشه‌های معادله باشد باید $af(\alpha)<0$ باشد .

بازای چه مقادیر m عدد ۳ بین ریشه‌های یکی از معادلات زیر است.

۱۵۱۹ — ک: الف: ص۱۳۵ـ $4x^2-(m+1)x+2=0$

حل: $af(3)<0 \rightarrow 4(36-3m-3+2)<0$

$4(-3m+35)<0 \rightarrow -3m<-35 \rightarrow m>\frac{35}{3}$

۱۵۲۰ — ک. ب: ص۱۳۵ـ $2mx^2-8mx+5+m=0$

حل: باید $m\neq 0$ و $af(3)<0$ باشد.

$af(3)=2m(-5m+5)=0 \rightarrow m=0$ و ۱

$m<0$ و $m>1$ جواب مسئله است

۱۵۲۱ — اگر در معادله درجه دوم $f(x)=0$ به‌جای x عدد α بگذارید چه‌وقت از روی علامت $f(\alpha)$ خواهید گفت که معادله حتماً ریشه‌دارد؟ ثابت کنید که هر یک از معادله‌های زیر دارای ریشه‌است.

حل: میدانیم اگر $af(\alpha)<0$ باشد معادله‌دارای دو ریشه خواهد بود لذا در معادلات زیر باید ثابت کنیم که $af(\alpha)$ از صفر کوچکتر نمیباشد.

۱۵۲۲ — ک: الف: ص۱۳۶ـ $(x-1)(x+3)-9=0$

حل: از این معادله می‌توان دید که اگر $af(1)$ و $af(-3)$ را تشکیل دهیم هر دو برابر ۹— می‌شوند یعنی داریم $af(1)=-9$ $af(-3)=-9$

پس معادله دارای دو ریشه می‌باشد و اعداد ۱ و ۳— بین دو ریشه میباشند.

۱۵۲۳ — ک: ب: ص۱۳۶ـ $(x-a)(x-b)-c^2=0$

با استدلالی مشابه مسئله قبل داریم $af(a)=-c^2$ $af(b)=-c^2$

چون مقدار c^2 همواره مثبت است پس $-c^2$ همواره منفی و معادله دارای دو جواب است و a و b بین دو ریشه واقعند.

۱۵۲۴ — ک: ج: ص۱۳۶ـ $(x+2)(x-5)+x^2-9=0$

حل: $af(-2)=-5$

چون $af(-2)$ همواره منفی است پس معادله دو جواب دارد و عدد ۲— بین دو جواب واقع است.

۱۵۲۵ — گ: د: ص۱۳۶ـ ثابت کنید که معادلهٔ زیر دارای دو ریشه است.

$$(x-1)(x-4)+(x-2)(x-5)=0$$

حل: فعلا مقادیر ۵و۲و۴و۱ را در معادله می‌گذاریم و مشاهده می‌شود.

$$af(2)=-2 \quad \text{و} \quad af(4)=-2$$

پس نتیجه می‌گیریم که معادله دارای دو جواب است و اعداد ۲و۴ بین آندو واقعند.

۱۵۲۶ — معادله $x^2-2(a+2)x+2a-1=0$ مفروض است با راء چه مقادیری از a اعداد ۱و۳ هر دو بین ریشه‌های معادله می‌باشند.

حل: باز اء مقادیری از a که هم $af(1)$ و هم $af(3)$ کوچکتر از صفر باشد مسئله دارای جواب است.

$$\begin{cases} af(1)=1(1-2a-4+2a-1)=-4 \\ af(3)=1(9-6a-12+2a-1)=-4a-4 \end{cases}$$

چون $af(1)$ همواره منفی است پس باید فقط $af(3)<0$ باشد.

$$-4a-4<0 \rightarrow -4a<4 \rightarrow a>-1$$

۱۵۲۷ — حدود k را چنان تعیین کنید که دو عدد ۱ — و ۲ هر دو بین ریشه‌های معادله $kx^2+2(k+1)x-11+k=0$ باشد.

حل: باید هم $af(-1)$ و هم $af(2)$ هر دو کوچکتر از صفر باشند.

$$\begin{cases} af(-1)=k(k-2k-2-11+k)=-13k \\ af(2)=k(4k+4k+4-11+k)=k(9k-7) \end{cases}$$

k	$-\infty$		0		7		$+\infty$
$af(-1)$		+	0	−		−	
$af(2)$		+	0	−	0	+	
نتیجه				مسئله دارای جواب است			

پس باز اء $0<K<9$ مسئله دارای جواب است.

۱۵۲۸ — حدود k را چنان تعیین کنید که اعداد ۳ — و ۳و۱ — و ۳و۰و۵ همه بین ریشه‌های معادله زیر باشد.

$$(k+1)x^2-2(k-2)x+30=0$$

حل: اگر بزرگترین و کوچکترین عدد یعنی ۵و۳ — بین ریشه باشند یعنی $x''>5>-3>x'$ واقع باشد اعداد دیگر هم بین این دو ریشه واقع می‌شوند.

$$af(5)=(k+1)(25k+25-10k+20+30)=(k+1)(15k+75)$$

$$af(-3)=(k+1)(9k+9+6k-12+30)=(k+1)(15k+27)$$

k	$-\infty$		-5		$-1/8$		-1		$+\infty$
$af(5)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$af(-3)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
نتیجه					مسئله جواب‌دارد				

پس بازاء $-1/8 > k > -1$ مسئله جواب‌دارد

۱۵۲۹ — معادله $y^2+xy-1=0$ مفروض‌است هرگاه x پارامتر و y ریشه‌معادله فوق باشد ریشه‌های معادله مفروض را بازاء مقادیر پارامتر x با دو عدد $+1$ و -1 مقایسه کنید

شهریور ۱۳۳۶

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
نتیجه		$-1<y'<1<y''$				$y'<-1<y''<1$			

$$\boxed{y'=-1 \text{ و } y''=1}$$

۱۵۳۰ — ریشه‌های معادله زیر را بر حسب مقادیر مختلف پارامتر m با اعداد صفر و $+2$ مقایسه کنید.

$$mx^2-2(m+1)x+m+5=0$$

m	$-\infty$		-5		-1		0		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
نتیجه		$x'<0<x''$		$x'<0=x''$		$x'<0<x''$		$x'=0<x''$		$x'<x''<0$		معادله ریشه ندارد	

۱۵۳۱ — بازاء مقادیر مختلف پارامتر m اعداد ۱ و ۲ را با ریشه‌های معادله زیر مقایسه کنید.

$$x^2-2mx+2m^2-4m+3=0$$

m	$-\infty$		1		$2-\frac{\sqrt{2}}{2}$		2		$2+\frac{\sqrt{2}}{2}$		3		$+\infty$
نتیجه	معادله ریشه ندارد		$x_1=x_2=1$	$x_2>1>x_1$	$x_1=x_2=2-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x_2>2>x_1>1$	$x_1=x_2=2$	$x_2>2>x_1>1$	$x_1=x_2=2+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x_2>1>x_1$	$x_1=x_2=3$		معادله ریشه ندارد

۱۵۳۲ — بازاء مقادیر مختلف پارامتر m اعداد $1+$ و $1-$ را با ریشه‌های معادله زیر که در آن a و b معلوم هستند و $a>b$ می‌باشد مقایسه کنید.

$$a(x+1)^2+b(x-1)^2-2m(x^2+1)=0$$

m	$-\infty$		b		$\frac{a+b}{2}$		a		$+\infty$
نتیجه	معادله ریشه ندارد	$1>x''>-1>x'$		$x''>1>x'>-1$				معادله ریشه ندارد	
			$-1=x''=x'$		$0=x'=x''$		$1=x''=x'$		

۱۵۳۳ — بازاء مقادیر مختلف m اعداد $1-$ و 5 را با ریشه‌های معادله زیر مقایسه کنید

$$(m+2)x^2+12x+10-16m=0$$

m	$-\infty$		$-\frac{40}{3}$		$-\frac{16}{5}$		-2		0		2		$+\infty$
نتیجه		$5>x''>1>x'$		$x''=5>x'$		$x''>5>1>x'$		$1>x''>-1>x'$		$5>x''>1>x'$		$5>x''>1>x'$	

۱۵۳۴ — بازاء مقادیر مختلف پارامتر λ اعداد -1 و $+1$ را با ریشه های معادله زیر مقایسه کنید.

$$(2\lambda+2)x^2+(\lambda-1)x+4\lambda+2=0$$

m	$-\infty$		-1		$-\frac{2}{3}$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{3}{7}$		$-\frac{23}{47}$		$+\infty$
نتیجه	معادله ریشه ندارد		$x_1=-1=x_2$		$x_1<-1<x_2$		$x_1<-1=x_2=-\frac{1}{2}$		$x_1<x_2<-1$		$x_1=x_2=-\frac{5}{4}$		معادله ریشه ندارد

۱۵۳۵ ـ ک: ص ۲۶۰ ـ تحقیق کنید که بازاء چه مقادیر m ریشه‌های معادله زیر کوچکتر از اعداد -1 و 2 میباشند $(m-3)x^2-mx+4m-1=0$

حل: باید $x'<x''<-1<2$ باشد چون $-1<2$ میباشد پس کافیست $x'<x''<-1$ باشد پس باید $\Delta>0$ و $af(-1)>0$ و $-1+\frac{b}{2a}<0$ باشد

$$\Delta=m^2-4(m-3)(4m-1)=-3(5m^2-14m+4)$$

$$\Delta=0\Longrightarrow 5m^2-14m+4=0\Longrightarrow m=\frac{7\pm\sqrt{29}}{5}$$

$$af(-1)=(m-3)(6m-4)=0\Longrightarrow m=3 \text{ و } 2\div 3$$

$$-1+\frac{b}{2a}=\frac{-3(m-2)}{2(m-3)}\Longrightarrow\begin{cases}m=2\\ m=3\end{cases}$$

m	$-\infty$		$\frac{7-\sqrt{29}}{5}$		$\frac{2}{3}$		2		$\frac{7+\sqrt{29}}{5}$		3		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$af(-1)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$-1+\frac{b}{2a}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	∞	$-$	
نتیجه	مسئله جواب ندارد		مسئله جواب دارد		مسئله جواب ندارد								

۱۵۳۶ — ک. ۵: ص۱۳۹ـ بازای چه مقادیر m عدد ۳ داخل ریشه‌ها و عدد ۲ — کوچکتر از ریشه‌های معادله $(m+1)x^2+2mx-1=0$ می‌باشد.

حل: باید رابطه $x''>2>x'>-2$ برقرار باشد پس باید:

$$-2+\frac{b}{2a}<0 \text{ و } af(-2)>0 \text{ و } af(2)<0 \text{ و } \Delta>0$$

باشد بنابراین علامت هر کدام از عبارات فوق را در جدولی بدست می‌آوریم در قسمتی از جدول که علامتهای بالا برقرار است مسئله دارای جواب است.

جواب: $\frac{-8}{15}>m>-1$

لطفاً عملیات را انجام داده و جدول را خودتان رسم کنید.

۱۵۳۷ ـ ک: ۶: ص۱۳۹ـ بازای چه مقادیر m ریشه‌های معادله زیر محصورین ۱+ و ۱— است.

$$x^2-(m+1)x+2m-3=0$$

حل: یعنی باید رابطه $1>x''>x'>-1$ برقرار باشد یعنی باید $\Delta>0$ و $af(1)>0$ و $af(-1)>0$ و $1+\frac{b}{2a}>0$ و $-1+\frac{b}{2a}<0$ باشد بنابراین علامت هر کدام از عبارات فوق را بدست آورده و در جدولی قرار میدهیم در قسمتی از جدول که علامتهای فوق برقرار است مسئله دارای جواب است

۱۵۳۸ ـ ک: ۷: ص۱۳۹ـ بازای چه مقادیر m دو عدد ۳ و ۱ بزرگتر از ریشه‌های این معادله می‌باشند.

$$mx^2+2(m-3)x+m-1=0$$

حل: باید رابطه $3>x''>x'>1$ برقرار باشد و چون $3>1$ میباشد پس کافیست که $1>x''>x'$ باشد بنابراین باید $\Delta>0$ و $af(1)>$ و $1+\frac{b}{2a}>0$ باشد.

بنابراین علامت هر یک از عبارات Δ و $af(1)$ و $1+\frac{b}{2a}$ را در جدولی بدست می‌آوریم در قسمتی از جدول که علامتهای فوق برقرار است مسئله دارای جواب است:

جواب: $m<0$

۱۵۳۹ ـ ک. ۸: ص۱۳۹ـ بازای چه مقادیر m ریشه‌های معادله زیر بزرگتر از ۱ و

۱ — می‌باشند.

$(m-1)x^2-2mx+3m=0$

حل: بایدرابطه $x''>x'>1>-1$ باشدوچون $-1<1$ می‌باشد پس کافیست که $x''>x'>-1$ باشد بنابراین باید $\Delta>0$ و $af(-1)>0$ و $1+\frac{b}{2a}<0$ باشد

بنابراین علامت‌هریك ازعبارات Δ و $af(-1)$ و $1+\frac{b}{2a}$ را درجدولی بدست‌می‌آوریم درقسمتی ازجدول که علامتهای فوق‌برقراراست مسئله دارای‌جواب است

جواب: $1/5>m>1$

مقایسه دوعدد باریشه‌های معادله‌درجه‌دوم

قاعده ۱۷۹ شرط اینکه فقط یك‌ریشه معادله بین‌دوعدد α و β باشد این‌است که $f(\alpha)\times f(\beta)<0$ باشد

تمرین: تبیین‌کنید بارای چه‌مقادیر m هریك ازمعادلات زیر دارای یك‌ریشه‌واقع بین اعداد ۲+ و ۴ — می‌باشد.

۱۵۴۰ ـ ك الف: ص۱۲۸ ـ $x^2+(m-1)x+1=0$

حل: $f(2)\times f(-4)<0$

$(2m+3)(-4m+21)<0 \Rightarrow -8m^2+30m+63<0$

جواب: $m<-1/5$ و $m>5/25$

۱۵۴۱ ـ ك: ب: ص۱۲۸ ـ $2mx^2-3x+m-1=0$

حل: $f(2)\times f(-4)<0 \Rightarrow (8m-7)\times 2m(33m+11)>0$

جواب: $\frac{7}{9}>m>\frac{-1}{3}$

۱۵۴۲ ـ ك: ج: ص۱۳۸ $(m+1)x^2-2mx-4=0$

حل: $f(2)\times f(-4)=0$

چون‌حاصلضرب $f(2)\times f(-4)$ صفرشد پس Δ منفی‌نمی‌شود لذا ریشه‌های معادله بین دو فوق‌نخواهدبودیعنی خودعدد ۲ بارای‌تمام‌مقادیر m یکی‌ازریشه‌های معادله خواهدبود.

۱۵۴۳ ـ ك: د: ص ۱۳۸ ـ $x^2-2mx+2m^2-2m+5=0$

حل: $\Delta'=m^2-2m^2+2m-5=0 \Rightarrow \Delta'<0$

چون مبین معادله همواره منفی است لذا معادله فوق‌بازاهیچیك ازمقادیر m دارای جواب نیست.

تمرین: بدون تشکیل دادن مبین، بوسیله مقایسه ریشه‌ها با دو عدد ثابت کنید هر یک از معادلات زیر دارای دو ریشه می‌باشد.

۱۵۴۴ـ ک: الف: ص۱۳۹ $(x^2-1)+mx(x-3)=0$

حل: $f(0)=-1$ و $f(-2)=+8$

$f(0)\times f(-2)=-1\times 8=-8<0$

پس معادله همواره دوجواب دارد ویکی ازجوابها بین ۳و۰ قرار دارد

۱۵۴۵ـ ک: ب: ص۱۳۹ـ $x(x+2)+m(x^2-1)=0$

حل: $x(x+2)+m(x-1)(x+1)=0$

$f(1)=+5$ و $f(-1)=-2$

$f(1)\times f(-1)=-15<0$

لذا معادله دارای دوجواب می‌باشد ویکی ازجوابها بین ۱+و۱ـ واقع‌است.

۱۵۴۶ـ ک: ج:ص۱۳۹ـ $x^2-3x+2-3m(2x-3)=0$

حل: $(x-2)(x-1)-3m(2x-3)=0$

$f(2)=-3m$ و $f(1)=+2m$

$f(2)\times f(1)=-9m^2<0$

معادله دوجواب‌دارد یکی ازجوابها بین ۱+و۲+ واقع است.

تمرین: ریشه‌های معادلات زیر را بازاء مقادیر مختلف پارامتر با دو عدد ۳و۱ مقایسه کنید.

۱۵۰۷ـ ک: الف: ص۱۳۹ـ $x^2-3mx+2m+1=0$

$\Delta=9m^2-8m-2=0\Longrightarrow m=1/22$ و $-0/35$

$af(1)=-m+2=0\Longrightarrow m=2$

$1+\frac{b}{2a}=1+\frac{-3m}{2}=0\Longrightarrow m=\frac{2}{3}$

$$af(۳) = -۷m + ۱۰ = ۰ \Longrightarrow m = \frac{۱۰}{۷}$$

$$۳ + \frac{b}{۲a} = ۳ - \frac{۳m}{۲} = \frac{۶ - ۳m}{۲} = ۰ \Longrightarrow m = ۲$$

m	$-\infty$		$-۰/۳۵$		$\frac{۲}{۳}$		$۱/۲۴$		$\frac{۱۰}{۷}$		۲		$+\infty$
Δ	+		۰	−		−	۰	+		+	۰	+	
af(۱)	+			+	۰	+	۱	+		+	۰	−	
$۱ + \frac{b}{۲a}$	+			+	۰	−		−		−	۰	−	
af(۳)	+			+		+		+	۰	−		−	
$۳ + \frac{b}{۲a}$	+			+		+		+		+	۰	−	
نتیجه	$x \leq ۲$ یا $x \geq ۳$		$x \leq ۲$ یا $x \geq ۳$		جواب ندارد		$x \leq ۲$ یا $x \geq ۳$		$x \leq ۲$ یا $x \geq ۳$		$x \leq ۲$ یا $x \geq ۳$		$x \leq ۲$ یا $x \geq ۳$

۱۵۴۸- ک: ب: ص۱۳۹ $mx^۲ + ۲(۳m - ۲)x + ۴m - ۳ = ۰$

حل: $\Delta' = ۵m^۲ - ۹m + ۴ = ۰ \Longrightarrow m = ۱ و ۰/۸$

$af(۱) = m(۴۱m - ۷) = ۰ \Longrightarrow m = ۰$ و $۷ \div ۱۱ = ۰/۶۳$

$$۱ + \frac{b}{۲a} = ۱ + \frac{۳m - ۱}{m} = \frac{۴m - ۲}{m} \Longrightarrow m = ۰/۵ \Longrightarrow m = ۰$$

$af(۳) = m(۳۱m - ۱۵) = ۰ \Longrightarrow m = ۰$ و $۱۵ \div ۳۱ \neq ۰/۴۸$

$$۳ + \frac{b}{۲a} = ۳ + \frac{۳m - ۲}{m} = \frac{۶m - ۲}{m} \Longrightarrow \begin{cases} m = ۱ \div ۳ \\ m = ۰ \end{cases}$$

m	$-\infty$		۰		۰/۳۳		۰/۴۸		۰/۵		۰/۶۳		۰/۸		۱		$+\infty$
Δ'		+		+		+		+		+		+		۰−	۰	+	
$af(۱)$		+	۰	−		−		−		−	۰	+		+		+	
$۱+\frac{b}{۲a}$		+	∞	−		−		−	۰	+		+		+		+	
$a\,f(۳)$		+	۰	−		−	۰	+		+		+		+		+	
$۳+\frac{b}{۲a}$		+	∞	−	۰	+		+		+		+		+		+	
نتیجه	$x'<x''<۱<۳$	$x'<۱<۳<x''$		$x'<۱<۳<x''$		$x'<۱<x''<۳$		$x'<۱<x''<۳$		$x'<۱<x''<۳$		$x'<x''<۱<۳$		جواب ندارد		$x'<x''<۱<۳$	

$x'<۱<x''=\infty$ | $x'<۱<۳<x''$ | $x<۱<x''=۳$ | $x'<۱<x''<۳$ | $x'<۱=x''<۳$ | $x'=x''<۱<۳$ | $x'=x''<۱<۳$

۱۵۴۹ - ک: ج: ص۱۳۹-

$$x^2-2(m+2)x+2m+1=0$$

حل. چون ریشه‌ندارد

$$\Delta'=m^2+2m+3>0$$

$$af(1)=-2<0$$

$$1+\frac{b}{2a}=-m-1=0\Longrightarrow m=-1$$

$$af(3)=-3m-2=0\Longrightarrow m=-0/5$$

$$3+\frac{b}{2a}=3-(m+2)=-m+1=0\Longrightarrow m=1$$

m	$-\infty$	-1	$-0/5$	$+1$	$+\infty$
Δ	+	+	+	+	
$af(1)$	−	−	−	−	
$1+\frac{b}{2a}$	+	0	−	−	−
$af(3)$	+	+	0	−	−
$3+\frac{b}{2a}$	+	+	+	0	−
نتیجه	$x'<1<x''<3$		$x'<1<3<x''$		

$$\boxed{x'<1<x''=3}$$

۱۵۵۰ - تابع $y=\frac{x^2+ax-1}{x+1}$ مفروض‌است منحنی نمایش این تابع محور عرضها را درنقطه‌ای مانند A قطع‌می‌کند از A خطی بضریب زاویه $m=2$ رسم‌می‌کنیم تا منحنی‌را درنقاط B و C قطع کند حدود a را طوری‌تعیین کنید که‌نقطه A مابین دونقطه B و C قرار گیرد .

حل:

$$y-y_A=m(x-x_A)\Longrightarrow y=2x-1$$

معادله‌تقاطع

$$3x-1=\frac{x^2+ax-1}{x+1}\Longrightarrow x^2+x(a-1)-2x^2=0$$

$$x(x^2-2x+a-1)=0\Longrightarrow x^2-2x+a-1=0$$

ازحل این معادله‌طول‌های نقاط B و C بدست می‌آید وبرای‌اینکه نقطه A مابین B و C باشد $af(0)<0$

$$af(0)=a-1<0\Longrightarrow a<1$$

۱۵۵۱ — تابع $y=\frac{ax^3+ax^2+1}{x}$ مفروض است از نقطه A بطول (۱−) واقع برمنحنی خطی بموازات محور $y'y$ رسم می‌کنیم تا منحنی نمایش تابع را درنقاط B و C قطع کند a راطوری تعیین کنید که طول نقطهٔ A ازطول نقاط B و C کوچکتر باشد

حل: معادله خط $y=-1$ و $A(-1,-1)$

معادله تقاطع $-1=\frac{ax^3+ax^2+1}{x} \Longrightarrow ax^3+ax^2+x+1=0$

طول نقطه A $(x+1)(ax+1)=0 \Longrightarrow x=-1$

از این معادله طولهای B و C بدست می‌آید $ax^2+1=0$

تذکر: باید $\Delta>0$ و $af(-1)>0$ و $-1+\frac{b}{2a}<0$ باشد

$\Delta=-4a=0 \Longrightarrow a=0$

$af(-1)=a(a+1)=0 \Longrightarrow a=0$ و -1

$-1+\frac{b}{2a}=-1+0=-1<0$

a	$-\infty$		0		-1		$+\infty$
Δ		+	0	−		−	
$af(-1)$		+	0	−	0	+	
$-1+\frac{b}{2a}$		−	0	−		−	
نتیجه	مسئله دارای جواب است			مسئله جواب ندارد			

۱۵۵۲ — تابع $y=x^3+ax^2-a+1$ مفروض است از نقطه A بطول (۱) واقع بر منحنی خطی بموازات محور xها رسم میکنیم این خط منحنی را در دو نقطه دیگر B و C قطع می‌کند.

حدود a را طوری بدست آورید که طول نقطه A ازطول نقاط B و C بزرگتر باشد.

حل: معادله خط $y=2$ و $A(1,2)$

معادله تقاطع $2=x^3+ax^2-a+1 \Longrightarrow x^3+ax^2-a-1=0$

طول نقطه A $(x-1)(x^2+ax+x+a+1)=0 \Longrightarrow x=1$

از این‌معادله طولهای نقاط B و C بدست می‌آید.

$$x^2+(a+1)x+a+1=0$$

تذکر: باید $\Delta>0$ و $af(1)>0$ و $1+\frac{b}{2a}>0$ باشد

$$\Delta=(a+1)^2-4(a+1)=(a+1)(a-3)=0 \Longrightarrow a=-1 \text{ و } 3$$

$$af(1)=2a+3=0 \Longrightarrow a=-1/5$$

$$1+\frac{b}{2a}=1+\frac{a+1}{2}=\frac{a+3}{2}=0 \Longrightarrow a=-3$$

a	$-\infty$		-3		$-1/5$		-1		3		$+\infty$
Δ		+	|	+	|	+	0	−	0	+	
$af(1)$		−	|	−	0	+	|	+	|	+	
$1+\frac{b}{2a}$		−	0	+	|	+	|	+	|	+	
R		مسئله جواب ندارد				جواب		جواب ندارد			a>3:

۱۵۵۳ — منحنی‌نمایش‌تابع $y=\frac{x^4+ax^2+ax+2}{2x+1}$ از نقطه A طول (-1) گذشته و محورعرضها را درنقطه B قطع‌می‌کند معادله خط AB را نوشته و حدود a را طوری تعیین‌کنید که اگر خط AB منحنی را دردونقطه‌دیگر C و D قطع کند. اولاً نقطه A بین نقاط C و D باشد. ثانیاً نقطه B بین C و D باشد. ثالثاً A و B هردوبین C و D باشند

جواب: اولاً و ثالثاً $a>7$ وثانیاً $7<a<9$

۱۵۵۴ — منحنی‌نمایش‌تابع $y=\frac{ax^2-a}{x^2+x-a}$ مفروض است این منحنی محورهای مختصات‌را درنقاط A و B قطع‌می‌کند معادله خط AB را نوشته و اگر این خط منحنی را در دونقطه دیگر M و N قطع‌کند a را طوری تعیین‌کنید که نقطه A خارج نقاط M و N ونقطه B بین نقاط M و N واقع باشد.

بحث در وجود وعلامت ریشه‌های معادله درجه‌دوم پارامتری و مقایسه اعداد باریشه‌ها به کمك نمودار:

قاعده ۱۸۰

برای حل اینگونه مسائل پارامتر m را برحسب x بدست می‌آوریم وسپس منحنی نمایش این تابع را رسم میکنیم بعد روی همین صفحه مختصات خط $y = m$ را درمکانهای مختلف صفحه مختصات که بالا وپائین نقاط ماکزیمم و می‌نیمم و همچنین بالا وپائین مجانب افقی وهمچنین بالا وپائین نقطه تلاقی با محورعرضها و در خود این نقاط خطوطی بموازات محور طولها رسم می‌کنیم و ازروی این نمودار در وجود وعلامت ریشه‌های معادله درجه دوم بحث می‌نمائیم.

تمرین: بازای مقادیر مختلف m در وجود وعلامت ریشه‌های این معادلات بوسیله رسم منحنی بحث کنید.

۱۵۵۵ — ك: الف: ص: ۱۴۵.

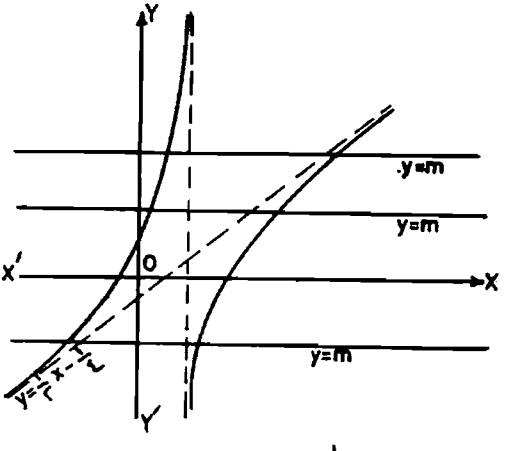
$$x^2 - 2(m+1)x + 3m - 5 = 0$$

حل:

$$m = \frac{x^2 - 2x - 5}{2x - 3} = y \quad \text{و} \quad y' = \frac{2x^2 - 6x + 16}{(2x-3)^2} > 0$$

مجانب مایل $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ و $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} - \frac{23}{4(2x-3)}$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{6}$		$1/5$		$1+\sqrt{6}$		$+\infty$
y'		+			+		+		
y	$-\infty$	↗	۰	↗	$\frac{5}{3}$	↗ $+\infty$ | $-\infty$	↗	۰	↗ $+\infty$

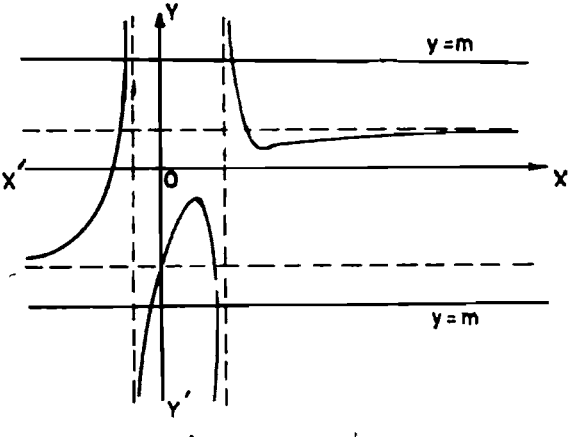


m	بحث
$m < \frac{5}{3}$	معادله دوریشه مختلف العلامه دارد $x'' > 0 > x$
$m = \frac{5}{3}$	ریشه کوچکتر معادله صفر است $x'' > x' = 0$
$m > \frac{5}{3}$	معادله دو ریشه مثبت دارد $x'' > x' > 0$

۱۵۵۶ – ک: ب: ص۱۲۵ – $(m-1)x^2-(m-3)x-(m+3)=0$

حل: $y=m=\dfrac{x^2-3x+3}{x^2-x-1}$ و $y'=\dfrac{2(x^2-4x+3)}{(x^2-x-1)^2}$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		0		1		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		3		$+\infty$
y'		$+$		$+$		$+$	∞	$-$		$-$		$+$	
y	-3	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	-3	↗	-1	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0.6	↗	1
							max				min		

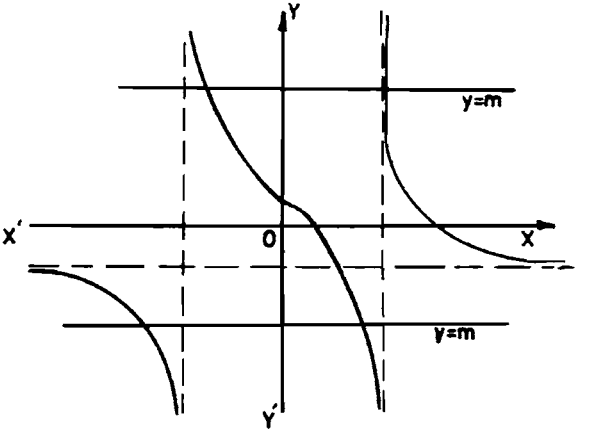


m	بحث
$m<-3$	$x''>0>x'$ و $\lvert x''\rvert>\lvert x'\rvert$
$m=-3$	$x''>0=x'$
$-1>m>-3$	$x''>x'>0$
$m=-1$	$x''=x'=1$
$0.6>m>-1$	معادله ریشه ندارد
$m=0.6$	$x''=x'=3$
$1>m>0.6$	$x''>x'>0$
$m=1$	$x''=\infty$ و $x'=2$
$m>1$	$x''>0>x'$

۱۵۵۷ - ک: ج: ص۱۳۵ - $(m+1)x^2-4x-2(2m-1)=0$

$$m=\ y=\frac{-x^2+4x-2}{x^2-4}\ ,\ y'=\frac{-4(x^2-3x+4)}{(x^2-4)^2}<0$$

x	$-\infty$		-2		0		$2-\sqrt{2}$		2		$2+\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$			$-$					$-$			
y	-1	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$	↘	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0	↘	-1



m	بحث
$m<-1$	$x''>0>x'$ و $\|x'\|>\|x''\|$
$m=-1$	$x''=\infty$ و $x'=1/5$
$0/5>m>-1$	$x''>x'>0$
$m=0/5$	$x''>x'=0$
$m>0/5$	$x''>0>x'$ و $\|x''\|>\|x'\|$

قاعده ۱۸۱

برای مقایسه یک عدد یا دو عدد (α و β) با ریشه‌های معادله درجه دوم پارامتری (از روی نمودار) راه‌حل اینستکه اول m را بر حسب x محاسبه کرده و منحنی نمایش آنرا رسم کنیم و سپس خطوط $x=\alpha$ و $x=\beta$ را رسم میکنیم و بعد روی همین صفحه مختصات خط $y=m$ را در مکانهای مختلف صفحه مختصات که بالا و پائین نقاط ماکزیمم و مینیمم و همچنین بالا و پائین مجانب افقی و همچنین بالا و پائین نقطه تلاقی با خطوط $x=\alpha$ و $x=\beta$ و در خود این نقاط خطوطی بموازات محور طولها رسم میکنیم و از روی این نمودار اعداد α و β را با ریشه‌های معادله درجه دوم مقایسه می‌نمائیم.

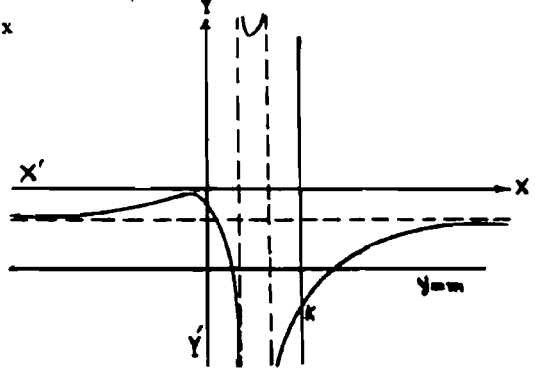
تمرین ۴: بازای مقادیر مختلف پارامتر ریشه‌های معادله‌های زیر را با اعداد ۱ و ۳ بوسیله رسم منحنی مقایسه کنید.

۱۵۵۸ — ک: الف: ص ۱۴۶ — $(m+1)x^2-3mx+4m+1=0$

حل: $m=y=\dfrac{-x^2-1}{x^2-3x+2}$ و $y'=\dfrac{3x^2-2x-3}{(x^2-3x+2)^2}$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{10}}{3}$		0		1		$\frac{1+\sqrt{10}}{3}$		2		$+\infty$
y′		+	0				—		0		+		
y	-1	↗	$6-2\sqrt{10}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	$6+2\sqrt{10}$	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	-1

max min



نقطه تلاقی منحنی باخط $x=3$ به‌مختصات $K(3,-5)$ میباشد.

m	بحث
$m<-5$	$x'<1<x''<3$
$m=-5$	$x'<1<x''=3$
$-1>m>-5$	$x'<1<3<x''$
$m=-1$	$x''=\infty$ و $x'<1<3$
$6-2\sqrt{10}>m>-1$	$x'<x''<1<3$
$m=6-2\sqrt{10}$	$x'=x''=(1-\sqrt{10})\div 3<1<3$
$6+2\sqrt{10}>m>6-2\sqrt{10}$	معادله‌ریشه‌حقیقی ندارد
$m=6+2\sqrt{10}$	$1<x'=x''=(1+\sqrt{10})\div 3<3$
$m>6+2\sqrt{10}$!	$1<x'<x''<3$

۱۵۵۹ - ک: ب: ص۱۴۶-

$$mx^2+2(3m-2)x+4m-3=0$$

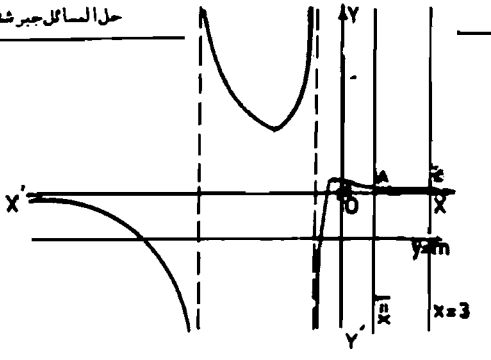
حل:

$$m=y=\frac{4x+3}{x^2+6x+4}$$

$$y'=\frac{-2(2x^2+3x+1)}{(x^2+6x+4)^2}$$

$$y'=0\Longrightarrow 2x^2+3x+1=0\Longrightarrow x=-1,-0/5$$

x	$-\infty$		$-3-\sqrt{5}$		-1		$-3+\sqrt{5}$		$-0/75$		$-0/5$		0		$+\infty$
y'			$-$		0		$+$		$+$		0	$-$			
y	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$+1$	$\nearrow$	$+\infty$	$=\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$0/8$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	0
						Min							Max				



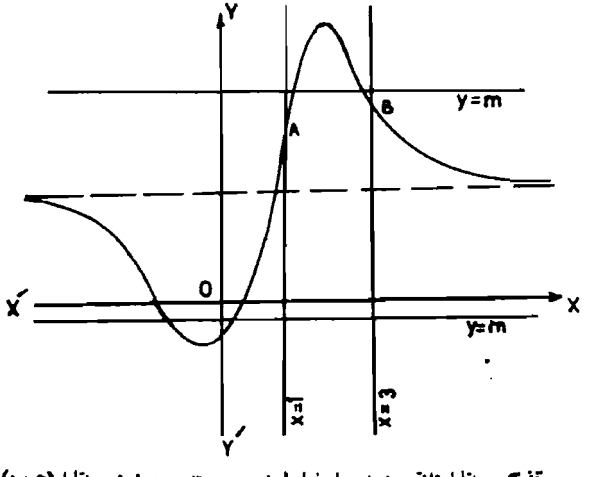
تذکر: نقاط تلاقی منحنی با خطوط $x=1$ و $x=3$ بترتیب نقاط $A(1 \text{ و } \frac{7}{11})$ و $B(3 \text{ و } \frac{15}{31})$ باشد

m	بحث
$m<0$	$x'<x''<1<3$
$m=0$	$x'=\infty$ و $x''=-0/75<1<3$
$(15\div 31)>m>0$	$x'<1<3<x''$
$m=(15\div 31)$	$x'<1<x''=3$
$(\frac{7}{11})>m>(15\div 31)$	$x'<1<x''<3$
$m=(7\div 11)$	$x'<x''=1<3$
$0/8>m>(7\div 11)$	$x'<x''<1<3$
$m=0/8$	$x'=x''=-0/5<1<3$
$1>m>0/8$	معادله ریشه حقیقی ندارد
$m=1$	$x'=x''=-1<1<3$
$m>1$	$x'<x''<1<3$

$(m-3)x^2-2(m+2)x+2m+1=0$ ج: ص ۱۴۶ ـ ۱۵۶ د:

$$y=m=\frac{3x^2+4x-1}{x^2-2x+2}\ ,\ y'=\frac{-2(5x^2-7x-3)}{v^2}$$

x	$-\infty$		$\frac{-2-\sqrt{7}}{3}$		$\frac{7-\sqrt{109}}{10}$		0		$\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$		$\frac{7+\sqrt{109}}{10}$		$+\infty$
y'			$-$		0		$+$				0	$-$	
y	3	↘	0	↘	$-0/7$	↗	$-0/5$	↗	0	↗	$8/5$	↘	3



تذکر: نقاط تلاقی منحنی با خطوط $x=1$ و $x=3$ بترتیب نقاط $A(1$ و $6)$ و $B(3$ و $7/6)$ میباشد.

لطفاً ـ بحث را خودتان از روی شکل تحقیق کنید.

تمرین۳- ریشه‌های معادلات زیر را با اعداد ۱ — و ۲ مقایسه کنید و نتیجه مقایسه را بوسیله رسم منحنی تحقیق کنید

۱۵۶۱ — ک: الف: ص۱۴۵— $x^2-2mx+2m^2-4m=0$

حل: ابتدا از طریق جدول اعداد ۱ — و ۲ را با ریشه‌های معادله فوق مقایسه می‌کنیم:

$$\Delta'=-m^2+4m=0 \Longrightarrow m=0 \text{ و } 4$$

$$af(-1)=2m^2-2m+1>0$$

$$-1+\frac{b}{2a}=-1-m=0 \Longrightarrow m=-1$$

$$af(2)=m^2-4m+2=0 \Longrightarrow m=2\pm\sqrt{2}$$

$$2+\frac{b}{2a}=2-m=0 \Longrightarrow m=2$$

حالا بوسیله رسم منحنی اعداد ۱ — و ۲ را با ریشه‌های معادله مقایسه می‌کنیم ابتداء برحسب m مرتب می‌نمائیم وسپس m را برحسب x بدست می‌آوریم.

$$2m^2-2(x+2)m+x^2=0$$

$$m=y=\frac{x+2\pm\sqrt{-x^2+4x+4}}{2}$$

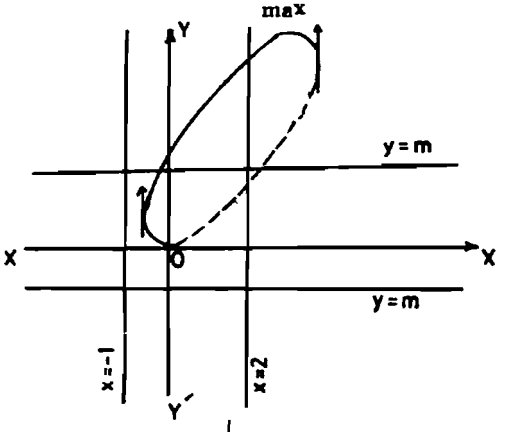
اولا- تابع فوق درفاصله $(2-2\sqrt{2}$ و $2+2\sqrt{2})$ معین است واگر بخواهیم منحنی‌را با مثبت رادیکال رسم کنیم نتیجه می‌شود.

$$y'=\frac{2-x+\sqrt{-x^2+4x+4}}{\sqrt{-x^2+5x+4}}$$

جدول درصفحه مقابل

m	$-\infty$		-1		0		$2-\sqrt{2}$		2		$2+\sqrt{2}$		2		$+\infty$
Δ'		$-$		$-$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$af(-1)$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$-1+\frac{b}{2a}$		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$af(2)$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$+$		$+$	
$2+\frac{b}{2a}$		$+$		$+$		$+$		$+$		$-$		$-$		$-$	
نتیجه	جواب دارد		جواب ندارد		$-1<x'<x''<2$		$-1<x'<2<x''$		$-1<x'<2<x''$		$-1<2<x<x''$		جواب ندارد		
			$-1<x'=x''<2$		$-1<x'<x''=2$		$-1<x'<2<x''$		$-1<x'=2<x''$		$-1<2<x'=x''$				

x	$۲-۲\sqrt{۲}$		۰		۲		$۲+۲\sqrt{۲}$
y'			+		۰	—	
y	۰/۸	↗	۲	↗	۴	↘	۳/۸



m	بحث
$m<۰$	معادله ریشه ندارد
$m=۰$	$-۱<x'=x''<۲$
$۲-\sqrt{۲}>m>۰$	$-۱<x'<x''<۲$
$m=۲-\sqrt{۲}$	$-۱<x'<x''=۲$
$۲+\sqrt{۲}>m>۲-\sqrt{۲}$	$-۱<x'<۲<x''$
$m=۲+\sqrt{۲}$	$-۱<x'=۲<x''$
$۴>m>۲+\sqrt{۲}$	$-۱<۲<x'<x''$
$m=۴$	$-۱<۲<x'=x''$
$m>۴$	معادله ریشه ندارد

۱۵۶۳ — ک: ج: ص۱۴۵ ـ ریشه‌های معادله زیر را با اعداد ۱ — و ۲ مقایسه کنید و

نتیجه مقایسه‌را بوسیله رسم‌منحنی تحقیق کنید: $m^2x-(m-1)x+3=0$

$$\Delta=m^2-12m+1=0\rightarrow m=7\pm4\sqrt{3}$$

$$af(-1)=m(2m+2)=0\rightarrow m=0 \text{ و } -1$$

$$-1+\frac{b}{2a}=\frac{1-3m}{2m}\rightarrow\begin{cases}m=1\div3\\ m=0\end{cases}$$

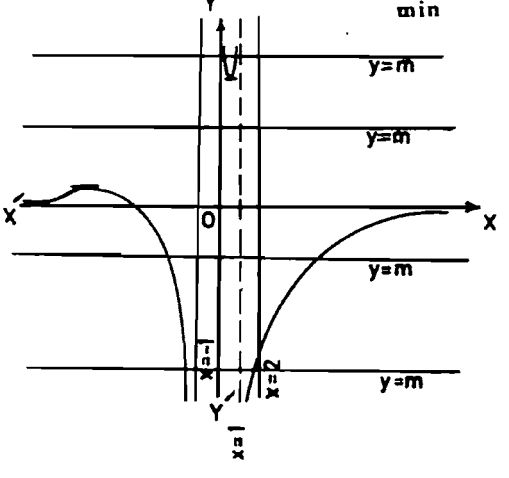
$$af(2)=m(2m+5)=0\rightarrow m=0 \text{ و } -2/5$$

$$2+\frac{b}{2a}=2-\frac{m-1}{2m}=\frac{3m+1}{2m}\rightarrow\begin{cases}m=-(1\div3)\\ m=0\end{cases}$$

حال بوسیله رسم‌منحنی درستی نتیجه مقایسه‌را تحقیق می‌نمائیم. **جدول درصفحه بعد**

$$y=\frac{-x-3}{x^2-x} \text{ و } y'=\frac{x^2+6x-3}{y^2}$$

x	$-\infty$		$3-2\sqrt{3}$		-3		0		$-3+2\sqrt{3}$		1		$+\infty$
y'		+	0			−		−	0	+		+	
y	0	↗	$7-4\sqrt{3}$	↘	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	$7+4\sqrt{3}$	↗	0	↗	$-\infty$ | $+\infty$ 0



m	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$0/1$		$\frac{1}{2}$		$13/9$		$+\infty$
Δ	+		÷		+		+		+		−		−		+	
$af(-1)$	+		+		−		−		+		+		+		+	
$-1+\frac{b}{2a}$	−		−		−		−	∞	+		+		−		−	
$af(2)$	+		−		−		−		+		+		+		+	
$2+\frac{b}{2a}$	+		+		+		−	∞	+		+		+		+	
نتیجه	$-1<x'<x''<2$	-1	$2<x'<x''$	$x'<-1<2<x''$	$x'<-1<2<x''$	$x'<-1<2<x''$	$x'<-1<2<x''$	$x'<-1<x''=\infty$	$x'<-1<2<x''$	$x'=x''<-1<2$	جواب ندارد	جواب ندارد	$-1<x''=x'<2$		$-1<x'<x''<2$	
	$-1<x'<x''=2$		$x'=-1<2<x''$			$x'<-1<2<x''$										

تذکر: نقطه $A(-1,-1)$ محل تلاقی خط $x=-1$ با منحنی و نقطه $B(2,-2/5)$ محل تلاقی منحنی با خط $x=2$ می‌باشد هم از روی جدول مشخص است.

m	بحث
$m<-2/5$	$-1<x'<x''<2$
$m=-2/5$	$-1<x'<x''=2$
$-1>m>-2/5$	$-1<x'<2<x''$
$m=-1$	$-1=x'<2<x''$
$0>m>-1$	$x'<-1<2<x''$
$m=0$	$x''=\infty$ و $x'=-3<-1<2$
$7-4\sqrt{2}>m>0$	$x'<x''<-1<2$
$m=7-4\sqrt{2}$	$x'=x''=-3-2\sqrt{2}<-1<2$
$7+4\sqrt{2}>m>7-4\sqrt{2}$	معادله جواب ندارد
$m=7+4\sqrt{2}$	$-1<x'=x''<2$
$m>7+4\sqrt{2}$	$-1<x'<x''<2$

۱۵۶۳ - ک۵- ص۱۴۶- تابع $y=\frac{x^2+3x-4}{x^2+3x}$ مفروض است. الف- جدول تغییرات و منحنی نمایش آن را رسم کنید. ب- در نقاط تقاطع خط $y=m$ با منحنی نمایش تغییرات این تابع برحسب مقادیر مختلف m بحث کنید. ج- اگر این خط منحنی را در دو نقطه M و P قطع کند، معادله‌ای برحسب مقدار m بدست تعیین کنید که $\widehat{MOP}$ قائمه شود.

حل: لطفاً جدول و شکل منحنی را خودتان رسم کنید و بحث از روی شکل را خودتان انجام دهید.

ج:

$$m=\frac{x^2+3x-4}{x^2+3}$$

$$mx^2+3m-x^2-3x+4=0\rightarrow(m-1)x^2-3x+3m+4=0$$

$$x'=x_M \text{ و } x''=x_P \text{ و } x_O=0$$

$$\widehat{MOP}=90^\circ\rightarrow m_{MO}\times m_{OP}=-1$$

$$\frac{y_M - y_0}{x_M - x_0} \times \frac{y_P - y_0}{x_P - x_0} = -1 \rightarrow \frac{y_M y_P}{x_M x_P} = -1$$

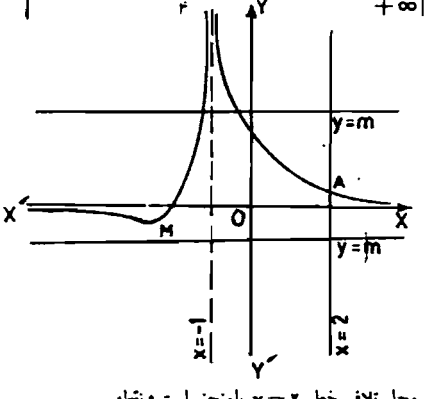
$$y_M y_P = -x_M x_P \rightarrow m \times m = \frac{-(3m+4)}{m-1}$$

$$m^2 - m^2 = -3m - 4 \rightarrow m^2 - m^2 + 3m - 4 = 0$$

۱۵۶۴ – ک۷ – ص۱۴۷ – اولا جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع $y = \frac{x+2}{(x+1)^2}$ را رسم کنید. ثانیاً – m درچه فاصله‌ای تغییر کند تا آنکه خط $y = m$ منحنی نمایش تغییرات تابع فوق‌را دردو نقطه قطع کند. ثالثاً – ریشه‌های معادلهٔ $m = \frac{x+2}{(x+1)^2}$ را با دوعدد ۲ و ۱ – برحسب مقادیر مختلف m مقایسه کنید.

حل: $y = \frac{x+2}{(x+1)^2}$ و $y' = \frac{-(x+3)}{(x+1)^3}$

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		$-$		$+$	$+$		∞	$-$	
y		↘	$\frac{-1}{4}$	↗	0	↗	$+\infty$ | $+\infty$	↘ 2	↘



تذکر: نقطه $A(2 \text{ و } \frac{4}{9})$ محل تلاقی خط $x = 2$ بامنحنی است ونقطه $M(-3 \text{ و } \frac{-1}{4})$ نقطه می‌نیمم منحنی است.

۱ – اگر $m < -\frac{1}{4}$ باشد خط منحنی‌را قطع نمیکند

معادلات درجه سوم

حل مسائل کتاب درسی

۱۵۶۵ — ۱ـ ص۱۶۲ـ مطلوب است تعیین روابط مابین ضرایب a و b و c و d از معادله درجه سوم $ax^3+bx^2+cx+d=0$ و ریشه‌های آن.

(اگر x_1 و x_2 و x_3 ریشه‌های معادلهٔ مفروض باشند، $x_1+x_2+x_3$ و $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$ و $x_1x_2x_3$ را برحسب a و b و c و d پیدا کنید).

حل: اگر ریشه‌های معادله فوق‌را بترتیب x_1 و x_2 و x_3 فرض کنیم نتیجه می‌شود.

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

ویا:

$$ax^3+bx^2+cx+d=$$

$$a[x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)x-x_1x_2x_3]$$

اگر ضرایب جملات هم درجه را در طرفین عبارت فوق مساوی هم قرار دهیم خواهیم داشت.

$$b=-a(x_1+x_2+x_3)\Longrightarrow x_1+x_2+x_3=\frac{-b}{a}$$

$$c=a(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)\Longrightarrow x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{c}{a}$$

$$d=-a(x_1x_2x_3)\Longrightarrow x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}$$

قاعده ۱۷۷

اگر ریشه‌های معادله درجه سوم

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

بترتیب x_1 و x_2 و x_3 باشد مابین آنها وضرایب معادله درجه سوم (یعنی a و b و c و d) روابط زیر برقرار است.

$$x_1+x_2+x_3=\frac{-b}{a} \quad \text{و} \quad x_1x_2x_3=\frac{-d}{a} \quad \text{و}$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a}$$

۱۵۶۶ – ک۲ـ ص۱۶۲ـ ازروی تمرین‌فوق دستگاه‌زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x+ay+a^2z+a^3=0 \\ x+by+b^2z+b^3=0 \\ x+cy+c^2z+c^3=0 \end{cases}$$

(ازیک‌معادله درجه سوم استفاده کنید).

حل: معادله‌درجه‌سوم $X^3+zX^2+yX+x=0$ را درنظر میگیریم وریشه‌های آنرا a و b و c فرض میکنیم (میدانیم باید a و b و c درمعادله فوق صدق کندو اگرآنها را در این معادله قراردهیم دستگاه سه‌معادله سه‌مجهولی فوق بدست می‌آید) اگرروابط مابین ریشه‌های معادله درجه سوم را بنویسیم نتیجه میشود.

$$-(a+b+c)=z$$

$$ab+ac+bc=y$$

$$-abc=x$$

قاعده ۱۸۳

برای تبدیل‌معادله‌درجه‌سوم کامل بصورت $X^3+pX+q=0$ راه‌حل اینستکه درمعادله درجه‌سوم کامل بجای x مقدار $X-\frac{b}{3a}$ را قراردهیم وسپس بتوه میرسانیم وبعدعمل‌ضرب را انجام‌می‌دهیم وساده ومرتب می‌کنیم در نتیجه معادله درجه سوم بصورت $X^3+pX+q=0$ درمی‌آید (p و q عددند)

قاعده ۱۸۴

درمعادلات درجه سومی که‌بصورت $ax^3+bx^2+d=0$ می‌باشد(یعنی جمله cx ندارند یعنی درجه اول ندارد) بجای عمل فوق می‌توان بجای x مقدار $\frac{1}{X}$ راقرارداده وسپس‌مخرج‌مشترک گرفته‌وصورت‌را مساوی صفرقرارداد، تا معادله‌درجه‌سوم ناقصی بصورت $X^3+pX+q=0$ بدست‌آورد.

قاعده ۱۸۵

برای بحث در تعداد و علامات و بزرگی نسبی ریشه‌ها ابتداء معادله‌درجه‌سوم‌راطبق‌دستورات‌بالا بصورت $X^3+pX+q=0$ درمی‌آوریم وسپس $4p^3+27q^2$ و q آنرا تشکیل‌میدهیم و علامت آنرا بدست می‌آوریم و طبق حالات مختلف زیر بحث می‌نمائیم .

(۱) $p>0$ و $q<0$ — یک‌ریشه منفی‌دارد

(۲) $p>0$ و $q<0$ — یک‌ریشه‌مثبت‌دارد

چون اگر $p>0$ باشد حتماً $4p^3+27q^2>0$ میباشد .

۳ $p<0$ و $4p^3+27q^2>0$ و $q>0$ — یک‌ریشه منفی دارد

۴ $p<0$ و $4p^3+27q^2>0$ و $q<0$ — یک‌ریشه مثبت دارد

۵ $p<0$ و $4p^3+27q^2=0$ و $q>0$ — یک‌ریشه‌مضاعف منفی‌دارد و یک‌ریشه‌مضاعف مثبت

$$X_1=X_2=\frac{-3q}{2p} \quad \text{و} \quad X_3=-2X_1=\frac{3q}{p}$$

۶ $\left\{\begin{array}{l} q<0 \text{ و } 4p^3+27q^2=0 \text{ و } p<0 \\ \text{یک ریشه ساده مثبت دارد} \\ \text{یک ریشه مضاعف منفی} \\ X_1=X_2=\frac{-3q}{2p} \text{ و } X_3=\frac{3q}{p} \end{array}\right.$

۷ $\left\{\begin{array}{l} q>0 \text{ و } 4p^3+27q^2<0 \text{ و } p<0 \\ \text{یک ریشه منفی و دو ریشه مثبت دارد} \end{array}\right.$

۸ $\left\{\begin{array}{l} q<0 \text{ و } 4p^3+27q^2<0 \text{ و } p<0 \\ \text{یک ریشه مثبت و دو ریشه منفی دارد} \end{array}\right.$

۱۵۶۷ — ک۳- ص۱۶۲- برحسب اندازه‌های پارامتر a درریشه‌های معادله زیر بحث کنید:

$$x^3+6x^2+9x+a=0$$

حل:

$$x=X-\frac{b}{3a}=X-\frac{6}{3}=X-2$$

$$(X-2)^3+6(X-2)^2+9(X-2)+a$$

$$X^3-3X+a-2=0 \text{ و } p=-3 \text{ و } q=a-2$$

$$4p^3+27q^2=4(-3)^3+27(a-2)^2=27[(a-2)^2-4]$$

$$(a-2)^2-4=0\rightarrow a=4 \text{ و } 0$$

a	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$4p^3+27q^2$		+	0	−	0	+	
نتیجه	معادله یک ریشه دارد		سه ریشه دارد			یک ریشه دارد	

$X_1=X_2=\frac{-3q}{2p}$ و $X_1=X_2=\frac{-3q}{2p}=1$ و $X_3=-2$

$x=X-2$ و $X_3=-2X_1=2$ $x=X-2=-1$ و -4

۱۵۶۸ — ک۴ - ص۱۶۳ - بر حسب مقادیر مختلف m در تعداد ریشه‌های معادله زیر بحث کنید. $x^3+mx^2+2=0$ ثانیاً- مقدار m راچنان پیدا کنید که معادله فوق‌دارای ریشه مضاعف باشد

حل:

$$x=\frac{1}{X_0}\rightarrow\frac{1}{X^3}+\frac{m}{X^2}+2=$$

$$2X^3+mX+1=0 \rightarrow X^3+\frac{m}{2}X+\frac{1}{2}=0$$

$$P=\frac{m}{2} \text{ و } q=\frac{1}{2} \text{ و } 4p^3+27q^2=4\times\frac{m^3}{8}+\frac{27}{4}$$

$$\Delta=0 \rightarrow 2m^3+27= \rightarrow m=-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}=\frac{-3\sqrt[3]{4}}{2}$$

$m=-1/5\sqrt[3]{4}$ ریشه مضاعف دارد $m=-1/5\sqrt[3]{4}$

m	$-\infty$	$-1/5\sqrt[3]{4}$	$+\infty$
$4p^3+27q^2$	$-$	0	$+$
نتیجه	سه ریشه دارد		یک جواب دارد

$$X_1=X_2=\frac{-2q}{2p}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}} \text{ و } X_3=\frac{-2}{\sqrt[3]{4}}$$

$$x=\frac{1}{X}=\sqrt[3]{4} \text{ و } \frac{-\sqrt[3]{4}}{2}$$

۱۵۶۹ — ک۵ ص۱۶۲ـ چه رابطه‌ای بین a و b برقرار باشد تا این معادله دارای ریشهٔ مضاعف باشد:

$$ax^2+bx^1+2=0$$

حل

$$x=\frac{1}{X} \rightarrow \frac{a}{X^2}+\frac{b}{X^1}+2=0$$

$$2X^3+bX+a=0 \rightarrow X^3+\frac{b}{2}X+\frac{a}{2}=0$$

$$\Delta=0 \rightarrow 4p^3+27q^2=0 \rightarrow 4\times\frac{b^3}{8}+27\times\frac{a^2}{4}=0$$

$$2b^3+27a^2=0$$

۱۵۷۰ — ک۶ ص۱۶۲ـ در تعداد ریشه‌های معادله $x^3+3mx+2m=0$ برحسب مقادیر مختلف m بحث کنید.

حل:

$$\Delta=4p^3+27q^2=4\times 27m^3+27\times 4m^2$$

$$\Delta=27\times 4m^2(m+1)=0 \rightarrow m=0 \text{ و } m=-1$$

$$q=0 \Longrightarrow 2m=0 \rightarrow m=0$$

m	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$4p^3+27q^2$		$-$	0	$+$	0	$+$	
q		$-$		$-$	0	$+$	
نتیجه	دو ریشه منفی و یک ریشه مثبت دارد			یک ریشه مثبت دارد		یک ریشه منفی دارد	

$x_1=x_2=-1$ و $x_3=2$ $\qquad$ $x=0$

۱۵۷۱ – ج۷ـص۱۶۳ – p و q را برحسب p' و q' بقسمی تعیین کنید که تابع $y_1=x^3+px+q$ و $y_1=x^3+p'x^2+q'$ دارای یک ماکزیمم و یک مینیمم باشند و در آنصورت تغییرات تابع زیر را تعیین و منحنی نمایش آنرا رسم کنید.

$$y=x^3+px+q-q'$$

حل: باید عرض نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع را بدست آورد و مساوی هم قرار داد.

$$\begin{cases} y_1'=3x^2+p=0\rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{-p}{3}} \\ y_2'=3x^2+2p'x=0\rightarrow x=0 \text{ و } -\dfrac{2p'}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=+\sqrt{\dfrac{-p}{3}}\rightarrow y_1=q+\dfrac{2p}{3}\sqrt{\dfrac{-p}{3}} & \text{مقدار مینیمم} \\ x=-\sqrt{\dfrac{-p}{3}}\rightarrow y_1=q-\dfrac{2p}{3}\sqrt{\dfrac{-p}{3}} & \text{مقدار ماکزیمم} \end{cases}$$

$x=0\rightarrow y=q'$ $\qquad$ $p'>0$ باشد مقدار مینیمم

$x=-\dfrac{2p'}{3}\rightarrow y_2=q'+\dfrac{4p'^3}{27}$ $\qquad$ مقدار ماکزیمم

$$\begin{cases} q+\dfrac{2p}{3}\sqrt{\dfrac{-p}{3}}=q' \\ q-\dfrac{2p}{3}\sqrt{\dfrac{-p}{3}}=q'+\dfrac{4p'^3}{27} \end{cases} \xrightarrow{\text{از جمع دو رابطه}} \begin{cases} q=q'+\dfrac{2p'^3}{27} \\ p=\dfrac{-p'\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$q-q'=-\dfrac{2p}{3}\sqrt{\dfrac{-p}{3}}$ $\qquad$ از رابطه فوق معلوم میشود

پس تابع فوق بصورت زیر درمی‌آید

$$y = x^3 + px - \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$$

شکل را لطفاً خودتان رسم کنید.

۱۵۷۲ — ک۸ـ ص۱۶۳ـ اندازه تقریبی ریشه معادله $2x^3 - 11x^2 + 15x - 1 = 0$ را که بین ۲ و ۳ قرار دارد تا $\frac{1}{10}$ تقریب حساب کنید.

حل: بطریقه محاسبه: ابتداء اعداد ۲/۱ و ۲/۲ و .... تا ۲/۹ را در معادله بجای x میگذاریم وحاصل آنهارا بدست می‌آوریم اگر حاصل دوتای متوالی آنها یکی مثبت ودیگری منفی باشد یك ریشه معادله بین آن دوعدد قرار دارد مثلا درمسأله فوق:

$f(2/3) = 1/48$ و $f(2/4) = -0/76$ میباشد پس یکی از ریشه‌های معادله از ۲/۳ بیشتر است واز ۲/۴ کمتر است یعنی $2/3 < x_1 < 2/4$

حل: بطریقه ترسیم: طبق حل مسائل صفحه (۲۲۱) عمل می‌کنیم وریشه‌های معادله را بدست می‌آوریم ریشه‌ای که بین ۲ و ۳ میباشند جواب مسأله است.

تذکر: مجبور نیستیم که واقعاً کلیه محاسبات را انجام دهیم اگر $f(2/1)$ خیلی زیادتر ازصفر شد یکباره $f(2,5)$ را حساب می‌کنیم اگر منفی شد $f(2/4)$ را حساب می‌کنیم وبهمین ترتیب بلغزاء اعداد کوچکتر از ۲/۵ را بدست می‌آوریم واگر $f(2/5) > 0$ شد بازاء اعداد بزرگتر از ۲/۵ مقدار $f(a)$ را بدست می‌آوریم.

۱۵۷۳ — ک۹ـ ص۱۶۳ـ اندازه تقریبی ریشه معادله $x^3 - 10x^2 + 32x + 66 = 0$ را که بین ۲ — و ۱ — قرار دارد تا $\frac{1}{100}$ تقریب حساب کنید.

حل: بطریقه محاسبه: ابتدا اگر طبق مسأله قبل ریشه معادله را تا یکدهم تقریب که بین دوعدد ۲ — و ۱ — قرار دارد حساب کنیم نتیجه میشود $-1/4 < x_1 < -1/3$ حال دوباره $f(-1/31)$ و $f(-1/32)$ و .... و $f(-1/39)$ را حساب می‌کنیم اگر حاصل دوتای متوالی آنها یکی مثبت ودیگری منفی باشد یك ریشه معادله بین آن دوعدد قرار دارد مثلا درمسأله فوق $-1/38 > x_1 > -1/39$ میباشد.

حل: بطریقه ترسیم: مثل مسائل صفحه (۲۲۱) میباشد.

۱۵۷۴ — ک۱۰ـ ص۱۶۳ـ ریشه معادله $x^3 + x^2 - 10x + 4 = 0$ را که بین ۵ و ۱ است تا یکدهم تقریب حساب کنید.

حل: $f(2) = -4$ و $f(1) = -4$

$f(۳)=۱۰$ و $f(۴)=۴۴$ و $f(۵)=۱۰۲$

چون $f(۳)>۰$ و $f(۲)<۰$ میباشد پس یکی از ریشه‌های معادله بین دو و سه قرار دارد و حال طبق مسائل قبلی ریشه معادله را ابتدا تا یکدهم تقریب و سپس تا یکصدم تقریب که بین دو و سه قرار دارد بدست آورید.

۱۵۷۵ – ک ۱۱ – ص ۱۶۳ – ریشه معادله $x^۳-۷x+۷=۰$ را که بین ۱ و ۲ است تا یکصدم تقریب حساب کنید.

حل: طبق مسأله قبل عمل می‌نمائیم.

۱۵۷۶ – ک ۱۲ – ص ۱۶۳ – ریشه‌های معادله $x^۳-۲x^۲-۴x+۸=۰$ را پیدا کنید.

حل: فاکتورگیری می‌نمائیم $x^۲(x-۲)-۴(x-۲)=۰$

$(x-۲)(x^۲-۴)=۰ \rightarrow x=۲$ و ± ۲

طریقه دوم: اگر بجای $x=X-\frac{b}{۳a}=X+\frac{۲}{۳}$ را قرار دهیم و خلاصه کنیم معادله $X^۳-\frac{۱۶}{۳}X+\frac{۱۲۸}{۲۷}=۰$ بدست می‌آید که دلتای آن مساوی صفر است پس:

$$X_۱=X_۲=\frac{-۳q}{۲p}=\frac{۴}{۳} \text{ و } X_۳=-۲X_۱=\frac{-۸}{۳}$$

$$x=X+\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۳}+\frac{۲}{۳}=۲ \text{ و } x=\frac{-۸}{۳}+\frac{۲}{۳}=-۲$$

۱۵۷۷ – ک ۱۳ – ص ۱۶۴ – ریشه‌های معادله $x^۳+۳x^۲-۳x-۱۸=۰$ را پیدا کنید

حل: طریقه اول $x=X-\frac{b}{۳a}=X-\frac{۳}{۳}$

$$(X-\frac{۳}{۳})^۳+۳(X-\frac{۳}{۳})^۲-۳(X-\frac{۳}{۳})-۱۸=۰$$

$$X^۳-\frac{۲۵}{۳}X-\frac{۲۵۰}{۲۷}=۰ \text{ و } \Delta=-۴\times\frac{(۲۵)^۳}{(۲۷)^۳}+۲۷(\frac{۲۵۰}{۲۷})^۲=۰$$

$$X_۱=X_۲=\frac{-۳q}{۲p}=\frac{-۵}{۳} \text{ و } X_۳=-۲X_۱=\frac{+۱۰}{۳}$$

$$x = X - \frac{۴}{۳} = \frac{-۵}{۳} - \frac{۴}{۳} = -۳ \quad , \quad x = +\frac{۱۰}{۳} - \frac{۴}{۳} = ۲$$

طریقه دوم:

$$x^۴ + ۴x^۳ - ۳x - ۱۸ = ۰$$

$$x^۴ + ۳x^۳ + x^۳ + ۳x - ۶x - ۱۸ = ۰$$

$$x^۳(x+۳) + x(x+۳) - ۶(x+۳) = ۰$$

$$(x+۳)(x^۳ + x - ۶) = ۰ \rightarrow x = -۳ \text{ و } ۲$$

۱۵۷۸ — ک: الف ـ ص۱۶۲ ـ تحقیق کنید که تابع $y = \frac{x+۱}{x^۲+۱}$ دارای سه نقطه عطف است که بر یک استقامت قرار دارند.

قاعدهٔ مهم

قاعده ۱۸۶

برای اینکه ثابت کنیم منحنی نمایش یک تابع دارای سه نقطه عطف است که بر یک استقامت قرار دارند راه حل اینست که اولا ثابت می‌کنیم که اگر مشتق ثانی تابع را مساوی صفر قرار دهیم معادله بدست آمده دارای سه جواب است، ثانیاً ـ معادله منحنی را با معادله خط $y = ax + b$ حل می‌نمائیم معادله درجه سومی بدست می‌آید که سه جواب آن طولهای نقطه تقاطع خط با منحنی است که روی یک خط راست واقعند وسپس روابط مابین ریشه‌های معادله درجه سوم را می‌نویسیم وبعد از این سه رابطه، رابطه‌ای بدست می‌آوریم که به a و b بستگی نداشته باشد (رابطه بدست آمده رابطه بین طولهای سه نقطه از منحنی است که بر یک خط راست قرار دارند) اگر این رابطه بین طولهای نقاط عطف هم باشد سه نقطه عطف هم بر یک استقامتند.

تذکر: اگر بتوانیم معادله درجه سومی که از $y'' = ۰$ بدست می‌آید حل کنیم وجوابهای آن اعداد صحیح باشد میتوانیم مختصات سه نقطه عطف را حساب کنیم وثابت کنیم که این سه نقطه روی یک خط راست واقعند

حل:

$$y' = \frac{-x^۲ - ۲x + ۱}{v^۲} \quad , \quad y'' = \frac{۲(x^۳ + ۳x^۲ - ۳x - ۱)}{v^۳}$$

$$y'' = ۰ \rightarrow x^۳ + ۳x^۲ - ۳x - ۱ = ۰ \text{ و } x = X - ۱$$

$$(X-1)^3+3(X-1)^2-3(X-1)-1=0$$

$$X^3-6X+4=0\rightarrow\Delta=4p^3+27q^2=-432$$

پس معادله فوق سه ریشه دارد یعنی تابع دارای سه نقطه عطف است.

$$y=\frac{x+1}{x^2+1} \text{ و } y=ax+b\rightarrow\frac{x+1}{x^2+1}=ax+b$$

$$ax^3+bx^2+(a-1)x+b-1=0$$

$$-\begin{cases} x_1+x_2+x_3=\dfrac{-b}{a} \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{a-1}{a} \\ x_1x_2x_3=\dfrac{-b+1}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=\dfrac{-b}{a} \\ -(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=\dfrac{-a+1}{a} \\ -x_1x_2x_3=\dfrac{b-1}{a} \end{cases}$$

ازجمع سه رابطه نتیجه میشود:

$$x_1+x_2+x_3-(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)-x_1x_2x_3=-1$$

حال تحقیق می کنیم که این رابطه بین ریشه‌های معادله $y''=0$ نیز برقرار است.

$$y''=0\rightarrow x^3+3x^2-3x-1=0$$

$$x_1+x_2+x_3=-3 \text{ و } -(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=+3$$

$$x_1x_2x_3=+1$$

$$x_1+x_2+x_3-(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)-x_1x_2x_3=-1$$

۱۵۷۹ — کتاب ص ۱۶۴ — ثابت کنید که منحنی نمایش تابع $y=\dfrac{x^2+x}{x^2+x+1}$ دارای سه نقطه عطف است که بر یک استقامت قرار دارند

حل: $y'=\dfrac{2x+1}{v^2}$ و $y''=\dfrac{-6x(x+1)}{v^3}$

$$y''=0 \rightarrow -6x(x+1)=0$$

پس این منحنی دارای سه نقطه عطف نیست که ثابت کنیم بر یک استقامتند.

۱۵۸۰ – ک ـ ج. ص ۱۶۴ ـ تحقیق کنید که منحنی نمایش تابع $y=\frac{x^2}{x^2+x+2}$ دارای سه نقطه عطف است که بر یک استقامتند.

حل: $y'=\frac{x^2+2x}{v^2}$ و $y''=\frac{-2(x^3+6x^2-4)}{v^3}$

$$y''=0 \rightarrow x^3+6x^2-4=0$$

$$x=\frac{1}{X}\rightarrow\frac{1}{X^3}+\frac{6}{X^2}-4=0\rightarrow X^3-\frac{3}{2}X-\frac{1}{4}=0$$

$$\Delta=4\times\frac{-27}{8}+27\times\frac{1}{16}=\frac{27}{16}(-8+1)=-\frac{189}{16}<0$$

پ . معادله فوق دارای سه ریشه است یعنی منحنی دارای سه نقطه عطف است.

$$y=\frac{x^2}{x^2+x+2} \text{ و } y=ax+b\rightarrow\frac{x^2}{x^2+x+2}=ax+b$$

$$ax^3+(a+b-1)x^2+(2a+b)x+2b=0$$

$$2\begin{cases} x_1+x_2+x_3=\frac{-a-b+1}{a} \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{2a+b}{a} \\ x_1x_2x_3=\frac{-2b}{a} \end{cases}$$

$$2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+x_1x_2x_3=4$$

حال: باید تحقیق کنیم که این رابطه بین ریشه‌های معادله $y''=0$ میباشد.

$$y''=0\rightarrow x^3+6x^2-4=0$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=0 \text{ و } x_1x_2x_3=4$$

پس: $2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+x_1x_2x_3=4$

۱۵۸۱ – ک ـ د ـ ص ۱۶۴ ـ تحقیق کنید که منحنی نمایش تابع $y=\frac{2x+1}{2x^2+1}$ دارای

سه نقطه عطف است که بر یکه استقامت است.

راهنمائی- $y' = \frac{-2(2x^2+7x-1)}{7^2}$ و

$$y'' = \frac{4(4x^3+6x^2-6x-1)}{7^2}$$

و رابطه بصورت زیر است:

$$-(x_1+x_2+x_3)+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+2x_1x_2x_3=0/5$$

۱۵۸۲ — تابع $y=\frac{x^2}{x^2-4}$ مفروض است اگر سه نقطه از منحنی بطول‌های x_1 و x_2 و x_3 روی یک خط راست واقع باشند ثابت کنید که مابین آنها رابطه زیر موجود است.

$$4(x_1+x_2+x_3)+x_1x_2x_3=0$$

راهنمائی- برای حل مسأله فوق معادله منحنی را با معادله خط $y=ax+b$ حل نموده معادله درجه سومی بدست می‌آید آنرا ساده و مرتب می‌نمائیم و سپس سه رابطه مابین ریشه‌های معادله درجه سوم را مینویسیم و سپس رابطه فوق را تحقیق می‌نمائیم.

۱۵۸۳ — معادله درجه سوم پارامتری $x^3+3x^2+2mx+m-1=0$ مفروض است m را چنان تعیین کنید که مابین ریشه‌های آن رابطه زیر برقرار باشد.

$$\frac{x_1}{x_2x_3}+\frac{x_2}{x_1x_3}+\frac{x_3}{x_1x_2}=\frac{-1}{2}$$

حل:

$$\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{x_1x_2x_3}=\frac{-1}{2}$$

$$\frac{(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)}{x_1x_2x_3}=\frac{-1}{2}$$

$$\frac{b^2-2ca}{-da}=\frac{-1}{2}\rightarrow 2b^2-4ac=ad$$

$$18-4(2m)=m-1\rightarrow m=(19\div 9)$$

۱۵۸۴ — معادله درجه سوم $x^3-6x^2+mx=3m-1$ مفروض است اولا m را چنان تعیین کنید که ریشه‌های معادله فوق سه جمله متوالی یک تصاعد عددی باشند و سپس دو ریشه دیگر را حساب کنید.

حل: $\div x_1+x_3=2x_2 \rightarrow x_1x_2x_3$

$$x_1+x_2+x_3=3x_2 \rightarrow \frac{-b}{a}=3x_2 \rightarrow 6=3x_2 \rightarrow x_2=2$$

$$x=2 \rightarrow 8-24+2m=3m-1 \rightarrow m=-15$$

۱۵۸۵ — معادله درجه سوم $x^3+(m+2)x^2+3mx+8=0$ مفروض است m را چنان تعیین کنید که ریشه‌های معادله فوق تشکیل تصاعد هندسی بدهند.

حل: $x^3+(m+2)x^2+3mx+8=0$

$$\div x_1 \text{ و } x_2 \text{ و } x_3 \rightarrow x_1x_3=x_2^2 \rightarrow x_1x_2x_3=x^3$$

$$\frac{-d}{a}=x_2^3 \rightarrow -8=x_2^3 \rightarrow x_2=-2$$

$$x=-2 \rightarrow -8+4m+8-6m+8=0 \rightarrow m=4$$

۱۵۸۶ — معادله درجه‌سوم $mx^3+2x^2+(2m-1)x+3m-1=0$ مفروض است اولاً m را چنان تعیین کنید که یکی از ریشه‌های معادله فوق برابر ۲− بوده و سپس دو ریشه دیگر را حساب کنید. ثانیاً m را چنان تعیین کنید که مجموع عکس ریشه‌های معادله فوق برابر ۳− باشد.

حل: $x=-2 \rightarrow -8m+8-4m+2+3m-1=0 \rightarrow m=1$

$$m=1 \rightarrow x^3+2x^2+x+2=0 \rightarrow x^2(x+2)+x+2=0$$

$$(x+2)(x^2+1)=0 \rightarrow x=-2$$ دو ریشه دیگر موهومی است

ثانیاً

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=-3$$

$$\frac{x_2x_3+x_1x_3+x_2x_1}{x_1x_2x_3}=-3$$

$$\frac{\frac{c}{a}}{\frac{-d}{a}}=-3 \rightarrow c=3d$$

$$2m-1=3(3m-1) \rightarrow m=2 \div 7$$

۱۵۸۷ — ثابت کنید شرط لازم و کافی برای اینکه دو ریشه معادله : $ax^3+bx^2+cx+d=0$ قرینه باشند اینستکه $ad=bc$ باشد و مقادیر ریشه‌ها را بدست آورید.

حل: اگر فرض کنیم $x_1=-x_2$ می‌باشد نتیجه میشود.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=\dfrac{-b}{a} \rightarrow x_3=\dfrac{-b}{a} \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{c}{a} \\ -x_1^2+x_1x_3-x_1x_3=\dfrac{c}{a} \rightarrow -x_1^2=\dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3=\dfrac{-d}{a} \rightarrow x_1(-x_1)\times\dfrac{-b}{a}=\dfrac{-d}{a} \end{cases}$$

$$-x_1^2\times\frac{-b}{a}=\frac{-d}{a}\rightarrow\frac{c}{a}\times\frac{-b}{a}=\frac{-d}{a}\rightarrow bc=ad$$

۱۵۸۸ — چه رابطه‌ای بین ضرایب معادله درجه سوم $ax^3+bx^2+c=0$ باید برقرار باشد تا مجموع مکعبات سه ریشه معادله فوق برابر صفر باشد.

حل: با در نظر گرفتن اتحاد زیر:

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+\underline{3a^2b}+\underline{3a^2c}+3b^2a+3b^2c+3c^2a+3c^2b+6abc$$

میتوان نوشت:

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+ac+bc)+3abc$$

پس:

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3=0$$

$$(x_1+x_2+x_3)^3-3(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+3x_1x_2x_3=0$$

$$\left(\frac{-b}{a}\right)^3-3\left(\frac{-b}{a}\right)(0)-\frac{3c}{a}=0\rightarrow\frac{-b^3}{a^3}-\frac{3c}{a}=0$$

$$b^3+3a^2c=0$$

راه حل دوم: با استفاده از فرمول $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3=0\rightarrow x_1^3+(x_2+x_3)^3-3x_2x_3(x_2+x_3)=0$$

$$(x_1+x_2+x_3)^3-3x_1(x_2+x_3)(x_1+x_2+x_3)-3x_2x_3(x_2+x_3)=0$$

$$(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_2x_3-x_1x_2-x_1x_3)-3x_2x_3(x_2+x_3+x_1)+3x_1x_2x_3=0$$

$$(x_1+x_2+x_3)[(x_1+x_2+x_3)^2-3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)]+$$
$$3x_1x_2x_3=0$$

$$\frac{-b}{a}\left(\frac{b^2}{a^2}-0\right)\quad\frac{3c}{a}=0\Longrightarrow b^3+3a^2c=0$$

۱۵۸۹ — بااستفاده ازروابط مابین‌ریشه‌ها وضرایب‌معادله‌درجه‌سوم دستگاه‌زیر را حل کنید.

$$\begin{cases}x+2y+2z+8=0 \text{ و } x+5y+25z+125=0\\ x-3y+9z-27=0\end{cases}$$

جواب:

کنکوردانشگاه‌آریامهر

۱۵۹۰ — بفرض‌اینکه $a=\left(\log N^{a-3}\right)^{\frac{1}{3}}$ و $b=\left(\log N^{b-3}\right)^{\frac{1}{3}}$

و $c=\left(\log N^{c-3}\right)^{\frac{1}{3}}$ باشدحاصل‌عبارت‌زیررا بدست‌آورید

$$y=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

حل- اگر دوطرف تساویهای‌بالارا بتوه ۳میرسانیم نتیجه‌میشود.

$$\begin{cases}a^3=\log N^{a-3}\\ b^3=\log N^{b-3}\\ c^3=\log N^{c-3}\end{cases}\qquad\begin{cases}a^3-a\log N+3\log N=0\\ b^3-b\log N+3\log N=0\\ c^3-c\log N+3\log N=0\end{cases}$$

با درنظر گرفتن‌معادله $u^3-u\log N+3\log N=0$ بادستگاه معادلات فوق‌نتیجه میشودکه aوbوc ریشه‌های معادله‌فوق میباشند وروابط زیربرقرار است.

$$a+b+c=0$$

$$\begin{cases} ab+ac+bc=-\log N \\ abc=-3\log N \end{cases} \xrightarrow{\text{از تقسیم دو رابطه}} \left\{ \frac{ab+ac+bc}{abc}=\frac{1}{3} \right.$$

اگر کسر فوق را تفکیک نمائیم نتیجه میشود:

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=\frac{1}{3} \longrightarrow y=\frac{1}{3}$$

تلث دوم دبیرستان کارون (۴۷)

۱۵۹۱ — دستگاه سه معادله سه مجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} xy^{a}\ z^{a^2}=\frac{1}{\sqrt[a]{2}} \text{ و } xy^{b}\ z^{b^2}=\frac{1}{\sqrt[b]{2}} \text{ و } xy^{c}\ z^{c^2}=\frac{1}{\sqrt[c]{2}} \end{cases}$$

حل: از دو طرف تساویهای بالا در مبنای ۲ لگاریتم میگیریم.

$$\begin{cases} \log_2 x+a\log_2 y+a^2\log_2 z=-\frac{1}{a}\log_2 2=\frac{-1}{a} \\ \log_2 x+b\log_2 y+b^2\log_2 z=\frac{-1}{b}\log_2 2=\frac{-1}{b} \\ \log_2 x+c\log_2 y+c^2\log_2 z=\frac{-1}{c}\log_2 2=\frac{-1}{c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\log_2 x+a^2\log_2 y+a^3\log_2 z+1=0 \\ b\log_2 x+b^2\log_2 y+b^3\log_2 z+1=0 \\ c\log_2 x+c^2\log_2 y+c^3\log_2 z+1=0 \end{cases}$$

با در نظر گرفتن معادله درجه سوم زیر و مقایسه آن با دستگاه بالا

$$u^3\log_2 z+u^2\log_2 y+u\log_2 x+1=0$$

نتیجه میشود که a و b و c ریشه ی معادله فوق میباشند.

$$abc=\frac{-1}{\log_2 z} \longrightarrow \log_2 z=\frac{-1}{abc} \longrightarrow z=2^{\frac{-1}{abc}}$$

$$a+b+c=\frac{-\log_2 y}{\log_2 z} \longrightarrow a+b+c=abc\log_2 y$$

$$\log_2 y=\frac{a+b+c}{abc} \longrightarrow y=2^{\frac{a+b+c}{abc}}$$

$$ab+ac+bc=\frac{\log_2 x}{\log_2 z} \Longrightarrow ab+ac+bc=-abc\log_2 x$$

$$\log_2 x=-\frac{ab+ac+bc}{-abc}=\frac{-ab+ac+bc}{abc} \Longrightarrow x=2$$

۱۵۹۲ — معادله درجه سومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن بترتیب $\cos\frac{2\pi}{7}$ و $\cos\frac{4\pi}{7}$ و $\cos\frac{6\pi}{7}$ باشد.

جواب:

۱۵۹۳ — b دله‌درجه‌سوم پارامتری $x^3+3x^2+2mx+m-1=0$ مفروض است m را چنان تعیین کنید که مابین ریشه‌های معادله فوق‌رابطه‌زیر برقرار باشد.

$$(x_1-2)(x_2-2)(x_3-2)=3+2x_1x_2x_3$$

جواب: $m=-8$

۱۵۹۴ — تابع $y=\frac{x^2-3x}{x-1}$ مفروض‌است درعده نقاط تلاقی خط $y=m$ بامنحنی نمایش تابع فوق بحث نمائید.

۱۵۹۵ — معادله درجه‌سوم $x^3+6x^2-3x+m=0$ مفروض‌است m را چنان تعیین کنید که معادله‌فوق دارای ریشه‌مضاعف‌باشد (ازدوراه‌حل کنید)

۱۵۹۶ — معادله درجه‌سوم $x^3+6x^2+(m-1)x+3m-2=0$ مفروض است اولاً m را چنان تعیین کنید که یکی ازریشه‌های معادله فوق برابر ۱ — باشد. ثانیاً m را چنان تعیین که حاصلضرب ریشه‌های معادله‌فوق برابر ۲ — باشد.

جواب: $m=-2$ و $\frac{3}{2}$

۱۵۹۷ — تابع $y=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ مفروض‌است ثابت کنید که منحنی‌نمایش آن دارای سه‌نقطه عطف می‌باشد که بریک‌استقامت‌قرار دارند(از دوراه).

۱۵۹۸ — تابع $y=\frac{x+1}{x^2+1}$ مفروض‌است ثابت کنید که‌منحنی‌نمایش‌تابع‌فوق دارای سه‌نقطه عطف میباشد که بریک استقامتند.

۱۵۹۹ — تابع $y=\frac{x-1}{x^2+1}$ مفروض است تحقیق کنید که نقاط عطف منحنی نمایش آن بر یک خط راست واقع‌اند (ازدوراه) جواب: شهریور ۳۹

۱۶۰۰ — اولا مطلوبست رسم جدول و منحنی نمایش تابع $y=\frac{x^3+3}{x^2}$ ثانیاً ـ خطی موازی محور xها و بعرض a منحنی فوقرا قطع می‌کند معادله‌ای تشکیل دهید که ریشه‌هایش طولهای نقاط تقاطع باشد و در وجود این نقاط بازاء مقادیر مختلف a بحث کنید و a را طوری تعیین کنید که یکی از ریشه‌های این معادله مضاعف باشد. از روی شکل نیز در وجود نقاط تقاطع بحث کنید و درستی بحث قبل را تحقیق کنید جواب: شهریور ماه ۱۳۳۵

مطالبی خارج از برنامه

مخصوص دانش آموزان ممتاز رشته ریاضی

تذکر: اگر معادله درجه سوم فقط یک ریشه داشته باشد ($4p^3+27q^2>0$ باشد) ریشه معادله از فرمول زیر بدست می‌آید.

(فرمول کاردان)
$$\sqrt[3]{\frac{-p}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{+q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

تذکر: اگر معادله درجه سوم سه ریشه متمایز داشته باشد ریشه‌های معادله از فرمولهای زیر بدست می‌آید:

$$X_1=2\cos\frac{\alpha}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$$

$$X_2=2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$X_3=2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$\cos\alpha=\frac{-q}{4}\sqrt{\frac{-27}{p^3}}$$

تابع اولیه

تعریف تابع اولیه	تابع اولیه $f(x)$ توابعی است مانند $F(x)$ که اگر از آن مشتق بگیریم $f(x)$ بدست می‌آید.
قاعده ۱۸۷	تابع اولیه $y=K$ (y مساوی هر عدد یا هر مقدار ثابت) برابر است با $Y=Kx+C$
قاعده ۱۸۸	تابع اولیه $y=ax^m$ از فرمول $Y=\frac{a}{m+1}x^{m+1}+C$ بدست می‌آید یعنی به توان x یک واحد اضافه میشود و ضریب x بر توان جدید x تقسیم میشود.

تذکر : مسائل تابع اولیه کتاب درسی درصفحه (۲۱۴) چاپ شده است.

تمرین : توابع اولیه هریک از توابع زیر را بدست آورید.

	تابع اولیه	صورت تابع
۱۶۰۱-	$Y=5x+C$	$y=5$
۱۶۰۲-	$Y=-7x+C$	$y=-7$
۱۶۰۳-	$Y=-6x+C$	$y=-6$
۱۶۰۴-	$Y=-\frac{3}{2}x+C$	$y=-\frac{3}{2}$
۱۶۰۵-	$Y=(a-2b)x+C$	$y=a-2b$
۱۶۰۶-	$Y=\frac{5}{3}x^3+C$	$y=5x^2$
۱۶۰۷-	$Y=2x^5+C$	$y=10x^4$
۱۶۰۸-	$Y=-4x^{-1}+C$	$y=8x^{-2}$

۱۶۰۹- $y=-5x^{-6}$ $\quad Y=x^{-5}+C$

۱۶۱۰- $y=21x^{\frac{3}{4}}$ $\quad Y=21\div\frac{7}{4}x^{\frac{7}{4}}+C=12x^{\frac{7}{4}}+C$

۱۶۱۱- $y=8x^{3}+6x^{2}-6x+1$

$Y=2x^{4}+2x^{3}-3x^{2}+x+C$

۱۶۱۲- $y=4x^{-5}-9x^{-4}-5x^{-2}$

$Y=-x^{-4}+3x^{-3}+5x^{-1}+C$

۱۶۱۳- $y=18x^{5}-16x^{2}+7$ $\quad Y=3x^{6}-4x^{3}+7x+C$

قاعده ۱۸۹

تابع اولیه $y=K(ax+b)^{m}$ ازفرمول

$Y=\frac{K}{a(m+1)}(ax+b)^{m+1}+C$ بدست می‌آید یعنی

به‌توان پرانتز یک واحد اضافه میشود وضریب پرانتز برحاصلضرب توان جدید درضریب x داخل پرانتز تقسیم میشود .

۱۶۱۴- $y=8(3x-2)^{4}$ $\quad Y=\frac{8}{3\times5}(3x-2)^{5}+C$

۱۶۱۵- $y=14(2x+3)^{6}$ $\quad Y=(2x+3)^{7}+C$

۱۶۱۶- $y=36(3x-1)^{-7}$ $\quad Y=-2(3x-1)^{-6}+C$

۱۶۱۷- $y=10(1-5x)^{-2}$ $\quad Y=2(1-5x)^{-1}+C$

۱۶۱۸- $y=8(1-2x)^{3}+9(1-x)^{-10}+7$

حل: $Y=-(1-2x)^{4}+(1-x)^{-9}+7x+C$

۱۶۱۹- $y=17(1-x)^{16}-12(1+2x)^{-4}-4x$

حل: $Y=-(1-x)^{17}+2(1+2x)^{-3}-2x^{2}+C$

۱۶۲۰- $y=x^{2}(x+1)^{5}$

$y=(x+1-1)^{2}(x+1)^{5}$ | $y=[(x+1)^{2}-2(x+1)+1](x+1)^{5}$

$$y=(x+1)^7-2(x+1)^6+(x+1)^5$$
$$Y=\frac{1}{8}(x+1)^8-\frac{2}{7}(x+1)^7+\frac{1}{3}(x+1)^6+C$$

۱۶۲۱ - $y=(x-2)(x+2)^{20}$

$$Y=\frac{1}{22}(x+2)^{22}-\frac{4}{21}(x+2)^{21}+C$$

یادآوری از جبر کلاس چهارم

قاعده ۱۵۰

طریقه از بین بردن کسر: میدانیم $\frac{K}{(u)^m}$ برابر $K(u)^{-m}$ میباشد یعنی کسر برابر است با صورت کسر ضرب در پرانتز با پرانتزهای مخرج کسر باقوه خودشان (ولی با علامت مخالف) وبرعکس بجای $K(u)^{-m}$ می‌توانیم $\frac{K}{(u)^m}$ راقرار دهیم مانند مثالهای ذیل

$$\frac{3}{x^2}=3x^{-2} \qquad \frac{5}{(2x-1)^2}=5(2x-1)^{-2}$$

$$\frac{7}{x-1}=7(x-1)^{-1} \qquad \frac{5}{(2x-1)^{-2}}=5(2x-1)^2$$

$$\frac{3}{x^2-x+5}=3(x^2-x+5)^{-1} \quad \text{و} \quad \frac{3}{x^2}=3x^{-2}$$

قاعده ۱۹۱

برای گرفتن تابع اولیه توابع کسری ابتداء آنها را از صورت کسری خارج نموده وسپس تابع اولیه میگیریم وبعد دوباره آنرا بصورت کسری درمی‌آوریم .

تابع اولیه توابع زیررا بدست آورید.

۱۶۲۱ - $y=\frac{4}{x^3}+\frac{6}{x^2}-\frac{5}{x^6}$

حل :

$$y=4x^{-3}+6x^{-2}-5x^{-6}$$
$$Y=-2x^{-2}-6x^{-1}+x^{-5}+C$$
$$Y=\frac{-2}{x^2}-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^5}+C$$

۱۶۲۲ - $y=\frac{x^3-8}{x^5} \rightarrow y=\frac{1}{x^2}-\frac{8}{x^5}$

حل: $y=x^{-2}-8x^{-5} \rightarrow Y=-x^{-1}+2x^{-4}+C$

$$Y=\frac{-1}{x}+\frac{2}{x^4}+C$$

۱۶۲۳ — $y=\frac{48}{(1-2x)^5}$

$$\left|\begin{array}{l} y=48(1-2x)^{-5} \\ Y=6(1-2x)^{-4} \end{array}\right. \rightarrow \left| Y=\frac{6}{(1-2x)^4}+C \right.$$

۱۶۲۴ — $y=\frac{28}{(3+2x)^8}$

$$\left|\begin{array}{l} y=28(3+2x)^{-8} \\ Y=-2(3+2x)^{-7} \rightarrow \end{array}\right. \quad \left| Y=\frac{-2}{(3+2x)^7}+C \right.$$

۱۶۲۵ — $y=\frac{24}{(1-2x)^5}-\frac{16}{(1-2x)^3}-\frac{9}{(1+3x)^4}$

حل: $y=24(1-2x)^{-5}-16(1-2x)^{-3}-9(1+3x)^{-4}$

$$Y=3(1-2x)^{-4}-4(1-2x)^{-2}+(1+3x)^{-3}+c$$

$$Y=\frac{3}{(1-2x)^4}+\frac{1}{(1+3x)^3}-\frac{4}{(1-2x)^2}+C$$

۱۶۲۶ — $y=\frac{30(x^2+3x+2)}{(x+1)^5}$

$$y=\frac{30[(x+1)^2+(x+1)]}{(x+1)^5}=\frac{30}{(x+1)^4}+\frac{30}{(x+1)^5}$$

$$y=30(x+1)^{-4}+30(x+1)^{-5}$$

$$Y=-15(x+1)^{-3}-10(x+1)^{-4}+C$$

$$Y=\frac{-15}{(x+1)^3}-\frac{10}{(x+1)^4}=\frac{-5(3x+5)}{(x+1)^4}+C$$

۱۶۲۷ — $y=\frac{x^3}{(1-x)^4}$

$$y=\frac{(x-1)^3+3(x-1)^2+3(x-1)+1}{(1-x)^4}$$

$$y=-(x-1)^{-2}-3(x-1)^{-5}-3(x-1)^{-6}-(x-1)^{-7}$$

$$Y=\frac{1}{3(x-1)^{3}}+\frac{3}{4(x-1)^{4}}+\frac{3}{5(x-1)^{5}}+\frac{1}{6(x-1)^{6}}+c$$

یادآوری از کلاس چهارم

قاعده ۱۹۲

طریقه ازبین بردن رادیکال : میدانیم $\sqrt[m]{(u)^{n}}$ مساوی $(u)^{\frac{n}{m}}$ میباشد یعنی برای از بین‌بردن رادیکال توان پرانتز داخل رادیکال‌را برفرجه‌رادیکال‌تقسیم‌کرده وتوان‌پرانتزقرار میدهیم و رادیکال‌را از بین‌میبریم و برعکس بجای $(u)^{\frac{n}{m}}$ می‌توانیم $\sqrt[m]{(u)^{n}}$ راقراردهیم‌مانندمثالهای‌ذیل:

$$\sqrt[5]{x^{3}}=x^{\frac{3}{5}} \quad \text{و} \quad \sqrt[4]{x^{3}}=x^{\frac{3}{4}}$$

$$\sqrt[3]{(1-2x)}=(1-2x)^{\frac{1}{3}} \qquad \sqrt[5]{(3x-2)^{7}}=(3x-2)^{\frac{7}{5}}$$

$$\sqrt[4]{(x-2)^{3}}=(x-2)^{\frac{3}{4}} \qquad \sqrt{2x-1}=(2x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[5]{(x^{2}-x+1)^{2}}=(x^{2}-x+1)^{\frac{2}{5}}$$

$$\sqrt{3x^{2}-x+2}=(3x^{2}-x+2)^{\frac{1}{2}}$$

۱۶۲۸ – $y=\sqrt{1-2x}$

$$y=(1-2x)^{\frac{1}{2}} \qquad Y=\frac{-1}{3}(1-2x)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$Y=\frac{-1}{3}(1-2x)\sqrt{1-2x}+C$$

۱۶۲۹ – $y=(2x-3)\sqrt[3]{(2x-3)^{2}}+x^{2}\sqrt{x}$

$$y=(2x-3)^{\frac{5}{3}}+x^{\frac{5}{2}}\rightarrow Y=\frac{3}{16}(2x-3)^{\frac{8}{3}}+\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+c$$

$$Y=\frac{3}{16}(2x-3)^{2}\sqrt[3]{(2x-3)^{2}}+\frac{2}{7}x^{2}\sqrt{x}+c$$

۱۶۳۰- $y=\sqrt[3]{9x^{2}-12x+4}$

حل: $y=\sqrt[3]{(3x-2)^{2}}$ $\qquad Y=\frac{1}{5}\sqrt[3]{(3x-2)^{5}}+c$

۱۶۳۱- $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^{3}-6x^{2}+12x-8}}$

$$y=(x-2)^{\frac{-3}{4}}\rightarrow Y=4(x-2)^{\frac{1}{4}}=4\sqrt[4]{x-2}+c$$

قاعده ۱۹۳

تابع اولیه $y=au'u^{m}$ از فرمول زیر بدست می‌آید .

$$Y=\frac{a}{m+1}u^{m+1}+C$$

۱۶۳۲- $y=15(2x-1)(x^{2}-x+3)^{4}$

$Y=3(x^{2}-x+3)^{5}+C$

۱۶۳۳- $y=4(2x-3)(x^{2}-3x-2)^{3}$

$Y=(x^{2}-3x-2)^{4}+C$

۱۶۳۴- $y=16(x+1)(x^{2}+2x+5)^{3}$

$y=8(2x+2)(x^{2}+2x+5)^{3}$ $\qquad Y=2(x^{2}+2x+5)^{4}+c$

$y=24(x^{2}-2x+1)(x^{2}-3x^{2}+3x-5)^{2}$

۱۶۳۵- $y=8(3x^{2}-6x+3)(x^{2}-3x^{2}+3x-5)^{2}$

$Y=(x^{3}-3x^{2}+3x-5)^{4}+c$

۱۶۳۶- $y=\dfrac{3x^{2}-1}{(x^{3}-x+7)^{3}}$

$y=(3x^{2}-1)(x^{3}-x+7)^{-3}$

$$Y=\frac{-1}{2}(x^{3}-x+7)^{-2}+C\rightarrow Y=\frac{-1}{2(x^{3}-x+7)^{2}}+C$$

۱۶۳۷- $y=3(2x-3)\sqrt{x^2-3x+5}$

$y=3(2x-3)(x^2-3x+5)^{0/5}$ $\quad Y=2\cdot(x^2-3x+5)^{1/5}+c$

$Y=2\ (x^2-3x+5)\sqrt{x^2-3x+5}+c$

قاعده ۱۹۴

برای گرفتن تابع اولیه توابعی که بصورت :

$y=\dfrac{K(ax+b)^{m-2}}{(a'x+b')^m}$ میباشد (توان صورت ازمخرج دو واحد کمتر است) راه‌حل اینستکه $\dfrac{ax+b}{a'x+b'}$ را مساوی u فرض کرده و u' را بدست‌می‌آوریم وسپس‌تابع‌رابرحسب u و u' می‌نویسیم وسپس‌تابع اولیه‌میگیریم.

۱۶۳۸- $y=\dfrac{26(3x-4)^{11}}{(4x-1)^{13}}$

$u=\dfrac{3x-4}{4x-1}\ \rightarrow\ u'=\dfrac{13}{(4x-1)^2}$

$y=2\times\dfrac{13}{(4x-1)^2}\left(\dfrac{3x-4}{4x-1}\right)^{11}\ \rightarrow\ Y=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{3x-4}{4x-1}\right)^{12}+C$

۱۶۳۹- $y=\dfrac{(2x-1)^{11}}{(1-3x)^{13}}$

حل: $u=\dfrac{2x-1}{1-3x}\Rightarrow u'=\dfrac{-1}{(1-3x)^2}$

$y=\dfrac{-1}{(1-3x)^2}\left(\dfrac{2x-1}{1-3x}\right)^{11}=-u'u^{11}$

$Y=\dfrac{1}{12}u^{12}+C\Rightarrow Y=\dfrac{1}{12}\left(\dfrac{2x-1}{1-3x}\right)^{12}+C$

۱۶۴۰- $y=\dfrac{x(x^2-3)^5}{(x^2+4)^7}$

حل: $u=\dfrac{x^2-3}{x^2+4}\Rightarrow u'=\dfrac{14x}{(x^2+4)^2}$

$$y = \frac{1}{14} \times \frac{14x}{(x^2+4)^2}\left(\frac{x^2-3}{x^2+4}\right)^5 = \frac{1}{14}u'u^5$$

$$Y = \frac{1}{84}u^6 + c \Longrightarrow Y = \frac{1}{84}\left(\frac{x^2-3}{x^2+4}\right)^6 + c$$

۱۶۴۱- $y = \frac{92(2x-3)^7}{(5x+4)^4}$ $\quad Y = \frac{1}{2}\left(\frac{2x-3}{5x+4}\right)^8 + c$

۱۶۴۲- $y = \frac{x^5}{(x^3+3)^{11}}$

حل: $y = \frac{x^2(x^3+3-3)}{(x^3+3)^{11}} = \frac{x^2}{(x^3+3)^{10}} - \frac{3x^2}{(x^3+3)^{11}}$

$$y = \frac{1}{3}(3x^2)(x^3+3)^{-10} - (3x^2)(x^3+3)^{-11}$$

$$Y = \frac{-1}{27(x^3+3)^9} + \frac{1}{10(x^3+3)^{10}} + c$$

۱۶۴۳- $y = 8x^7\sqrt[5]{(x^3+2)^3}$

حل: $y = 8x^7(x^3+2-2)(x^3+2)^{\frac{3}{5}}$

$$y = 2(3x^2)(x^3+2)^{\frac{8}{5}} - 2(3x^2)(x^3+2)^{\frac{3}{5}}$$

$$Y = \frac{10}{13}(x^3+2)^{\frac{13}{5}} - \frac{5}{2}(x^3+2)^{\frac{8}{5}} + c$$

$$Y = \frac{5}{26}(x^3+2)^{\frac{8}{5}}[3(x^3+2)-13] + c$$

$$Y = \frac{5}{26}(x^3+2)(3x^3-5)\sqrt[5]{(x^3+2)^3} + c$$

تابع‌اولیه $y=a\cos mx$ برابراست با $Y=\frac{a}{m}\sin mx+C$

قاعده ۱۹۵

تابع‌اولیه $y=a\cos(mx\pm\alpha)$ برابراست با :

$$Y=\frac{a}{m}\sin(mx\pm\alpha)+C$$

تابع‌اولیه $y=a\sin mx$ برابراست با $Y=\frac{-a}{m}\cos mx+C$

قاعده ۱۹۶

تابع‌اولیه $y=a\sin(mx\pm\alpha)$ برابراست با:

$$Y=\frac{-a}{m}\cos(mx\pm\alpha)+C$$

تابع‌اولیه $y=a\,tg^2 mx$ برابراست با:

$$Y=\frac{a}{m}tg\,mx-ax+C$$

قاعده ۱۹۷

تابع‌اولیه $y=a\,tg^2(mx\pm\alpha)$ برابر است با:

$Y=\frac{a}{m}tg(mx\pm\alpha)-ax+C$ یعنی تابع اولیه tg^2 کمان مجهول برابر است با tg آن کمان منهای (ضریب tg^2) در x بلحاظ مقدار ثابت.

تابع اولیه $y=a\cot g^2 mx$ برابراست با:

$$Y=\frac{-a}{m}\cot g\,mx-ax+C$$

قاعده ۱۹۸

تابع‌اولیه $y=a\cot g^2(mx\pm\alpha)$ برابراست با:

$$Y=\frac{-a}{m}\cot g(mx\pm\alpha)-ax+C$$

$y=6\sin 3x$	$Y=-2\cos 3x+C$	۱۶۳۴
$y=8\cos 2x$	$Y=4\sin 2x+C$	۱۶۳۵
$y=12\sin(3x+45^\circ)$	$Y=-4\cos(3x+45^\circ)+C$	۱۶۳۶

$y = 6\cos(3x - 15^\circ) + 7\sin(75^\circ - 7x)$ — ۱۶۴۷

$Y = 2\sin(3x - 15^\circ) + \cos(75^\circ - 7x) + C$

$y = 15\sin(37 - 5x) + \cos(17^\circ - 0/5x)$ — ۱۶۴۸

$Y = +3\cos(37^\circ - 5x) - 2\sin(17^\circ - 0/5x) + C$

$y = 24tg^2 3x \qquad Y = 8tg3x - 24x + C$ — ۱۶۴۹

$y = -4tg^2 x \qquad Y = -4tgx + 4x + C$ — ۱۶۵۰

$y = 15cotg^2 3x \qquad Y = -5cotg3x - 15x + C$ — ۱۶۵۱

$y = 4\cos 2x - 3\sin x + 9\sin 3x + 7$ — ۱۶۵۲

$Y = 2\sin 2x + 3\cos x - 3\cos 3x + 7x + C$ — ۱۶۵۳

$y = tg^2 x - 4tg^2 2x - 15cotg^2 5x + 5$ — ۱۶۵۴

$Y = tgx - x - 2tg2x + 4x + 3cotg5x + 15x + 5x + C$

$Y = tgx - 2tg2x + 3cotg5x + 22x + C$

$y = 3\sin(3x - 15^\circ) + 6\cos(2x + 75^\circ) - 3\sin x$ — ۱۶۵۵

$Y = -\cos(3x - 15^\circ) + 3\sin(2x + 75^\circ) + 3\cos x + C$

$y = 4tg^2(x - 30^\circ) + 2cotg^2(2x + 30^\circ)$ — ۱۶۵۶

$Y = 4tg(x - 30^\circ) - 4x - cotg(2x + 30^\circ) - 2x + C$

$Y = 4tg(x - 30^\circ) - cotg(2x + 30^\circ) - 6x + C$

تذکر مهم- لطفاً فرمول‌های زیر را بخاطر بسپارید:

$$\cos^2 mx = \frac{1 + \cos 2mx}{2} \quad , \quad \sin^2 mx = \frac{1 - \cos 2mx}{2}$$

$$a\sin mx\cos mx = \frac{a}{2}\sin 2mx$$

مثالهای زیر برای درک فرمول‌های فوق می‌باشد.

$$\cos^2 3x = \frac{1 + \cos 6x}{2} \quad و \quad \cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad و \quad \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$4\sin x\cos x = 2\sin 2x \quad و \quad 16\sin 3x\cos 3x = 8\sin 6x$$

$$\cos^2 \frac{3x}{2} = \frac{1 + \cos 3x}{2} \quad و \quad \sin^2 \frac{5x}{2} = \frac{1 - \cos 5x}{2}$$

$$۷\sin\frac{۲x}{۵}\cos\frac{۲x}{۵}=\frac{۷}{۲}\sin\frac{۴x}{۵} \quad \text{و} \quad ۵\sin\frac{x}{۳}\cos\frac{x}{۳}=\frac{۵}{۲}\sin\frac{۲x}{۳}$$

قاعده ۱۹۹

برای گرفتن تابع اولیه توابعی که درآن جملات $\cos^{۲}mx$ یا $\sin^{۲}mx$ یا $\sin mx\cos mx$ موجود است راه‌حل اینست که طبق فرمول‌های بالا این‌جملات را برحسب کسینوس یاسینوس‌دو برابر قوس نوشته وسپس خلاصه کرده وبعد تابع اولیه میگیریم.

تابع اولیه هریك از توابع‌زیر بدست‌آورید.

۱۶۵۷ـ $y=۳\cos^{۲}x-۸\sin x\cos x+۱$

$$y=۳\times\frac{۱+\cos ۲x}{۲}-\frac{۸}{۲}\sin ۲x+۱$$

$$y=۲\cos ۲x-۴\sin ۲x+۳\rightarrow Y=\sin ۲x+۲\cos ۲x+۳x+C$$

۱۶۵۸ـ $y=۲۳\cos^{۲}۳x-۴\sin^{۲}x$

$$y=۱۲\cos ۶x+۲\cos ۲x+۱۰\rightarrow Y=۲\sin ۶x+\sin ۲x+۱۰x+C$$

۱۶۵۹ـ $y=۳۶\cos^{۲}۳x+۶۴\sin^{۲}۴x$

$$y=۱۸\cos ۶x-۳۲\cos ۸x+۵۰\rightarrow Y=۳\sin ۶x-۴\sin ۸x+۵۰x+C$$

۱۶۶۰ـ $y=۱۸\sin\frac{۳x}{۲}\cos\frac{۳x}{۲}-۴\cos^{۲}\frac{x}{۲}$

$$y=۹\sin ۳x-۲\cos ۲x-۲\rightarrow Y=-۳\cos ۳x-\sin ۲x-۲x+C$$

۱۶۶۱ـ $y=۶\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}-۳۰\sin\frac{۵x}{۲}\cos\frac{۵x}{۲}-۱۶\sin ۴x\cos ۴x$

$$y=۳\sin x-۱۵\sin ۵x-۸\sin ۸x\rightarrow Y=-۳\cos x+۳\cos ۵x+\cos ۸x+C$$

قاعده ۲۰۰

تابع اولیه $y=a\sin^{b}mx\cos mx$ ازفرمول‌زیر بدست‌می‌آید

$$y=\frac{a}{m(b+۱)}\sin^{b+۱}mx+C$$

قاعده ۲۰۱

تابع اولیه $y=a\sin^{b}(mx\pm\alpha)\cos(mx\pm\alpha)$ از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$y=\frac{a}{m(b+۱)}\sin^{b+۱}(mx\pm\alpha)+c$$

تابع اولیه $y = a\cos^b mx \sin mx$ ازفرمول زیر بدست‌می‌آید: $Y = \frac{-a}{m(b+1)} \cos^{b+1} mx + C$	قاعده ۲۰۲
تابع اولیه $y = a\cos^b(mx \pm \alpha)\sin(mx \pm \alpha)$ از فرمول زیر بدست می‌آید: $Y = \frac{-a}{m(b+1)} \cos^{b+1}(mx \pm \alpha) + C$	قاعده ۲۰۳
تابع اولیه $y = a tg^b mx(1 + tg^2 mx)$ ازفرمول زیر بدست می‌آید : $Y = \frac{a}{m(b+1)} tg^{b+1} mx + C$	قاعده ۲۰۴
تابع اولیه $y = a tg^b(mx \pm \alpha)[1 + tg^2(mx \pm \alpha)]$ از فرمول‌زیر بدست‌می‌آید: $Y = \frac{a}{m(b+1)} tg^{b+1}(mx \pm \alpha) + C$	قاعده ۲۰۵
تابع‌اولیه $y = a cotg^b mx(1 + cotg^2 mx)$ از فرمول زیر بدست می‌آید: $Y = \frac{-a}{m(b+1)} cotg^{b+} mx + C$	قاعده ۲۰۶
تابع اولیه $y = a cotg^b(mx \pm \alpha)[1 + cotg^2(mx \pm \alpha)]$ از فرمول‌زیر بدست می‌آید : $Y = \frac{-a}{m(b+1)} cotg^{b+1}(mx \pm \alpha) + C$	قاعده ۲۰۷

تذکرمهم: توجه‌کنیدکه درتوابع قواعد (۲۰۴و۲۰۳) خط مثلثاتی که‌توانش یك میباشد مشتق خطمثلثاتی دیگراست.

تذکرمهم: توجه‌کنیدکه درتوابع‌قواعد (۲۰۴، ۲۰۷) داخل‌کروشه‌مشتق‌آن‌خط مثلثاتی است‌که درکنارکروشه قرارگرفته است(یعنی مشتق‌تانژانت یاکتانژانت می‌باشند).

تذکر- هرجمله‌ای که‌تابع‌اولیه آن‌ازجنس کسینوس‌یا کتانژانت باشد درتابع‌اولیه‌اش

علامت جلوی آن عوض میشود.

$y = 16\sin^2 2x\cos 2x \qquad Y = 2\sin^2 2x + C$ — ۱۶۶۲

$y = 6\sin 3x\cos^7 3x \rightarrow Y = \frac{-6}{3\times 8}\cos^8 3x + c = \frac{-1}{4}\cos^8 3x + C$ — ۱۶۶۳

$y = 60\cos^2 4x\sin 4x \qquad Y = -3\cos^5 4x + c$ — ۱۶۶۴

$y = 40\,tg^2 2x(1 + tg^2 2x) \qquad Y = 5\,tg^4 2x + c$ — ۱۶۶۵

$y = 22\,cotg^5 x(1 + cotg^2 x) \qquad Y = 7\,cotg^6 x + c$ — ۱۶۶۶

$y = 15\sin^2(x + 75^\circ)\cos(x + 75^\circ) \rightarrow Y = 5\sin^3(x + 75^\circ) + c$ — ۱۶۶۷

$y = 24\cos^5(2x - 15^\circ)\sin(2x - 15^\circ)$ — ۱۶۶۸

$Y = -2\cos^6(2x - 15^\circ) + c$

$y = 8\sin^2\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow Y = 8\sin^3\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + c$ — ۱۶۶۹

$y = 16\,tg^2(2x + 60^\circ)[1 + tg^2(2x + 60^\circ)]$ — ۱۶۷۰

$Y = \frac{16}{2\times 4}tg^4(2x + 60^\circ) + c = 2\,tg^4(2x + 60^\circ) + c$

$y = 16\cos 2x\sin^2 2x - 9\sin x\cos^2 x + 2$ — ۱۶۷۱

$Y = 2\sin^4 2x + 3\cos^3 x + 2x + c$

$y = \sin 3x\cos^2 3x + 9\sin\frac{3x}{2}\cos^2\frac{3x}{2} + \frac{5}{2}$ — ۱۶۷۲

$y = -15\cos 3x - 2\cos^3\frac{3x}{2} + \frac{5}{2}x + c$

$y = 8(1 + tg^2 2x)tg^2 2x - 4(1 + cotg^2 x)cotg\,x - 2$ — ۱۶۷۳

$Y = tg^4 2x + 2\,cotg^2 x - 3x + c$

قاعده ۲۰۸

برای گرفتن تابع اولیه توانهایی که در آنها $\sin^2 x$ یا $\cos^2 x$ یا $\sin^5 x$ یا $\cos^5 x$ یا $\sin^7 x$ یا $\cos^7 x$ یا ... میباشند راه حل اینستکه بجای آنها طبق فرمولهای زیر قرار میدهیم و سپس طبق قواعد ۹۱ و ۹۲، ۹۳، ۹۴ تابع اولیه میگیریم.

$\sin^3 x = \sin x\sin^2 x = \sin x(1 - \cos^2 x) = \sin x - \sin x\cos^2 x$

$\cos^3 x = \cos x\cos^2 x = \cos x(1 - \sin^2 x) = \cos x - \cos x\sin^2 x$

$\cos^5 x = \cos x\cos^4 x = \cos x(\cos^2 x)^2 =$

$\cos x(1-\sin^2 x)^2 = \cos x + \cos x \sin^4 x - 2\cos x \sin^2 x$

$\sin^5 x = \sin x \sin^4 x = \sin x(\sin^2 x)^2 =$

$\sin x(1-\cos^2 x)^2 = \sin x + \sin x \cos^4 x - 2\sin x \cos^2 x$

$\sin^7 x = \sin x \sin^6 x = \sin x(\sin^2 x)^3 =$

$\sin x\ 1-\cos^2 x)^3 = \sin x(1-\cos^6 x - 3\cos^2 x + 3\cos^4 x)$

$= \sin x - \sin x \cos^6 x - 3\sin x \cos^2 x + 3\sin x \cos^4 x$

تابع اولیه هریك از توابع زیر را بدست آورید :

$y = \sin^3 x + \cos^3 x \rightarrow y = \sin x \sin^2 x + \cos x \cos^2 x$ — ۱۶۷۴

$y = \sin x(1-\cos^2 x) + \cos x(1-\sin^2 x)$

$y = \sin x - \sin x \cos^2 x + \cos x - \cos x \sin^2 x$

$Y = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c$

— ۱۶۷۵

$y = \sin^3 2x + 18\cos^5 3x \rightarrow y = \sin 2x \sin^2 2x + 18\cos 3x \cos^4 3x$

$y = \sin 2x(1-\cos^2 2x) + 18\cos 3x(1-\sin^2 3x)^2$

$y = \sin 2x - \sin 2x \cos^2 2x + 18\cos 3x + 18\cos 3x \sin^4 3x - 36\sin^2 3x \cos 3x$

$Y = \frac{-1}{2}\cos 2x + \frac{1}{6}\cos^3 2x - 6\sin 3x + \frac{6}{5}\sin^5 3x - 4\sin^3 3x + c$

$y = \cos^5 x - \cos^7 x$ — ۱۶۷۶

$Y = \frac{1}{7}\sin^7 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{3}\sin^3 x$

قاعده ۲۰۹

برای گرفتن تابع اولیه $tg^2 x$ و $tg^6 x$ و $tg^8 x$ و $tg^{10} x$ و ... $cotg^2 x$ و $cotg^6 x$ و $cotg^8 x$ و ... از توان tg یا $cotg$ دو واحد کم مینمائیم وسپس جمله بدست آمده را یکبار کم می‌نمائیم این عمل را آنقدر انجام میدهیم تا به $tg^2 mx$ یا $cotg^2 mx$ بدست آید و سپس عبارت بدست‌آمده را بدسته‌های دوجمله‌ای تبدیل می‌نمائیم وعمل فاکتورگیری را انجام میدهیم و بعد ازفرمول $au'm$ استفاده‌کرده تابع اولیه‌میگیریم.

$y = 15 tg^6 x$ — ۱۶۷۷

$y = 15(tg^6 x + tg^4 x - tg^2 x - tg^2 x + tg^2 x)$

$$y = 15[tg^3x(tg^2x+1) - tg^2x(tg^2x+1) + tg^2x]$$

$$Y = 3tg^5x - 5tg^3x + 15tgx - 15x + c$$

$$y = cotg^8x \qquad -۱۶۷۸$$

$$y = cotg^8x + cotg^6x - cotg^6x - cotg^4x + cotg^4x + cotg^2x - cotg^2x$$

$$y = cotg^2x(1+cotg^2x) - cotg^4x(1+cotg^2x) +$$

$$+ cotg^4x\,(1+cotg^2x) - cotg^6x$$

$$Y = -\frac{1}{7}cotg^7x + \frac{1}{5}cotg^5x - \frac{1}{3}cotg^3x + cotgx + x + c$$

$$y = tg^{10}x + tg^8x \qquad -۱۶۷۹$$

$$y = tg^8x\,(1+tg^2x) \qquad Y = \frac{1}{9}tg^9x + c$$

$$y = \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x} \qquad Y = \frac{1}{2\cos 2x} + c \qquad -۱۶۸۰$$

$$y = \frac{36\cos 3x}{\sin^3 3x} \qquad Y = \frac{-6}{\sin^2 3x} + c \qquad -۱۶۸۱$$

$$y = \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} \qquad Y = 3\sqrt[3]{\sin x} + c \qquad -۱۶۸۲$$

$$y = \frac{\sin^3 2x}{\sqrt[3]{\cos^2 2x}} \qquad \rightarrow y = \sin^2 2x(\cos 2x)^{\frac{2}{3}} \qquad -۱۶۸۳$$

$$Y = \frac{3}{2}\cos^{\frac{1}{3}} 2x - \frac{3}{13}\cos^{\frac{7}{3}} 2x + c$$

فرمول‌های زیر را بخاطر بسپارید :

$$m\sin a\cos b = \frac{m}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$m\cos a\cos b = \frac{m}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$m\sin a\,\sin b = \frac{-m}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

مثال. برای بهتریاد گرفتن فرمولهای بالا

$4\sin 2x\cos x = 2(\sin 3x + \sin x)$ و $6\cos 4x\cos 2x = 3(\cos 6x + \cos 2x)$

$8\sin 3x\sin 2x = 4(\cos x - \cos 5x)$ و $4\sin 6x\sin x = 2(\cos 4x - \cos 6x)$

$$6\sin 3x\cos 5x = 3[\sin 8x + \sin(-2x)] = 3(\sin 8x - \sin 2x)$$

$$2\sin 7x\cos 10x = \sin 17x + \sin(-3x) = \sin 17x - \sin 3x$$

قاعده ۲۱۰

هرگاه سینوس وکسینوس دوزاویه باسینوس دوزاویه یاکسینوس دوزاویه بصورت حاصلضرب باشند (توان نداشته باشند) ابتدا طبق فرمولهای بالا آنها را بصورت حاصل‌جمع درآورده‌وسپس تابع اولیه می‌گیریم.

تابع اولیه هریك از توابع زیر را بدست‌آورید.

۱۶۸۴ — $y = 4\sin 3x\cos 2x + 3\sin 2x\sin x$

$$y = \frac{4}{2}[\sin(3x+2x) + \sin(3x-2x)] + \frac{3}{2}[\cos(2x-x) - \cos(2x+x)]$$

$$y = 2\sin 5x + 2\sin x + \frac{3}{2}\cos x - \frac{3}{2}\cos 3x$$

$$Y = \frac{-2}{5}\cos 5x - 2\cos x + \frac{3}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin 3x + c$$

۱۶۸۵ — $y = 2\cos 5x\cos 3x - 3\sin 3x\cos 2x$

$$y = \frac{2}{2}[\cos(5x+3x) + \cos(5x-3x)] - \frac{3}{2}[\sin(3x+2x) + \sin(3x-2x)]$$

$$y = \cos 8x + \cos 2x - \frac{3}{2}\sin 5x - \frac{3}{2}\sin x$$

$$Y = \frac{1}{8}\sin 8x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{3}{10}\cos 5x + \frac{3}{2}\cos x + c$$

۱۶۸۶ — $y = 3\cos 4x\cos x - 2\sin 2x\sin x$

$$y = \frac{3}{2}[\cos 5x + \cos 3x] - \frac{2}{2}[\cos x - \cos 3x]$$

$$y = \frac{3}{2}\cos 5x + \frac{3}{2}\cos 3x - \cos x + \cos 3x$$

$$Y = \frac{3}{10}\sin 5x + \frac{1}{2}\sin 3x - \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + c$$

۱۶۸۷ — $y = 3\sin 2x\cos x - 2\sin 5x\sin x + 5\cos 3x\cos x$

$$y = \frac{3}{2}[\sin 3x + \sin x] - \frac{2}{2}[\cos 4x - \cos 6x] + \frac{5}{2}[\cos 4x + \cos 2x]$$

$$y = \frac{3}{2}\sin 3x + \frac{3}{2}\sin x - 2\cos 4x + 2\cos 6x + \frac{5}{2}\cos 4x + \frac{5}{2}\cos 2x$$

$$Y = \frac{-1}{2}\cos 3x - \frac{3}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin 3x + \frac{1}{3}\sin 6x + \frac{5}{8}\sin 4x + \frac{5}{4}\sin 2x + c$$

قاعده ۲۱۱

وقتی درمسأله میگویند تابع اولیه‌ای تعیین کنید که بازاء $x = 2$ برابر ۵ شود ابتداء تابع اولیه میگیریم و سپس بجای x مساویش ۲ و بجای Y مساویش ۵ را قرار میدهیم و مقدار C را حساب می‌کنیم.

۱۶۸۸ ــ تابع اولیه‌ای از $y = 2\cos 2x + \cos x$ پیدا کنید که بازاء $x = 90^\circ$ برابر صفر باشد

$$y = 2\cos 2x + \cos x \to Y = \sin 2x + \sin x + c$$

$$0 = \sin \pi + \sin 90^\circ + c \to c = -1 \to Y = \sin 2x + \sin x - 1$$

۱۶۸۹ ــ تابع اولیه‌ای از $y = 2\cos^2 x - \cos x - 1$ پیدا کنید که بازاء $x = \pi$ برابر $(\pi - 1)$ شود.

$$y = 2\cos^2 x - \cos x - 2 \to y = 2\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) - \cos x - 2$$

$$y = 1 + \cos 2x - \cos x - 2 = \cos 2x - \cos x - 1$$

$$Y = -0/5\sin 2x - \sin x - x + c \to 1 - \pi = 0/5\sin 2\pi - \sin \pi - \pi + c$$

$$1 - \pi = -\pi + c \to c = 1 \to Y = 0/5\sin 2x - \sin x - x + 1$$

۱۶۹۰ ــ تابع اولیه‌ای ازعبارت $y = 12\cos 2x \sin^2 2x + 8\sin x \cos^2 x - 1$ پیدا کنید که بازاء $x = \frac{\pi}{2}$ برابر $(\frac{\pi}{2} - 2)$ باشد

$$y = 12\cos 2x \sin^2 2x + 8\sin x \cos^2 x - 1$$

$$Y = 2\sin^3 2x - 2\cos^3 x - x + c \to$$

$$2 - \frac{\pi}{2} = 0 - \frac{\pi}{2} + c \to c = 2 \to Y = 2\sin^3 2x - 2\cos^3 x - x + 2$$

۱۶۹۱ ــ تابع اولیه $y = (x+1)(x^2+2x+3)^3$ را چنان تعیین کنید که بازاء $x = -1$ برابر ۲ شود. جواب: $y = 0/125(x^2+2x+3)^4 + 2$

۱۶۹۲ ــ تابع اولیه $y = 2\sin^2 x + 4\cos x - 3$ را چنان تعیین کنید که بازاء $x = \frac{\pi}{2}$ برابر $(\pi - 2)$ شود.

جواب: $Y = 4\sin x - 0/5\sin 2x - 2x - 2$

حل مسائل تابع اولیه کتاب درسی

۱۶۹۳ — ک۱ـ ص۱۷۱ـ مطلوبست تعیین تابع اولی x^2-3x+2 بقسمی که بازاء $x=2$ مساوی صفر شود.

حل:

$$y=x^2-3x+2$$

$$Y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+c \Rightarrow 0=\frac{8}{3}-6+4+c$$

$$c=\frac{-8}{3}+2=\frac{-2}{3} \Rightarrow Y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{2}{3}$$

۱۶۹۴ — ک۲ـ ص۱۷۱ـ مطلوبست تابع اولی $x^2-\frac{1}{x^2}$ بقسمی که بازای $x=1$ برابر ۲ شود.

حل:

$$y=x^2-\frac{1}{x^2}=x^2-x^{-2}$$

$$Y=\frac{1}{3}x^3+x^{-1}+c=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x}+c$$

$$2=\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+c \Rightarrow c=\frac{2}{3} \Rightarrow Y=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x}+\frac{2}{3}$$

۱۶۹۵ — ک۳ـ ص۱۷۱ـ مشتق دوتابع u و v برحسب متغیر x بترتیب u' و v' است اگر داشته باشیم $\frac{u'}{v'}=\frac{u}{v}$ ثابت کنید که نسبت $\frac{u}{v}$ مقداری ثابت است.

حل: چون $\frac{u}{v}=\frac{u'}{v'}$ است پس نتیجه میشود.

$$uv'=u'v \Rightarrow u'v-v'u=0$$

$$y=\frac{u}{v} \Rightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

چون $u'v-v'u=0$ است پس $y'=0$ می‌باشد یعنی y مساوی مقدار ثابت است

تمرین: تابع اولیه هریك از توابع زیر را بدست آورید.

۱۶۹۶ ـ ك ـ الف ـ ص ۱۷۱ ـ $y=2(x^2-x)^2$

حل: $y=2(x^4+x^2-2x^3)$

$$Y=\frac{2}{5}x^5-x^4+\frac{2}{3}x^3+c$$

۱۶۹۷ ـ ك ـ ب ـ ص ۱۷۱ ـ $y=5(3x+1)^4$

حل: $Y=\frac{5}{15}(3x+1)^5+c=\frac{1}{3}(3x+1)^5+c$

۱۶۹۸ ـ ك ـ ج ـ ص ۱۷۱ ـ $y=x^3-x^2+4x-1$

حل: $Y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+2x^2-x+c$

۱۶۹۹ ـ ك ـ د ـ ص ۱۷۱ ـ $y=2x(x^2-3x+1)$

حل: $y=2x^3-6x^2+2x$

$$Y=0/5x^4-2x^3+x^2+c$$

۱۷۰۰ ـ ك ـ هـ ص ۱۷۱ ـ $y=\frac{2}{(x+1)^2}$

حل: $y=2(x+1)^{-2}$ $\quad Y=-2(x+1)^{-1}+c$

$$Y=\frac{-2}{x+1}+c$$

۱۷۰۱ ـ ك ـ و ـ ص ۱۷۲ ـ $y=\frac{2x-1}{(x^2-x+5)^2}$

حل: $y=(2x-1)(x^2-x+5)^{-2}=u'u^{-2}$

$$Y=-u^{-1}+c \Rightarrow y=\frac{-1}{x^2-x+5}+c$$

١٧٠٢ — ك ـ ز ـ ص١٧٢ ـ $y = \sqrt{x+3}$

حل:

$$y=(x+3)^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow Y=\frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}+c$$

$$Y=\frac{2}{3}(x+3)\sqrt{x+3}+c$$

١٧٠٣ — ك ـ ج. ص١٧٢ ـ $y=2\sqrt[3]{x}$

حل:

$$y=2x^{\frac{1}{3}} \Longrightarrow Y=\frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}}+c=\frac{3}{2}x\sqrt[3]{x}+c$$

١٧٠٤ — ك. ط ـ ص١٧٢ ـ $y=\sqrt[3]{5x-1}+\sqrt{2x+1}$

حل:

$$y=(5x-1)^{\frac{1}{3}}+(2x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$Y=\frac{3}{20}(5x-1)^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}+c$$

$$Y=\frac{3}{20}(5x-1)\sqrt[3]{5x-1}+\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}+c$$

١٧٠٥ — ك ـ ى ـ ص ١٧٢ ـ $y=\frac{4}{x^3}+\frac{1}{2x^4}$

حل:

$$y=4x^{-3}+\frac{1}{2}x^{-4} \Longrightarrow Y=-2x^{-2}-\frac{1}{2}x^{-3}+c$$

$$Y=\frac{-2}{x^2}-\frac{1}{2x}+c$$

١٧٠٦ — ك ـ الف، ص١٧٢ ـ $y=\cos x+3\sin x$

حل:

$$Y=\sin x-3\cos x+c$$

١٧٠٧ — ك ـ ب ـ ص١٧٢ ـ $y=\cos 4x$

حل: $Y = \frac{1}{4}\sin 4x + c$

۱۷۰۸ – ک ـ ج: ص۱۷۲ـ $y = \sin 3x$

حل: $Y = -\frac{1}{3}\cos 3x + c$

۱۷۰۹ – ک ـ د ـ ص۱۷۲ـ $y = \sin x \cos x$

حل: $y = \frac{1}{2}\sin 2x \Longrightarrow Y = -\frac{1}{4}\cos 2x + c$

طریقه دوم $y = u'u \Longrightarrow Y = \frac{1}{2}u^2 \Longrightarrow Y = -\frac{1}{2}\cos^2 x + c$

۱۷۱۰ – ک ـ هـ ـ ص۱۷۲ـ $y = \cos^3 x$

حل: $y = \cos x(\cos^2 x) = \cos x(1 - \sin^2 x)$

$y = \cos x - \cos x \sin^2 x \Longrightarrow Y = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c$

۱۷۱۱ – ک ـ و ـ ص۱۷۲ـ $y = \sin^3 x$

حل: $y = \sin x \sin^2 x = \sin x(1 - \cos^2 x)$

$Y = \sin x - \sin x \cos^2 x \Longrightarrow Y = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$

۱۷۱۲ – ک ـ ح ـ ص۱۷۲ـ $y = \sin^2 x \cos x$

حل: $Y = u^2 u' \Longrightarrow Y = \frac{1}{3}u^3 \Longrightarrow Y = +\frac{1}{3}\sin^3 x + c$

۱۷۱۳ – ک ـ ط ـ ص۱۷۲ـ $y = \sin 3x \cos 2x$

حل: $y = \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x) \longrightarrow Y = \frac{-1}{10}\cos 5x - 0/5\cos x + c$

۱۷۱۴ – ک ـ ک ـ ص۱۷۲ـ $y = \cos x(1 + \sin 3x)$

حل: $y = \cos x + \cos x \sin 3x$

$y = \cos x + \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x) \quad Y = \sin x - \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{4}\cos 2x + c$

۱۷۱۵ – ک ـ ل ـ ص۱۷۲ـ $y = \sin^2 x \cos 3x$

حل: $y = \frac{1 - \cos 2x}{2} \times \cos 3x = \frac{\cos 3x - \cos 3x \cos 2x}{2}$

$$y=\frac{1}{2}\left[\cos 3x-\frac{1}{2}(\cos 5x+\cos x)\right]=\frac{1}{2}\cos 3x-\frac{1}{4}\cos 5x-\frac{1}{4}\cos x$$

$$Y=\frac{1}{6}\sin 3x-\frac{1}{20}\sin 5x-\frac{1}{4}\sin x+c$$

۱۷۱۶ - ک- ب- ص۱۷۲- $y=tg^2x$

حل: $y=tg^2x+1-1\longrightarrow Y=tgx-x+c$

۱۷۱۷ - ک- ج- ص۱۷۲- $y=tg^4x$

حل $y=tg^4x+tg^2x-tg^2x-1+1$

$$y=tg^2x(tg^2x+1)-(tg^2x+1)+1\rightarrow Y=\frac{1}{3}tg^3x-tgx+x+c$$

۱۷۱۸ - ک۶- ص۱۷۲- مطلوبست تعیین معادله‌وشکل یک‌منحنی که قائمهای نقطه‌های مختلفه‌اش ازمبدأ مختصات بگذرد.

حل: میدانیم $m=\frac{-1}{y'}$ قائم برمنحنی میباشد ومعادله‌هر خطی که‌ازمبدأمختصات‌می‌گذرد بصورت $y=mx$ میباشد پس

$$y=\frac{-1}{y'}x\longrightarrow yy'=-x\longrightarrow\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}x^2+c$$

معادله منحنی یک‌دایره‌است $y^2+x^2=2c$

۱۷۱۹ - تابع $y=f(x)$ را چنان‌بیابید که‌مشتق اول‌ودوم‌آن عکس یکدیگر بوده وضریب‌زاویه‌مماس‌برمنحنی درنقطه $A(1,2)$ برابر ۲ باشد.

حل: $y'=\frac{1}{y''}\longrightarrow y'y''=1\longrightarrow\frac{1}{2}y'^2=x+c$

مماس $m=y'=2$ و $x=1\longrightarrow 2=1+c\longrightarrow c=1$

$$\frac{1}{2}y'^2=x+1\longrightarrow y'^2=2x+2\longrightarrow y'=\pm\sqrt{2x+2}$$

بجای y' و x مقادیرشان را قرارداده وامتحان نموده نتیجه با رادیکال مثبت درست است .

$$y=(2x+2)^{\frac{1}{2}}\longrightarrow Y=\frac{1}{3}(2x+2)^{\frac{3}{2}}+c'$$

$$Y = \frac{1}{3}(2x+2)\sqrt{2x+2}+c'$$

مختصات A باید دراین تابع صدق کند.

$$2 = \frac{1}{3}(2+2)\sqrt{2+2}+c' \longrightarrow c = \frac{-2}{3}$$

$$Y = \frac{1}{3}(2x+2)\sqrt{2x+2}-\frac{2}{3}$$

۱۷۲۰ ــ معادله یك منحنی را بنویسید که مشتق ثانی آن مساوی متغیر باشد ومنحنی ازنقطه $A(3,0)$ بگذرد وضریب زاویه مماس برمنحنی دراین نقطه برابر ۳/۵ باشد.

حل:

$$y'' = x \longrightarrow y' = 0/5x^2+c$$

$$3/5 = 0/5\times 9+c \longrightarrow c = -1$$

$$y' = \frac{1}{2}x^2-1 \longrightarrow y = \frac{1}{6}x^3-x+c'$$

$$0 = \frac{9}{2}-3+c' \longrightarrow c' = \frac{-3}{2} \longrightarrow y = \frac{1}{6}x^3-x-\frac{3}{2}$$

۱۷۲۱- معادله منحنی را پیدا کنید که درهر نقطه آن $y'' = \frac{12}{x^3}$ بوده و منحنی آن ازنقطه $A(1,0)$ بگذرد ومعادله خط مماس بر آن دراین نقطه خط $6x+y=6$ باشد.

جواب: $y = \frac{6-6x}{x}$

۱۷۲۲ ــ معادله منحنی را پیدا کنید که درهر نقطه آن $y'' = \frac{3}{\sqrt{x+3}}$ است ومنحنی ازنقطه $M(1,1)$ میگذرد وخط مماس برمنحنی دراین نقطه بامحور طولها زاویه 45° سازد

جواب: $y = 4(x+3)\sqrt{x+3}-11x-20$

۱۷۲۳ ــ معادلهٔ منحنی هائی را بدست آورید که قائم برمنحنی ازنقطه ثابت $C(\alpha,\beta)$ بگذرد.

حل:

$$y-\beta = -\frac{1}{y'}(x-\alpha) \longrightarrow yy'-\beta y'+x-\alpha = 0$$

از معادلهٔ فوق تابع اولیه می گیریم.

$$\frac{1}{2}y^2-\beta y+\frac{1}{2}x^2-\alpha x+c=0\longrightarrow y^2-2\beta y+x^2-2\alpha x+2c=0$$

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=\alpha^2+\beta^2-2c$$

۱۷۲۴ — اولاً معادله دسته منحنی را که ضریب زاویه خط مماس آنها در نقطه $p(x,y)$ مساوی $2x-4$ باشد پیدا نمائید. ثانیاً معادلهٔ یکی از منحنی‌ها را که از نقطهٔ $A(3,1)$ می‌گذرد بدست آورید.

حل: میدانیم که ضریب زاویه خط مماس برابر مشتق می‌باشد.

معادلهٔ منحنی‌ها $y'=2x-4\longrightarrow y=x^2-4x+c$

باید از نقطهٔ $A(3,1)$ بگذرد.

$$1=9-12+c\longrightarrow c=4\longrightarrow y=x^2-4x+4$$

۱۷۲۵ — معادلهٔ منحنی را بدست آورید که ضریب زاویهٔ خط مماس آن در نقطهٔ $p(x,y)$ برابر $-\frac{x}{y}$ بوده و از نقطه $(a,0)$ بگذرد.

حل: بایستی y را از رابطه $y'=-\frac{x}{y}$ پیدا کرد.

$$yy'=-x\longrightarrow\frac{y^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+c\longrightarrow y^2+x^2=2c$$

وچون این منحنی از نقطه $(a,0)$ می‌گذرد بنابراین:

$$a^2+0=2c\Longrightarrow c=\frac{a^2}{2}\Longrightarrow y^2+x^2=a^2$$

۱۷۲۶ — معادله منحنی را پیدا نمائید که در نقطه $p(x,y)$، $y''=\frac{6}{x^3}$ بوده و از نقطه $Q(1,1)$ با شیب 135° بگذرد.

حل: چون انتگرال مشتق ثانی y'' مشتق اول y' میباشد بنابراین اگر از رابطه $y''=\frac{6}{x^3}$ انتگرال بگیریم چنین خواهیم داشت.

$$y''=\frac{6}{x^3}=6x^{-3}\Longrightarrow y'=-3x^{-2}+c=\frac{-3}{x^2}+c$$

$$\text{مماس}\ m=\operatorname{tg}135^\circ=-\operatorname{tg}45^\circ=-1$$

$$y' = \frac{-3}{x^2} + c \longrightarrow -1 = -3 + c \quad \text{یا} \quad c = 2$$

وازآنجا: $y' = -3x^{-2} + 2$ حال اگر ازطرفین این رابطه انتگرال بگیریم چنین خواهیم داشت :

$$y = 3x^{-1} + 2x + c' = \frac{3}{x} + 2x + c'$$

واگرمختصات نقطه (۱و۱)Q را دراین رابطه قراردهیم معادله منحنی مطلوب بدست می‌آید.

$$1 = 3 + 2 + c' \quad \text{یا} \quad c' = -4 \longrightarrow y = \frac{3}{x} + 2x - 4$$

۱۷۲۷ ــ معادله دسته منحنی را پیدا نمائید که ضریب زاویه خط مماس آنها درنقطه $p(x,y)$ برابر $2x - 1$ باشد ونیز معادله یکی ازاین منحنی‌ها رابدست آورید که ازنقطه $Q(1,1)$ بگذرد .

جواب: $y = x^2 - x + 1$

۱۷۲۸ ــ معادله منحنی را پیدا نمائید که مشتق ثانی آن $2x$ بوده $(y'' = 2x)$ واین منحنی درنقطه (۱ــ و۱) برخط $2x - y - 3 = 0$ مماس باشد.

جواب: $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{6}$

۱۷۲۹ ــ تابعی چنان تعیین کنید که ضریب زاویه خط قائم درهر نقطه آن ۲ برابر نصف عکس طول آن نقطه بوده ومقدار تابع بازاء $x = 1$ برابر ۵ ــ باشد.

حل: میدانیم ضریب زاویه مماس برمنحنی برابر y' وضریب زاویه قائم برمنحنی برابر $\frac{-1}{y'}$ میباشد پس می‌توان نوشت:

$$\frac{-1}{y'} = \frac{1}{2x} \longrightarrow y' = -2x \longrightarrow y = -x^2 + c$$

$$A(1,-5) \longrightarrow -5 = -1 + c \longrightarrow c = -4 \longrightarrow y = -x^2 - 4$$

۱۷۳۰ ــ معادله یک منحنی را طوری تعیین کنید که ضریب زاویه خط قائم برمنحنی در هر نقطه ازآن چهار برابر عرض آن نقطه باشد ومنحنی آن محورعرضها را درنقطه‌ای بعرض ۲ قطع کند .

حل: مطابق مسأله قبل داریم. $\frac{-1}{y'} = 4y \longrightarrow 4yy' = -1$

حال تابع اولیه میگیریم $2y^2 = -x + c$

$A(0 \text{ و } 2) \Longrightarrow 2(4) = -0 + c \to c = 8 \Longrightarrow 2y^2 + x = 8$

۱۷۳۱ — معادله یك منحنی را چنان تعیین کنید که ضریب زاویه قائم برمنحنی درهر نقطه آن برابر $\frac{-y}{x^2}$ بوده (x و y طولها و عرض پای قائم میباشد) ومنحنی نمایش آن خط $x + y = 2$ را روی محور عرضها قطع نماید. جواب: $3y^2 - 2x^3 = 12$

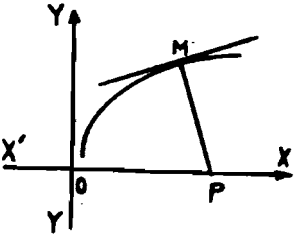
۱۷۳۲ — تابعی چنان تعیین کنید که مابین مشتق مرتبه اول وتابع و متغیر آن رابطه $3y^2y' + 2y' = 2x - 5$ برقرار بوده منحنی نمایش آن نیمساز ناحیه سوم را در نقطه‌ای بطول ۲ — قطع کند.

حل: ازدوطرف رابطه فوق تابع اولیه میگیریم.

$y^2 + 2y = x^2 - 5x + c$ و $A(-2 \text{ و } -2)$

$-8 - 4 = 4 + 10 + c \to c = -26$

$y^2 + 2y - x^2 + 5x + 26 = 0$ معادله منحنی



۱۷۳۳ — معادله یك منحنی را طوری بدست آورید که چون در نقطه $M(x \text{ و } y)$ قائمی برمنحنی رسم کنیم این قائم محور xها را در نقطه p قطع کرده و $MP = a$ باشد. (کنکور پلی تکنیك دیماه ۴۷)

حل: میدانیم $M(x \text{ و } y)$ و $P(x_p \text{ و } 0)$ و $m_{MP} = \frac{-1}{y'}$ میباشد.

$$m_{MP} = \frac{y - 0}{x - x_P} = \frac{-1}{y'}$$

$$yy' = -x + x_P \to x_P = yy' + x \to P(yy' + x \text{ و } 0)$$

$$MP = a = \sqrt{(x - yy' - x)^2 + (y - 0)^2} \to a^2 = y^2y'^2 + y^2$$

$$y^2y'^2 = a^2 - y^2 \to yy' = \pm\sqrt{a^2 - y^2}$$

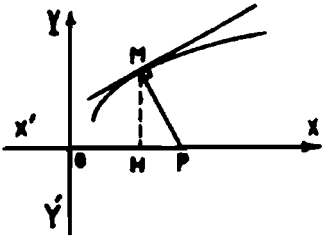
$$\frac{yy'}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \pm 1$$

اگر ازدوطرف تساوی تابع اولیه بگیریم نتیجه میشود

$$-\sqrt{a^2-y^2}=\pm x+c\rightarrow a^2-y^2=x^2+c^2\pm 2cx$$

$$\begin{cases}(x+c)^2+y^2=a^2\\(x-c)^2+y^2\quad a^2\end{cases}$$

۱۷۳۴ — معادله منحنی‌هائی را بدست‌آورید که تحت‌قائمهای آن بر روی محور xها (یعنی تصویر قائمهای برمنحنی بر روی محور طولها) برابر مقدار ثابت a باشد.



حل: میدانیم $M(x$ و $y)$ و $p(x_p$ و $0)$ و $m_p=\frac{-1}{y'}$ میباشد $mM_p=\frac{y-0}{x-x_p}=\frac{-1}{y'}$

$$yy'=-x+x_p\rightarrow x_p=yy'+x$$

پس $P(yy'+x$ و $0)$ و $H(x$ و $0)$ و $HP=a$ تحت‌قائم‌میباشد.

$$HP=x_P-x_H=yy'+x-x=a$$

$$yy'=a\rightarrow 2yy'=2a\rightarrow y^2=2ax+c$$

۱۷۳۵ — تابع $f(x)$ y را طوری‌تعیین کنید که دوبرابر مشتق‌اول آن‌مساوی ۳ — برابر عکس مشتق‌دوم آن باشدومنحنی نمایش آن‌بر خط $y-3x=2$ در نقطه‌ای بطول ۱ مماس باشد.

حل:

$$2y'=\frac{-3}{y''}\rightarrow 2y'y''=-3$$

$y^2=-3x+c$ و $y=3x+2$

$y_A=3+2=5\rightarrow A(1,5)$ مماس و $m=3$

$$9=-3\times 1+c\rightarrow c=12\rightarrow y^2=-3x+12$$

$$y'=+\sqrt{12-3x}=(12-3x)^{1/5}$$

تابع اولیه میگیریم

$$y=\frac{-1}{4/5}(12-3x)^{1/5}+c$$

$$A(1,5)\rightarrow 5=\frac{-1}{4/5}(12-3)^{1/5}+c$$

$$۲۲/۵ = -۹\sqrt{۹} + ۴/۵c \Longrightarrow C = ۱۱$$

$$y = \frac{-۱}{۴/۵}(۱۲ - ۳x)^{۱/۵} + ۱۱$$

۱۷۳۶ – تابع $y = f(x)$ را چنان تعیین کنید که مابین مشتقات مرتبه اول و مرتبه دوم و تابع و منحنی آن رابطه زیر برقرار باشد $yy'' + y'^۲ = ۶\sqrt{(۲x-۱)^۲}$ و منحنی آن از نقطه $A(۴و۴/۵)$ گذشته و خط مماس بر منحنی در نقطه A موازی خط $y = ۳x - ۱$ باشد.

حل: میدانیم مشتق yy' برابر $y'^۲ + y''y$ میباشد پس اگر از عبارت بالا تابع اولیه بگیریم نتیجه می‌شود.

$$yy' = ۱/۸(۲x-۱)^{\frac{۵}{۳}} + c$$

$$\text{خط } m = ۳ \quad \text{مماس } m =$$

حال بجای x و y مختصات نقطه A و بجای y' ضریب زاویه خط مماس را قرار میدهیم.

$$۴ \times ۳ = ۱/۸(۹-۱)^{\frac{۵}{۳}} + c \rightarrow c = -۴۵/۶$$

$$yy' = ۱/۸(۲x-۱)^{\frac{۵}{۳}} - ۴۵/۶$$

تابع اولیه میگیریم

$$\frac{۱}{۲}y^۲ = ۱/۸\,(۲x-۱)^{\frac{۸}{۳}} - ۴۵/۶x + c'$$

$$A(۴/۵و۴) \Longrightarrow \frac{۱}{۲} \times ۱۶ = ۱/۸(۹-۱)^{\frac{۸}{۳}} - ۴۵/۶ \times ۴/۵ + c'$$

$$c' = -۲۴۷/۶ \Longrightarrow \frac{۱}{۲}y^۲ = ۱/۸(۲x-۱)^{\frac{۸}{۳}} - ۴۵/۶x - ۲۴۷/۶$$

۱۷۳۷ – تابع $y = f(x)$ را چنان تعیین کنید که میان مشتقات مرتبه اول و مرتبه دوم آن رابطه زیر برقرار باشد.

$$y'y'' - y'' = \sin ۲x$$

ومنحنی نمایش آن در مبدأ مختصات بر نیمساز ناحیه اول مماس باشد.

حل: تابع اولیه میگیریم $\frac{1}{2}y'^2 - y' = -\frac{1}{2}\cos 2x + c$

$O(0,0)$ مماس $D1 = 1 \Longrightarrow \frac{1}{2} \times 1 - 1 = -\frac{1}{2}\cos 0 + c \Longrightarrow c = 0$

$y'^2 - 2y' + \cos 2x = 0 \Longrightarrow y' = 1 \pm \sqrt{1 - \cos 2x}$

$y' = 1 \pm \sqrt{1 - 1 + 2\sin^2 x} = 1 \pm \sqrt{2}\sin x$

تابع اولیه میگیریم $y = 1 \pm \sqrt{2}\cos x + c$

$O(0,0) \Longrightarrow 0 = 1 \pm \sqrt{2}\cos 0 + c \Longrightarrow c = -1 \mp \sqrt{2}$

$y = 1 \pm \sqrt{2}\cos x - 1 \mp \sqrt{2}$

۱۷۳۸ — معادله یک منحنی را بنویسید که ضریب زاویه قائم بر منحنی در هر نقطه آن برابر $\sqrt{\frac{x-2}{y-1}}$ باشد و منحنی نمایش تابع نیز از نقطه $A(3,5)$ بگذرد.

جواب: $\sqrt{y-1} = \sqrt{x-2} + 3$

۱۷۳۹ — تابع $y = F(x)$ را طوری تعیین کنید که بین خود تابع و مشتقات مرتبه اول و دوم آن رابطه $x(y''x + 9y') + 2(y-1) - y'' = 0$ برقرار باشد و داشته باشیم $F(2) = \frac{8}{3}$ و ضریب زاویه مماس در محل تلاقی با محور yها برابر (-2) باشد.

جواب:

۱۷۴۰ — مطلوبست تعیین تابع $y = F(x)$ بطریقی که بین مشتقات مرتبه اول و دوم آن رابطه $3y' + x(y'' - 4) = 0$ برقرار بوده و مماس بر منحنی در نقطه‌ای بطول واحد موازی محور xها گردد و منحنی نمایش تابع فوق نیمساز ربع اول را در نقطه‌ای بطول واحد قطع کند. جواب:

۱۷۴۱ — تابع $y = f(x)$ را چنان تعیین کنید که بین مشتق مرتبه اول و مشتق مرتبه دوم و متغیر آن رابطه $y'y''x^2 = x^2 - 1$ برقرار باشد و منحنی نمایش تابع آن در نقطه‌ای بطول ۱ بر محور طولها مماس باشد.

تمرین با جواب

۱۷۴۲- $y = \sqrt[4]{x^3+3x^2+3x+1}$

$Y = \frac{4}{7}\sqrt[7]{(x+1)^7}+c$

۱۷۴۳- $y = \sqrt[5]{x^3-6x^2+12x-8}$ $\quad Y = \frac{5}{8}\sqrt[5]{(x-2)^8}+c$

۱۷۴۴- $y = \sqrt[7]{-8x^3+12x^2-6x+1}$

$Y = -\frac{7}{20}\sqrt[7]{(1-2x)^{10}}+c$

۱۷۴۵- $y = x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ $\quad Y = \frac{8}{23}x^2\sqrt[8]{x^7}+c$

۱۷۴۶- $y = \sqrt[5]{(2x-1)^3\sqrt{(2x-1)\sqrt{(1-2x)^2}}}$

$Y = \frac{15}{53}(2x-1)\sqrt[30]{(2x-1)^{22}}+c$

۱۷۴۷- $y = 2x\sqrt{x}$ $\quad Y = \frac{4}{5}x^2\sqrt{x}+c$

۱۷۴۸- $y = 10\cdot(x-1)^2\sqrt{x-1}$

$Y = 3(x-1)^3\sqrt{x-1}+c$

۱۷۴۹- $y = 270\cdot(3-2x)^5\sqrt[4]{(2x-3)^4}$

$Y = -20\cdot(2x-3)^6\sqrt[4]{(2x-3)^5}+c$

$y = 45(x-3)\sqrt[4]{x-2}$

۱۷۵۰- $Y = 4(x-2)(5x-19)\sqrt[4]{x-2}+c$

۱۷۵۱- $y = 10\cdot(2x-5)\sqrt{x+2}$

$$Y=۲(x+۲)(۲x-۱۱)\sqrt{x+۲}+c$$

۱۷۵۲- $y=(۲x+۵)^{۲}\sqrt{۲x+۳}$

$$Y=(۲x+۳)\left[\frac{۱}{۷}(۲x+۳)^{۲}+\frac{۴}{۵}(۲x+۳)+\frac{۴}{۳}\right]\sqrt{۲x+۳}$$

۱۷۵۳- $y=\dfrac{x+۳}{(x+۴)^{۱۴}}$

$$Y=\frac{-۱۰}{۱۲(x+۴)^{۱۲}}+\frac{۱}{۱۳(x+۴)^{۱۳}}+c$$

۱۷۵۴- $y=\dfrac{x^{۲}+۵x-۳}{(x+۲)^{۱۷}}$

$$Y=\frac{-۱}{۲۴(x+۲)^{۲۴}}-\frac{۱}{۲۵(x+۲)^{۲۵}}+\frac{۹}{۲۶(x+۲)^{۲۶}}+c$$

۱۷۵۵- $y=\dfrac{x^{۳}-۴x^{۲}-۳x-۵}{(x-۲)^{۱۹}}$

$$Y=\frac{-۱}{۱۵(x-۲)^{۱۵}}-\frac{۱}{۸(x-۲)^{۱۶}}+\frac{۷}{۱۷(x-۲)^{۱۷}}+\frac{۹}{۱۸(x-۲)^{۱۸}}+c$$

۱۷۵۶- $y=x^{۲}(۵-x)^{۳}$

$$Y=\frac{۶۲۵}{۳}x^{۳}-۱۲۵x^{۴}+۳\cdot x^{۵}-\frac{۱۰}{۳}x^{۶}+\frac{۱}{۷}x^{۷}+c$$

۱۷۵۷- $y=(۱-x)(۱-۲x)(۱-۳x)$

$$Y=x-۳x^{۲}+\frac{۱۱}{۳}x^{۳}-\frac{۳}{۲}x^{۴}+c$$

۱۷۵۸- $y=\dfrac{x+۱}{\sqrt{x}}$ $\qquad Y=\dfrac{۲}{۳}x\sqrt{x}+۲\sqrt{x}+c$

۱۷۵۹- $y=\dfrac{\sqrt{x}-۲\sqrt[۳]{x^{۲}}+۱}{\sqrt[۳]{x}}$

$$Y=\frac{۳}{۵}x\sqrt[۳]{x}-\frac{۲۳}{۱۷}x\sqrt[۱۲]{x^{۵}}+\frac{۳}{۲}\sqrt[۳]{x^{۲}}+c$$

۱۷۶۰- $y = \frac{(1-x)^3}{x\sqrt{x}}$

$Y = \frac{-3}{\sqrt{x}}(1 + \frac{3x}{2} - \frac{3x^2}{5} + \frac{x^3}{8}) + C$

۱۷۶۱- $y = (1 - \frac{1}{x^2})\sqrt{x\sqrt{x}}$ $\quad Y = \frac{3(x^2+7)}{7\sqrt[3]{x}} + C$

۱۷۶۲- $y = \frac{(\sqrt{2x} - \sqrt{3x})^2}{x}$

$Y = 2x - \frac{12}{5}\sqrt[6]{72x^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{9x^2} + C$

۱۷۶۳- $y = \frac{1}{\sqrt{2-5x}}$ $\quad Y = \frac{-2}{5}\sqrt{2-5x} + C$

۱۷۶۴- $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad Y = -\sqrt{1-x^2} + C$

۱۷۶۵- $y = x^2\sqrt{1+x^3}$ $\quad Y = \frac{1}{3}(1+x^3)\sqrt{1+x^3}$

۱۷۶۶- $y = \frac{x}{(1+x^2)^2}$ $\quad Y = \frac{-1}{2(1+x^2)} + C$

۱۷۶۷- $y = \frac{x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$ $\quad Y = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}} + c$

۱۷۶۸- $y = \frac{x^2}{\sqrt{(8x^3+27)^2}}$ $\quad Y = \frac{1}{8}\sqrt{8x^3+27} + C$

۱۷۶۹- $y = \frac{x^3}{(x^6+1)^3}$ $\quad Y = \frac{-1}{15(x^6+1)^2} + C$

۱۷۷۰- $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$

$Y = 2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + C$

۱۷۷۱- $y = x(1-x)^{10}$

$$Y = \frac{-(1-x)^{11}}{11} + \frac{(1-x)^{12}}{12} + c$$

۱۷۷۲- $y = \frac{x^2}{(1-x)^{100}}$

$$Y = \frac{1}{99(1-x)^{99}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{97(1-x)^{97}} + c$$

۱۷۷۳- $y = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$

$$Y = \frac{1}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}} - (x-1)^{\frac{3}{2}}\right] + c$$

۱۷۷۴- $y = x\sqrt{2-5x}$ $\quad Y = \frac{2-30x}{375}(2-5x)^{\frac{3}{2}} + c$

۱۷۷۵- $y = \frac{x}{\sqrt{1-3x}}$ $\quad Y = -\frac{1+2x}{10}(1-3x)^{\frac{2}{3}} + c$

۱۷۷۶- $y = x^2\sqrt{1+x^2}$

$$Y = \frac{3}{12}(1+x^2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}} + c$$

۱۷۷۷- $y = x^2\sqrt{1-x}$

$$Y = -\frac{2}{120}(9+12x+12x^2)(1-x)^{\frac{3}{2}} + c$$

۱۷۷۸- $y = x^4(1-5x^2)^{10}$ $\quad Y = -\frac{1+55x^2}{6600}(1-5x^2)^{11} + c$

۱۷۷۹- $y = \frac{x}{\sqrt{2-x}}$

$$Y = \frac{-2}{15}(32+8x+2x^2)\sqrt{2-x}+c$$

۱۷۸۰- $y = \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}$

$$Y = \frac{-1}{15}(8+4x^2+3x^4)\sqrt{1-x^2}+c$$

۱۷۸۱- $y = x^4(2-5x^2)^{\frac{2}{3}}$

$$Y = -\frac{6+25x^2}{1000}(2-5x^2)^{\frac{5}{3}}+c$$

۱۷۸۲- $y = \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4}$ $\quad Y = 6\sqrt{x} - \frac{1}{10}x^2\sqrt{x}+c$

۱۷۸۳- $y = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$ $\quad Y = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+c$

۱۷۸۴- $y = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x\sqrt{x}} + 2$ $\quad Y = \frac{-1}{x} - \frac{8}{\sqrt{x}} + 2x$

۱۷۸۵- $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ $\quad Y = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+c$

۱۷۸۶- $y = (x^2+\frac{1}{\sqrt{x}})^2$

$$Y = \frac{x^5}{5}+\frac{3}{2}x^2\sqrt{x^2}+3\sqrt{x}+c$$

۱۷۸۷- $y = x\sqrt{x^2+1}$ $\quad Y = \frac{2}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$

۱۷۸۸- $y = \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}}$ $\quad Y = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3}+c$

۱۷۸۹- $y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad Y=\frac{2}{3}\sqrt{x^2+1}+c$

۱۷۹۰- $y=2x(x^2+1)^4$ $\quad Y=\frac{1}{5}(x^2+1)^5+c$

۱۷۹۱- $y=\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ $\quad Y=\frac{4}{3}\sqrt{(1+\sqrt{x})^3}+c$

۱۷۹۲- $y=\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$ $\quad Y=4\sqrt{1+\sqrt{x}}+c$

۱۷۹۳- $y=\frac{x-3}{\sqrt{3+66x-11x^2}}$

$Y=\frac{-1}{11}\sqrt{3+66x-11x^2}+c$

۱۷۹۴- $y=\cos^5 x\sqrt{\sin x}$

$Y=(\frac{2}{3}-\frac{4}{7}\sin^2 x+\frac{2}{11}\sin^4 x)\sqrt{\sin^3 x}$

۱۷۹۵- $y=\frac{\sin^3 x}{\cos^6 x}$ $\quad Y=\frac{1}{3}tg^3 x+\frac{1}{5}tg^5 x+c$

۱۷۹۶- $y=\frac{1}{1+\cos x}$ $\quad Y=tg\frac{x}{2}+c$

۱۷۹۷- $y=\frac{1}{1+\sin x}$ $\quad Y=-tg(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})+c$

۱۷۹۸- $y=\frac{1}{\sqrt{2-5x}}$ $\quad Y=-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}$

۱۷۹۹- $y=\frac{1}{(5x-2)^{2/5}}$ $\quad Y'=-\frac{2}{15(5x-2)^{1/5}}$

۱۸۰۰- $y=\frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}$ $\quad Y=-\frac{5}{2}\sqrt[5]{(1-x)^2}$

۱۸۰۱- $y = \sin^5 x \cos x$ $\qquad Y = \frac{1}{6}\sin^6 x + c$

۱۸۰۲- $y = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}$ $\qquad Y = \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + c$

۱۸۰۳- $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}$ $\qquad Y = \frac{3}{2}\sqrt[3]{1 - \sin 2x} + c$

۱۸۰۴- $y = 1 - \sin^2 x \sqrt[4]{\cot g\, x}$ $\qquad Y = -\frac{4}{3}\sqrt[4]{\cot g^3 x} + c$

۱۸۰۵- $y = \frac{x^4}{(x^5+1)^2}$ $\qquad Y = -\frac{1}{15(x^5+1)^3}$

۱۸۰۶- $y = \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{3}$ $\qquad Y = 3\sin\frac{x}{6} + \frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6} + c$

۱۸۰۷- $y = \sin(2x - \frac{\pi}{6})\cos(3x + \frac{\pi}{3})$

$Y = -\frac{1}{10}\cos(5x + \frac{\pi}{12}) + \frac{1}{2}\cos(x + \frac{5\pi}{12}) + c$

۱۸۰۸- $y = \cos^4 x$ $\qquad Y = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$

۱۸۰۹- $y = \cot g^2 x$ $\qquad Y = -x - \cot g\, x + c$

۱۸۱۰- $y = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$ $\qquad Y = tg\, x - \cot g\, x + c$

۱۸۱۱- $y = \frac{1}{\cos^4 x}$ $\qquad Y = tg\, x + \frac{1}{3}tg^3 x + c$

۱۸۱۲- $y = \sin^4 x \cos^5 x$

$Y = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2\sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9} + c$

۱۸۱۳- $y = \sin^5 x \cos^5 x$

$Y = -\frac{\cos 2x}{64} + \frac{\cos^3 2x}{96} - \frac{\cos^5 2x}{320} + c$

۱۸۱۴- $y=\frac{\cos^2 x}{\cos^4 x}$ $\quad Y=\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+c$

۱۸۱۵- $y=\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}$ $\quad Y=\frac{tg^5 x}{5}+c$

۱۸۱۶- $y=\frac{1}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}$

$$Y=-2\sqrt{cotg\,x}+\frac{2}{3}\sqrt{tg^3 x}+c$$

۱۸۱۷- $y=\sin 5x\cos x$ $\quad Y=-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{12}\cos 6x+c$

۱۸۱۸- $y=\cos x\cos 2x\cos 3x$

$$Y=\frac{x}{8}+\frac{\sin 2x}{8}+\frac{\sin 4x}{16}+\frac{\sin 6x}{24}+c$$

۱۸۱۹- $y=\sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}$

$$Y=\frac{3}{2}\cos\frac{x}{6}-\frac{3}{10}\cos\frac{5x}{6}-\frac{3}{14}\cos\frac{7x}{6}+\frac{3}{22}\cos\frac{11x}{6}+c$$

۱۸۲۰- $y=\sin x\sin(x+a)\sin(x+b)$

$$Y=-\frac{1}{2}\cos(a-b)\cos x-\frac{1}{4}\cos(x+a+b)+$$

$$+\frac{1}{12}\cos(3x+a+b)+c$$

۱۸۲۱- $y=\sin^2 2x\cdot\cos^2 3x$

$$Y=-\frac{3}{16}\cos 2x+\frac{3}{64}\cos 4x+\frac{1}{48}\cos 6x-\frac{3}{128}\cos 8x+\frac{1}{192}\cos 12x$$

۱۸۲۲- $y=\frac{1}{(1-x^2)^{1/5}}$ $\quad Y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+c$

۱۸۲۳ ـ تابع $y=8(x-1)(x^2-2x+3)^2$ مفروض است تابع اولیه این تابع را بقسمی حساب کنید که بازاء $x=1$ مقدار آن برابر ۱۶ گردد. خرداد ۴۵

جواب : $Y=(x^2-2x+3)^4$

۱۸۲۴ ـ $y=\frac{x}{(x+1)^2}+tg^2x(1+tg^2x)$ شهریور ماه ۴۸

$$Y=\frac{-1}{x+1}+\frac{1}{2(x+1)^2}+\frac{1}{3}tg^3x+c$$

مسائل کنکور دانشکده‌ها

رشته ریاضی دانشکده علوم ۱۳۴۰

۱۸۲۵ ـ $y=\frac{2x^2-1}{x^2}-\frac{5}{\sqrt{x^2}}$ $Y=2x^2+\frac{1}{x}-\frac{5}{8}x\sqrt[5]{x^2}+c$

رشته زمین‌شناسی دانشکده علوم ۱۳۴۱

۱۸۲۶ ـ $y=x^2+\cos^2x+\frac{1}{\cos^2x}+2\sqrt{x^2}$

$$Y=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+tgx+\frac{6}{5}x\sqrt{x^2}+c$$

رشته ریاضی دانشکده علوم ۱۳۴۲

۱۸۲۷ ـ $y=\sqrt{2x-5}$ $Y=\frac{2}{12}(2x-5)\sqrt{2x-5}+c$

دانشکده علوم مشهد ۱۳۴۴

۱۸۲۸ ـ $y=\frac{x-1}{x^2}+\sin^2\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{x^2}}$

$$Y=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2}x-\sin\frac{x}{2}+3\sqrt{x}+c$$

گروه چهارم دانشگاه تهران مرداد ماه ۱۳۴۵

۱۸۲۹ ـ

$$y=\cos^2\frac{x}{2}+\frac{x'}{\sqrt{2-x^2}} \qquad Y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sin x-\sqrt{2-x^2}+c$$

گروه سوم دانشکده علوم تهران مرداد ماه ۱۳۴۵

۱۸۳۰ ـ $y=\frac{\sin 2x}{\sqrt[4]{(1+\cos^2x)^5}}+\frac{x+5}{x^3+2x^2+2x+1}$

$$Y_1 = \frac{3}{\sqrt{(1+\cos^2 x)^2}} + c_1 \quad \text{و} \quad Y_2 = -\frac{x+3}{(x+1)^2} + c$$

$$Y + Y_2 = Y = \frac{3}{2\sqrt{(1+\cos^5 x)^2}} - \frac{x+3}{(x+1)^2} + c$$

رشته ریاضی و فیزیك دانشکده علوم مشهد ۱۳۳۶

$$y = -\frac{1}{(1-x)^3} + 2x(3x+1)^5 + x\sqrt{(1-3x)^2} + tg^2 x - 1831$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = -\frac{1}{3(1-x)^3} + \frac{2}{63}(3x+1)^7 - \frac{1}{27}$$

$$(3x+1)^6 - \frac{1}{10}(1-3x^2)\sqrt{(1-3x^2)^2} + \frac{1}{3}tg^3 x - tg x + x + c$$

رشته شیمی دانشکده علوم مشهد ۱۳۳۵

$$y = x^3 - \frac{5}{x^2} + \sqrt{1-2x} - 2\cos^2 3x \qquad -1832$$

$$Y = \frac{x^5}{5} - \frac{5}{2x^2} - \frac{3}{8}(1-2x)\sqrt{1-2x} - \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}\sin 6x + c$$

دانشکده فنی تبریز (۱۳۳۵)

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} \qquad -1833$$

$$Y = \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+1}$$

رشته ریاضی دانشکده علوم تبریز (۱۳۳۶)

۱۸۳۴ — تابع $y = f(x)$ را طوری تعیین کنید که تحت قائم مکان هندسی آن در هر نقطه برابر مقدار ثابت P باشد و یکی از آن منحنیها را طوری تعیین کنید که از نقطه $A(1,0)$ بگذرد

جواب: $y = \pm 2P(x-1)$

رشته فیزیک دانشکده علوم ۱۳۳۶

۱۸۳۵ — $y=\sin^3 x+\cos^3 x$

جواب: $Y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{16}\sin 4x+c$

رشته فیزیک دانشکده علوم مشهد ۱۳۳۶

۱۸۳۶ — $y=x^5\div\sqrt[5]{(2-x^2)^2}-\sin 2x(\cos^5 x-\cos^2 x)$

$$Y=-\frac{5}{21}(5+x^2)\sqrt[5]{(2-x^2)^2}+\frac{2}{7}\cos^7 x-\frac{8}{5}\cos^5 x+2\cos^2 x+c$$

رشته ریاضی دانشکده علوم ۱۳۳۷

۱۸۳۷ — $y=\frac{x^2-3x+2}{(x-2)^5}+\frac{(1-\cot g^2 x)\operatorname{tg} x}{\sin^3 x}$

$$Y=\frac{-1}{2(x-2)^2}-\frac{1}{3(x-2)^3}+\frac{2}{9}\sqrt{\cot g x}(\cot g^2 x-9)+c$$

۱۸۳۸ — تابع اولیه $y=(\operatorname{tg} x+\cot g x)^2$ را که بازاء $x=60^\circ$ صفر می‌شود تعیین کنید.

$Y=\operatorname{tg} x-\cot g x-(2\sqrt{3}\div 3)$

دانشگاه صنعتی آریامهر تیرماه ۴۶

۱۸۳۹ — مطلوبست تعیین تابع $y=f(x)$ درصورتیکه اولا منحنی نمایش این تابع در نقطه‌ای بطول ۰/۵ برمحور طولها مماس بوده ثانیاً مابین y' و y'' مشتقات مرتبه اول و مرتبه دوم تابع مزبور رابطه $y''(y'-1)=4x$ برقرار باشد.

حل: ازرابطه $y''y'-y''=4x$ تابع اولیه میگیریم.

$\frac{1}{2}y'^2-y'=2x^2+c$ مماس و $A(0/50)$ مماس $m=0$

$0-0=2(0/25)+c\rightarrow c=-0/5$

$\frac{1}{2}y'^2-y'=2x^2-0/5\rightarrow y'^2-2y'-4x^2+1=0$

$y'=1\pm\sqrt{1+4x^2-1}\rightarrow y'=1-2x$

اگر تابع اولیه بگیریم نتیجه میشود $y\quad x-x^2+c'$

$A(0/50)\Longrightarrow 0=0/5-(0/25)+c'\Longrightarrow c'=-0/25$

$y=x-x^2-0/25$

۱۸۴۰ – تابع اولیه تابع $y=x(ax+b)^m$ را بدست آورید.

حل

$$y=\frac{1}{a}(ax+b-b)(ax+b)^m$$

$$y=\frac{1}{a}(ax+b)^{m+1}-\frac{b}{a}(ax+b)^m$$

$$Y=\frac{1}{a^2(m+2)}(ax+b)^{m+2}$$

$$\frac{b}{a^2(m+1)}(ax+b)^{m+1}+c$$

۱۸۴۱ – تابع اولیه تابع $y=12(1+cotg^2x)sin^2 2x$ را بدست‌آورید.

حل:

$$y=\frac{12sin^2 2x}{sin^2 x}=\frac{48sin^2 x cos^2 x}{sin^2 x}$$

$$y=48cos^2 x=24cos 2x+24$$

$$Y=12sin 2x+24x+c$$

۱۸۴۲ – مطلوبست تابع اولیه $y=\frac{x^4+x^3-3x^2-1}{(x-1)^2}$

حل: چون توان‌صورت ازمخرج بیشتر است اگرصورت‌کسررا برمخرج‌کسرتقسیم کنیم نتیجه میشود:

$$y=x^2+4x+4-\frac{5}{(x-1)^2}$$

$$y=x^2+4x+4-5(x-1)^{-2}$$

$$Y=\frac{1}{3}x^3+2x^2+4x+\frac{5}{x-1}+c$$

دانشگاه‌صنعتی آریامهر تیرماه۴۶

۱۸۴۳ – تابع $y=\frac{1}{6}(x^3+\frac{3}{x})$ مفروض است‌درصورتیکه مقدار تابع اولیه

$x=\sqrt{1+y'^2}$ تا $x=\sqrt{tg\alpha}$ برابر $\frac{1}{3}$ گردد مطلوبست محاسبه

جواب: $\alpha=60^\circ$

چندقاعده‌برای‌تابع‌اولیه گیری

خارج ازحدودبرنامه

برای‌دانش‌آموزان‌ممتاز در رشته‌ریاضی

قاعده ۲۹۲ تابع اولیه بطریق تغییر متغیر:

اگر تابع اولیه $y=f(x)$ را $Y=F(x)$ فرض‌کنیم و $x=g(t)$ باشد داریم:

$$\begin{cases} y=f(x) \Longrightarrow x=g(t) \\ Y=F(x) \qquad \Longrightarrow y'_{(t)}=Y'_{(x)}\times x'_{(t)} \end{cases}$$

دررابطه بالابجای $Y'_{(x)}$ مساویش $f(x)$ را قرار میدهیم.

$$\boxed{Y'_t = f(x)\times x'_t}$$

از این‌رابطه $Y'_{(t)}$ بدست‌می‌آید وازآن تابع‌اولیه‌گرفته و $Y_{(t)}$ بدست‌می‌آیدودر آنجا بجای t برحسب x قرارمی‌دهیم تاتابع‌اولیه‌برحسب x بدست‌آید.

تذکر: برای گرفتن تابع اولیه توابعی که بصورت $y=\frac{k}{a^2+x^2}$ میباشند راه‌حل اینست‌که x را مساوی $atgt$ فرض‌کرده وطابق قاعده‌بالاعمل‌می‌نمائیم‌مانند مثالهای زیر:

—۱۸۴۴ $y=\frac{1}{4+x^2}=f(x)$

حل:

$$\begin{cases} x=2tgt \Longrightarrow tgt=\frac{x}{2} \Longrightarrow t=arctg\frac{x}{2} \\ x'_t=2(1+tg^2t) \end{cases}$$

$$Y'_{(t)} = Y'_{(x)} \times x'_{(t)} = f(x)\, x'_{(t)} = \frac{1}{2+2tg^2 t} \times 2(1+tg^2 t) = \frac{1}{2}$$

$$Y_{(t)} = \frac{1}{2}t + c \Longrightarrow Y_{(x)} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + c$$

تذکر: بطور کلی برای گرفتن تابع اولیه توابعی که بصورت $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ میباشند راه‌حل اینست که x را مساوی $a\sin t$ یا $a\cos t$ فرض نموده وطبق قاعده (۳۰۳) عمل می‌نمائیم.

۱۸۴۵ — تابع اولیه $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ را بدست آورید.

حل:

$$\begin{cases} x = a\sin t \Longrightarrow x'_t = a\cos t \\ t = \arcsin\frac{x}{a} \end{cases}$$

$$Y'_t = f(x) \times x'_t = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} \times a\cos t = a^2\cos^2 t$$

$$Y'_t = \frac{a^2(1+\cos 2t)}{2} \qquad Y_t = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)$$

$$Y_t = \frac{a^2}{2}(t + \sin t\cos t)$$

میدانیم: $\sin t = \frac{x}{a}$ و $\cos t = \sqrt{1-\sin t^2} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

$$Y_x = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}\right)$$

$$Y_x = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}$$

۱۸۴۶ — تابع اولیه تابع $y = \frac{1}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} = f(x)$ را بدست آورید.

$$x = a\sin t = g(t) \Longrightarrow x'_t = a\cos t$$

$$Y'_{(t)}=f(x)\times x'_t=\frac{1}{\sqrt{(a^2-a^2\sin^2 t)^2}}\times a\cos t$$

$$Y'_{(t)}=\frac{1}{a^2\cos^2 t}\times a\cos t=\frac{1}{a^2\cos^2 t}=\frac{1}{a^2}(1+tg^2 t)$$

$$Y_{(t)}=\frac{1}{a^2}tg\,t+c \quad و \quad tg\,t=\frac{\sin t}{\cos t}=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$Y_{(x)}=\frac{1}{a^2}\times\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}+c$$

محاسبه انتگرال بطریقه جزء بجزء

اگر u و v توابعی ازیك‌متغیر x باشند بنابدستورمشتق حاصلضرب‌دوتابع داریم

$(uv)'=uv'+vu'$ ویاداریم: $uv'=(uv)'-vu'$

اگر ازطرفین تابع‌اولیه‌بگیریم نتیجه‌میشود:

$(uv')=uv-$ تابع‌اولیه (vu') تابع‌اولیه

از این فرمول بیشتر مسائل‌مشکل حل‌می‌شود

تذکر: بجای کلمه انتگرال وتابع اولیه می‌توان‌علامت $\int$ را بکاربرد وفرمول بالا بصورت مقابل‌درآید. $\int(uv')=uv-\int(vu')$

۱۸۴۷ — توابع‌اولیه تابع $y=x\cos x$ را بدست‌آورید.

$$\begin{cases} u=x\Longrightarrow u'=1 \quad و \quad v'=\cos x\Longrightarrow v=\sin x \end{cases}$$

$$\int(uv')=uv-\int(vu')$$

$$\int x\cos x=x\sin x-\int\sin x$$

$$\int x\cos x=x\sin x+\cos x+c$$

۱۸۴۸ — توابع اولیه تابع $y=x\sin x$ را بدست‌آورید:

$$\begin{cases} u=x\Longrightarrow u'=1 \\ v'=\sin x\Longrightarrow v=-\cos x \end{cases}$$

$$\int(uv')=uv-\int(vu')$$

$$\int x\sin x=-x\cos x-\int(-\cos x)$$

$$\int x\sin x=-x\cos x+\sin x+c$$

۱۸۴۹ – تابع اولیه تابع $y = x\sin^2 3x$ را بدست آورید:

$$y = x\left(\frac{1-\cos 6x}{2}\right) = \frac{x}{2} - \frac{x\cos 6x}{2}$$

$$\int (x\sin^2 3x) = \frac{x^2}{4} - \int \left(\frac{x\cos 6x}{2}\right)$$

برای بدست‌آوردن تابع اولیه $\frac{x\cos 6x}{2}$

از راه جزء بجزء استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2}x \Longrightarrow u' = \frac{1}{2} \\ v' = \cos 6x \quad \rightarrow \quad v = \frac{\sin 6x}{6} \end{cases}$$

$$\int \frac{x\cos 6x}{12} = uv - \int (vu')$$

$$\int \frac{x\cos 6x}{2} = \frac{x\sin 6x}{12} - \int \frac{\sin 6x}{12} + c$$

پس داریم: $\int x\sin^2 3x = \frac{x^2}{4} - \frac{x\sin 6x}{12} + \frac{\cos 6x}{72} + c$

۱۸۵۰ – تابع اولیه تابع $y = (x^2 + 7x - 5)\cos 2x$ را بدست آورید.

$$y = x^2\cos 2x + 7x\cos 2x - 5\cos 2x$$

$$Y = \frac{(2x+7)\cos 2x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + (x^2 + 7x - 5)\frac{\sin 2x}{2} + c$$

۱۸۵۱ – تابع اولیه تابع $y = x^2\sin nx$ را بدست آورید:

$$c: \quad Y = \frac{2\cos nx}{n^3} + \frac{2x\sin nx}{n^2} - \frac{x^2\cos nx}{n} + c$$

۱۸۵۲ – تابع اولیه تابع $y = x\sin\frac{x}{2}$ را تعیین کنید

$$Y = 4\sin\frac{x}{2} - 2x\cos\frac{x}{2} + c$$

۱۸۵۳ ـ تابع اولیه تابع $y = x\cos nx$ را بدست آورید:

$$Y = \frac{\cos nx}{n^2} + \frac{x\sin nx}{n} + c$$

چند قاعده مهم

۱۸۵۴ـ تابع اولیه $y = \frac{u'}{u} \rightarrow Y = \mathrm{Log}u + c$

تذکر: $\mathrm{Log}u$ یعنی لگاریتم u درمبنای e

۱۸۵۵ـ تابع اولیه $y = a^x \rightarrow Y = \frac{a^x}{\mathrm{Log}a} + c$

۱۸۵۶ـ تابع اولیه $y = ae^{nx} \rightarrow Y = \frac{ae^{nx}}{n} + c$

۱۸۵۷ـ تابع اولیه $y = \cot gx \rightarrow Y = \mathrm{Log}\sin x + c$

۱۸۵۸ـ تابع اولیه $y = tgx \rightarrow Y = -\mathrm{Log}\cos x + c$

مسائل مختلف

۱۸۵۹ـ $y = 6e^{3x}$ $\quad Y = 2e^{3x} + c$

۱۸۶۰ـ $y = \frac{1}{e^x}$ $\quad Y = -\frac{1}{e^x} + c$

۱۸۶۱ـ $y = 10^x$ $\quad Y = \frac{10^x}{\mathrm{Log}10} + c$

۱۸۶۲ـ $y = a^{nx}$ $\quad Y = \frac{a^{nx}}{n\mathrm{Log}a} + c$

۱۸۶۳ـ $y = xe^{x^2}$ $\quad Y = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$

۱۸۶۴- $y=e^{\sin x}\cos x$ $\qquad Y=e^{\sin x}+c$

۱۸۶۵- $y=\frac{1}{x^2+9}$ $\qquad Y=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+c$

۱۸۶۶- $y=\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ $\qquad Y=\arcsin\frac{x}{5}+c$

۱۸۶۷- $y=\frac{1}{\sqrt{16-9x^2}}$

$$Y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{4}+c$$

۱۸۶۸- $y=\frac{5x}{\sqrt{1-x^4}}$ $\qquad Y=\frac{5}{2}\arcsin x^2+c$

۱۸۶۹- $y=\frac{ax}{x^4+b^4}$ $\qquad Y=\frac{a}{2b^2}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{b^2}+c$

۱۸۷۰- $y=\sqrt{1-4x^2}$

$$Y=\frac{x}{2}\sqrt{1-4x^2}+\frac{1}{4}\arcsin 2x+c$$

۱۸۷۱- $y=\sqrt{25-9x^2}$

$$Y=\frac{x}{2}\sqrt{25-9x^2}+\frac{25}{6}\arcsin\frac{3x}{5}+c$$

۱۸۷۲- $y=\frac{4x^2+6}{x^2+2x}$ $\qquad Y=\log x^2(x^2+2)+c$

۱۸۷۳- $y=\frac{x^2+x}{(x-1)(x^2+1)}$ $\qquad Y=\log(x-1)+\operatorname{arctg}x+c$

فرمول $\operatorname{Sec}x=\frac{1}{\cos x}$ و $\operatorname{cosec}x=\frac{1}{\sin x}$

۱۸۷۴- $y=\operatorname{Sec}^8 x$

$$Y=\frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x+\frac{3}{5}\operatorname{tg}^5 x+\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}x+c$$

۱۸۷۵ — $y = \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos^3 x}}$ $\quad Y = \frac{1}{3\sqrt{\cos x}} + \frac{3}{5}\cos x\sqrt{\cos^3 x + c}$

۱۸۷۶ — $y = tg^3 x \operatorname{Sec}^2 x$

$$Y = \frac{1}{7} tg^7 x + \frac{1}{5} tg^5 x + c$$

۱۸۷۷ — $y = \cos^3 x \sin^2 x$

$$Y = \frac{-1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + c$$

۱۸۷۸ — $y = \sin^3 x \cos^3 x$

$$Y = \frac{1}{128}\left(3x - \sin 4x + \frac{1}{8}\sin 8x\right) + c$$

۱۸۷۹ — $y = \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x^3}}$ $\quad Y = 2\sqrt{(1+\sqrt{x})^3} + c$

۱۸۸۰ — اگر x_1 و x_2 و x_3 ریشه‌های معادله درجه‌سوم

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

باشند معادله درجه‌دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش به‌ترتیب زیر باشد.

$$X' = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_3} \quad \text{و} \quad X'' = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_1}$$

جواب:

۱۸۸۱ — اگر x_1 و x_2 و x_3 ریشه‌های معادله درجه‌سوم $2x^3 - 6x^2 + 5x - 1 = 0$ باشد حاصل عبارت زیر را بدست آورید

$$K = (x_1 + x_2)^2 (x_1 + x_3)^2 (x_2 + x_3)^2$$

جواب:

۱۸۸۲ — اگر x_1 و x_2 و x_3 ریشه‌های معادله درجه‌سوم $x^3 - 4x - 3 = 0$ باشند حاصل هریک از عبارت زیر را بدست آورید :

$$K = (1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)$$

$$K' = (1 + x_1)(1 + x_2) + (1 + x_1)(1 + x_3) + (1 + x_2)(1 + x_3)$$

جواب:

۱۸۸۳ — اگر x_1 و x_2 و x_3 ریشه‌های معادله درجه‌سوم زیر باشد $2x^3 - 5x + 4 = 0$ حاصل عبارت زیر را حساب کنید.

$$K = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)$$

موارد استعمال تابع اولیه

۱- محاسبه سطح محصور

قاعده ۲۱۳

برای محاسبه سطح محصور بین منحنی و محور طولها بجای y در تابع صفر قرار میدهیم و طولهای نقاط تقاطع را بدست می‌آوریم وسپس از معادله منحنی تابع اولیه میگیریم. (اگر تابع اولیه آن $Y = F(x)$ باشد وطولهای نقاط تقاطع a و b باشد)

ابتداء $F(a)$ و $F(b)$ را بدست می‌آوریم یعنی در تابع اولیه بجای x یکبار a و یکبار b مقدار را قرار میدهیم وحاصل آنها را بدست می‌آوریم وسپس مساحت سطح محصور را ازفرمول $S = |F(a) - F(b)|$ بدست می‌آوریم.

قاعده ۲۱۴

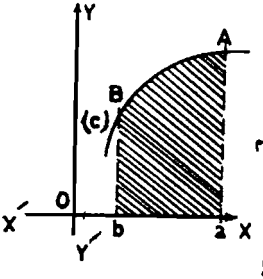
برای پیدا کردن سطح محصور بین دو منحنی C_1 و C_2 یا سطح محصور بین منحنی C وخط d راه حل اینست که دو معادله را باهم حل کرده و طولهای نقاط تقاطع را حساب کرده وسپس از تابع $y = y_1 - y_2$ تابع اولیه گرفته وطبق قاعده قبلی عمل می‌نمائیم (y_1 و y_2 معادله دو منحنی یا معادله منحنی وخط میباشند.

قاعده ۲۱۵

برای محاسبه سطح محصور بین منحنی و محور طولها و دو خط $x = a$ و $x = b$ راه حل اینست که از معادله منحنی تابع اولیه میگیریم وآنرا به $F(x)$ نمایش میدهیم وسپس $F(a)$ و $F(b)$ را بدست آورده ومساحت را از فرمول:

$$S = |F(a) - F(b)|$$

بدست میآوریم

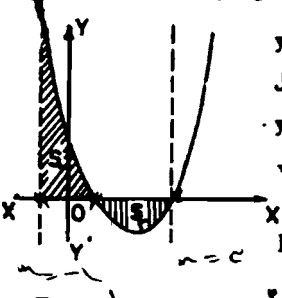


مسائل سطح محصور

مسائل صفحات ۱۸۰ و ۱۸۱ و ۱۸۲ و ۱۸۳

کتاب درسی

۱۸۸۴ — الف: مطلوبست محاسبه سطح واقع بین محور xها و دو خط $x=-1$ و $x=3$ و منحنی نمایش تابع $y=(x-1)(x-3)$



حل: اگر جدول و منحنی را رسم کنید شکل روبرو بدست می‌آید $y=x^2-4x+3$.

$$Y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+c$$

$$F(-1)=\frac{-1}{3}-3-3+c=\frac{-16}{3}+c$$

$$F(1)=\frac{1}{3}-2+3+c=\frac{4}{3}+c$$

$$S_1=F(1)-F(-1)=\frac{4}{3}+c+\frac{16}{3}-c=\frac{20}{3}$$

$$F(3)=9-18+9+c=c$$

$$S'_2=|F(3)-F(1)|=\left|c-\frac{4}{3}-c\right|=\frac{4}{3}$$

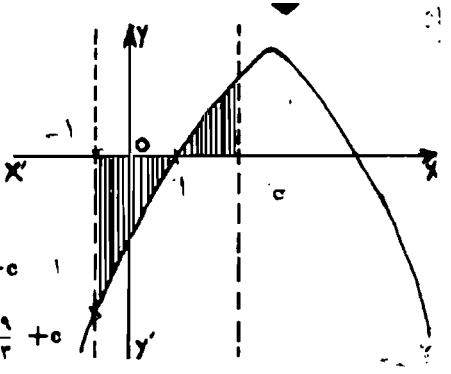
$S = S_1 + S_2 = \frac{20}{3} + \frac{4}{3} = \frac{24}{3} = 8$ واحد مربع

۱۸۸۵ – مطلوبست محاسبه سطح واقع بین محور طولها و دو خط $x = -1$ و $x = 3$ و منحنی نمایش تابع $y = -x^2 + 8x - 12$

$y = -x^2 + 8x - 12$

$y' = -2x + 8$

x	$-\infty$		2		4		6		$+\infty$
y'			$+$		0		$-$		
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$



$Y = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 12x + c$

$F(-1) = \frac{1}{3} + 4 + 12 + c = \frac{49}{3} + c$

$F(2) = \frac{-8}{3} + 16 - 24 + c = \frac{-32}{3} + c$

$S_1 = \left|F(2) - F(-1)\right| = \left|\frac{-32}{3} + c - \frac{49}{3} - c\right| = 27$

$F(3) = -9 + 36 - 36 + c = -9 + c$

$S_2 = \left|F(3) - F(2)\right| = \left|-9 + c + \frac{32}{3} - c\right| = \frac{5}{3}$

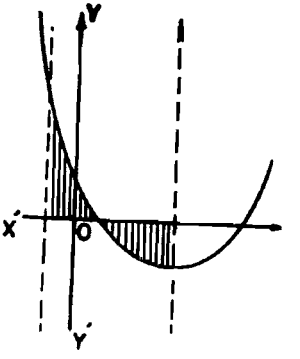
$S = S_1 + S_2 = 27 + \frac{5}{3} = \frac{86}{3}$

۱۸۸۶ – ج – مطلوبست محاسبه سطح واقع بین منحنی نمایش تابع $y = x^2 - 6x + 8$ و محور طولها و دو خط $x = -1$ و $x = 3$

$y = x^2 - 6x + 8$

$y' = 2x - 6$

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
y'			$-$		0		$+$		$+$
y	$+\infty$	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	$+\infty$



$Y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + c$

$F(-1) = \frac{-1}{3} - 3 - 8 + c$

$F(-1) = \frac{-34}{3} + c$

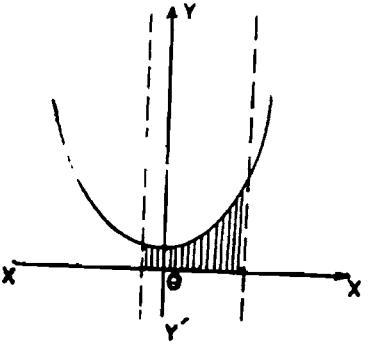
$F(2) = \frac{8}{3} - 12 + 16 + c = \frac{20}{3} + c$

$S_1 = \left| F(2) - F(-1) \right| = \left| \frac{20}{3} + c + \frac{34}{3} - c \right| = \frac{54}{3} = 18$

$F(3) = 9 - 27 + 24 + c = 6 + c$

$S_2 = \left| F(3) - F(2) \right| = \left| 6 + c - \frac{20}{3} - c \right| = \frac{2}{3}$

$S = S_1 + S_2 = 18 + \frac{2}{3} = \frac{54}{3}$ واحد مربع



۱۸۸۷ — د ـ مساحه بین منحنی‌های نمایش تابع : $y = 4x^4 + 5x^2 + 1$ و محور طول‌ها و دو خط $x = -1$ و $x = 3$ را بدست آورید .

$y = 4x^4 + 5x^2 + 1$

$y' = 16x^3 + 10x$

$y' = 2x(8x^2 + 5)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'			$-$		0		$+$		
y	$+\infty$	↘	10	↘	1	↗	10	↗	$+\infty$

$$Y=\frac{4}{5}x^5+\frac{5}{3}x^3+x+c$$

$$F(-1)=-\frac{4}{5}-\frac{5}{3}-1+c=-\frac{52}{15}+c$$

$$F(0)=c$$

$$S_1=|F(0)-F(-1)|=|c+4-c|=4$$

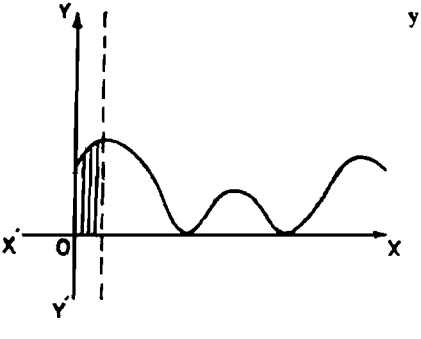
$$F(3)=\frac{972}{5}+45+3+c=\frac{1212}{5}+c$$

$$S_2=F(3)-F(0)=\frac{1212}{5}+c-c=\frac{1212}{5}=242/4$$

$$S=S_1+S_2=\frac{52}{15}+242/4=\frac{3688}{15}$$

تذکر: درمسائل زیر که منحنی مثلثاتی میباشد عملیات وجدول و شکل را خودتان رسم کنید.

۱۸۸۸ – الف: مطلوبست محاسبه مساحت سطح‌محصور بین‌محور xها ودوخط $x=0$ و $x=\frac{\pi}{4}$ و منحنی $y=\sin 2x+1$



حل:

$$Y=-0/5\cos 2x+x+c$$

$$F(0)=-0/5\cos 0+c=$$

$$F(0)=-0/5+c$$

$$F(\frac{\pi}{4})=-0/5\cos\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+c$$

$$F(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}+c$$

$$S=\left|F\left(\frac{\pi}{3}\right)-F(0)\right|=\frac{\pi}{3}+c+\frac{1}{2}-c$$

$$S=\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}$$ واحد مربع

۱۸۸۹ – ب: مطلوبست محاسبه مساحت سطح محصور بین منحنی نمایش تابع $y=\cos 2x-1$ و محور xها ودوخط $x=0$ و $x=\frac{\pi}{3}$

حل:

$$Y=\frac{1}{3}\sin 3x-x+c$$

$$F(0)=c$$

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+c$$

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\pi}{3}+c$$

$$S=\left|F\left(\frac{\pi}{3}\right)-F(0)\right|=\left|\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\pi}{3}+c-c\right|=\left|\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right|$$

۱۸۹۰ – ج: سطح محصور بین منحنی نمایش تابع $y=\sin 2x-\cos 2x$ ومحور طولها ودو خط $x=0$ و $x=\frac{\pi}{3}$ را حساب کنید.

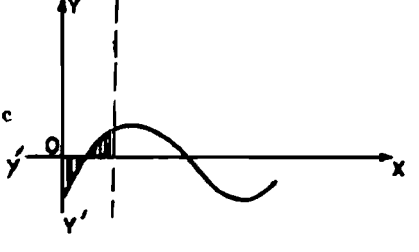
حل:

x	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{5\pi}{8}$		$\frac{7\pi}{8}$		π
y'		+		+	0		−	−	0	+	
y	-1	↗	0	↗	$\sqrt{2}$	↘	0	↘	$-\sqrt{2}$	↗	-1

$$Y=-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x+c$$

$$F(0)=\frac{-1}{2}\cos 0-\frac{1}{2}\sin 0+c$$

$$F(0)=-0/5+c$$



$$F(\frac{\pi}{8})=\frac{-1}{2}\cos\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}+c$$

$$F(\frac{\pi}{8})=\frac{-\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}+c$$

$$F(\frac{\pi}{8})=-\frac{\sqrt{2}}{2}+c$$

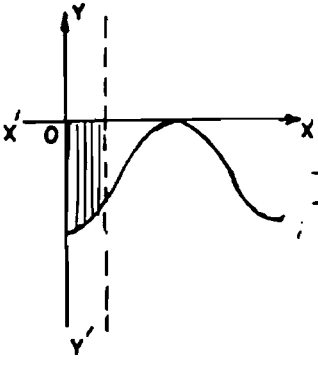
$$S_1=\left|F(\frac{\pi}{8})-F(0)\right|=\left|\frac{-\sqrt{2}}{2}+c+\frac{1}{2}-c\right|=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

$$F(\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}+c=-\frac{1}{2}+c$$

$$S_2=\left|F(\frac{\pi}{4})-F(\frac{\pi}{8})\right|=\left|\frac{-1}{2}+c+\frac{\sqrt{2}}{2}-c\right|=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

$$S=S_1+S_2=\frac{\sqrt{2}-1}{2}+\frac{\sqrt{2}-1}{2}=\sqrt{2}-1$$

۱۸۹۱ — د ـ سطح محصور بین منحنی نمایش تابع $y=-\frac{1}{2}\cos^2 x$ و محور طولها و دو خط $x=0$ و $x=\frac{\pi}{4}$ را بدست آورید.



x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
y'	0	$+$	0	$-$	0
y	$-0/5$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-0/5$
	min		max		min

$$y=\frac{-1}{2}\times\frac{\cos 2x+1}{2}$$

$$Y = \frac{-1}{4}\left(\frac{1}{2}\sin 2x + x\right) + c$$

$$F(0) = c$$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1}{4}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + c = \frac{-1}{8} - \frac{\pi}{16} + c$$

$$S = \left|F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0)\right| = \left|\frac{-1}{8} - \frac{\pi}{16} + c - c\right| = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{8}$$

۱۸۹۲ – م : مساحت سطح محصور بین منحنی $y = \sin^3 2x - \sin 2x$ ومحور طولها ودوخط $x = 0$ و $x = \frac{\pi}{4}$ را بدست آورید.

$$y = -\sin 2x(1 - \sin^2 2x) = -\sin 2x \cos^2 2x$$

$$Y = \frac{1}{6}\cos^3 2x + c$$

$$F(0) = \frac{1}{6}\cos^3 0 + c = \frac{1}{6} + c$$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{6}\cos^3\frac{\pi}{2} + c = c$$

$$S = \left|F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0)\right| = \left|c - \frac{1}{6} - c\right| = \frac{1}{6}$$

۱۸۹۳ – ک ۳ – اولاً ثابت کنید که منحنیهای نمایش $y = -x^2 + x + 2$ و $y = x^2 + 1$ هر کدام یک سهمی است، ومختصات راس هر یک را تعیین وآنها را نسبت به یک دستگاه مختصات رسم کنید. ثانیاً – مختصات نقاط تقاطع دو منحنی وسطح محصور بین این دو منحنی را حساب کنید.

حل: بطور کلی منحنی‌های نمایش توابع درجه دوم سهمی میباشند ونقطه ماکزیمم یا مینیمم آنها رأس سهمی میباشد.

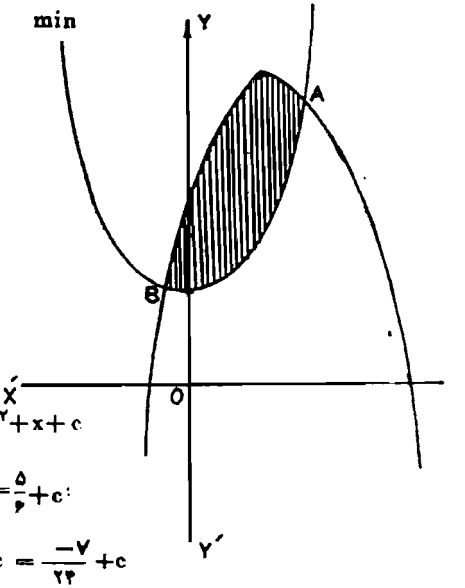
$$\begin{cases} y_1' = -2x + 1 \rightarrow 0 = -2x + 1 \rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ و } y = \frac{9}{4} \\ y_2' = 2x \rightarrow 0 = 2x \rightarrow x = 0 \text{ و } y = 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		$0/5$		1		2		$+\infty$
y'_1			$+$	$+$	0			$-$		$-$	
y_1	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$2/25$	$2\searrow$		0		$\searrow$	$-\infty$

max

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'_2		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y_2	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

min



ثانیاً- $-x^2+x+2=x^2+1$

$2x^2-x-1=0$

$x=1$ و $\frac{-1}{2}$

$A(1 \text{ و } 2)$ و $B(\frac{-1}{2} \text{ و } \frac{5}{4})$

نقاط تلاقی

$y=y_1-y_2=-x^2+$
$x+2-(x^2+1)$

$y=-2x^2+x+1$

$Y=F(x)=\frac{-2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+c$

$F(1)=\frac{-2}{3}+\frac{1}{2}+1+c=\frac{5}{6}+c$

$F(-\frac{1}{2})=\frac{+1}{12}+\frac{1}{8}-\frac{1}{2}+c=\frac{-7}{24}+c$

$S=\left|F(1)-F(\frac{-1}{2})\right|=\frac{5}{6}+c+\frac{7}{24}-c=\frac{9}{8}$

۱۸۹۴ - ۴ـ اگر A و B نقاطی از منحنی $y=2x^3-3x^2+1$ باشند که در آنجا مماس برمنحنی موازی Ox می‌باشد، تعیین کنید: اولاً- مساحت سطح محصور

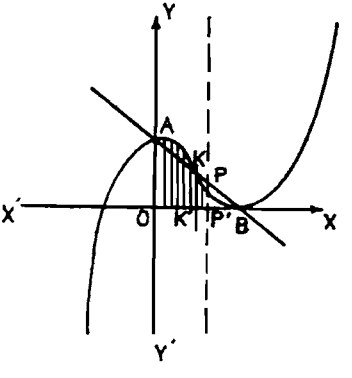
بین قوس AB و محورهای مختصات و خط $x=\frac{2}{3}$ را. ثانیاً ـ مساحت سطح محصور بین قوس و وتر AB را .

حل: میدانیم مماس بر منحنی در نقاط ماکزیمم و می‌نیمم هر تابع موازی محور طولهاست پس A و B نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع فوق میباشند .

$$y'=6x-6x\longrightarrow y'=0\longrightarrow 6x(x-1)=0$$

$$x=0 \text{ و } x=1\longrightarrow y=1 \text{ و } 0\longrightarrow A(0,1) \text{ و } B(1,0)$$

x	$-\infty$		-1		$-0/5$		0		1		2		$+\infty$
y'			+		+		0	−	0		+		
y	$-\infty$	↗	-4	↗	0	↗	1	↘	0	↗	5	↗	$+\infty$



اولاً ـ سطح OAKPP'

$$Y=\frac{1}{2}x^4-x^3+x+c$$

$$F(0)=c$$

$$F\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{81}-\frac{8}{27}+\frac{2}{3}+c$$

$$F\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{38}{81}+c$$

$$S=F\left(\frac{2}{3}\right)-F(0)=\frac{38}{81}$$

ثانیاً ـ سطح محصور بین قوس AB و وتر AB از دو قسمت مساوی تشکیل شده است میدانیم خطی که نقاط ماکزیمم و می‌نیمم منحنی را بهم وصل می‌کند از نقطه عطف منحنی میگذرد پس $K(0/5 \text{ و } 0/5)$ می‌باشد و یا می‌توانیم معادله خط AB را بنویسیم و با معادله منحنی حل کنیم تا مختصات نقطه K بدست آید.

برای محاسبه سطح می‌توان سطح بین منحنی و محور طولها را در فاصله $x=0$ و $x=\frac{1}{2}$ را بدست آورد و همچنین سطح ذوزنقه AKK'O را نیز محاسبه کرد و سپس آنها را از هم کم کرده و حاصلش را دو برابر نمائیم.

جواب: $S=\frac{1}{16}$

۱۸۹۵ – ك۵ـ مساحت سطح‌محصوربین دو منحنی $y=\frac{x^2}{4}$ و $x=\frac{y^2}{4}$ را حساب کنید .

حل : ابتداء دومنحنی‌نمایش‌تابع $y_1=\frac{x^2}{4}$ و $y^2=4x \longrightarrow y_2=\pm 2\sqrt{x}$

را باید رسم‌نمود وسپس مختصات محل‌تلاقی‌آنهارا بدست‌آورد وبعداز تابع $y=y_1-y_2$ تابع اولیه گرفت وطبق‌قاعده (۲۰۶) عمل‌نمود.

$$\frac{x^2}{4}=\pm 2\sqrt{x} \longrightarrow x^2=\pm 8\sqrt{x} \longrightarrow x^4=64x$$

$$x(x^3-64)=0 \longrightarrow x=0 \text{ و } x=4$$

$$y=y_1-y_2=\frac{x^2}{4}\pm 2\sqrt{x}$$

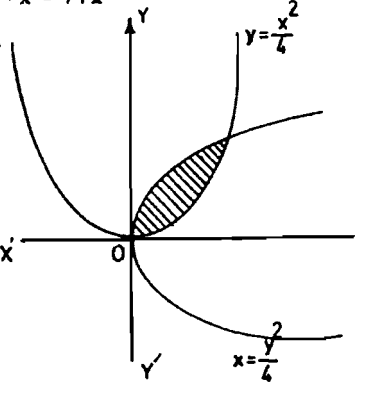
$$Y=\frac{x^3}{12}\pm\frac{4}{3}x\sqrt{x}+c$$

$$F(0)=0+c$$

$$F(4)=\frac{16}{3}+\frac{32}{3}+c$$

$$F(4)=16+c$$

$$S=|F(4)-F(0)|=16$$ واحد مربع



۱۸۹۶ – ك۶ـ اولا منحنیهای نمایش معادلات $y^2=4x$ و $y=-2x^2$ را نسبت به‌یك دستگاه محورهای مختصات رسم‌کنید . ثانیاً ـ مساحت سطح محصور بین آنها را حساب کنید.

حل:

$$y^2=4x \longrightarrow y_1=\pm 2\sqrt{x}$$

محورxها محور تقارن منحنی است پس ابتداء با باضافهٔ رادیکال جدول وشکل را می‌کشیم وسپس قرینه‌آنرا رسم‌می‌نمائیم.

$$y'_1=\frac{1}{\sqrt{x}}>0$$

x	0		1		4		$+\infty$
y'_1	∞	+		−	+		
y_1	0	↗	2		4	↗	$+\infty$

$y_2 = -2x^2 \longrightarrow y'_2 = -4x$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'_2			$+$		0		$-$		
y_2	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$

$-2x^2 = \pm 2\sqrt{x} \longrightarrow 4x^4 = 4x \longrightarrow 4x(x^3-1) = 0 \longrightarrow x = 0 \text{ و } 1$

$y = y_1 - y_2 = 2\sqrt{x} + 2x^2$

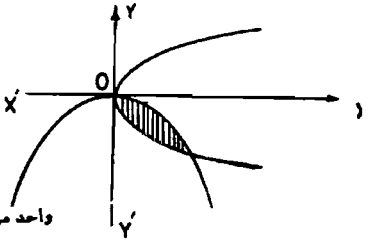
$Y = \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{3}x\sqrt{x} + c$

$F(0) = c$

$F(1) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + c$

$F(1) = 2 + c$

$S = |F(1) - F(0)| = 2$ واحد مربع



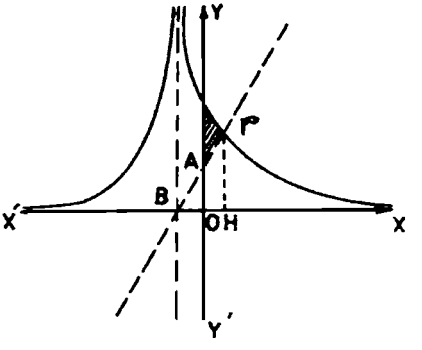
۱۸۹۷ – ک۷– اولاً– جدول و منحنی (c) نمایش تغییرات مشتق تابع $y = \frac{4x-2}{2x+1}$ را رسم کنید. ثانیاً– سطح محصور میان خط $y = 2x+1$ و منحنی (c) و محور yها را حساب کنید.

حل: تذکر– مشتق تابع فوق یعنی: $y' = \frac{8}{(2x+1)^2}$ یك تابعی است بصورت:

$y_1 = \frac{8}{(2x+1)^2}$ که باید آنرا رسم کنیم.

$y_1' = \frac{-32}{(2x+1)^3}$

x	$-\infty$		-1		$-0/5$		0		$+\infty$
y'		$+$		$+$	∞		$-$		
y	0	$\nearrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	8	$\searrow$	0



$y=2x+1 \longrightarrow$

$A(0,1)$ و $B(-0/5,0)$

خط $y=2x+1$ منحنی‌را درنقطه $P(+0/52,2)$ و محور طول‌ها را درنقطه $B(-0/50,0)$ ومحور عرضها را در نقطه $A(0 \text{ و } 1)$ قطع می‌کند.

$y=y_1-y_2$

$$y=\frac{8}{(2x+1)^2}-2x-1$$

$$Y=\frac{4x-2}{2x+1}-x^2-x+c$$

$F(0)=-2+c$ و

$F(0/5)=0-0/25-0/5+c=-0/75+c$

$S=F(0/5)-F(0)=-0/75+c+2-c=1/25$ واحد مربع

تذکر: می‌توانیم ابتداء سطح بین‌منحنی ومحورطول‌ها ودوخط $x=0$ و $x=0/5$ را بدست‌آورد وسپس‌سطح ذوزنقه APHO را نیز حساب‌کرده وازهم‌کم‌نمائیم.

۱۸۹۸ - ۵ـ اولاً ـ مطلوب‌است محاسبهٔ‌ضرایب a ، b و c بقسمی‌که رأس‌سهمی $y=ax^2+bx+c$ نقطهٔ $A(2 \text{ و } -1)$ ونقطهٔ تلاقیش با محور yها بعرض ۳ باشد.

ثانیاً ـ منحنی نمایش تابع $y=x^2-4x+3$ را رسم‌کنید.

ثالثاً ـ اگر B نقطهٔ‌برخورد این‌منحنی بامحور yها باشد، معادله خط AB را بنویسید ومساحت سطح محصورمیان منحنی ووترABرا حساب‌کنید.

حل: نقطه رأس‌سهمی‌همان‌نقطه‌ماکزیمم‌ومی‌نیمم‌منحنی‌میباشد.

$y'=2ax+b$ و $A(2 \text{ و } -1)$ نقطهٔ Max یا Min و $B(0 \text{ و } 3)$

$$\begin{cases} \text{درتابع } B & 3=c \\ \text{درمشتق } A & 0=2a(2)+b \\ \text{درتابع } A & -1=4a+2b+3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -4a-b=0 \\ 4a+2b=-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=-4 \\ a=1 \end{cases}$$

$y=x^{۲}-۴x+۳$ و $y'=۲x-۴$

x	$-\infty$		۰		۱		۲		۳		$+\infty$
y'			−		−		۰		+	+	
y	$+\infty$	↘	۳	↘	۰	↘	−۱	↗	۰	↗	$+\infty$

Min

ثالثاً ـ

$$AB \equiv \frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}$$

$$AB \equiv y=-۲x+۳$$

$$y=y_۱-y_۲$$

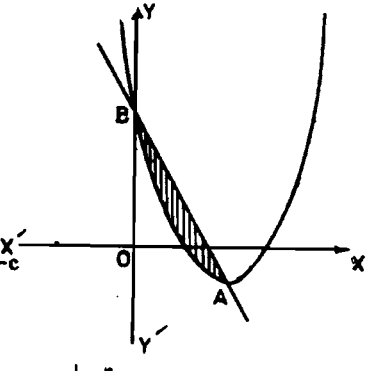
$$y=x^{۲}-۴x+۳+۲x-۳$$

$$y=x^{۲}-۲x$$

$$Y=\frac{۱}{۳}x^{۳}-x^{۲}+c$$

$$F(۰)=c \quad و \quad F(۲)=\frac{۸}{۳}-۴+c$$

$$F(۲)=\frac{-۴}{۳}+c$$



$$S=\left|F(۲)-F(۰)\right|=\left|\frac{-۴}{۳}+c-c\right|=\frac{۴}{۳}$$ واحدمربع

۱۸۹۹ ـ ک۹ـ اولا ضرایب a و b را طوری حساب کنید که تابع:

$y=(a+b\cos x)\sin x$ درازای $x=\frac{\pi}{۳}$ ماکزیمم یا می‌نیمم و برابر $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$ باشد

ثانیاً ـ منحنی نمایش تابع $y=(۱+\cos x)\sin x$ را در فاصلهٔ $(۰ \text{ و } ۲\pi)$ رسم کنید سطح محصور بین این منحنی و محور طول‌ها را حساب کنید.

حل: $y=a\sin x+\frac{b}{۲}\sin ۲x$ و $y'=a\cos x+b\cos ۲x$

$$\begin{cases} \text{مشتق} & 0 = a\cos\frac{\pi}{3} + b\cos\frac{2\pi}{3} \\ \text{تابع} & \frac{3\sqrt{3}}{4} = a\sin\frac{\pi}{3} + \frac{b}{2}\sin\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = 0 \\ \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = b \\ 2a + b = 3 \longrightarrow 2a + a = 3 \longrightarrow a = b = 1 \end{cases}$$

ثانیاً ـ $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$ ، $y' = \cos x + \cos 2x$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		2π
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\frac{-3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	0

ثانیاً ـ

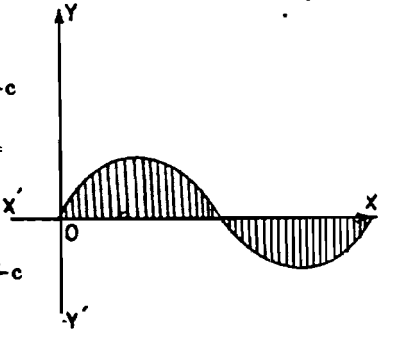
$$y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$Y = -\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x + c$$

$$F(0) = -1 - \frac{1}{4} + c = \frac{-5}{4} + c$$

$$F(\pi) = 1 - \frac{1}{4} + c = \frac{3}{4} + c$$

$$F(2\pi) = \frac{-5}{4} + c$$



$S_1 = |F(\pi) - F(0)| = 2$ و $S_2 = |F(2\pi) - F(\pi)| = 2$

$S = S_1 + S_2 = 2 + 2 \longrightarrow S = 4$

۱۹۰۰ — ک۱۱ـ اولاً ـ a و b را طوری تعیین کنید که منحنی نمایش تغییرات تابع : $y = a\cos 2x + b\sin x$ در نقطه‌ای به طول صفر با خط $y = x + 1$ مماس باشد. ثانیاً ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y = \cos 2x + \sin x$ را در فاصلهٔ $(0 \text{ و } 2\pi)$ رسم کنید. ثالثاً ـ سطح محصور بین این منحنی و محورهای مختصات را حساب کنید.

حل: اولاً ـ

$x = 0 \longrightarrow y = 1 \longrightarrow$ نقطه تماس $A(0 \text{ و } 1)$

$y' = -2a\sin 2x + b\cos x$ و $m = 1$ مماس

$$\begin{cases} 1 = -2a\sin 0 + b\cos 0 \Longrightarrow b = 1 & \text{مشتق} \\ 1 = a\cos 0 + b\sin 0 \Longrightarrow a = 1 & \text{تابع} \end{cases}$$

ثانیاً ـ

$y = \cos 2x + \sin x$ و $y' = -2\sin 2x + \cos x$

$y' = \cos x(1 - 4\sin x)$ و $\sin x = \frac{1}{4} = \sin\alpha \Longrightarrow \alpha \neq 15^\circ$

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$		$\pi-\alpha$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	$\nearrow$	$\frac{9}{8}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{9}{8}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

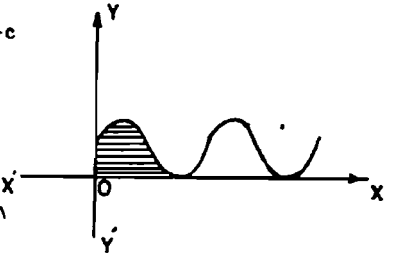
ثالثاً

$Y = \frac{1}{2}\sin 2x - \cos x + c$

$F(0) = -1 + c$

$F(\frac{\pi}{2}) = c$

$S = F(\frac{\pi}{2}) - F(0) = 1$



۱۹۰۱ — ک۱۲ـ اولاً ـ معادله $\cos 2x + \sin x - 1 = 0$ را حل کنید. ثانیاً ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع $y = \cos 2x + \sin x - 1$ را رسم کنید. ثالثاً ـ مساحت سطح محصور میان این منحنی و محور طول‌ها و خطهای $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = \pi$ را حساب کنید.

حل: اولاً ـ

$$\cos 2x + \sin x - 1 = 0 \Longrightarrow \sin x(-2\sin x + 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \Longrightarrow x = K\pi \quad , \quad -2\sin x + 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Longrightarrow x = 2K\pi + \frac{\pi}{6} \ , \ 2K\pi + \frac{5\pi}{6}$$

$$x = \quad , \ \pi \ , \ 2\pi \ , \ \frac{\pi}{6} \ , \ \frac{5\pi}{6}$$

ثانیاً ـ

$$y' = \cos x(-2\sin x + 1)$$

x	0		α		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\pi-\alpha$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'		$+$	0		$-$		0		$+$		0		$-$		0		$+$
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$	$\searrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0

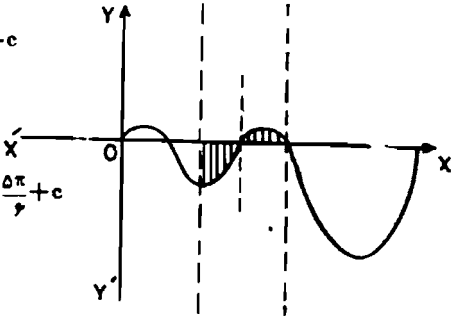
ثالثاً ـ

$$Y = \frac{1}{2}\sin 2x - \cos x - x + c$$

$$F(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} + c$$

$$F(\frac{5\pi}{6}) = \frac{-\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{6} + c$$

$$F(\frac{5\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{5\pi}{6} + c$$



$$F(\pi) = 1 - \pi + c$$

$$S_1 = \left|F(\frac{5\pi}{6}) - F(\frac{\pi}{2})\right| = \left|\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}\right| = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_2 = F(\pi) - F(\frac{5\pi}{6}) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}$$

۱۹۰۲ – ک۱۳ـ اولا معادله $\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x = 0$ را حل کنید و صورت کلی جوابهای آنرا بنویسید و بخصوص جوابهایی را که بین صفر و 2π می‌باشند، بدست آورید. ثانیاً ـ تغییرات تابع $y = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x$ را تعیین کنید و منحنی (c) نمایش این تغییرات را رسم کنید. ثالثاً ـ مساحت سطح محصور بین منحنی (c) و محور xها و دو خط $x = 0$ و $x = \pi$ را حساب کنید.

حل: اولاـ

$$\sin x - \sin x \cos x = 0 \Longrightarrow \sin x(1 - \cos x) = 0$$

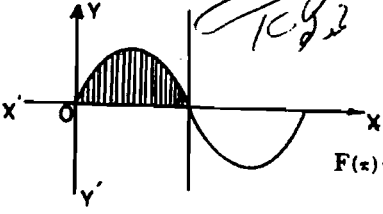
$$\sin x = 0 \Longrightarrow x = K\pi \Longrightarrow x = 0 \text{ و } \pi \text{ و } 2\pi$$

$$1 - \cos x = 0 \Longrightarrow \cos x = 1 \Longrightarrow x = 2K\pi \Longrightarrow x = 0 \text{ و } 2\pi$$

ثانیاـ

$$y' = \cos x - \cos 2x$$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		2π
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\frac{-3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	0



ثالثاـ

$$Y = -\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x + c$$

$$F(0) = \frac{-3}{4} + c$$

$$F(\pi) = \frac{5}{4} + c$$

$$S = 2\left|F(\pi) - F(0)\right| =$$

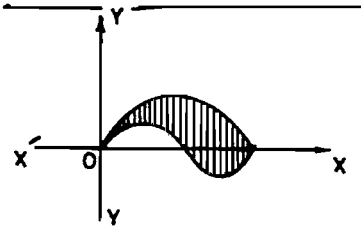
۱۹۰۳ – ک۱۳ـ منحنیهای نمایش تابعهای $y = 2\sin\frac{x}{2}$ و $y = |\sin x|$ را در فاصله $(0 \text{ و } 2\pi)$ رسم و مساحت سطح محصور بین آنها را حساب کنید.

حل:

$$y_1 = \sin x \quad \text{و} \quad y_1' = \cos x$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y_1'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y_1	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

$$y_2 = 2\sin\frac{x}{2} \quad \text{و} \quad y_2' = \cos\frac{x}{2}$$



x	0		π		2π
y'_2		$+$	0	$-$	
y_2	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

$S=S_2+S_3$ و $S_1=S_3$

$S=S_2+S_1$

یعنی مساحت بین دومنحنی

برابر است با مساحت بین منحنی

نمایش تابع $y=2\sin\frac{x}{2}$ ومحور طولها

$$Y=-4\cos\frac{x}{2}+c \quad \text{و} \quad F(0)=-4\cos 0+c=-4+c$$

$$F(2\pi)=-4\cos\pi+c=4+c \qquad S=F(2\pi)-F(0)=8$$

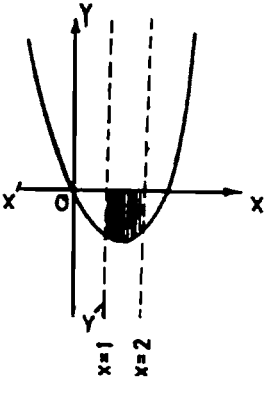
۲- برای محاسبه حجم

قاعده ۲۱۶

برای محاسبه حجم حادث از دوران سطح بین منحنی ومحورها در حول محور طولها ابتداء مقدار $g(x)=\pi y^2$ را حساب وسپس ازآن تابع اولیه میگیریم وآنرا به $G(x)$ نمایش میدهیم و سپس $G(a)$ و $G(b)$ را حساب کرده (اگر $a>b$ باشد) حجم را ازفرمول زیر بدست می‌آوریم $V=G(a)-G(b)$

مسائل مربوط به حجم حادث از دوران منحنی

از کتاب درسی



۱۹۰۴ — الف: حجمی که از دوران سطح محصور بین منحنی نمایش تابع $y=x^2-3x$ ودوخط $x=1$ و $x=2$ درحول محور طولها بدست می‌آید بدست آورید.

حل: $y^2=(x^2-3x)^2$

$g(x)=\pi y^2$

$g(x)=\pi(x^4-6x^3+9x^2)$

$$G(x)=\pi\left(+\frac{x^5}{5}-\frac{3}{2}x^4+3x^3\right)+c$$

$$G(1)=\frac{17\pi}{10}+c$$

$$G(2)=\frac{22\pi}{5}+c$$

$V=G(2)-G(1)=4/7\pi$ واحدمکعب

۱۹۰۵ — ب ـ مطلوبست حجمی که ازدوران سطح ما بین منحنی نمایش $y=x^2-4x+3$ ومحور طولها ودوخط $x=1$ و $x=2$ درحول محورطولها بدست می‌آید.

حل: $g(x)=\pi y^2=\pi(x^2-4x+3)^2$

$$g(x)=\pi(x^4-8x^3+22x^2-24x+9)$$

$$G(x)=\pi\left(\frac{x^5}{5}-2x^4+\frac{22}{3}x^3-12x^2+9x\right)+c$$

$$G(1)=\frac{38\pi}{15}+c \quad \text{و} \quad G(2)=\frac{46\pi}{15}+c$$

$V=G(2)-G(1)=\frac{46\pi}{15}+c-\frac{38\pi}{15}-c=\frac{8\pi}{15}$ واحد مکعب

۱۹۰۶ — ج: مطلوبست تعیین حجمی که ازدوران سطح ما بین منحنی نمایش تابع $y=\sqrt{2+x}$ ومحورطولها ودوخط $x=1$ و $x=2$ بدست آید.

حل: $g(x)=\pi y^2=\pi(2+x)$

$$G(x)=\pi\left(2x+\frac{1}{2}x^2\right)+c \quad \text{و} \quad G(1)=2/5\pi+c$$

$G(2)=6\pi+c$ و $V=G(2)-G(1)=3/5\pi$ واحدمکعب

مطلوب است اندازهٔ حجم حادث ازدوران سطح محصور بین هریك از منحنیهای زیر وخطهای $x=0$ و $x=\frac{\pi}{4}$ ، درحول محور xها:

۱۹۰۷ — الف: $y=tgx$

حل: $g(x)=\pi y^2=\pi tg^2x=\pi(1+tg^2x-1)$

$G(x)=\pi(tgx-x)+c$ و $G(0)=c$

$$G\left(\frac{\pi}{4}\right)=\pi\left(tg\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)+c=\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)+c$$

$V=G\left(\frac{\pi}{4}\right)-G(0)=\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$ واحد مکعب

۱۹۰۸ — ب: $y=\cos x+1$

حل:

$$g(x)=\pi y^{2}=\pi(\cos^{2}x+1+2\cos x)$$

$$g(x)=\pi(\frac{3}{2}+\frac{\cos 2x}{2}+2\cos x)$$

$$G(x)=\pi(\frac{\sin 2x}{4}+2\sin x+\frac{3x}{2})+c$$

$$G(0)=c \quad و \quad G(\frac{\pi}{4})=\pi(\frac{1}{4}+\sqrt{2}+\frac{3\pi}{8})+c$$

واحدمکعب $V=G(\frac{\pi}{4})-G(0)=\pi(\frac{3\pi}{8}+\frac{1}{4}+\sqrt{2})$

۱۹۰۹ – ج: $y=\sin^{2}x-\cos x$

حل: $g(x)=\pi(\sin^{2}x-\cos x)^{2}=\pi(\sin^{4}x+\cos^{2}x-2\cos x\sin^{2}x)$

$$g(x)=\pi(\sin^{4}x+1-\sin^{2}x-2\cos x\sin^{2}x)$$

$$g(x)=\pi[-\sin^{2}x(1-\sin^{2}x)+1-2\cos x\sin^{2}x]$$

$$g(x)=\pi(-\sin^{2}x\cos^{2}x+1-2\cos x\sin^{2}x)=$$

$$\pi(-\frac{1}{4}\sin^{2}2x+1-2\cos x\sin^{2}x)$$

$$g(x)=\pi(\frac{-1+\cos 4x}{8}+1-2\cos x\sin^{2}x)$$

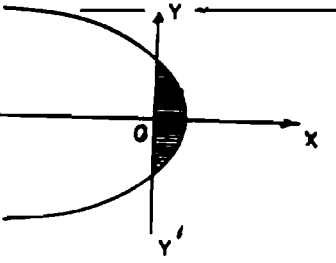
$$G(x)=\pi(+\frac{1}{32}\sin 4x-\frac{2}{3}\sin^{3}x+\frac{7x}{8})+c$$

واحد مکعب $v=G(\frac{\pi}{4})-G(0)=\pi(\frac{7\pi}{32}-\frac{\sqrt{2}}{6})$

۱۹۱۰ – ج۳ـ سطح محصور مابین سهمی $y^{2}=1-2x$ ومحور yها را درحول محور xها دورانمی‌دهیم، اندازهٔ حجم حاصل را بدست آورید.

حل: شکل منحنی نمایش تابع $y=\pm\sqrt{1-2x}$ بصورت زیر است و محور طولها محور تقارن آن میباشد.

x	$-\infty$		$-1/5$		0		$0/5$
y'			$-$			$-$	∞
y	$+\infty$	↘	2	↘	1	↘	0



$$g(x)=\pi y^2=\pi(1-2x)$$

$$G(x)=\pi(x-x^2)+c$$

$$G(0)=c$$

$$G(0/5)=\pi(0/5-0/25)+c$$

$$G(0/5)=0/25\pi+c$$

$$V=G(0/5)-G(0)=$$

$V=0/25\pi$ واحد مکعب

۱۹۱۱ — ک۴ـ مطلوب است محاسبه حجم حادث از دوران یك بیضی به معادله:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ درحول یکی ازمحورهای خود .

حل: حجم حادث درحول محور طولها را درنظر میگیریم:

$$y=0 \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2}=1 \Longrightarrow x^2=a^2 \Longrightarrow x=\pm a$$

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \longrightarrow a^2y^2=a^2b^2-b^2x^2$$

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2) \quad \text{و} \quad g(x)=\pi y^2=\frac{\pi b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

$$G(x)=\frac{\pi b^2}{a^2}(a^2x-\frac{1}{3}x^3)+c$$

$$G(-a)=\frac{\pi b^2}{a^2}(-a^3+\frac{1}{3}a^3)+c=-\frac{2}{3}\pi ab^2+c$$

$$G(+a)=\frac{\pi b^2}{a^2}(a^3-\frac{1}{3}a^3)+c=\frac{2}{3}\pi b^2a$$

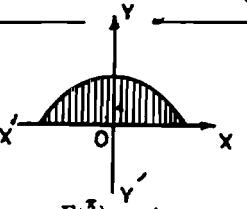
$$V=G(a)-G(-a)=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

۱۹۱۲ـ ک۵ـ اولاـ منحنی نمایش $y=\cos x$ را درفاصله($-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$) رسم کنید .

ثانیاـ مساحت سطح واقع بین این منحنی ومحور xها را حساب کنید . ثالثاـ اندازه حجم حادث ازدوران این سطح درحول محور xها را بدست آورید .

حل: اگر جدول ومنحنی را طبق قواعد مثلثاتی بکشیم نتیجه میشود.

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
y′	+		−
y	۰ ↗	۱	↘ ۰



$$Y=\sin x+c \text{ و } F(\frac{-\pi}{2})=-1+c \text{ و } F(\frac{\pi}{2})=1+c$$

$$S=F(\frac{\pi}{2})-F(-\frac{\pi}{2})=2$$ واحدمربع

$$g(x)=\pi y^2=\pi\cos^2 x=\frac{\pi(1+\cos 2x)}{2}$$

$$G(x)=\frac{\pi}{2}(x+\frac{1}{2}\sin 2x)+c \text{ و } G(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^2}{4}$$

$$G(-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}(\frac{-\pi}{2})=\frac{-\pi^2}{4}+c$$

$$V=G(\frac{\pi}{2})-G(\frac{-\pi}{2})=\frac{\pi^2}{2}$$

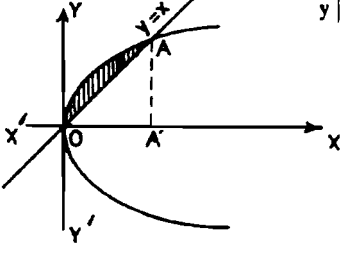
۱۹۱۳ – ک۶ـ اولاـ سهمی $y^2=2x$ وخط $y=x$ را رسم کنید. ثانیاًـ سطح محصور بین سهمی و خط را درحول محور xها دوران می‌دهیم . اندازهٔ حجم حاصل را حساب کنید.

حل: محورطولها محورتقارن‌منحنی‌است

$$y=\pm\sqrt{2x}$$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{2x}}>0$$

x	۰		۱		۲		$+\infty$
y′	∞		+		+		
y	۰	↗	$\sqrt{2}$	↗	۲	↗	$+\infty$



$y=x \Longrightarrow A(0,0)$ و $B(2,2)$

ابتداء حجمی که‌ازدوران‌سطحی که بین قوس OA و محور طولها و خط A′A بدست‌می‌آیدحساب می‌کنیم وسپس‌حجمی که‌ازدوران‌مثلث OAA′

حول محور طولها بدست می‌آید حساب می‌کنیم وسپس انحم کم میکنیم.

$$\pm\sqrt{2x}=x\longrightarrow x^2=2x\longrightarrow x=0 \text{ و } 2$$

$$A(2,2) \text{ و } O(0,0)$$

$$y^2=2x \text{ و } g(x)=\pi y^2\longrightarrow g(x)=2\pi x$$

$$G(x)=\pi x^2+c \text{ و } G(0)=c \text{ و } G(2)=4\pi+c$$

$$V_1=G(2)-G(0)=4\pi+c-c=4\pi$$

حال حجمی که از دوران مثلث OAA' بدست می‌آید حساب می‌کنیم.

$$y^2=x^2\longrightarrow g(x)=\pi y^2=\pi x^2$$

$$G(x)=\frac{\pi}{3}x^3+c\rightarrow G(0)=c \text{ و } G(2)=\frac{8\pi}{3}+c$$

$$V_2=G(2)-G(0)=\frac{8\pi}{3}$$

$$V=V_1-V_2=4\pi-\frac{8\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$$ واحدمکعب

۱۹۱۴ – ک۷ـ اولا مطلوب است تعیین مکان هندسی $M(x=tg\alpha \text{ و } y=\frac{1}{\cos\alpha})$ ورسم آن مکان. ثانیاً ـ حساب کنید مختصات نقاط تقاطع خط Δ بمعادله : $y=(\sqrt{2}-1)x+1$ را با هذلولی (H) به معادله $y^2-x^2=1$. ثالثاً ـ حساب کنید اندازه حجمی را که از دوران سطح محصور مابین (H) و Δ در حول محور xها حادث می‌شود.

حل:

$$y^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+tg^2\alpha=1+x^2\longrightarrow y^2-x^2=1$$

$$y^2=x^2+1\longrightarrow y=\pm\sqrt{x^2+1}$$

چون باتبدیل y به y– معادله منحنی تغییر نمیکند پس محور x محور تقارن منحنی است پس ابتداء منحنی نمایش $y=\sqrt{x^2+1}$ را رسم میکنیم.

$$y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

x	$-\infty$		-2		0		1		2		$+\infty$
y'			$-$		0				$+$		
y	$+\infty$	↘	$\sqrt{5}$	↘	1	↗	$\sqrt{2}$	↗	$\sqrt{5}$	↗	$+\infty$

معادله مجانبها $y=\pm x$

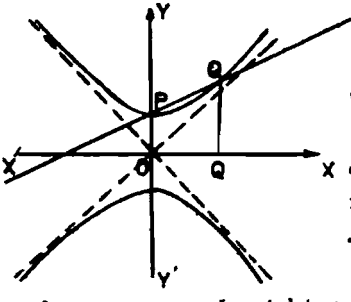
$y=(\sqrt{2}-1)x+1 \longrightarrow A(0,1)$ و $B(1,\sqrt{2})$

ثانیاً- $\sqrt{x^2+1}=(\sqrt{2}-1)x+1$

$x^2+1=(3-2\sqrt{2})x^2+1+2(\sqrt{2}-1)x$

$(2-2\sqrt{2})x^2+(\sqrt{2}-1)x=0$

$x=0$ و $1 \Longrightarrow A\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}1\\\sqrt{2}\end{matrix}\right.$



ثالثاً - ابتداء حجمی که از دوران ذوذنقه OPQQ' حول محور طولها بدست می‌آید. حساب می‌کنیم (حجم مخروط ناقص) وسپس حجمی که از دوران سطح محصور بین منحنی و محور طولها و دو خط $x=0$ و $x=1$ بدست می‌آید حساب کرده واز هم کم می‌نمائیم.

$y^2=x^2+1 \Longrightarrow g(x)=\pi y^2=\pi(x^2+1)$

$G(x)=\pi(\frac{1}{3}x^3+x)+c$ و $G(0)=0$

$G(1)=\pi(\frac{1}{3}+1)+c=\frac{4\pi}{3}+c$

$V_2=G(1)-G(0)=\frac{4\pi}{3}$

$V=V_1-V_2=\frac{\pi(3+\sqrt{2})}{3}-\frac{4\pi}{3}=\frac{\pi(\sqrt{2}-1)}{3}$

۱۹۱۵ - ک۸- اولاً- a را درتابع $y=a\sin x-\cos x$ طوری تعیین کنید که اندازه حجم حادث از دوران سطح محصور بین منحنی نمایش آن و دو خط $x=0$ و $x=\frac{\pi}{4}$ در حول محور xها، برابر $(\pi-2)\frac{\pi}{4}$ باشد. ثانیاً. منحنی $y=\sin x-\cos x$ را در فاصله

$(0 , 2\pi)$ رسم کنید و مساحت سطح محصور بین آن و محور yها و خط $y = -\sqrt{2}$ را حساب کنید.

حل:

$$y^2 = a^2 \sin^2 x + \cos^2 x - 2a \sin x \cos x$$

$$g(x) = \pi\left(a^2 \times \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 2x}{2} - a \sin 2x\right)$$

$$G(x) = \pi\left(\frac{a^2 x}{2} - \frac{a^2}{4}\sin 2x + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{a}{2}\cos 2x\right) + c$$

$$G(x) = \pi\left[\frac{(a^2+1)x}{2} - \frac{(a^2-1)\sin 2x}{4} + \frac{a\cos 2x}{2}\right] + c$$

$$G(0) = \frac{\pi a}{2} + c$$

$$G\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi\left[\frac{(a^2+1)\pi}{8} - \frac{a^2-1}{4}\right] + c$$

$$V = G\left(\frac{\pi}{4}\right) - G(0)$$

$$V = \frac{\pi}{4}(\pi - 2) = \pi\left[\frac{(a^2+1)\pi}{8} - \frac{a}{2} - \frac{a^2-1}{4}\right]$$

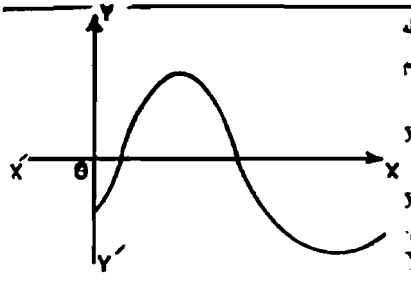
$$2\pi - 4 = a^2\pi + \pi - 4a - 2a^2 + 2$$

$$\pi(a^2-1) - 2a^2 - 4a + 6 = 0$$

شرط اینکه تساوی فوق برقرار باشد اینست که $a^2 - 1 = 0$ و $-2a^2 - 4a + 6 = 0$ باشند و جواب مشترک آنها یعنی $a = 1$ جواب مسأله است.

ثانیاً ـ اگر طبق قواعد رسم منحنی مثلثاتی عمل کنیم جدول و شکل زیر بدست می‌آید.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
y'			$+$		$+$	0		$-$		$-$	0	$+$
y	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	-1



اگر مبدأ مختصات را بنقطه $K(0 \text{ و } -\sqrt{2})$ منتقل کنیم معادله جدید منحنی بصورت:

$$y-\sqrt{2}=\sin x-\cos x$$

ویا بصورت:

$$y=\sin x-\cos x+\sqrt{2}$$

درمی‌آید حال تابع اولیه میگیریم.

$$Y=-\cos x-\sin x+\sqrt{2}x+c$$

$$F(0)=-1+c \text{ و } F(\frac{7\pi}{4})=\frac{7\pi\sqrt{2}}{4}+c$$

$$S=F(\frac{7\pi}{4})-F(0)=\frac{7\pi\sqrt{2}}{4}+1 \text{ واحدمربع}$$

۱۹۱۶ – ک ۹ ـ هرمی به قاعدهٔ B و ارتفاع h را ، با صفحه‌ای بموازات قاعده و به فاصله $x<h$ از رأس ، قطع می‌کنیم . حجم هرم کوچك را بر حسب x حساب کنید .

حل: می‌دانیم اگر هرمی‌را بوسیله صفحه‌ای که بموازات قاعده‌میباشد قطع کنیم نسبت مساحت مقطع بمساحت قاعده برابر است بامربع نسبتهای فواصل صفحات مقطع وقاعده ازرأس بنابر این اگرمساحت مقطع‌را S فرض کنیم نتیجه میشود.

$$\frac{S}{B}=(\frac{x}{h})^2 \longrightarrow S=\frac{Bx^2}{h^2}$$

اگر ارتفاع هرم‌کوچك از صفر تا x تغییر کند ،برای پیدا کردن حجم آن از تابع $S=g(x)=\frac{Bx^2}{h^2}$ تابع‌اولیه میگیریم وسپس‌حجم‌را بدست می‌آوریم.

$$G(x)=\frac{Bx^3}{3h^2}+c \text{ و } G(0)=0 \text{ و } G(x)=\frac{Bx^3}{3h^2}+c$$

$$V=G(x)-G(0)=\frac{Bx^3}{3h^2}$$

۱۹۱۷ – ک ۱۰ ـ تحقیق کنید که اندازهٔ حجم هرقچینی بهارتفاع h ازکرهٔ بشعاع R برابراست با $\frac{\pi h^2}{3}(3R-h)$

حل: معادله دایره بصورت $x^2+y^2=R^2$ میباشد که از دوران این دایره کره بوجود می‌آید. حال حجم قسمتی از این کره را پیدا می‌کنیم که بین R و $R-h$ تغییر کند

$$g(x)=\pi y^2=\pi(R^2-x^2)\longrightarrow G(x)=\pi(R^2x-\frac{1}{3}x^3)+c$$

$$V=\pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{R-h}^{R}$$

$$V=\pi\left[R^3-\frac{R^3}{3}-R^2+R^2h+\frac{R^3-h^3-3R^2h+3Rh^2}{3}\right]$$

$$V=\frac{\pi h^2}{3}(3R-h)$$

مسائل کنکور دانشکده‌ها

و امتحانات نهائی ششم ریاضی

دانشگاه صنعتی آریامهر - تیرماه ۱۳۴۵

۱۹۱۸ — مطلوبست محاسبه حجم حاصل از دوران سطح محصور بین کمانی از منحنی نمایش تابع $y=\frac{x}{x^2+x+1}\times\sqrt{x^2+2x+3}$ ومحور طولها ودوخط $x=-2$ و $x=1$ درجول محور طولها .

حل:

$$g(x)=\pi y^2=\frac{\pi(x^4+2x^3+3x^2)}{(x^2+x+1)^2}$$

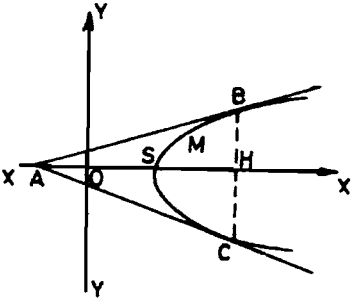
$$g(x)=\frac{\pi[(x^2+x+1)^2-(2x+1)]}{(x^2+x+1)^2}=\pi[1-\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}]$$

$$G(x)=\pi(x+\frac{1}{x^2+x+1})+c$$

$$V=G(1)-G(-2)=2\pi$$ واحدمکعب

پلی تکنیک تیرماه ۱۳۴۵

۱۹۱۹ — ازنقطه $A(-1,0)$ مماس‌های AB و AC را برسهمی $y^2=x-2$ رسم می‌کنیم (B و C نقاط تماس می‌باشند) مطلوبست محاسبه سطح محصور بین سهمی ومماس‌های AB و AC وهمچنین محاسبه حجم حادث ازدوران این سطح حول خط BC



حل: با درنظر گرفتن شکل مقابل چون $S(۲و۰)$ رأس سهمی و نقطه $A(-۱و۰)$ هردو روی محور طولها (همان محور تقارن سهمی) میباشند پس سطح دلخواه مسأله دو برابر سطح ABMS میباشد. وبرای محاسبه این سطح ابتدا سطح مثلث ABH را بدست آورده و سپس سطح SMBHS را حساب کرده وبعد آنها را ازهم کم می‌نمائیم.

جواب: $V=\frac{۷۲\pi\sqrt{۳}}{۵}$ و $S=۲\sqrt{۳}$

دانشکده علوم دانشگاه تهران ۱۳۴۵ ـ گروه سوم

۱۹۲۰ ـ سطح محصور میان منحنی $y=۵x^۲+۱$ وخط $y=۱۰x+۱$ را حول محور xها دوران می‌دهیم حجمی راکه بدست می‌آید حساب کنید.

جواب: $V=۱۲۰\pi$

دانشکده پلی تکنیک ـ تیرماه ۴۶

۱۹۲۱ ـ سطح محصور بین سهمی $y=-x^۲+۴x-۳$ ومحور xها وخط $y=-۳$ را بدست آورید وسپس حجم حاصل ازدوران این سطح را درحول محور سهمی حساب کنید.

جواب: $V=\frac{۱۵\pi}{۲}$ و $S=\frac{۲۸}{۳}$

دانشگاه تهران گروه سوم امردادماه ۱۳۴۷

۱۹۲۲ ـ نقطه A بطول صفر ونقطه B بطول یك روی منحنی c بمعادله $y=\frac{۱}{x+۱}$ قراردارند حجم حادث ازدوران سطح محصور میان خط AB ومنحنی (c) درحول محور Ox را بدست آورید.

دانشگاه صنعتی آریامهر ـ تیرماه ۱۳۴۷

۱۹۲۳ ـ بدنه داخلی چراغ وسائط نقلیه معمولا یك سطح پارابولوئید است که از دوران قوس سهمی $y^۲=۲px$ درحول محور آن بوجود می‌آید اگر قطر دایره چراغ d و ارتفاع بدنه h باشد حجم پارابولوئید مزبوررا برحسب h و d بدست آورید:

جواب: $V = \frac{\pi d^2 h}{8}$

دانشکده پلی‌تکنیک - تیرماه ۱۳۴۷

۱۹۲۴ - دایره $x^2+y^2=4a^2$ وسهمی $2y^2=3a(x+a)$ مفروضند(aعددیست مثبت). اولاً- مطلوبست سطح محصور بین‌سهمی‌ودایره‌وقسمتی‌که در داخل سهمی قراردارد . ثانیاً- حجم‌حاصل ازدوران‌سطح‌بالارا بدورمحورxها بدست‌آورید.

جواب: $V=\frac{14\pi a^3}{3}$ و $S=\frac{5a^2\sqrt{2}}{2}+\frac{4a^2\pi}{3}$

خرداد ماه ۱۳۴۸

۱۹۲۵ - تابع $y=\pm x\sqrt{a^2-x^2}$ مفروض‌است (a مقدار معلوم ومثبتی درنظر گرفته‌شده‌است). اولاً- جدول ومنحنی(c،) نمایش‌تغییرات‌تابع‌فوق‌را رسم‌کنید. ثانیاً- a را طوری پیدا کنید‌که نسبت‌حجم‌حادث‌ازدوران‌سطح‌منحنی(c،)حول‌محور xها درفاصله $x=0$ تا $x=a$ بسطح محصوربین منحنی‌ومحور xها درهمین‌فاصله برابر $\frac{8\pi}{5}$باشد (منظور نسبت دوعدد حجم وسطح می‌باشد.)

جواب: $a=2$

x	$-a$		$-0/5a\sqrt{2}$		0		$0/5a\sqrt{2}$		a
y'	∞	$-$	0		$+$		0	$-$	∞
y	0	↘	$-0/5a^2$	↗	0	↗	$0/5a^2$	↘	0

شهریورماه ۱۳۴۷

۱۹۲۶ - جدول‌ومنحنی (c) نمایش تغییرات تابع: $y=x^2-3x+2$ را رسم‌کنید. ثانیاً- سطح‌محصوربین‌منحنی c ومحورxها را حساب‌کنید.

جواب: واحدمربع $S=6/75$

خرداد ماه ۱۳۴۷

۱۹۲۷ - اولاً- جدول‌ومنحنی (c) نمایش تغییرات تابع: $y=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ را رسم کنید. ثانیاً- سطح‌محصوربین منحنی(c) ومحورxها ودوخط $x=-2$ و $x=0$ وهمچنین حجم‌حادث از دوران‌این‌سطح‌را حول‌محورxهاحساب‌کنید. جواب: $S=4-3$

خرداد ماه ۱۳۴۶

۱۹۲۸ - اولاً- جدول ومنحنی c نمایش تغییرات تابع $y=\frac{27(x-1)}{(2x-3)^3}$ را رسم

کنید. ثانیاً ـ سطح‌محصور بین منحنی c ومحورهای مختصات‌را درناحیه اول پیدا کنید.

جواب: $S=1/5$

شهریورماه ۱۳۳۵

۱۹۲۹ ـ اولاً ـ جدول‌ومنحنی (c') نمایش تغییرات‌تابع $y=-2\sqrt{x}$ را رسم کنید. ثانیاً ـ سطح‌محصور بین‌منحنی (c') ومحور xها را حساب کنید .

جواب: $S=8\div 3$

شهریورماه ۱۳۳۴

۱۹۳۰ ـ توابع اولیه تابع $y=\frac{1}{(x-2)^2}$ را بدست‌آورید و سطح محصور بین منحنی ودوخط $x=1$ و $x=m>1$ راحساب کنید وحد این‌سطح‌را وقتی که m بسمت ۲ میل می‌کند، پیدا کنید (رسم‌منحنی تابع‌لزومی‌ندارد) .

جواب: $S=\frac{-m+1}{m-2}$ و $m\longrightarrow 2$ $S=\infty$

خردادماه ۱۳۳۶

۱۹۳۱ ـ منحنی‌نمایش‌تابع $y=\frac{1}{3}x^3+2x^2-\frac{16}{3}$ رارسم‌کنید ومماس‌بر نقطه عطف منحنی ومماس بر نقطه ماکزیمم آن‌رارسم‌کنیدوسطح‌محصور بین‌منحنی واین دومماس‌را که درربع دوم قراردارد حساب‌کنید.

جواب: $S=4\div 9$

شهریورماه ۱۳۳۳

۱۹۳۲ تابع $y=2\pm 2\sqrt{1-x}$ مفروض‌است. اولاً ـ جدول‌ومنحنی (c') نمایش تغییرات‌تابع مفروض‌را رسم‌کنید (۴نمره). ثانیاً ـ مساحت سطح‌محصور بین‌منحنی (c') و دوخط $x=0$ و $x=1$ (سطح محصوربین‌منحنی ومحورهرضها) را محاسبه‌نمائید(۳نمره).

جواب: $S=8\div 3$

شهریور ماه ۱۳۳۲

۱۹۳۳ ـ اولاً ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=(x-1)^2(x+2)$ را رسم‌کنید و معادله مماس‌وقائم برمنحنی‌را درنقطه‌عطف‌آن بنویسیدوآنهارا رسم‌کنید. ثانیاً ـ اگر I نقطه عطف‌منحنی و A محل تقاطع منحنی بامحورطول‌ها باشد معادله خط AI را بنویسید وآنرا رسم‌کنید وبعدسطح محصور بین‌این‌خط ومنحنی‌آن‌قسمت‌را که‌درربع‌اول واقعست‌بدست آورید.

جواب: $S=4$

خرداد ماه ۱۳۴۲

۱۹۳۴ ــ منحنی (c) نمایش تغییرات تابع $y=(x+1)^2(x-3)$ را رسم کنید و سپس دو نقطه $A\left|\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}0\\-3\end{matrix}\right.$ را که هردو روی منحنی قراردارند بهم وصل کنید وسطح محصور بین منحنی(c) ووتر AB را بدست آورید.

درهریك ازمسائل زیرسطح محدود بمنحنی‌های مذکور را درحول محور ox دوران دهید وحجم جسم حاصل را حساب کنید.

۱۹۳۵ ــ $x=2 \ , \ y=0 \ , \ y=x^3$

جواب: $\frac{128\pi}{7}$

۱۹۳۶ ــ $x=a \ , \ y=0 \ , \ ay^2=x^3$

جواب: $\frac{\pi a^3}{3}$

۱۹۳۷ ــ یك طاق نما از $y=\sin 2x$

جواب: $\frac{\pi^2}{4}$

۱۹۳۸ ــ $9x^2+16y^2=144$ جواب: 48π

حل مسائل ترکیبی کتاب درسی

۱۹۳۹ ــ ك۱ــ ص۱۹۱ــ اولاً درتابع $y=x^3+px^2+qx+r$ ضرایب p و q و r را بقسمی تعیین کنید که y بازای $x=-1$ صفر وبازای $x=-2$ ماکزیمم یامینیمم وبرابر ۱ باشد. ثانیاً ــ معادله $y=0$ را حل کنید. ثالثاً ــ جدول ومنحنی تغییرات تابع $y=(x+1)(x^2+2x+1)$ را رسم کنید وبا این آنکه A وB نقاط منحنی به طول‌های -2 و -1 باشند، مساحت سطح محدود بین قوس AB ووتر AB را حساب کنید.

حل. اولاً ــ راهنمائی: بایدمختصات نقاط $A(-1,0)$ و $B(-2,1)$ در معادله صدق کند ومشتق بازاء طول نقطه ماکزیمم یمنی بازاء $x=-2$ صفرشود.

جواب: $r=1$ و $p=4$ و $q=4$

ثانیاً ــ $y=0 \longrightarrow x^3+4x^2+4x+1=0$

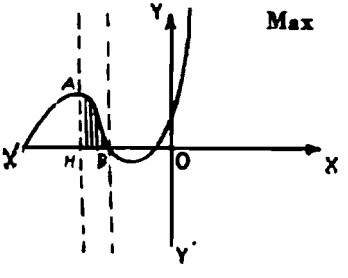
$$(x+1)(x^2+1-x)+3x(x+1)=0 \longrightarrow (x+1)(x^2+3x+1)=0$$

$$\boxed{x=-1} \quad \text{و} \quad x^2+3x+1=0 \longrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

ثالثاً_ جدول ومنحنی بصورت زیر است:

x	$-\infty$	$\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$		-2		-1		$\frac{-2}{3}$		$\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$		0		$+\infty$
y'		$+$		$+$		0		$-$		0		$+$		$+$
y	$-\infty$	↗	0	↗	1	↘	0	↘	$\frac{-5}{27}$	↗	0	↗	1 ↗	$+\infty$

Max Min



مختصات نقاط A و B بصورت $A(-2 \text{ و } 1)$ و $B(-1 \text{ و } 0)$ میباشد برای پیدا کردن سطح فوق باید از مساحت مابین منحنی و محور طولها و دوخط $x=-2$ و $x=-1$ مساحت مثلث AHB را کم نمود

$$y=x^3+3x^2+3x+1$$

$$Y=F(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{3}x^3+2x^2+x+c$$

$$F(-1)=\frac{1}{4}-\frac{3}{3}+2-1+c=\frac{-1}{12}+c$$

$$F(-2)=4-\frac{32}{3}+8-2+c=\frac{-2}{3}+c$$

$$S_1=\left|F(-1)-F(-2)\right|=\frac{-1}{12}+c+\frac{2}{3}-c=\frac{7}{12}$$

$$S_{AHB}=\frac{AH\times HB}{2}=\frac{1\times 1}{2}=\frac{1}{2}=S_2$$

$$S=S_1-S_2=\frac{7}{12}-\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$$ واحد مربع

۱۹۴۰ ـ ۲ـ ص۱۹۱ـ اولاً a و b را بقسمی تعیین کنید که خط $y=x-5$ مجانب منحنی نمایش تغییرات $y=\frac{ax^2+bx}{x+2}$ باشد. ثانیاً ـ تغییرات تابع $y=\frac{x^2-3x}{x+2}$ را معین کنید و منحنی (c) نمایش آنرا رسم کنید. ثالثاً ـ از نقطه A بطول ۳ واقع بر منحنی (C) خط D_1 را با خریب‌زاویه‌ای m و خط D_2 را عمود بر D_1 مرور می‌دهیم تا منحنی (C) را در نقاط M_1 و M_2 قطع کنند. مختصات نقطه P ، وسط M_1M_2 ، را برحسب $k=m-\frac{1}{m}$ حساب کنید و معادله مکان هندسی P را وقتی که k تغییر می‌کند بدست آورده و آنرا رسم کنید.

حل: اولاً ـ

$$x-5=\frac{ax^2+bx}{x+2}$$

$$(a-1)x^2+(b+3)x+10=0$$

$$a-1=0\longrightarrow a=1 \text{ و } b+3=0\longrightarrow b=-3$$

ثانیاً ـ جدول منحنی بصورت زیر است منحنی را خودتان رسم کنید.

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{10}$		-2		0		$-2+\sqrt{10}$		3		$+\infty$
y'		+	0	−		−		−	0	+		+	
y	$-\infty$	↗	$-2\sqrt{10}-7$	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0	↘	$-7+2\sqrt{10}$	↗	0	↗	$+\infty$

ثالثاً ـ

$$x=3\longrightarrow y=\frac{9-9}{3+2}=0\longrightarrow A(3,0)$$

$$y-y_A=m(x-x_A)\longrightarrow y=m(x-3)$$

$$y-y_A=\frac{-1}{m}(x-x_A)\longrightarrow y=\frac{-1}{m}(x-3)$$

برای تعیین مختصات نقاط M_1 و M_2 معادلات خطوط را با معادله منحنی حل می‌نمائیم.

$$m(x-3)=\frac{x(x-3)}{x+2}\longrightarrow(x-3)(mx-x+2m)=0$$

$$x_{M_1}=\frac{-2m}{m-1} \text{ و } y_{M_1}=m\left(\frac{-2m}{m-1}-3\right)=\frac{m(3-5m)}{m-1}$$

$$\frac{-1}{m}(x-3)=\frac{x(x-3)}{x+2}\longrightarrow(x-3)(mx+x+2)=0$$

$$x_{M_2}=\frac{-2}{m+1} \quad و \quad y_{M_2}=\frac{-1}{m}\left(\frac{-2}{m+1}-3\right)=+\frac{1}{m}\left(\frac{5+3m}{m+1}\right)$$

$$x_P=\frac{x_{M_1}+x_{M_2}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{-2m}{m-1}+\frac{-2}{m+1}\right)$$

$$x_P=\frac{1}{2}\left(\frac{-2m^2-4m+4}{m^2-1}\right)=\frac{-m^2+11-2m}{m^2-1}$$

$$x_P=-1-\frac{1}{\frac{m^2-1}{2m}}=-1-\frac{1}{\frac{1}{2}\left(m-\frac{1}{m}\right)}$$

$$x_P=-1-\frac{2}{k}=\frac{-k-2}{k}$$

بهمین ترتیب y_P را هم بدست می‌آوریم و بین این مختصات k را حذف می‌کنیم و مکان نقطه P را حساب میکنیم.

۱۹۴۱- ک۳- ص۱۹۲- اولا در تابع $y=ax+b+\frac{1}{x}$ مقادیر a و b را بنحوی تعیین کنید که منحنی نمایش تغییرات آن بامحور xها مماس و نقطه $O_1\left|\begin{matrix}0\\-2\end{matrix}\right.$ مرکز تقارن آن باشد. ثانیاً- جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x-2+\frac{1}{x}$ را رسم کنید. ثالثاً- در وجود نقاط تلاقی منحنی فوق با خط $y=m$ برحسب مقادیر پارامتر m بحث کنید، و اگر خط منحنی را در دو نقطه M_1 و M_2 قطع کند، مکان هندسی نقطه P وسط خط M_2M_1 را بدست آورید رابعاً- پیدا کنید مکان هندسی نقاطی را که از آنها می‌توان دو مماس متعامد بر منحنی فوق رسم کرد.

حل: اگر معادله منحنی را با معادله محور طولها حل نمائیم نتیجه می‌شود:

$ax^2+bx+1=0$ حال شرط ریشه مضاعف را عمل می‌نمائیم.

$$\Delta=0\longrightarrow b^2-4a=0 \qquad (1)$$

$$O_1(0,-2)\ \text{مرکز تقارن}\longrightarrow Y+2=aX+b+\frac{1}{X}$$

$$XY-aX^2+(2-b)X-1=0$$

برای این که $O_1(0,-2)$ مرکز تقارن باشد باید:

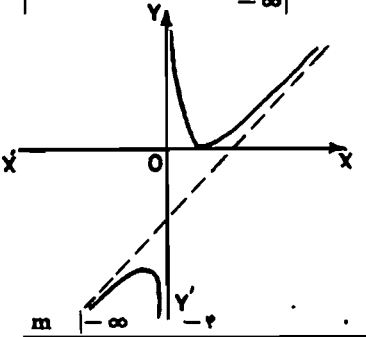
$$2-b=0 \longrightarrow b=2$$

$b^2-4a=0 \Longrightarrow 4-4a=0 \Longrightarrow a=1$

ثانیاً ـ $y=x-2$ مجانب مایل

$y'=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



ثالثاً ـ

$x-2+\frac{1}{x}=m$

$x^2-(m+2)x+1=0$

$\Delta=m^2+4m$

$\Delta=0 \longrightarrow m=0$ و -4

m	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
Δ		$+$	0	$-$	0	$+$	
بحث		در دو نقطه قطع می‌کند		قطع نمی‌کند		در دو نقطه قطع می‌کند	
			مماس است		مماس است		

$$X_P=\frac{X_{M_1}+X_{M_2}}{2}=\frac{-b}{2a}$$

$$X_P=\frac{m+2}{2} \quad \text{و} \quad y_P=m$$

$$\begin{cases} 2x=m+2 \\ -y=-m \end{cases}$$

$2x-y=2$

رابعاً ـ اگر یکی از نقاط مزبور $K(\alpha,\beta)$ باشد وضریب‌هاو به خطوطی که از آن‌میگذرند m فرض کنیم نتیجه می‌شود .

$$y-y_k=m(x-x_k)\Longrightarrow y=mx-m\alpha+\beta$$

$$x-2+\frac{1}{x}=mx-m\alpha+\beta$$

$$(m-1)x^2-(m\alpha-\beta-2)x-1=0$$

$$\Delta=0\Longrightarrow(m\alpha-\beta-2)^2+4(m-1)=0$$

$$\alpha^2m^2-2(\alpha\beta+2\alpha-2)m+\beta^2+4\beta=0$$

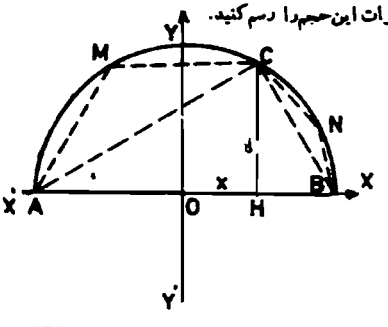
$$mm'=-1\Longrightarrow\frac{c}{a}=-1\Longrightarrow c=-a$$

$$\beta^2+4\beta=-\alpha^2\Longrightarrow\alpha^2+\beta^2+4\beta=0$$

اگر بجای α و β یعنی بجای طول و عرض نقطه مطلوب x و y قرار دهیم نتیجه می‌شود.

$$x^2+y^2+4y=0\Longrightarrow(y+2)^2+x^2=4$$

۱۹۴۲- ک۴- ص۱۹۲- نیمدایره‌ای بقطر $AB=2R$ مفروض است و C نقطه‌ای است متغیر از این نیمدایره. مطلوب است محاسبه مجموع احجام حادث از دوران قطعات $ACMA$ و $BCNB$ (M روی قوس AC و N روی قوس BC است) حول قطر AB و بفرض $R=2$ منحنی نمایش تغییرات این حجم را رسم کنید.



حل: اگر مبدأ مختصات را وسط قطر AB اختیار نمائیم معادله دایره بصورت: $(x-R)^2+y^2=R^2$ درمی‌آید اگر حجمی که از دوران مثلث ACB حول قطر AB بدست می‌آید از حجمی که از دوران نیمدایره حول قطر بدست می‌آید کم کنیم حجم مطلوب بدست می‌آید.

اگر $OH=x$ فرض شود نتیجه می‌شود $BH=R-x$ و $AH=R+x$ و

$$CH=y=\sqrt{R^2-x^2}$$

$$\text{حجم از دوران مثلث } ABC=\frac{\pi}{3}y^2(HB+HA)=\frac{\pi(R^2-x^2)(2R)}{3}$$

برای حجم کره

$$g(x)=y^2=\pi(2Rx-x^2)$$

$$G(x)=\pi(Rx^2-\frac{1}{3}x^3)+c\Longrightarrow G(0)=c \quad \text{و} \quad G(R)=\frac{2\pi R^3}{3}$$

$$V=\frac{2\pi R^3}{3}-\frac{2\pi R(2Rx-x^2)}{3}=\frac{2\pi R}{3}(2R^2+x^2-2Rx)$$

$$R=2 \Longrightarrow V=\frac{2\pi}{3}(x^2-4x+8)$$

تابع فوق یك تابع درجه‌دوم است که رسم کردن آن آسانست.

۱۹۴۳ـ ك۵ـ ص۱۹۲ـ تابع $y=\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}$ که در آن a و b مقادیر ثابتند، مفروض است. بفرض آنکه y' و y'' مشتق اول و دوم این تابع باشند، تحقیق کنید که اندازه عبارت $\frac{2y'^2-yy''}{y^2}$ ثابت است.

حل: حل این مسأله درصفحه (۱۳٤) مسأله شماره (۷۸۷) میباشد.

۱۹۴۴ـ ك۶ـ ص۱۹۳ـ مقدار h را بقسمی تعیین کنید که کسر $\frac{x^2-hx+1}{x^2+x+1}$ محصور بین ۲− و ۲+ باشد و به‌ازای $h=1$ منحنی تغییرات آن کسر را رسم کنید.

حل: قسمت اول این مسأله نامعادله درجه‌دوم پارامتری از کلاس چهارم میباشد و باید رابطه

$$3>\frac{x^2-hx+1}{x^2+x+1}>-3$$

برقرار باشد چون $x^2+x+1=0$ ریشه ندارد پس همواره مثبت است و نامساوی فوق بصورت زیر درمی‌آید.

$$3x^2+3x+3>x^2-hx+1>-3x^2-3x-3$$

$$\begin{cases}2x^2+(3+h)x+2>0\\ 4x^2+(3-h)x+4>0\end{cases}$$

برای اینکه بازاء جمیع مقادیر x نامساویهای بالا برقرار باشد باید $\Delta_1<0$ و $a_1>0$ و $\Delta_2<0$ و $a_2>0$ باشد چون ضریب x^2 درهر دو مثبت است پس کافیست که $\Delta_1<0$ و $\Delta_2<0$ باشد.

$$\Delta_1=(3+h)^2-16 \text{ و } \Delta_1=0 \Longrightarrow (3+h)^2-16=0 \Longrightarrow h=1 \text{ و } -7$$

$$\Delta_2=(3-h)^2-64$$

$$\Delta_2=0 \Longrightarrow (3-h)^2-64=0 \Longrightarrow h=-5 \text{ و } 11$$

h	$-\infty$		-7		-5		1		11		$+\infty$
Δ_1		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
Δ_2		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
مسأله			جواب ندارد		جواب‌دارد		جواب‌ندارد				

لطفاً جدول ومنحنی نمایش‌تابع $y=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ را خودتان رسم کنید.

۱۹۴۵ـ ک۷ـ ص۱۹۳ـ اولاً ـ منحنی‌نمایش تغییرات این‌تابع‌را رسم کنید:

$$y=2(2x+1)+3\sqrt{-x^2-x+6}$$

ثانیاً ـ به‌ازای چه مقادیر x نامعادلهٔ زیر محقق است؟

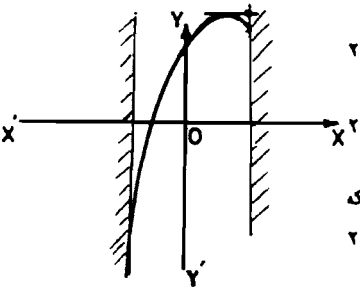
$$2(2x+1)>-3\sqrt{-x^2-x+6}$$

حل: تابع معین‌است $\quad -x^2-x+6\geqslant 0 \qquad 2\geqslant x\geqslant -3$

$$y'=\frac{8\sqrt{-x^2-x+6}-6x-3}{2\sqrt{-x^2-x+6}}$$

x	-3		-2		0		$1/5$		2
y'	∞			$+$	$+$		0	$-$	∞
y	-10	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$2+3\sqrt{6}$	$\nearrow$	$12/5$	$\searrow$	10

ثانیاً ـ



$$2(2x+1)>-3\sqrt{-x^2-x+6}$$

$$2(x+1)+3\sqrt{-x^2-x+6}>0$$

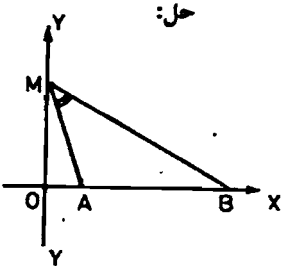
$$y>0$$

ازروی شکل مشاهده می‌شود که هنگامی $y>0$ است که $2\geqslant x\geqslant -2$ باشد.

۱۹۴۶ـ ک۸ـ ص۱۹۳ـ دومحورعمود برهم $x'ox$ و $y'oy$ مفروضند روی ox بترتیب دونقطه A و B به‌طول‌های $\frac{1}{2}$ و 3 وروی oy نقطه متغیر M به‌عرض y را اختیار می‌کنیم. اولاً $\widehat{AMB}$ φ را برحسب y حساب کنید ثانیاً ـ وقتی که y تغییر می‌کند. تغییرات

$\varphi_{\widehat{AMB}}$ را معین کرده منحنی آنرا رسم کنید و تحقیق کنید که باذای همه مقادیر y منحنی تغییرات فوق متعلق به $\varphi_{\widehat{AMB}}$ است

حل:



$$m_{BM\,خط} = \frac{y-0}{0-3} = \frac{-y}{3}$$

$$m_{AM\,خط} = \frac{y-0}{0-\frac{1}{3}} = -3y$$

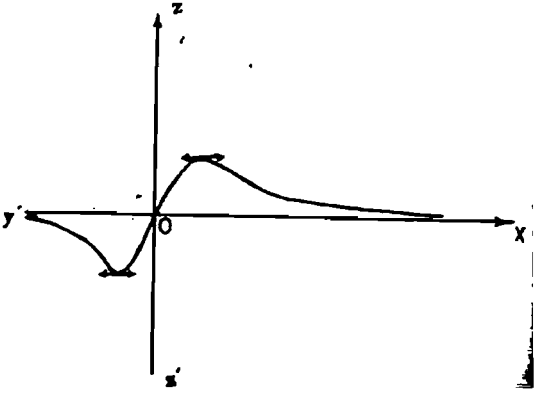
$$\varphi_{\widehat{AMB}} = \pm\frac{m-m'}{1+mm'} = \frac{\frac{-y}{3}+3y}{1+y^2}$$

$$\varphi_{\widehat{AMB}} = \frac{8y}{3(1+y^2)}$$

چون $\varphi_{\widehat{AMB}}$ می‌تواند مساوی از $-\infty$ تا $+\infty$ باشد پس کلیه مکان متعلق به φ_{AMB} میباشد رسم منحنی مطابق جدول زیر است:

$$z = \frac{8y}{3(1+y^2)} \quad و \quad z' = \frac{8(1-y^2)}{3(1+y^2)^2}$$

y	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
z'		$-$	0		$+$	$+$	0	$-$	
z	0	↘	$\frac{-4}{3}$	↗	0	↗	$\frac{4}{3}$	↘	0



۱۹۴۷ـ ۹ـ ص۱۹۳ـ تابع $y=\frac{x^2+x}{2x+1}$ مفروض است. اولاً ـ تحقیق کنید که منحنی تابع مفروض بازای $x=-1$ دارای می‌نیمم است ومنحنی نمایش تغییرات آن را رسم کنید. ثانیاً ـ بازای چه مقدار صحیح ومثبت x تابع y عدد صحیح خواهد بود

$$y'=\frac{4x^2+3x^2+1}{(2x+1)^2} \quad و \quad x=-1 \Longrightarrow y'=\frac{-4+3+1}{V^2}=0$$

$$y''=\frac{2(4x^3+6x^2+3x-2)}{(2x+1)^3} \quad و \quad x=-1 \Longrightarrow y''=6$$

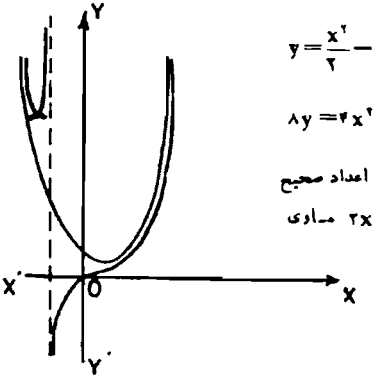
چون بازاء $x=-1$ مقدار $y'=0$ ومقدار y'' بزرگتر ازصفر است پس $x=-1$ طول نقطه می‌نیمم است.

جدول ومنحنی بصورت زیر است :

x	$-\infty$		-1		$-0/5$		0		1		$+\infty$
y		$-$	0	$+$	∞			$+$		$+$	
y	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{2}{3}$	↗ $+\infty$

منحنی مجانب $y=$ خارج قسمت $\Longrightarrow y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{5}{8}$

x	$-\infty$		0		$0/25$		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$	$+$		
y	$+\infty$	↘	$\frac{5}{8}$	↘	$\frac{19}{32}$	↗	$\frac{7}{8}$	↗	$+\infty$



$$y=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{4}+\frac{5}{8}-\frac{5}{8(2x+1)}$$

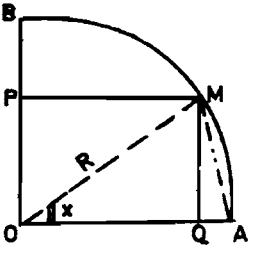
$$8y=4x^2-2x+5-\frac{5}{2x+1}$$

برای اینکه x و y اعداد صحیح ومثبت باشند باید $2x+1$ مساوی یکی از اعداد ۱ و ۵ باشد.

$2x+1=1 \longrightarrow x=0$

$2x+1=5 \longrightarrow x=2$

۱۹۴۸ـ ک ۱۰ـ ص۱۹۲ـ ربع‌دایره AOB بشعاع $OA=OB=R$ ونقطه متغیر M برروی‌آن مفروض‌است. نقاط P و Q تصاویر M برروی OB و OA می‌باشند. برحسب جای‌نقطه M مطلوب‌است. اولاً محاسبه طول MP وثانیاً ـ حجم‌حاصل ازدوران ذوزنقه OPMA حول OA . منحنی تغییرات این حجم را بازای $R=1$ رسم‌کنید .



حل: اگر OA را محور طولها و OB را محور عرضها انتخاب نمائیم در مثلث قائم‌الزاویه OQM می‌توان نوشت:

$$\sin x = \frac{MQ}{OM} = \frac{y}{R}$$

و $y = R\sin x$

$$\cos x = \frac{OQ}{OM} = \frac{OQ}{R}$$

$$OQ = MO = R\cos x$$

$M(R\cos x$ و $R\sin x)$ و $B(0$ و $R)$

برای محاسبه‌حجم می‌توانیم معادله BM را نوشته وسپس ازآن تابع‌اولیه‌بگیریم و بعد حاصل $F(x)-F(0)$ را بدست‌آوریم.

طریقه دوم ـ همچنین میدانیم ازدوران این‌ذوزنقه حول OA یك‌استوانه‌ویك‌مخروط بوجود می‌آید کمشعاع‌قاعده‌آنها وارتفاع‌آنرا بصورت زیراست.

استوانه $\longrightarrow$ شعاع‌قاعده $= OP = R\sin x$ و $h = OQ = R\cos x$

حجم استوانه $= \pi R^2 h = \pi R^2 \sin^2 x \times R\cos x = \pi R^3 \sin^2 x \cos x$

مخروط $\longrightarrow$ شعاع‌قاعده $= MQ = R\sin x$ و $h = AQ = R - R\cos x$

حجم‌مخروط $= \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi R^2 \sin^2 x(R - R\cos x) =$

$\frac{1}{3}\pi R^3 \sin^2 x\,(1-\cos x)$

حجم کل = حجم‌استوانه + حجم‌مخروط $= \frac{\pi R^3}{3}(2\sin x \sin x + 1 - \cos x)$

$$R=1 \longrightarrow V=\frac{\pi}{3}\sin^2 x(3\sin x\cos x-\cos x+1)$$

این یک منحنی مثلثاتی است لطفاً خودتان آنرا رسم کنید.

۱۹۴۹ـ ک۱۱ـ ص۱۹۳ـ ثابت کنید که معادله $\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}=1$ برحسب مجهول λ همواره دارای دو ریشه است (هرچه باشد x, y, a, b).

حل: اگر ابتدا مخرج مشترک گرفته و طرفین و سطین نمائیم معادله:

$$(b^2-\lambda)x^2+(a^2-\lambda)y^2=(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)$$

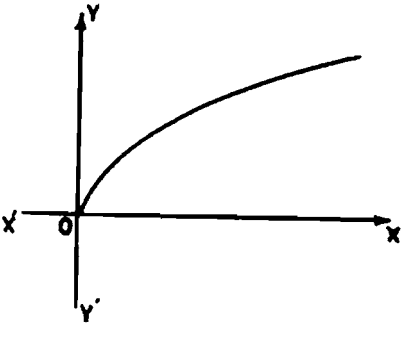
بدست می‌آید.

$$F(a^2)=(b^2-a^2)x^2$$
$$F(b^2)=(a^2-b^2)y^2=-(b^2-a^2)y^2$$
$$F(a^2)\times F(b^2)=-(b^2-a^2)^2x^2y^2<0$$

چون $F(a^2)F(b^2)<0$ است پس معادله برحسب λ همواره دارای دو ریشه است.

۱۹۵۰ـ ک۱۲ـ ص۱۹۳ـ منحنی نمایش $y=x^{\frac{3}{2}}$ را رسم کنید و از یک نقطه M در صفحه محورهای مختصات، مماسهایی بر این منحنی بکشید و عدد تعدادجوابها برحسب وضع نقطه M بحث کنید

حل: $y=\sqrt{x^3}\rightarrow y=x\sqrt{x}$



تابع در فاصله $x>0$ معین است

$$y'=\frac{3x}{2\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$y'=0\rightarrow x=0$$

مجانب مایل $m=\lim\frac{y}{x}$

$$=\lim\frac{x\sqrt{x}}{x}=\lim\sqrt{x}$$

$$m=\infty$$

مجانب مایل ندارد

x	۰		۱		۴		$+\infty$
y'	۰		+			+	
y	۰	↗	۱	↗	۸	↗	$+\infty$

قسمت ثانیاً درصفحه ( ) حل شده است.

۱۹۵۱- کد ۱۳- ص۱۹۴- ازروی تغییرات $y=\frac{x-\beta}{\alpha-x}$ پیدا کنید شرایطی را که باید b و c داشته باشند تا آنکه x' و x'' ریشه‌های معادله $ax^2+bx+c=0$ بوضع $\alpha<x'<x''<\beta$ باشد.

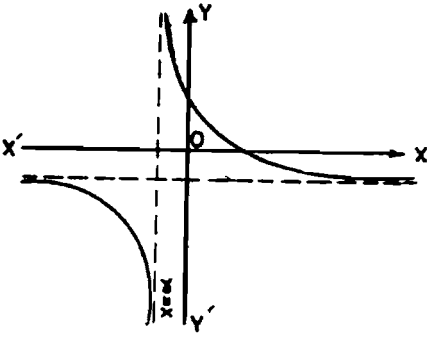
راهنمائی: هنگامی که x بین α و β باشد y مثبت است.

حل:

$$y=\frac{x-\beta}{\alpha-x} \rightarrow y'=\frac{\alpha-\beta}{(\alpha-x)^2}$$

چون $\alpha<\beta$ پس $y'<0$ است.

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
y'			−		−	−	
y	−۱	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	۰	↘	−۱



چون معادله $ax^2+bx+c=0$ دوریشه بین α و β دارد پس منحنی نمایش تابع $y=ax^2+bx+c$ محور طولها را در دو نقطه B و C که طولهای آن بین α و β قرار دارد قطع می‌کند

$$BC=OC-OB=x'-x''=\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\Longrightarrow \beta>\frac{\sqrt{\Delta}}{a}>\alpha$$

$$\beta>\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}>\alpha$$

۱۹۵۲- ک۱۳- ص۱۹۴- λ را چنان انتخاب کنید که ماکزیمم تابع: $y=x^3-(\lambda-1)x^2+2\lambda$ دوبرابر می‌نیمم آن باشد.

حل: $y'=3x^2-2(\lambda-1)x=x[3x-2(\lambda-1)]$

$$y'=0\rightarrow x[3x-2(\lambda-1)]=0\rightarrow x=0 \text{ و } \frac{2(\lambda-1)}{3}$$

$$x=0\rightarrow y_1=2\lambda$$

$$x=\frac{2(\lambda-1)}{3}\rightarrow y=\frac{8(\lambda-1)^3}{27}-\frac{4(\lambda-1)^3}{9}+2\lambda$$

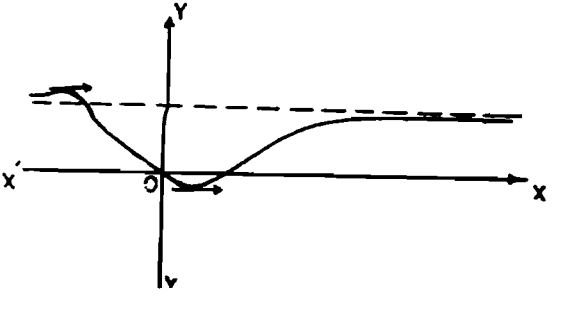
$$y_2=\frac{-4\lambda^3+12\lambda^2+42\lambda+4}{27}$$

یکبار $y_1=2y_2$ ویکبارهم $y_2=2y_1$ قرارداده و λ را محاسبه‌می‌نمائیم.

۱۹۵۳- ک۱۵- ص۱۹۴- منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x^2-x}{x^2+1}$ ورا رسم کنید. خط غیرمشخصی که ازمبدأ مختصات رسم‌میشود منحنی‌را دردونقطه‌دیگر قطع می‌کند. آیا می‌شود این دونقطه قرینه یکدیگر نسبت بمبدأ مختصات باشند؟ خطرا قسمی انتخاب کنیدکه این‌دو نقطه و مبدأ مختصات ونقطه تلاقی آن با مجانب‌منحنی یکدستگاه توافقی تشکیل‌دهند.

حل: $y=\frac{x^2-x}{x^2+1}$ و $y'=\frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		0		$-1+\sqrt{2}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0			$-$	0		$+$		
y	1	$\nearrow$	$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1



$$\frac{x^2-x}{x^2+1}=mx \Longrightarrow mx^2-x^2+(m+1)x=0$$

$$x(mx^2-x+m+1)=0 \Longrightarrow x=0 \quad \text{یا} \quad mx^2-x+m+1=0$$

$$x_0=\frac{x'+x''}{2} \Longrightarrow 0=\frac{-b}{2a} \Longrightarrow b=0$$

چون درمعادله‌فوق $b=-1$ میباشد وهیچموقع مساوی‌صفر نمیشود پس این قسمت مسأله جواب ندارد.

$$y=1 \text{ جانب } \Longrightarrow 1=mx \to x=\frac{1}{m} \Longrightarrow A(\frac{1}{m} \text{ و } 1)$$

برای اینکه M و N و $O(0,0)$ و $A(\frac{1}{m},1)$ دستگاه توافقی تشکیل دهند باید رابطه‌زیر بین طول‌های آنها برقرار باشد.

$$\frac{1}{2x_A}=\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''} \Longrightarrow \frac{1}{2x_A}=\frac{x'+x''}{x'x''}=\frac{-b}{c}=\frac{1}{m+1}$$

$$\frac{m}{2}=\frac{1}{m+1} \Longrightarrow m^2+m=2$$

$$m^2+m-2=0 \to m=-2 \text{ و } 1$$

۱۹۵۴ـ ۱۶۴ـ تابع $y=\frac{mx^2-2x+\lambda}{x^2-mx+m}$ مفروض است. در ازای هرمقدار y دومقدار x_1 و x_2 بدست می‌آید. λ را چنان انتخاب کنید که x_1x_2 بمقدار λ بستگی نداشته باشد. سپس درشکلهای مختلف منحنی نمایش تابع برحسب مقادیر مختلف m بحث کنید (بدون حساب کردن). تحقیق کنید که ریشه‌های مشتق قرینه یکدیگرند.

حل: اگر طرفین وسطین کرده و خلاصه و مرتب نمائیم نتیجه می‌شود.

$$(y-m)x^2+(2-my)x+my-\lambda=0$$

$$x_1x_2=\frac{c}{a} \Longrightarrow x_1x_2=\frac{my-\lambda}{y-m}=\frac{my-m^2+m^2-\lambda}{y-m}$$

$$x_1x_2=\frac{m(y-m)}{y-m}+\frac{m^2-\lambda}{y-m} \Longrightarrow x_1x_2=m+\frac{m^2-\lambda}{y-m}$$

برای اینکه x_1x_2 به λ بستگی نداشته باشد باید $m^2-\lambda=0$ باشد.

پس: $\lambda=m^2$

$$y=\frac{mx^2-2x+m^2}{x^2-mx+m} \text{ و } y'=\frac{(2-m^2)x^2-m(2-m^2)}{(x^2-mx+m)^2}$$

بحث :

۱ـ بازاء $m\neq 0$ دارای یك مجانب افقی بمعادله $y=m$ میباشد.

۲ـ بازاء $m=0$ معادله بصورت $y=\frac{-2}{x}$ درمی‌آید که یك تابع هموگرافیك میباشد.

۳ـ اگر $\Delta=m^2-4m>0$ مخرج باشد یعنی بازاء $m>4$ و $m<0$ منحنی دارای دو مجانب قائم است و بازاء $0<m<4$ مجانب قائم ندارد و بازاء $m=4$ معادله منحنی بصورت $y=\frac{4x^2-2x+16}{(x-2)^2}$ درمی‌آید که دارای مجانب افقی $y=4$ و مجانب قائم $x=2$ میباشد .

۴ـ میدانیم اگر مشتق مساوی صفر دارای جواب باشد . منحنی دارای Max و Min است بنابراین چون بازاء $y'=0$ داریم $x^2=m$ پس اگر $m>0$ باشد تابع دارای یك ماکزیمم و یك مینیمم است و بازاء $m=0$ تابع دارای ماکزیمم و مینیمم نیست بلکه دارای نقطه عطف است و بازاء $m<0$ تابع Max و Min ندارد.

$$y'=0\Longrightarrow(2-m^2)x^2-m(2-m^2)=0\Longrightarrow x'+x''=0$$

چون مجموع طول‌های نقاط ماکزیمم و مینیمم منحنی برابر صفر است پس معادله دارای دو ریشه قرینه است.

۱۹۵۵ـ ۱۷ـ تابع $y=\frac{x^2-mx+m}{x^2-x+1}$ مفروض است. ثابت کنید که بین ماکزیمم و مینیمم این تابع رابطه مستقلی از m وجود دارد و m را قسمی انتخاب کنید که ماکزیمم و مینیمم قرینه یکدیگر باشند و بازای این مقدار m منحنی نمایش آنرا رسم کنید.

حل:

$$y=\frac{x^2-mx+m}{x^2-x+1}$$

$$(y-1)x^2-(y-m)x+y-m=0$$

$$\Delta=(y-m)^2-4(y-1)(y-m)=0$$

معادله‌ای که عرض‌های ماکزیمم و مینیمم را نشان می‌دهد.

$$(y-m)[y-m-4(y-1)]=0\Longrightarrow(y-m)(-3y-m+4)=0$$

$$\begin{cases} y-m=0 \Longrightarrow \boxed{y=y'=m} \\ -3y-m+4=0 \Longrightarrow \boxed{y=y''=\dfrac{4-m}{3}} \end{cases}$$

$$y''=\frac{4-m}{3} \Longrightarrow y''=\frac{4-y'}{3} \Longrightarrow \boxed{3y''+y'=4}$$

$$y''=-y' \Longrightarrow \frac{4-m}{3}=-m$$

$$4-m=-3m \Longrightarrow 2m=-4 \Longrightarrow \boxed{m=-2}$$

$$y=\frac{x^2+2x-2}{x^2-x+1} \text{ و } y'=\frac{-3x^2+6x}{(x^2-x+1)^2}$$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{3}$		0		$-1+\sqrt{3}$		2		$+\infty$
y'			$-$		0		$+$		0	$-$	
y	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

لطفاً شکل‌را خودتان رسم کنید:

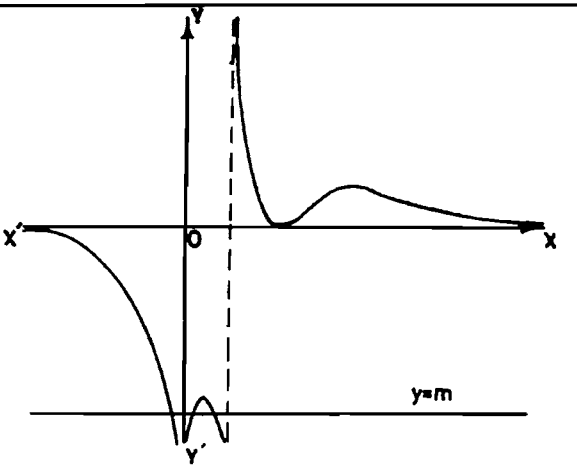
۱۹۵۶ـ ۱۸ـ منحنی‌نمایش تغییرات‌تابع $y=\dfrac{(x-2)^2}{x^2(x-1)}$ را رسم‌کنید ودر معادله $y=m$ برحسب پارامتر m بحث‌کنید .

حل:

$$y=\frac{(x-2)^2}{x^2(x-1)}$$

$$y'=\frac{(x-2)(-x^2+6x-4)}{x^3(x-1)^2}$$

x	$-\infty$		0		$3-\sqrt{5}$		1		2		$3+\sqrt{5}$		$+\infty$
y'		$-$	∞	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\infty \mid \infty$	$\nearrow$	$\dfrac{-5\sqrt{5}-11}{2}$	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{5\sqrt{5}-11}{2}$	$\searrow$	0

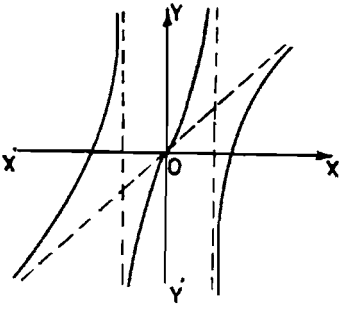


m	بحث
$m<0/5(-5\sqrt{5}-11)$	معادله‌دارای سه‌جواب‌است
$m=0/5(-5\sqrt{5}-11)$	$x_1<x_2=x_3=3-\sqrt{5}$
$0>m>0/5(-5\sqrt{5}-11)$	معادله‌یک‌ریشه‌منفی‌دارد
$m=0$	$x_1=\infty$ و $x_2=x_3=2$
$0/5(5\sqrt{5}-11)>m>0$	معادله سه‌ریشه مثبت‌دارد
	$x_1>x_2>x_3>0$
$m=0/5(5\sqrt{5}-11)$	$x_1<x_2=x_3=3+\sqrt{5}$
$m>0/5(5\sqrt{5}-11)$	معادله فقط یک‌ریشه‌دارد

۱۹۵۷ـ ک۱۹ـ اولا منحنی‌نمایش تغییرات‌تابع $y=\frac{x^3-9x}{x^2-1}$ را رسم‌کنید واز آن رو ثابت‌کنیدکه معادله $x^3-9x-mx^2+m=0$ دارای سه‌ریشه‌است (مقدار m هر چه باشد) . ثانیاً ـ m را چنان انتخاب‌کنیدکه یکی‌ازریشه‌های معادله‌برابر a باشد ودوریشه دیگرآن b و c را حساب‌کنید.

تابع صعودیست $y' = \frac{x^4+6x^2+9}{(x^2-1)^2} > 0$

x	$-\infty$		-3		-1		0		1		3		$+\infty$
y'			+				+				+		
y	$-\infty$	↗	$+\infty$		$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$		$-\infty$	↗	$+\infty$



معادله مجانب $y = x$

$x^3 - 9x - mx^2 + m = 0$

$x^3 - 9x = m(x^2 - 1)$

$m = \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1}$

از روی شکل معلوم است که خط $y = m$ همواره منحنی را در سه نقطه قطع می‌کند

$$x = a \Longrightarrow a^3 - 9a - ma^2 + m = 0 \Longrightarrow m = \frac{a^3 - 9a}{a^2 - 1}$$

$$x^3 - \frac{a^3 - 9a}{a^2 - 1}x^2 - 9x + \frac{a^3 - 9a}{a^2 - 1} = 0$$

$$(a^2 - 1)x^3 - (a^3 - 9a)x^2 - 9(a^2 - 1)x + a^3 - 9a = 0$$

چون یکی از ریشه‌های معادله فوق a میباشد پس معادله فوق بر $x - a$ بخش‌پذیر است وبه‌صورت زیر درمی‌آید.

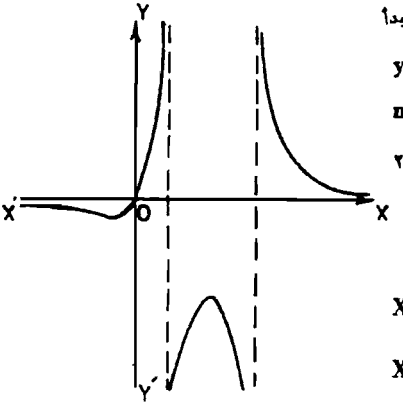
$$(x - a)[(a^2 - 1)x^2 + 8ax + 9 - a^2] = 0$$

$$(a^2 - 1)x^2 + 8ax + 9 - a^2 = \Longrightarrow x = \frac{a - 3}{a + 1} \text{ و } \frac{a + 3}{1 - a}$$

۱۹۵۸ـ ک ۲۰ـ تابع $y = \frac{x}{2x^2 - 5x + 2}$ مفروض است. اولا تغییرات تابع را معین کرده ومنحنی(c) نمایش آن‌را باماس براین منحنی درمبدأ مختصات رسم کنید. ثانیاً ـ اگر M_1 و M_2 نقطه‌هایی به‌عرض m از C ، و P_1 و P_2 تصویرهای آنها روی ox باشند، مختصات مرکز مستطیل $M_1M_2P_2P_1$ را حساب کنید. ثالثاً ثابت کنید که دایرهٔ محیطی مستطیل فوق همواره بر یک دایرهٔ ثابت عمود است.

حل: $y=\frac{x}{2x^2-5x+2} \Longrightarrow y'=\frac{-2x^2+2}{(2x^2-5x+2)^2}$

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0			$+$		$+$	0			$-$	
y	0	$\searrow$	$-\frac{1}{9}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$ $\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$ $\searrow$	0



$m=y'=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ مماس درمبدأ

$y=mx \Longrightarrow y=0/5x$

ثانیاً- $m=\frac{x}{2x^2-5x+2}$

$2mx^2-(5m+1)x+2m=0$

ریشه‌های معادله فوق یعنی x_1 و x_2 طول نقاط M_1 و M_2 و P_1 و P_2 میباشد

$X_G=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}$

$X_G=\frac{5m+1}{4m}$

$Y_G=\frac{m+0}{2}=\frac{m}{2}$

$G(\frac{5m+1}{4m}, \frac{m}{2})$

$2R=M_1P_2=\sqrt{(X_{M_1}-X_{P_2})^2+(Y_{M_1}-Y_{P_2})^2}$

$2R=\sqrt{\frac{\Delta}{a^2}+(m-0)^2} \Longrightarrow R=\frac{\sqrt{(5m+1)^2-16m^2+4m^4}}{4m}$

$R^2=\frac{4m^4+9m^2+10m+1}{16m^2}$ و $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$

$(m-\frac{5m+1}{4m})^2+(0-\frac{m}{2})^2=\frac{4m^4+9m^2+10m+1}{16m^2}$

اگر نقطه $c'(\alpha$ و $\beta)$ مرکز و r شعاع دایره‌ای باشد که بر دایره محیطی مستطیل $M_1M_2P_2P_1$ عمود است روابط زیر را می‌نویسیم.

$$\text{طول خط المرکزین} = d = c' \quad G = \sqrt{(\alpha - \frac{5m+1}{4m})^2 + (\beta - \frac{m}{2})^2}$$

$$d^2 - R^2 = r^2 \quad \text{و} \quad R^2 = \frac{4m^4 + 9m^2 + 10m + 1}{16m^2}$$

$$(\alpha - \frac{5m+1}{4m})^2 + (\beta - \frac{m}{2})^2 - \frac{4m^4 + 9m^2 + 10m + 1}{16m^2} = r^2$$

$$(\frac{4m\alpha - 5m - 1}{4m})^2 + (\frac{2\beta - m}{2})^2 - \frac{4m^4 + 9m^2 + 10m + 1}{16m^2} = r^2$$

$$2\beta m^2 - (2\alpha^2 + 2\beta^2 - 5\alpha + 2 - 2r^2)m + \alpha = 0$$

برای اینکه بازاء جمیع مقادیر m رابطه فوق برقرار باشد باید هر یک از ضرایب صفر باشند.

$$\beta = 0 \quad \text{و} \quad \alpha = 0 \quad \text{و} \quad 2\alpha^2 + 2\beta^2 - 5\alpha + 2 - 2r^2 = 0$$

$$2r^2 = 2 \Longrightarrow r = 1 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

۱۹۵۹ - ک ۲۱. اولا منحنی (c) نمایش تغییرات تابع $y = \frac{1}{x^2 + x - 2}$ را رسم کنید و از نقطه $A(1,0)$ مماسی بر منحنی (c) رسم کنید و نقطه‌های برخورد این مماس را با منحنی بدست آورید. ثانیاً ـ این منحنیها را در ازای مقادیر مختلف a رسم کنید:

$$y = \frac{1}{a(x^2 + x + 1) - 3}$$

و نقطه‌های برخورد آنها را با خطی به شیب m که از A می‌گذرد از روی شکل پیدا کرده بحث کنید.

حل: لطفاً ـ جدول و منحنی را خودتان رسم کنید.

$$y = \frac{1}{x^2 + x - 2} \quad \text{و} \quad y' = \frac{-2x - 1}{(x^2 + x - 2)^2}$$

$$m = \frac{-2\alpha - 1}{(\alpha^2 + \alpha - 2)^2} \quad \text{مماس و} \quad P(\alpha \text{ و } \frac{1}{\alpha^2 + \alpha - 2}) \quad \text{نقطه تماس}$$

$$y - Y_P = m_P(x - X_P) \Longrightarrow y - \frac{1}{\alpha^2 + \alpha - 2} = \frac{-2\alpha - 1}{(\alpha^2 + \alpha - 2)^2}(x - \alpha)$$

مختصات نقطه $A(1,0)$ باید آن صدق کند.

$$0 - \frac{1}{(\alpha + 2)(\alpha - 1)} = \frac{-2\alpha - 1}{(\alpha + 2)^2(\alpha - 1)^2}(1 - \alpha)$$

$$\frac{-1}{(\alpha+2)(\alpha-1)}=\frac{2\alpha+1}{(\alpha+2)^2(\alpha-1)}$$

$$\frac{-\alpha-2-2\alpha-1}{(\alpha+2)^2(\alpha-1)}=0 \Longrightarrow -3(\alpha+1)=0 \Longrightarrow \boxed{\alpha=-1}$$

معادله‌مماس $y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$ و $m=\frac{1}{4}$ مماس و $P(-1 \text{ و } \frac{-1}{2})$ نقطه‌تماس

$$y=\frac{1}{x^2+x-2} \Longrightarrow \frac{+1}{4}x+\frac{1}{4}=\frac{1}{x^2+x-2}$$

$$\frac{x-1}{4}=\frac{1}{x^2+x-2} \Longrightarrow x^3-3x-2=0 \Longrightarrow x=2 \text{ و } -1$$

$$x=2 \Longrightarrow y=\frac{2}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4} \Longrightarrow A(2 \text{ و } \frac{1}{4})$$

ثانیاً-

$$y=\frac{1}{ax^2+ax+a-3}$$

$$y'=\frac{-a(2x+1)}{(ax^2+ax+a-3)^2}$$

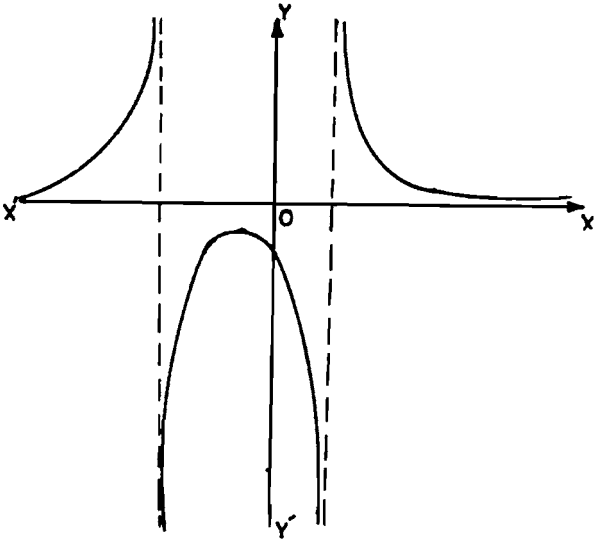
بحث :

۱- اگر $a=0$ باشد معادله‌فوق‌بصورت $y=\frac{-1}{3}$ درمی‌آیدکه معادله یك‌خط راست است.

۲- اگر $a>0$ باشد منحنی نمایش تابع فوق دارای یك‌ماکزیمم‌میشود (از روی علامت مشتق).

۳- اگر $a<0$ باشد منحنی‌نمایش‌تابع‌فوق‌دارای یك‌می‌نیمم‌است.

۴- اگرمخرج دارای جواب باشد یعنی $\Delta=a^2-4a^2+12a>0$ باشد یعنی $-3a(a-4)>0$ باشد یعنی‌بازاء $4>a>0$ منحنی دارای دومجانب‌قائم‌است وبازاء $a=4$ فقط یك‌مجانب قائم‌دارد وبازاء $a<0$ و $a>4$ منحنی مجانب قائم‌ندارد وشکل منحنی درهریك ازحالات فوق‌بصورت زیراست.



۱۹۶۰. ک۲۲- اولا عدد α را قسمی انتخاب کنید که تفاضل میان ماکزیمم و می‌نیمم منحنی $y = \frac{-x^2+3x+\alpha}{x-4}$ برابر ۸ باشد. در این صورت منحنی نمایش تغییرات تابع را رسم کنید. ثانیاً- مبدأ مختصات را بمرکز تقارن منحنی تابع فوق منتقل کنید و معادله این منحنی را در دستگاه جدید بنویسید. در این حال در تعداد نقاط تلاقی خط $y = m$ با منحنی بحث کنید و از روی شکل طولهای نقاط تلاقی را با اعداد ۱ - و ۲ مقایسه کنید.

حل:

$$y = \frac{-x^2+3x+\alpha}{x-4}$$

$$xy - 4y = -x^2+3x+\alpha$$

$$x^2+(y-3)x-(4y+\alpha) = 0 \rightarrow$$

$$\Delta = 0 \Longrightarrow y^2+10y+4\alpha+9 = 0$$

$$y' - y'' = 8 \Longrightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = 8 \Longrightarrow \sqrt{100 - 16a - 36} = 8 \Longrightarrow a = 0$$

$$y = \frac{-x^2+3x}{x-2} \text{ و } y' = \frac{-x^2+8x-12}{(x-2)^2}$$

مجانب مایل $y = -x - 1$

x	$-\infty$		0		2		3		4		6		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$+$					0	$-$	
y	$+\infty$	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	-9	↘	$-\infty$

شکل را خودتان رسم کنید.

ثانیاً- میدانیم مرکز تقارن این منحنی محل تلاقی مجانبهای آن میباشد پس از حل دستگاه

معادلات $y = -x - 1$ و $x - 2 = 0$ نتیجه میشود $x = 2$ و $y = -5$

$$Y - 5 = \frac{-(X+2)^2 + 3(X+2)}{X+2-2} \Longrightarrow Y = \frac{-X^2-2}{X}$$

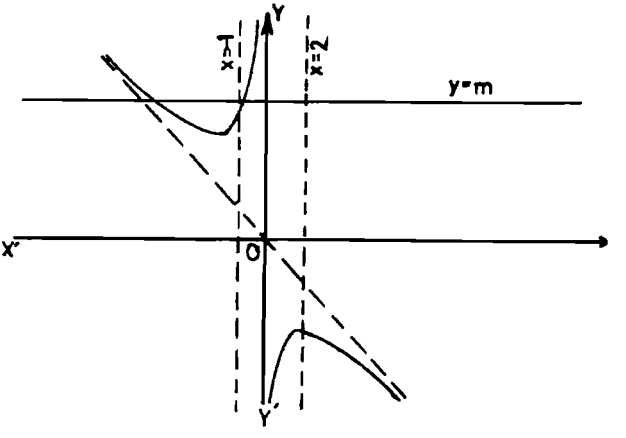
$$y = m \Longrightarrow \frac{-X^2-2}{X} = m \Longrightarrow X^2 + mX + 2 = 0$$

بحث: $\Delta = m^2 - 16 = 0 \Longrightarrow m = \pm 4$

$-4 < m < 4$ خط منحنی را قطع نمیکند و بازاء $m = \pm 4$ خط برمنحنی مماس است و بازاء $m > 4$ و $m < -4$ خط منحنی را در دو نقطه قطع می کند.

$$y = \frac{-x^2-2}{x} \text{ و } y' = \frac{-x^2+2}{x^2}$$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0		$+$		0	$-$	
y	$+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$



تذکر: نقاط $A(-1,5)$ و $B(2,-3)$ نقاط تلاقی خطوط $x=-1$ و $x=2$ با منحنی میباشد.

m	بحث
$m<-3$	$-1<x'<2<x''$
$m=-3$	$-1<x'=x''=2$
$3>m>-3$	معادله جواب ندارد
$m=3$	$x'=x''=-2<-1<2$
$5>m>3$	$x'<x''<-1<2$
$m=5$	$x'<x''=-1<2$
$m>5$	$x'<-1<x''<2$

۱۹۶۱ـ ک ۲۳ـ تغییرات تابع $\frac{x^3-2x^2y-xy^2+2y^3}{x^2+y^2}$ و $\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ را در صورتی که y و x بقسمی تغییر کنند که $x+y$ برابر عدد ثابتی مانند a باشد تعیین کنید.

همچنین تغییرات $\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ را نیز هنگامی که y و x بقسمی تغییر کنند که حاصل‌ضرب y برابر عدد ثابتی مانند a باشد، تعیین کنید.

حل:

$$x+y=a \rightarrow y=a-x$$

$$z_1=\frac{x^3-2x^2(a-x)-x(a-x)^2+2(a-x)^3}{x^2+(a-x)^2}$$

$$z_1=\frac{6ax^2-7a^2x+2a^3}{2x^2-2ax+a^2}$$

$z'_{(x)}$ را بدست آورده و آنرا مساوی صفر قرار میدهیم و x را حساب می‌کنیم و سپس جدول آنرا رسم می‌نمائیم.

$$z_2=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\frac{x^3+(a-x)^3}{x^2+(a-x)^2}$$

$$z_2=\frac{3ax^2-3a^2x+a^3}{2x^2-2ax+a^2} \text{ و } z_2'=\frac{a^2(2x-a)}{v^2}$$

$$z_2=0 \rightarrow 2x-a=0 \rightarrow 2x=a \rightarrow x=\frac{a}{2} \text{ و } a>0$$

x	$-\infty$		$\frac{a}{2}$		$+\infty$
z_2'		$-$	0	$+$	
z_2	$1/5a$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$1/5a$

$$xy=a \Longrightarrow y=\frac{a}{x} \text{ و } z_3=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\frac{(x^2+y^2)^2-2x^2y^2}{(x+y)^2-2xy}$$

$$z_3=\frac{(x^2+\frac{a^2}{x^2})^2-2a^2}{(x+\frac{a}{x})^2-2a}=\frac{x^4+\frac{a^4}{x^4}+2a^2-2a^2}{x^2+\frac{a^2}{x^2}+2a-2a}$$

$$z_3=\frac{x^8+a^4}{x^2(x^4+a^2)} \text{ و } z'_3=\frac{x^{12}+3a^2x^8-3a^4x^4-a^6}{x^4(x^4+a^2)^2}$$

$$z'_3=\frac{2(x^4-a^2)^3}{x^2(x^4+a^2)^2}$$

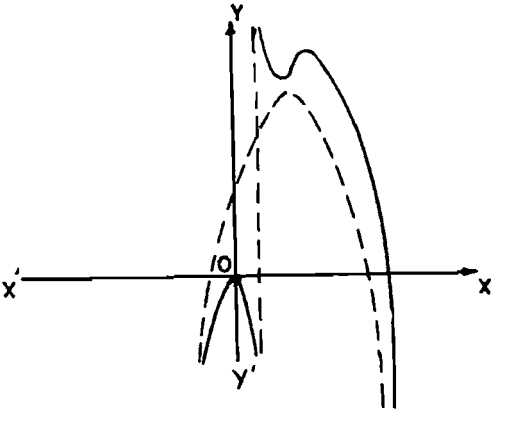
$$z'_3=0 \Longrightarrow x^4-a^2=0 \Longrightarrow x=\pm\sqrt{a}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{a}$				$+\sqrt{a}$		$+\infty$
z'_2		$-$	0	$+$	∞	$-$		$+$	
z_2	$+\infty$	$\searrow$	$+a$ min	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty \searrow$	a min	$\nearrow$	$+\infty$

۱۹۶۲ـ ک۲۴ـ تابع $y=\frac{x^3-10x^2}{1-x}$ مفروض است. اولاً منحنی (c) نمایش تغییرات تابع y را رسم کنید. ثانیاً ـ از نقطه‌ای بطول ۱۰ از این منحنی خطی با ضریب زاویه‌ای m رسم می‌کنیم، نقطه‌های برخورد این خط را با منحنی (c) معین کرده بحث کنید. نقاطی از منحنی (c) را بدست آورید که مختصات آنها عددهای درست باشند.

حل: اولاً ـ $\begin{cases} y=-x^2+9x+9 \\ \text{معادله مجانب منحنی} \end{cases}$ $\quad y'=\frac{-x(2x^2-13x+20)}{y^2}$

x	$-\infty$		0		1		$2/5$		4		10		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	$\frac{125}{4}$	$\nearrow$	32	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$



ثانیاً ـ $x=10 \Rightarrow y=\frac{1000-1000}{1-10}=0 \Rightarrow A(10,0)$

$$y-y_1=m(x-x_1)\Longrightarrow y=m(x-10)$$

$$\frac{x^3-10x^2}{1-x}=m(x-10)$$

$$x^2(x-10)=m(x-10)(1-x)\Longrightarrow(x-10)(x^2+mx-m)=0$$

$$x-10=0\Longrightarrow x=10 \text{ و } y=0\Longrightarrow A(10,0)$$

$$x^2+mx-m=0\Longrightarrow\Delta=m^2+4m=0\Longrightarrow m=0 \text{ و } -4$$

m	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
Δ		$+$	0	$-$	0	$+$	
بحث		خط منحنی را در دو نقطه دیگر قطع می‌کند		خط منحنی را فقط در A قطع می‌کند		خط منحنی را در دو نقطه دیگر قطع می‌کند	
		خط بر منحنی مماس است				خط بر منحنی مماس است	

$$y=\frac{x^3-10x^2}{1-x}=\frac{x^3-x^2-9x^2+9x-9x+9-9}{1-x}$$

$$y=\frac{-x^2(1-x)+9x(1-x)+9(1-x)-9}{1-x}$$

$$y=-x^2+9x+9-\frac{9}{1-x}$$

برای اینکه x و y اعداد صحیح باشند باید $1-x$ مساوی یکی از اعداد ±1 و ±9 و ±3 باشد.

$$1-x=9\Longrightarrow x=-8\Longrightarrow y=-128\Longrightarrow A(-8 \text{ و } -128)$$

$$1-x=1\Longrightarrow x=0\Longrightarrow y=0\Longrightarrow O(0 \text{ و } 0)$$

$$1-x=3\Longrightarrow x=-2\Longrightarrow y=-16\Longrightarrow B(-2 \text{ و } -16)$$

$$1-x=-9\Longrightarrow x=10\Longrightarrow y=0\Longrightarrow C(10 \text{ و } 0)$$

$$1-x=-3\Longrightarrow x=4\Longrightarrow y=-32\Longrightarrow D(4 \text{ و } -32)$$

$$1-x=-1\Longrightarrow x=2\Longrightarrow y=32\Longrightarrow E(2 \text{ و } 32)$$

۱۹۶۳ـ ک۲۵ـ معادله $x=t+\sqrt{x^2+2(t+1)x+4t}$ مفروض است.

اولاً ـ معادله مفروض را برحسب مجهول x حل کنید و معین کنید به چه شرط معادله حاصل دارا جواب است؟ ثانیاً ـ منحنی نمایش تغییرات تابع x از متغیر t را رسم کنید.

حل:

$$x-t=\sqrt{x^2+2(t+1)x+4t}$$

$$x^2+t^2-2tx=x^2+2tx+2x+4t$$

$$t(t-4)=2(2t+1)x \Longrightarrow x=\frac{t(t-4)}{2(2t+1)}$$

اگر $2t+1\neq 0$ باشد یعنی $t\neq -0/5$ باشد مسأله جواب‌دارد.

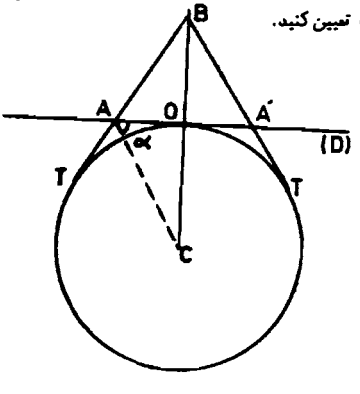
ثانیاً ـ منحنی‌نمایش‌تابع $x=\frac{t(t-4)}{2(2t+1)}$

را خودتان‌رسم کنید (tمتغیر و x تابع‌میباشد).

معادله مجانب مایل $x=\frac{1}{2}t-\frac{9}{8}$ و $x'=\frac{t^2+t-2}{(2t+1)^2}$

t	$-\infty$		-2		$-0/5$		0		1		4		$+\infty$
x'		$+$	0	$-$		$-$			0		$+$		
x	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0	↘	$\frac{-1}{2}$	↗	0	↗	$+\infty$

۱۹۶۴ـ ک۲۶ـ دایره‌ای بشعاع r وبمرکز C ومماس بر خط D درنقطه O مفروض است. ازنقطه B واقع‌برخط OC دومماس بردایره رسم‌می‌کنیم تا خط D را درنقاط A و A' قطع کنند. بفرض‌آنکه $\widehat{OAC}=\alpha$، $OA=x$ باشد، اولاـ مقادیر OA، OB، AB را برحسب r، α و x حساب‌کنید. ثانیاـ ثابت‌کنید که $AB=\left|\frac{x(x^2+r^2)}{x^2-r^2}\right|$. ثالثاًجدول تغییرات ومنحنی‌نمایش تغییرات y محیط‌مثلث $A'BA$ را وقتی‌که x تغییر می‌کندرسم‌کنید، ومثلث‌را درحالتی‌که y می‌نیمم است تعیین کنید.



حل: درمثلث OAC می‌توان نوشت.

$$OA=x=\frac{r}{tg\alpha}$$

میدانیم:

$$\widehat{OAT}=2\alpha \quad \text{و}$$

$$\widehat{OAB}=\pi-2\alpha$$

ودر مثلث OAB می‌توان نوشت :

$$OB = x tg(\pi - 2\alpha) = -x tg 2\alpha$$

$$OB = \frac{-r tg 2\alpha}{tg\alpha}$$

در مثلث AOB می‌توان نوشت

$$AB^2 = AO^2 + OB^2$$

$$AB^2 = x^2 + x^2 tg^2 2\alpha = x^2(1 + tg^2 2\alpha)$$

$$AB^2 = \frac{x^2}{\cos^2 2\alpha} \Longrightarrow AB = \left|\frac{x}{\cos 2\alpha}\right| = \left|\frac{x}{\frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}}\right|$$

$$AB = \left|\frac{x(1 + tg^2\alpha)}{1 - tg^2\alpha}\right| \quad , \quad tg\alpha = \frac{r}{x}$$

$$AB = \left|\frac{x(1 + \frac{r^2}{x^2})}{1 - \frac{r^2}{x^2}}\right| = \left|\frac{x(r^2 + x^2)}{x^2 - r^2}\right|$$

ثانیاً ـ $y = 2AB + 2AO = 2\left[x + \frac{x(r^2 + x^2)}{x^2 - r^2}\right] = \frac{4x^3}{x^2 - r^2}$

نقطه B اگر بسمت نقطه O حرکت کند وقتی می‌رسد که نقطه A روی نقطه (۱) قرار میگیرد این حال مقدار x بسمت صفر میل کرده و y نیز صفر می‌شود .

۱۹۶۵ ـ ک ۲۷ ـ تابع $y = \frac{x^2 + 2ax + 1}{x^2 + 2bx + 1}$ مفروض است . اولاً ـ چه رابطه‌ای بین دو پارامتر a و b باید برقرار باشد تا آنکه مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم تابع فوق دو عدد قرینه باشند. ثانیاً ـ با این شرط مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم را بازای $a = 5$ پیدا کنید و منحنی نمایش تغییرات تابع را رسم کنید .

حل: پس از طرفین وسطین کردن و خلاصه و مرتب کردن نتیجه میشود.

$$(y - 1)x^2 - 2(a - by)x + y - 1 = 0$$

$$\Delta' = 0 \Longrightarrow (a - by)^2 - (y - 1)^2 = 0$$

$$(b^2 - 1)y^2 + 2(1 - ab)y + a^2 - 1 = 0$$

$$y' = -y'' \Longrightarrow y' + y'' = 0 \Longrightarrow b = 0 \Longrightarrow -2(1 - ab) = 0$$

$$1 - ab = 0 \Longrightarrow ab = 1$$

ثانیاً ـ $a=5$ و $ab=1 \Longrightarrow 5b=1 \rightarrow b=\frac{1}{5}$

$$(\frac{1}{25}-1)y^2+25-1=0 \Longrightarrow -24y^2+600=0$$

$$y^2=25 \Longrightarrow y=\pm 5$$

$$a=5 \text{ و } b=\frac{1}{5} \Longrightarrow y=\frac{5(x^2+10x+1)}{5x^2+2x+5}$$

$$y'=\frac{-240(x^2-1)}{7^2} \quad \text{و} \quad \underset{\text{مجانب افقی}}{y=1}$$

x	$-\infty$		$-5-2\sqrt{6}$		-1		$-5+2\sqrt{6}$		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
y	1	↘	0	↘	-5	↗	0	↗	1	↗	5	↘	1
					Min						Max		

شکل‌را خودتان رسم کنید.

۱۹۶۶ـ ک۲۸ـ اولامنحنی (c) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x^2-4}{x^2-1}$ را رسم کنید.

ثانیاً ـ مختصات نقاط تقاطع خط $3x+y-4=0$ را بامنحنی بدست‌آورید. ثالثاً ـ اگر خط فوق منحنی‌را بترتیب درنقاط A،B وC قطع کند، مطلوب‌است تعیین مختصات نقطه D مزدوج توافقی B نسبت به‌دونقطه A و C .

حل:

$$y'=\frac{6x}{v^2}$$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$	0	$+$				$+$	
y	1	↘	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗		↗	1

شکل‌را خودتان رسم کنید.

ثانیاً ـ $y=-3x+4 \Longrightarrow \frac{x^2-4}{x^2-1}=\frac{-3x+4}{1}$

$$x^2-4=-3x^3+3x+4x^2-4 \Longrightarrow 3x^3-3x^2-3x=0$$

$$3x(x^2-x-1)=0 \Longrightarrow x=0 \text{ و } \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

اگر این طولها را در تابع قرار دهیم و x را حساب کنیم.

$$B(0,2)\ \text{و}\ A\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\ \text{و}\ \frac{5+3\sqrt{5}}{2}\right)\ \text{و}\ C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ \text{و}\ \frac{5-3\sqrt{5}}{2}\right)$$

رابطه مزدوج توافقی را بین طولهای نقاط A و B و C و D نوشته و طول نقطه D را بدست می‌آوریم و سپس این طول را در معادله خط قرار داده و عرض آنرا حساب می‌کنیم.

$$(X_A+X_C)(X_B+X_D)=2(X_AX_C+X_BX_D)$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)(0+X_D)=2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\times\frac{1+\sqrt{5}}{2}+0\right)$$

$$X_D=-2\ \text{و}\ 3x+y-2=0 \Longrightarrow -6+y-3=0$$

$$y=10 \Longrightarrow D(-2\ \text{و}\ 10)$$

۱۹۶۷ ـ ۲۹ ـ مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین ABC $(AB=AC)$ بضلع ۱ حول AB دوران می‌کند از نقطه D روی ارتفاع AB به‌فاصله $AD=x$ صفحه‌ای موازی قاعده رسم می‌کنیم. مطلوب است محاسبه x بقسمی که نسبت سطح دایره مقطع بسطح کره بقطر AD مساوی k باشد برحسب k بحث کنید. ثانیاً منحنی تغییرات k را رسم کنید.

حل: اگر AB را محور طولها و AC را محور عرضها فرض کنیم نتیجه میشود $AB=AC=1$ و $B(1,0)$ و $C(0,1)$ حال معادله خط BC را می‌نویسیم وطبق قواعد گذشته عمل می‌نمائیم.

$$BC\equiv\frac{y-0}{x-1}=\frac{1-0}{0-1}\qquad\Longrightarrow BC\equiv y=-x+1$$

$$M(x\ \text{و}\ 1-x)\ \text{و}\ MD=1-x\ \text{و}\ \text{سطح دایره مقطع}=\pi(1-x)^2$$

$$\text{سطح کره در قطر}\ AD=4\pi R^2=4\pi\frac{x^2}{R}=\pi x^2$$

$$\frac{S'}{S}=K=\frac{\pi(1-x)^2}{\pi x^2}\rightarrow K=\left(\frac{1-x}{x}\right)^2$$

$$\frac{1-x}{x}=\pm\sqrt{k}\rightarrow\pm\sqrt{k}x=1-x\Longrightarrow x=\frac{1}{1\pm\sqrt{k}}$$

$$K=\frac{(1-x)^2}{x^2}\ \text{و}\ K'=\frac{2(x-1)}{x^3}$$

x	$-\infty$			1		$+\infty$
k'		$+$	∞	$-$	0	$+$
k	1	$\nearrow$	$+\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$ 1

لطفاً شکل را خودتان رسم کنید.

۱۹۶۸ـ ک ۳۰ـ تابع $y=\frac{x^3}{x^2-1}$ مفروض است. اولاً ـ منحنی تغییرات آنرا رسم کنید. ثانیاً ـ ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آنکه سه نقطه از منحنی با طولهای x_1 و x_2 و x_3 بر یک خط راست واقع شوند این است که: $x_1+x_2+x_3+x_1x_2x_3=0$ باشد. ثالثاً از نقطه A بطول a واقع بر منحنی می‌توان دو مماس غیر از مماسی که در A رسم میشود بر منحنی رسم کرد. ثابت کنید که طولهای نقاط تماس ریشه‌های معادلهٔ $x^2+\frac{2}{a}x+1=0$ است.

اگر نقاط تماس را M و N بنامیم، مختصات نقاط تلاقی خط MN را با منحنی فوق بدست آورید و مکان هندسی وسط MN را پیدا کنید.

حل: جدول و شکل منحنی را خودتان رسم کنید.

ثانیاً ـ معادله منحنی را با خط $y=ax+b$ حل می‌نمائیم معادله درجه سومی بدست می‌آید و سپس رابطه فوق را تحقیق می‌نمائیم.

$$\frac{x^3}{x^2-1}=ax+b \Longrightarrow (a-1)x^3+bx^2-ax-b=0$$

$$x_1+x_2+x_3=\frac{-b}{a-1} \quad \text{و} \quad x_1x_2x_3=\frac{-d}{a}=\frac{b}{a-1}$$

از جمع دو رابطه نتیجه میشود: $x_1+x_2+x_3+x_1x_2x_3=0$

ثالثاً ـ میدانیم اگر از نقطه A بطول a واقع بر منحنی خطی رسم کنیم که در نقطه دیگری بجز A بر منحنی مماس شود و معادله آنرا بنویسیم و سپس آنرا با معادله منحنی حل نمائیم معادله درجه سومی بدست می‌آید که یک ریشه مضاعف داشته ($x_1=x_2=x$) و ریشه دیگرش $x_3=a$ میباشد و این سه ریشه در رابطه‌ای که در قسمت ثانیاً مسئله داده شده است باید صدق کند.

رابطه ثانیاً ـ $x_1+x_2+x_3+x_1x_2x_3=0$

$$x+x+a+x\times x\times a=0 \Longrightarrow ax^2+2x+a=0$$

اگر دو طرف تساوی را بر a تقسیم کنیم نتیجه میشود.

$$x^2+\frac{2}{a}x+1=0$$

معادله‌ای که طول‌های نقاط تماس بدست می‌آید.

از معادله $ax^2+2x+a=0$ طول‌های نقاط M و N بدست می‌آید که اگر آنها را در معادله منحنی قرار دهیم عرضهای نقاط M و N بدست می‌آیند و سپس معادله خط MN را نوشته و با معادله منحنی حل مینمائیم معادله درجه سومی بدست می‌آید که بر عبارت ax^2+2x+a بخش‌پذیر است آنرا بر عبارت فوق تقسیم نموده و ریشه دیگر یعنی

طول نقطه تلاقی خط MN را بامنحنی‌بدست‌می‌آوریم وسپس‌این طول‌را درمعادله خط MN قرارداده وعرض‌آنرا بدست‌میآوریم اگرطول‌های نقاط M وN را بترتیب x' و x'' بنامیم.

$$X_P = \text{وسط } MN = \frac{X_M + X_N}{۲} = \frac{x' + x''}{۲} = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۲}{۲a} = \frac{-۱}{a}$$

اگر ازرابطه فوق a را برحسب x بدست‌آوریم نتیجه‌میشود $a = -\frac{۱}{x}$ که اگرآنرا درمعادله MN قراردهیم معادله‌مکان‌نقطه P وسط MN بدست میآید.

۱۹۶۹ ـ ک۳۱ـ معادله $y^۲ - ۲xy - ۳x^۲ - ۹ = ۰$ مفروض‌است. اولاـ y را مجهول و x را پارامتر بگیرید ودروجود وعلامت ریشه‌ها برحسب x بحث‌کنید. ثانیاً y را برحسب x پیدا کنید و تابع y را برحسب x رسم‌کنید وبحث‌قسمت‌اول‌را ازآن‌نتیجه بگیرید. ثالثاً ـ اگر خطی موازی محور yها منحنی‌را در دو نقطه $M_۱$ و $M_۲$ قطع کند، مطلوب است مکان‌هندسی وسط $M_۱M_۲$.

حل: اولاـ

$$y^۲ - ۲xy - ۳x^۲ - ۹ = ۰$$

$$\Delta' = b'^۲ - ac = x^۲ + ۳x^۲ + ۹ = ۴x^۲ + ۹ > ۰$$

$$\frac{c}{a} = \frac{-۳x^۲ - ۹}{۱} = -(۳x^۲ + ۹) < ۰$$

چون دلتای معادله همواره مثبت و $\frac{c}{a}$ همواره منفی میباشدپس همواره دارای‌دوریشه مختلف‌العلامه‌است یعنی $x' > ۰ > x''$ میباشد.

ثانیاـ

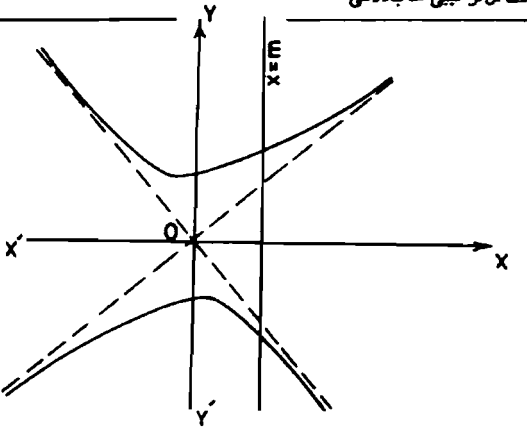
$$y^۲ - ۲xy - ۳x^۲ - ۹ = ۰$$

$$y = x \mp \sqrt{x^۲ + ۳x^۲ + ۹} \Longrightarrow y = x \pm \sqrt{۴x^۲ + ۹}$$

چون تابع‌فوق‌هذلولیست محل‌تلاقی مجانبهای‌آن مرکز تقارن آنست پس کافیست که $y = x + \sqrt{۴x^۲ + ۹}$ را رسم‌کنیم.

$$y' = \frac{\sqrt{۴x^۲ + ۹} + ۴x}{\sqrt{۴x^۲ + ۹}} \quad \text{و} \quad \underset{\text{معادله مجانب مایل}}{y = \pm x}$$

x	$-\infty$		$\frac{-\sqrt{۳}}{۲}$		۰		۲		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$			$+$		
y	$-\infty$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\nearrow$	۳	$\nearrow$	۷	$\nearrow$	$+\infty$



از روی شکل معلوم است که خط $x=m$ منحنی را همواره در دو نقطه قطع میکند یکی عرض مثبت و دیگری عرض منفی است پس معادله همواره دارای دو ریشه مختلف العلامه میباشد.

حل: ثالثاً- $y=x\pm\sqrt{4x^2+9}$ و $x=m$

$$y=m\pm\sqrt{4m^2+9}\Longrightarrow y-m=\pm\sqrt{4m^2+9}$$

$$y^2-2my+m^2=4m^2+9\Longrightarrow y^2-2my-3m^2-9=0$$

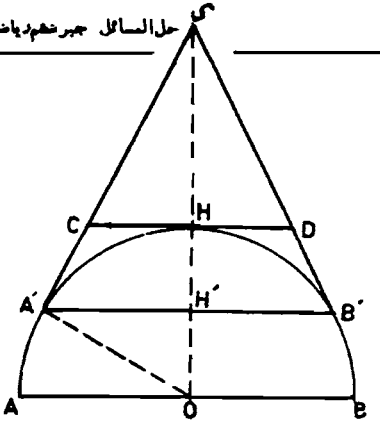
$$MN \text{ وسط } Y_P=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{+2m}{2}=m \quad \text{و} \quad P\begin{cases}x=m\\ y=m\end{cases}$$

پس خط $y=x$ مکان نقطه P میباشد.

۱۹۷۰- ۳۲ گ- نیمدایره‌ای به‌قطر $AB=2R$ و به‌مرکز O و وتر $A'B'$ بفاصله x از AB مفروض است. مماسهای مرسوم از A' و B' بر نیمدایره یکدیگر را در نقطه S قطع می‌کنند. مماسی موازی $A'B'$ بر نیمدایره رسم میکنیم تا دو مماس SA' و SB' را در نقاط C و D قطع کند. مطلوب است: اولاً- محاسبه V_1 حجم مخروط حاصل از دوران مثلث $SA'B'$ حول SO.

ثانیاً- محاسبهٔ حجم حادث از دوران ذوزنقه $A'B'DC$ حول SO.

ثالثاً- منحنی تغییرات $\frac{3V_1}{\pi}$ را به‌ازای $R=2$ رسم کنید.



حل: درمثلث $OA'H'$

داریم:

$OH' = x$ و

$A'H' = \sqrt{R^2 - x^2}$

پس: $A'(x و \sqrt{R^2 - x^2})$

میشود

میدانیم معادله‌دایره بمرکز O

بصورت $X^2 + Y^2 = R^2$

میباشد و مشتق باذاء مختصات

نقطه تماس برابر ضریب زاویه‌خط

مماس‌است $2X + 2Y'Y = 0$

$$Y' = -\frac{X}{Y} \Longrightarrow \text{مماس } m = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$SA' \equiv Y - Y_{A'} = m(X - X_{A'})$$

$$SA' \equiv Y - \sqrt{R^2 - x^2} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}(X - x)$$

میدانیم عرض‌نقطه S برابر صفراست که اگر آن را درمعادله SA' قرار دهیم طول آن بدست میآید. پس :

$$-\sqrt{R^2 - x^2} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}(X - x) \Longrightarrow X = \frac{R^2}{x} \Longrightarrow S(\frac{R^2}{x} و 0)$$

$$SH' = SO - OH' = X_S - x \Longrightarrow SH' = \frac{R^2}{x} - x = \frac{R^2 - x^2}{x}$$

ازروی‌شکل‌معلوم‌میشود که‌شعاع‌مخروط‌برابر $A'H' = \sqrt{R^2 - x^2}$ و ارتفاع مخروط برابر $SH' = \frac{R^2 - x^2}{x}$ میباشد.

$$V_1 = \frac{\pi h R^2}{3} = \frac{\pi(R^2 - x^2)(R^2 - x^2)}{3x} = \frac{\pi(R^2 - x^2)^2}{3x} \text{ مخروط}$$

ثانیاً-

$$SH = SO - OH = \frac{R^2}{x} - R = \frac{R^2 - Rx}{x}$$

ارتفاع مخروط ناقص $HH' = OH - OH' = R - x$

از تشابه دومثلث SCD و SA'H' نتیجه میشود

$$\frac{CH}{A'H'} = \frac{SH}{SH'} \Longrightarrow \frac{CH}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{R^2 - Rx}{R^2 - x^2} = \frac{R}{R+x}$$

شعاع قاعده کوچك مخروط

$$CH(R+x) = R\sqrt{R^2 - x^2} \Longrightarrow CH = \frac{R\sqrt{R^2 - x^2}}{(R+x)}$$

پس درمخروط ناقص فوق داریم:

$$R_1 = \sqrt{R^2 - x^2} \text{ و } R_2 = \frac{R\sqrt{R^2 - x^2}}{(R+x)} \text{ و } h = R - x$$

مخروط ناقص $V_2 = \frac{\pi h}{3}(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)$

$$V_2 = \frac{\pi(R-x)}{3}\left[R^2 - x^2 + \frac{R^2(R-x)}{(R+x)} + R(R-x)\right]$$

$$V_2 = \frac{\pi(R-x)^2(2R^2 + 2Rx + x^2)}{3(R+x)}$$

ثالثاً ـ

$$R = 2 \Longrightarrow V_1 = \frac{\pi(4 - x^2)^2}{48}$$

لطفاً خودتان آنرا رسم کنید.

۱۹۷۱- ك۳۳- تابع $y = x^3 - 1 - m(x-1)$ که درآن m پارامتری میباشد مفروض است. اولا به‌ازای مقادیر مختلف m درشکل منحنی نمایش تابع فوق بحث کنید و مقدار m را چنان پیدا کنید که منحنی برمحور xها مماس شود. ثانیاً در ازای این مقادیر m منحنی نمایش تغییرات آنرا رسم کنید. ثالثاً به‌ازای $m = 3$ مقدار عددی سطح محصور بین منحنی تابع فوق و محور xها را با تقریبی کمتر از ۰/۱ پیدا کنید.

حل:

$$y = (x-1)(x^2 + x + 1) - m(x-1)$$

$$y = (x-1)(x^2 + x - m + 1)$$

اگر $x^2 + x - m + 1 = 0$ دوریشه داشته باشد منحنی محور طولها را درسه نقطه قطع میکند و دارای ماکزیمم و می‌نیمم است و اگر یك ریشه مضاعف داشته باشد منحنی محور طولها را دریك نقطه قطع کرده و درنقطه دیگری بر محور طولها مماس است و اگر معادله فوق ریشه نداشته باشد منحنی محور طولها را فقط درنقطه $A(1,0)$ قطع میکند و ماکزیمم و می‌نیمم ندارد ولی دارای نقطه عطف است.

$$\Delta = 1 + 4m - 4 \text{ و } \Delta = 0 \Longrightarrow m = \frac{3}{4} = 0/75$$

m	$-\infty$	۰/۷۵	$+\infty$
Δ	−	۰	+
بحث	منحنی محور طولها را در یک نقطه قطع میکند و Max و Min ندارد		منحنی محور طولها را در سه نقطه قطع میکند و Max و Min دارد

منحنی بر محور طولها مماس است و Max و Min دارد

اگر $x=1$ در معادله $x^2+x-m+1=0$ صدق کند نتیجه میشود که $x=1$ ریشه مضاعف است پس بازاء $m=3$ بازمنحنی در نقطه $A(1,0)$ بر محور طولها مماس است و در نقطه دیگری محور طولها را قطع میکند و دارای ماکزیمم و مینیمم است.

لطفاً ـ ثانیاً را خودتان حل کنید

ثالثاً ـ $m=3 \Longrightarrow y=x^2-1-3(x-1)=(x-1)(x^2+x-2)$

$y=(x-1)^2(x+2) \Longrightarrow A(1,0)$ و $B(-2,0)$ نقاط تلاقی با محور xها

$$y=x^2-3x+2 \Longrightarrow Y=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x+c$$

$$S_{1}^{-2}=F(1)-F(-2)=0/75+c-(-6+c)=6/75$$ واحد مربع

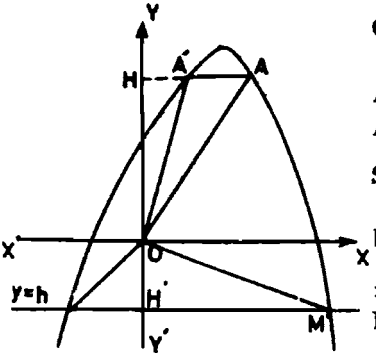
۱۹۷۳ـ ک۳۴ـ تابع $y=\frac{-x^2+4x+5}{2}$ مفروض است.

اولاً ـ منحنی نمایش تغییرات آن را رسم کنید. ثانیاً ـ دو نقطه A و A′ روی منحنی میتوان یافت بقسمی که عرضهای آنها ۴ باشد. مختصات نقاط A و A′ را حساب کنید و سطح مثلث OAA′ را بدست آورید. ثالثاً اگر M′ و M″ نقاط تقاطع خط $y=h$ با منحنی مفروض باشد، مطلوب است محاسبهٔ مربع (توان ۲) سطح مثلث $S=OM'M''$ برحسب h و تعیین منحنی نمایش تغییرات آن برحسب متغیر h. را با تحقیق کنید که از هر نقطه منحنی تغییرات $S^2=f(h)$ دو مماس میتوان بر منحنی رسم کرد. مطلوب است تعیین نقطه‌ای از منحنی که مماس‌های مرسوم بر هم منطبق شوند.

حل: لطفاً جدول و منحنی را خودتان رسم کنید.

ثانیاً ـ $y=4 \Longrightarrow 4=\frac{-x^2+4x+5}{2}$

$x^2-4x+3=0 \Longrightarrow x=3,1 \Longrightarrow A(3,4)$ و $A'(1,4)$



میدانیم ارتفاع مثلث OAA' برابر ۳ وقاعده آن برابر

$AA' = AH - A'H$

$AA' = ۳ - ۱ = ۲$

پس $S = \frac{AA' \times OH'}{۲} = ۳$

ثانیاً $h = \frac{-x^۲ + ۲x + ۵}{۲}$

$x^۲ - ۲x + ۲h - ۵ = ۰$

اگر در مثلث $MM'O$، MM' قاعده و OH' ارتفاع باشد داریم

$$MM' = \sqrt{(x_۱ - x_۲)^۲ + (y_۱ - y_۲)^۲} = \sqrt{\frac{\Delta}{a^۲}} + ۰$$

$$MM' = \sqrt{\frac{۱۶ - ۸h + ۲۰}{۱}} = \sqrt{۳۶ - ۸h} \quad و \quad OH = h$$

$$S = \frac{MM' \times OH}{۲} \Longrightarrow S^۲ = \frac{MM'^۲ \times OH^۲}{۴} = \frac{(۳۶ - ۸h)h^۲}{۴}$$

$$S^۲ = h^۲(۹ - ۲h) \Longrightarrow S^۲ = -۲h^۳ + ۹h^۲$$

با فرض $h = x$ و $S^۲ = y$ منحنی نمایش تابع فوق را که یک تابع درجه سوم میباشد خودتان رسم کنید.

حل: رابطه

$A(a \text{ و } -۲a^۳ + ۹a^۲)$

$y + ۲a^۳ - ۹a^۲ = m(x - a)$

$y = mx - ma - ۲a^۳ + ۹a^۲$ و $y = -۲x^۳ + ۹x^۲$

$mx - ma - ۲a^۳ + ۹a^۲ = -۲x^۳ + ۹x^۲$

$۲x^۳ - ۹x^۲ + mx - ma - ۲a^۳ + ۹a^۲ = ۰$

$(x - a)[۲x^۲ + (۲a - ۹)x + ۲a^۲ - ۹a + m] = ۰$

باید دارای ریشه مضاعف باشد

$$\Delta_1 = (2a-9)^2 - 8(2a^2 - 9a + m) = 0$$

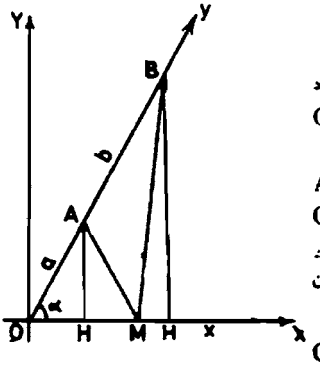
$$-12a^2 + 36a - 8m + 81 = 0$$

این معادله باید دارای ریشه مضاعف باشد.

$$\Delta'_2 = 324 - (96m - 972) = 0$$

$$m = \frac{27}{2} \Longrightarrow a = \frac{3}{2} \Longrightarrow A(\frac{3}{2} و \frac{27}{2})$$

۹۹۷۳- ک۳۵- روی Oy ازضلع زاویه $x\hat{O}y = \alpha$ ویکطرف نقطه O دوطول $OA = a$ و $OB = b$ $(b > a)$ ونقطه متغیر M را روی Ox بقسمی که $OM = x$ باشد اختیارمیکنیم. اولا- مطلوب‌است محاسبه x بقسمی که $\frac{MA}{MB} = m$ باشد (m مقداری‌است معلوم). برحسب m بحث کنید ، ثانیاً- اگر $OM' = x'$ و $OM'' = x''$ مقادیری‌از x باشند که نسبت $\frac{MA}{MB}$ به‌ازای‌آنها ماکزیمم‌ومی‌نیمم باشد. مطلوب است محاسبه $x'x''$ و $x' + x''$ برحسب a، b، α. ثالثا منحنی تغییرات m را برحسب x درحالتی‌که $b = 2a$ و $\alpha = \frac{\pi}{3}$ باشد رسم کنید .



حل: اگرخط OY راعمود بر ox رسم‌کنیم در مثلث OAH میتوان نوشت:

$AH = a\sin\alpha$ و

$OH = a\cos\alpha$

پس: $A(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$

همچنین درمثلث OBH' میتوان نوشت:

$OH' = b\cos\alpha, BH' = b\sin\alpha$

پس، $B(b\cos\alpha, b\sin\alpha)$

پس: $M(x,0)$ و $A(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$ و $B(b\cos\alpha$ و $b\sin\alpha)$

$$\frac{MA}{MB}=m \Longrightarrow \frac{\sqrt{(x-a\cos\alpha)^2+a^2\sin^2\alpha}}{\sqrt{(x-b\cos\alpha)+b^2\sin^2\alpha}}=m$$

اگر دوطرف تساوی فوق را بهقوه دو برسانیم وطرفین وسطین نسابیم وتمام جملات را به یك طرف آورده و برحسب x خلاصه و مرتب کنیم نتیجه میشود:

$$(m^2-1)x^2+2\cos\alpha(a-bm^2)x+b^2m^2-a^2=0$$

ازاین معادله مقدار x بدست میآید که جواب مثبت آن قابل قبول است.

ثانیاً برای اینکه مقدار m برابر ماکزیمم یا مینیمم باشد باید از تابع m برحسب x مشتق گرفت.

$$m^2=\frac{x^2-2ax\cos\alpha+a^2}{x^2-2bx\cos\alpha+b^2}$$

$$2mm'=\frac{-2bx^2\cos\alpha+2ax^2\cos\alpha-2a^2x+2b^2x-2ab^2\cos\alpha+2a^2b\cos\alpha}{v^2}$$

$$m'=\frac{2x^2(a-b)\cos\alpha-2(a^2-b^2)x+2ab(a-b)\cos\alpha}{mv^2}$$

$$m'=0 \Longrightarrow 2x^2(a-b)\cos\alpha-2(a^2-b^2)x+2ab(a-b)\cos\alpha=0$$

$$x^2\cos\alpha-(a+b)x+ab\cos\alpha=0$$

$$x'x''=\frac{c}{a} \Longrightarrow x'x''=ab \quad و \quad x'+x''=\frac{-b}{a} \Longrightarrow x'+x''=\frac{a+b}{\cos\alpha}$$

$$b=2a \quad و \quad \alpha=\frac{\pi}{4} \quad و \quad m=\frac{\sqrt{x^2-2ax\cos\alpha+a^2}}{\sqrt{x^2-2bx\cos\alpha+b^2}}$$

ثالثاً

$$m=\sqrt{\frac{x^2-ax\sqrt{2}+a^2}{x^2-2ax\sqrt{2}+4a^2}}$$

این یك تابع اصم است خودتان رسم کنید.

۱۹۷۴ـ ک ۳۶ـ اولا تغییرات $y=\frac{(x-2)^2}{x^2(x-1)}$ را رسم کنید. ثانیاً در تعداد ریشه‌های معادله $ax^2(x-1)-(x-2)^2=0$ برحسب مقادیر a بحث کنید.

m	$-\infty$		$-\frac{5\sqrt{5}+11}{2}$		$\frac{5\sqrt{5}-11}{2}$		$+\infty$
بحث در تعداد ریشه		سه ریشه دارد		یک ریشه دارد		سه ریشه دارد	یک ریشه دارد
		$x_1=x_2=3-\sqrt{5}>x_3$				$x_1>x_2=x_3=3+\sqrt{5}$	
				$x_1=\infty$ و $x_2=x_3=2$			

۱۹۷۵ـ ۲۷۵ـ معادله $\frac{u}{uy-x}+\frac{1}{y-ux}-1=0$ که در آن u مجهول و x و y مختصات نقطه‌ای مانند M در سطح، محورهای سه‌تصات xOy است مفروض است. مطلوب است وضع نقطه M برای آنکه:

اولاً ـ معادله دارای دو ریشه متساوی باشد. ثانیاً ـ معادله دارای دو ریشه متمایز u' و u'' باشد. ثالثاً u' و u'' هر دو مثبت باشد. رابعاً ـ بفرض $x=2$ و $y=1$ منحنی تغییرات تابع $V=\frac{u}{uy-x}+\frac{1}{y-ux}-1$ را وقتی که u از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند، رسم کنید:

حل: $$\frac{x(y-1)u^2-(x^2+y^2-2y)u+xy-x}{(uy-x)(y-ux)}=0$$

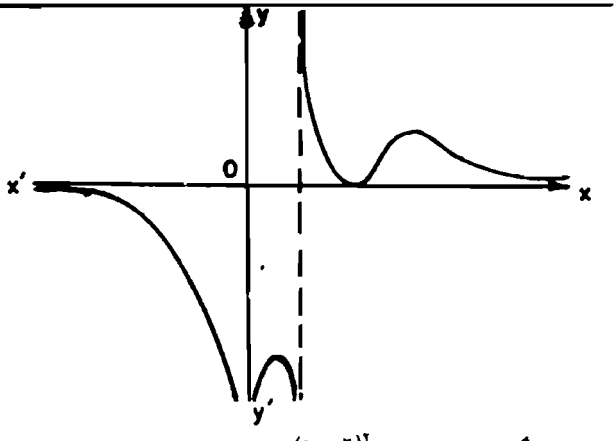
شرط اینکه $x(y-1)u^2-(x^2+y^2-2y)u+xy-x=0$ دو ریشه داشته باشد باید $\Delta=(x^2+y^2-2y)^2-4x^2(y-1)^2>0$ باشد

$$(x^2+y^2-2y+2xy-2x)(x^2+y^2-2y-2xy+2x)>0$$

$$(x+y)(x+y-2)(x-y)(x-y+2)>0$$

$$y'=\frac{-x^3+8x^2-16x+8}{x^2(x-1)^2} \qquad \begin{cases} y'=0 \\ x=2 \text{ و } 3\pm\sqrt{5} \end{cases}$$

x	$-\infty$	0		$3-\sqrt{5}$		1		2		$3+\sqrt{5}$		$+\infty$
y'		$-\infty$	+	0	−		−	0	+	0	−	
y	0 ↘ $-\infty$	$-\infty$	↗	$-\frac{5\sqrt{5}+11}{2}$	↘ $-\infty$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{5\sqrt{5}-11}{2}$	↘	



ثانیاً ـ $ax^2(x-1)=(x-2)^2 \Longrightarrow a=\frac{(x-2)^2}{x^2(x-1)}$

که از روی شکل منحنی بآسانی میتوان در ریشه‌های معادله فوق بر حسب مقادیر مختلف a بحث نمود و نتیجه زیر را بدست آورد.

برای حل مسأله فوق چهار خط زیر را روی یک صفحه مختصات رسم نمود و نقاط بالا و زیر هر کدام را تعیین علامت می‌نمائیم .

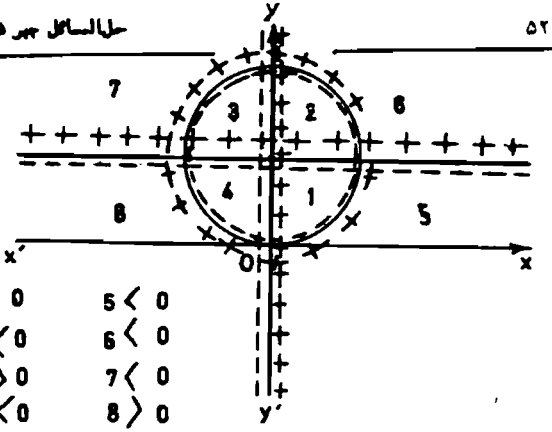
$x+y=0$ و $x+y-2=0$ و $x-y=0$ و $x-y+2=0$

ثانیا ـ نقاط روی این خطوط جواب مسئله است (چون $\Delta=0$ است)

ثالثا ـ باید $\frac{c}{a}>0$ و $\frac{-b}{a}>0$ باشد و چون $\frac{c}{a}=1$ است پس کافیست که:

$\frac{-b}{a}>0$ باشد یعنی $\frac{x^2+y^2-2y}{x(y-1)}>0$ باشد

برای پیدا کردن این مکان منحنی نمایش تابع $x^2+y^2-2y=0$ یعنی دایره بمعادله $x^2+(y-1)^2=1$ را رسم کرده و علامت نقاط داخل دایره و خارج دایره را بدست میآوریم همچنین خطوط $x=0$ و $y-1=0$ را رسم میکنیم و علامت دو طرف این خطوط را بدست میآوریم و سپس علامت ناحیه‌های مختلف را حساب میکنیم طبق درس کلاس پنجم



$1 > 0$ $\quad 5 < 0$

$2 < 0$ $\quad 6 < 0$

$3 > 0$ $\quad 7 < 0$

$4 < 0$ $\quad 8 > 0$

رابعاً اگر $x = ۲$ و $y = ۱$ باشد V مساوی کسر زیر میشود

$$V = \frac{۲u}{۲u^۲ - ۵u + ۲} \text{ و } V' = \frac{۶(۱ - u^۲)}{(۲u^۲ - ۵u + ۲)^۲}$$

u	$-\infty$		-۱		۰		$۰/۵$		۱		۲		$+\infty$
V'		$-$	۰		$+$		$+$		۰	$-$		$-$	
V	۰	↘	$\frac{-۱}{۳}$	↗	۰	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	-۳	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	۰

شکل را خودتان رسم کنید.

۱۹۷۶ـ ۳۸ـ تابع $y = \frac{x}{۲x^۲ - ۵x + k}$ مفروض است. اولاً مقادیر k را طوری تعیین کنید که منحنی دو مجانب موازی محور yها داشته باشد؛ یا آنکه مجانب موازی oy نداشته باشد. ثانیاً حدود k را چنان اختیار کنید که منحنی نمایش تابع فوق دارای ماکزیمم یا مینیمم باشد؛ یا آنکه در یک جهت تغییر کند. ثالثاً منحنی نمایش تغییرات تابع را به ازای $k = ۲$ رسم کنید. رابعاً اگر خطی مانند $y = h$ منحنی را در دو نقطه $M_۱$ و $M_۲$ قطع کند و $P_۱$ و $P_۲$ تصاویر $M_۱$ و $M_۲$ بر روی محور $x'x$ باشند، برحسب h مختصات مرکز مستطیل $P_۱P_۲$ را حساب کنید و ثابت کنید که دایره محیطی این مستطیل همواره به ازای جمیع مقادیر h با دایرهٔ دیگری متعامد است و معادله آن دایره را بنویسید.

حل: باید درتعداد ریشه‌های مخرج یعنی درتعداد ریشه‌های معادله :
$2x^2-5x+k=0$ بحث نمود .

$$\Delta=25-8K=0 \Longrightarrow K=\frac{25}{8}$$

k	$-\infty$		$25\div 8$		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$	
		مجانب ندارد		دومجانب دارد	
			یک مجانب دارد		

ثانیاً ـ $y'=\dfrac{-2x^2+k}{v^2}$

وقتی تابع دارای ماکزیمم و می‌نیمم است که معادله $-2x^2+k=0$ دارای ریشه باشد یعنی $\Delta=8k>0$ باشد پس باید $k>0$ باشد ووقتی تابع دریک جهت سیر میکند که $\Delta<0$ باشد یعنی $8k<0$ باشد پس بازاء $k<0$ تابع همواره نزولی است .

ثالثاً ـ $k=2 \Longrightarrow y=\dfrac{x}{2x^2-5x+2}$ و $y'=\dfrac{-2(x^2-1)}{v^2}$

لطفا جدول ومنحنی آنرا خودتان رسم کنید.

رابعاً ـ $y=h \Longrightarrow h=\dfrac{x}{2x^2-5x+2}$

$$2hx^2-(5h+1)x+2h=0$$

اگر x_1a و x_2a ریشه‌های معادله فوق باشد نتیجه میشود

$M_1(x_1,h)$ و $M_2(x_2,h)$ و $p_1(x_1,0)$ و $p_2(x_2,0)$

$$X_C=\frac{X_{M_1}+X_{P_2}}{2}=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-b}{2a}=\frac{5h+1}{4h}$$

مرکز مستطیل C

$$Y_C=\frac{Y_{M_1}+Y_{P_2}}{2}=\frac{h+0}{2}=\frac{h}{2} \Longrightarrow C\left(\frac{5h+1}{4h},\frac{h}{2}\right)$$

مرکز مستطیل C

$$\text{قطر دایره محیط} = 2R = M_1P_2 = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

$$2R = \sqrt{\frac{\Delta}{a^2}+(h-0)^2}$$

$$2R = \sqrt{\frac{(5h+1)(^2-16h^2}{4h^2}+h^2} \quad \text{و} \quad 2R^2 = \frac{4h^4+9h^2+10h+1}{4h^2}$$

$$R^2 = \frac{4h^4+9h^2+10h+1}{16h^2}$$

شرط اینکه این دایره با دایره دیگری بمرکز $C'(\alpha,\beta)$ وبشعاع r متمامد باشد اینست که $d^2-R^2=r^2$ باشد.

$$d^2 = (cc')^2 = (\alpha-\frac{5h+1}{4h})^2+(\beta-\frac{h}{2})^2$$

$$d^2-R^2=r^2$$

$$(\frac{4\alpha h-5h-1}{4h})^2+(\frac{2\beta-h}{2})^2-\frac{4h^4+9h^2+10h+1}{16h^2}=r^2$$

اگر حاصل عبارت فوق را برحسب h خلاصه ومرتب کنیم ونتیجه صورت را مساوی صفر قرار دهیم نتیجه میشود:

$$-2\beta h^2+(4\alpha^2-5\alpha+2\beta^2-2r^2+2)h-\alpha=0$$

برای این که رابطه فوق بازاء جمیع مقادیر h برقرار باشد باید:

$\beta=0$ و $4\alpha^2-5\alpha+2\beta^2-2r^2+2=0$ و $\alpha=0$ باشد.

$$\alpha=0\ \beta=0 \Longrightarrow 0-0+0-2r^2+2=0 \Longrightarrow r^2=1 \Longrightarrow r=1$$

پس دایره فوق همواره وبازاء جمیع مقادیر h بر دایره $x^2+y^2=1$ عمود است.

۱۹۷۷- ک ۳۹- تابع $y=\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x}$ مفروض است. اولا- منحنی (C) نمایش تغییرات آنرا رسم کنید. ثانیا- از نقطه‌ای که منحنی C محور xها را قطع میکند خطی با ضریب‌زاویه m مرور میکند. در تعداد نقاط تلاقی خط ومنحنی بحث کنید. اگر این خط منحنی را در دو نقطه دیگر مانند M_1 و M_2 قطع کند، مطلوب است تعیین رابطه‌ای مستقل از m بین طول‌های M_1 و M_2.

حل:

$$y=\frac{(x+1)^3}{x} \quad \text{و} \quad y'=\frac{(x+1)^2(2x-1)}{x^2}$$

معادله مجانب منحنی

$$y=x^2+3x+3$$

x	$-\infty$		-1		0		$0/5$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$		$-$	0		$+$	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$	$+\infty$ ↘	$\frac{27}{4}$	↗	8	↗	$+\infty$

لطفا جدول مجانب‌ومنحنی نمایش‌تابع‌را خودتان‌رسم کنید

ثانیاً ـ $y=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow A(-1,0)$

معادله‌خطی که از A میگذرد $y-0=m(x+1)$

$$\frac{(x+1)^3}{x}=m(x+1) \Rightarrow (x+1)^3-mx(x+1)=0$$

$$(x+1)[x^2+(2-m)x+1]=0$$

$$x^2+(2-m)x+1=0 \quad \text{و} \quad \Delta=(2-m)^2-4=m^2-4m$$

$$\Delta=0 \Rightarrow m^2-4m=0 \Rightarrow m=0 \quad \text{و} \quad 4$$

m	$-\infty$		0		4		$+\infty$
Δ		$+$	0	$-$	0	$+$	
بحث		خط منحنی‌را در دو نقطه دیگر قطع میکند		خط فقط منحنی‌را در A قطع میکند		خط منحنی‌را در دو نقطه‌دیگر قطع‌میکند	

خط‌در نقطه A منحنی‌را قطع‌میکند ودر نقطه‌دیگری برمنحنی مماس‌است

x_1 و x_2 ریشه‌های‌معادله‌فوق طولهای نقاط M_1وM_2 میباشد

رابطه‌مستقل $x_1+x_2=m-2$ و $x_1x_2=1$

۱۹۷۸ـ ك ۴۰ـ معادله $(1-t)x^2+(3t-5)x+4(3-t)=0$ که درآن x مجهول و t پارامتر میباشد مفروض‌است. اولا دروجودوعلامت‌ریشه‌های‌آن‌بحث‌کنید. ثانیا وقتی‌که هردو ریشه مثبت‌باشند آنهارا طول‌های دوضلع یك مثلث قائم‌الزاویه فرض میکنیم حساب‌کنید وتر این مثلث را برحسب t و تحقیق کنیدکه عبارت وتر برحسب t منطق است و منحنی تغییرات وتر را برحسب t رسم‌کنید (وقتی‌که t طوری تغییر میکندکه دو ریشه مثبت باشند). ثالثاً ـ شعاع دایره‌محاطی مثلث‌را برحسب t حساب‌کنید وتغییرات‌آنرا (وقتی که t درحدود فوق‌الذکر تغییرمیکند) بدست‌آورید. همچنین‌اندازه این‌شعاع‌را برحسب‌وتر تعیین‌کنید

حل: اگرعلامت Δ و $\frac{c}{a}$ و $\frac{-b}{a}$ معادله‌راطبق‌حل‌مسائل‌صفحات(۳۲۱ تا۳۲۹)

بدست‌آوریم نتیجه میشود .

m	$-\infty$	$\frac{9-3\sqrt{3}}{7}$	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{9+3\sqrt{3}}{7}$	2	$+\infty$
بحث	$x'>x''>0$	$x'=x''>0$	ریشه ندارد		$x'=x''<0$	$x'>x''>0$	

ثانیاً ـ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله فوق و d طول وتر باشد می‌توان نوشت:

$$d^2=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$$

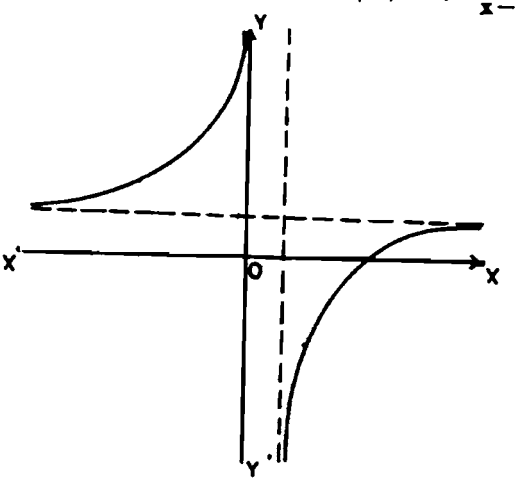
$$d^2=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}$$

$$d^2=\frac{(3t-5)^2-8(1-t)(2-t)}{(1-t)^2}=\frac{t^2-6t+9}{(1-t)^2}$$

$$d^2=\frac{(t-3)^2}{(t-1)^2}\Longrightarrow d=\frac{t-3}{t-1}$$

و اگر d را مساوی y و t را مساوی x فرض کنیم باید و منحنی نمایش تابع:

$y=\frac{x-3}{x-1}$ را رسم کنیم آن قسمت از منحنی که بالای محور طول‌ها قرار دارد جوابگو مسئله است.



۱۹۷۹ـ ک ۴۱ـ اولا، منحنی‌نمایش‌تغییرات تابع $y=\frac{x^3}{x^2-1}$ را رسم کنید. ثانیاً طول نقاطی ازمنحنی‌را بدست‌آورید که‌در آنجاضریب‌زاویه‌ای‌مماس برابر عدد m باشد (بحث کنید) ثالثاً هرخط D که موازی‌نیمساز زاویه xoy باشد منحنی‌رادردونقطه M و M′ تلاقی‌میکند، مطلوب‌است رسم‌مکان هندسی‌وسط قطعه‌خط MM′ وقتیکه D تغییروضع‌میدهد.

حل: لطفا جدول‌وشکل‌منحنی‌را خودتان رسم کنید.

ثانیاـ $y'=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} \Longrightarrow m=\frac{x^4-3x^2}{x^4-2x^2+1}$

$(m-1)x^4-(2m-3)x^2+m=0$

با فرض $x^2=y$ نتیجه میشود $(m-1)y^2-(2m-3)y+m=0$

تذکر: برای این‌که در تعدادریشه‌های‌معادله دومجهولی درجه‌چهارم‌بحث‌نمائیم‌باید علامت Δ و $\frac{c}{a}$ و $\frac{-b}{a}$ معادله حلال‌را درجدولی بدست‌آوریم.

m	$-\infty$		0		1		$\frac{9}{8}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Δ		+		+		+	0	−		−	
$\frac{c}{a}$		+	0	−	∞	+		+	0	+	
$\frac{-b}{a}$		+		+	∞	−		−		+	
معادله حلال		$y'>y''>0$		$y'>0>y''$		$0>y'>y''$		ریشه‌ندارد			
معادله دو مجهولی		چهارریشه دارد		دو ریشه دارد		ریشه ندارد					

$x_1=0$ و $x_2=-x_3$

ثالثاـ هرخطی که‌موازی‌نیمسازناحیه اول‌باشد معادله‌اش بصورت $y=x+b$ میباشد آنرا بامعادله منحنی حل می‌نمائیم.

$$\frac{x^3}{x^2-1}=x+b \Rightarrow x^3=x^3-x+bx^2-b$$

$$bx^2-x-b=0$$

x' و x'' ریشه‌های معادله فوق طول‌های نقاط M و M' میباشد پس:

$$Xp = \frac{x'+x''}{۲} = \frac{۱}{۲b} \quad \text{و} \quad Yp = \frac{۱}{۲b} + b \quad \text{وسط } MM'$$

$$P\begin{cases} X = \frac{۱}{۲b} \Longrightarrow b = \frac{۱}{۲X} \\ Y = \frac{۱+۲b^۲}{۲b} \end{cases} \quad \text{و} \quad Y = \frac{۲X^۲+۱}{۲X} \quad \text{معادله مکان } P \text{ وسط } MM'$$

لطفاً خودتان مکان را رسم کنید.

۱۹۸۰ـ ك ۴۲ـ اولا نسبت به‌دومحور مختصات متعامد Ox و Oy دوخط زیر را رسم کنید:

$$x + ۲y - ۷ = ۰ \qquad ۴x - y - ۱۰ = ۰$$

و ازروی شکل مختصات A نقطه تلاقی دوخط‌را تخمین‌بزنید وبعد این مختصات‌وطول OA را حساب‌کنید. ثانیاً ازنقطه A یك‌خط باضریب‌زاویه‌ای منفی $(-m)$ میگذرانیم. این خط دونیم خط Ox و Oy را بترتیب در PوQ تلاقی‌میکند. طول‌های OPوOQ را حساب‌کنید و ببینید وقتیکه m تغییرمیکند مساحت‌مثلث OPQ چگونه تغییر خواهدکرد. این‌مساحت درازای یك وضع مخصوص $P_۱Q_۱$ ازخط PQ می‌نیمم میشود. $P_۱Q_۱$ را رسم کنید. ثالثاً برحسب m، مربع‌ارتفاع h خارج‌ازرأس O ازمثلث OPQ را حساب‌کنیدو ببینید $h^۲$ با تغییر m چگونه تغییر میکند $h^۲$ را بدست آورید.

۱۹۸۱ـك ۴۳ـ مطلوب‌است تعیین‌تغییرات‌تابع $y = \frac{x^۲-۲x+۲}{x-۱}$ وتابع‌مشتق این تابع ورسم‌منحنی نمایش این‌دوتابع.

حل: باید تعیین‌کنیم تابع درچه‌فاصله‌ای از متغیر x صعودی یا نزولی و یا دارای ماکزیمم و می‌نیمم است.

$$y' = \frac{x^۲-۲x}{(x-۱)^۲}$$

$$y' = ۰ \Longrightarrow x^۲ - ۲x = ۰ \Longrightarrow x = ۰ \text{ و } ۲$$

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
y'		+	۰	−	۰	+	
y	$-\infty$	↗	Max	↘	Min	↗	$+\infty$

$$y_1 = y = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} \quad \text{و} \quad y'_1 = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$y' = \infty \Longrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		−	∞	+	
y_1	1	↘	Min	↗	1

لطفا منحنی نمایش دوتابع $y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$ و $y_1 = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ را خودتان رسم کنید.

۱۹۸۲ـ ک۴۴ـ سه‌جمله‌ای‌های درجه‌دوم (T) بمعادله زیر،

$$y = mx^2 + (1-3m)x + 2m$$

مفروض‌است. هرسه‌جمله‌ای در ازای یکی ازمقادیرپارامتر m بدست‌می‌آید. اولا در ازای چه‌مقدارx مشتق y نسبت‌به‌x برابر ۱ است؟ آیا در ازای جمیع‌مقادیرm برای‌x بدست می‌آید؟ ثانیا برای هرسه‌جمله‌ای‌مشتق‌y نسبت‌به‌x درازای یک‌مقدارx صفرمیشود. اگر این‌مقداررا X ومقدارy نظیرآن‌را Y بنامیم، X وY را برحسب m وبعد Y رابر حسب X بدست‌آورید ومنحنی‌نمایش تغییرات Y را برحسب X نسبت‌بدومحور متعامد رسم کنید.

حل: اولا

$$y' = 2mx + 1 - 3m$$

$$1 = 2mx + 1 - 3m \Longrightarrow 2mx = 3m \Longrightarrow x = 1/5$$

ثانیا-

$$y = 2mx + 1 - 3m \Longrightarrow 0 = 2mx + 1 - 3m$$

$$2mx = 3m - 1 \Longrightarrow X = \frac{3m-1}{2m}$$

$$Y = m\left(\frac{3m-1}{2m}\right)^2 + (1-3m)\left(\frac{3m-1}{2m}\right) + 2m$$

$$Y = \frac{-m^2+6m-1}{4m} \quad \text{و} \quad X = \frac{3m-1}{2m}$$

$$m=\frac{1}{-2X-3} \quad و \quad Y=\frac{-X^2+2}{3-2X}$$

معادلات مجانبها $X=1/5$ و $Y=0/5X+0/75$

لطفاً جدول و منحنی آنرا خود تان رسم کنید.

۱۹۸۳- ک۴۵- منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\sqrt{x^3-3x+2}$ را رسم کنید و ببینید نقاط تلاقی منحنی بامحور xها چه خصوصیت دارند.

اگر $Y=ax+b$ مجانب این منحنی باشد، مقدار $y-Y$ را وقتی که قدر مطلق x بینهایت بزرگ میشود تعیین کنید. نقطه تلاقی منحنی را بامجانب و ضریب زاویه‌ای مماس بر منحنی در این نقطه را بدست آورید.

حل: برای پیدا کردن معادله مجانب مایل آن معادله منحنی را با معادله خط $y=ax+b$ حل کرده و ضرایب بزرگترین جمله آنرا مساوی صفر قرار میدهیم و a و b را حساب میکنیم.

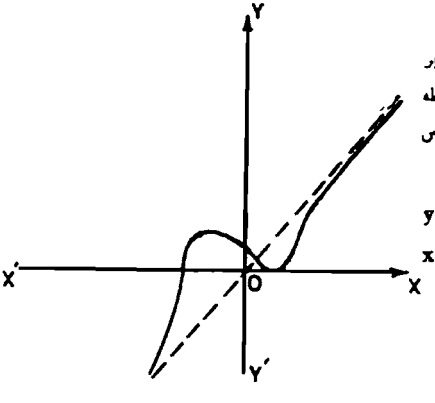
$$ax+b=\sqrt{x^3-3x+2}$$

$$(a^3-1)x^3+3a^2bx^2+3(b^2a+2)x+b^3-2=0$$

$$a^3-1=0 \Longrightarrow a=1 \quad و \quad 3a^2b=0 \Longrightarrow b=0$$

$y=x$ و معادله مجانب مایل $y'=\dfrac{2x^2-3}{3\sqrt[3]{(x^3-3x+2)^2}}$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		+	∞	+	0	−	0	−	0		+		
y	$-\infty$	↗	0	↗	$\sqrt[3]{3}$	↘	$\sqrt[3]{2}$	↘	0	↗	$\sqrt[3]{4}$	↗	$+\infty$
					Max				Min				



در نقطه $A(2 \text{ و } 0)$ بر محور طولها عمود است و در نقطه $B(1 \text{ و } 0)$ برمحور طولها مماس است.

$$y-Y=\sqrt{x^3-3x+2}-x$$

$$x=\infty \Longrightarrow y-Y=\infty-\infty$$

$$y - Y = \frac{x^2 - 3x + 2 - x^2}{\sqrt[3]{(x^2 - 3x + 2)^2} + x^2 + x\sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}} = 0$$

$x \to \infty$

$$\sqrt[3]{x^2 - 3x + 2} = x \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = x^3 \Rightarrow x = (2 \div 3)$$

$$m = y' = -5\sqrt[3]{26} \div 26$$

۱۹۸۴- ک۴۶- اولا مطلوب است شرط لازم و کافی برای آنکه معادله :

$f(z) = z^2 + 2pz + q = 0$ اقلا یک ریشه بین ۱- و ۱+ داشته باشد. همچنین شرایط لازم و کافی برای آنکه هر دو ریشه معادله فوق بین ۱- و ۱+ باشد. ثانیا نتایج فوق را درمورد معادله $\sin^2 x + 2p\sin x - \sin^2\alpha = 0$ بکار ببرید (α و p مفروضند) و ثابت کنید که معادله اخیر همواره دارای یک جواب است که در آن صدق میکند و تمام جوابهایی را که در این معادله صدق میکنند بدست آورید .

$$f(1) \cdot f(-1) < 0 \Rightarrow (1 + 2p + q)(1 - 2p + q) < 0$$

$$(q+1)^2 - 4p^2 < 0 \Rightarrow (q+1)^2 < 4p^2$$

و برای این که هر دو ریشه بین اعداد ۱ و ۱- باشد $(1 > x' > x'' > -1)$ باید

$$-1 + \frac{b}{2a} < 0 \quad \text{و} \quad 1 + \frac{b}{2a} > 0 \quad \text{و} \quad af(-1) > 0 \quad \text{و} \quad af(1) > 0 \quad \text{و} \quad \Delta > 0$$

باشد بنابراین علامت هر یک از عبارات بالا را در جدولی بدست آورده قسمتی از جدول که تمام علامات بالا وجود دارد جواب مسئله است.

ثانیا-

$$\sin x = z \Rightarrow z^2 + 2pz - \sin^2\alpha = 0$$

$$f(1) \cdot f(-1) < 0 \Rightarrow (1 + 2p - \sin^2\alpha)(1 - 2p - \sin^2\alpha) < 0$$

$$(1 - \sin^2\alpha)^2 - 4p^2 < 0 \Rightarrow \cos^4\alpha < 4p^2 \Rightarrow 2p > \cos^2\alpha$$

۱۹۸۵- ک۴۷- دو تابع $y = x^3 + px + q$ و $z = x^3 + p'x^2 + q'$ مفروضند

اولا با فرض معلوم بودن p' و q' میخواهیم p و q را بقسمی حساب کنیم که اگر y یک ماکزیمم و یک مینیمم داشته باشد، ماکزیمم y برابر ماکزیمم تابع z و مینیمم آن برابر مینیمم z باشد.

ثانیا با فرض برقرار شدن این شرایط مطلوب است تعیین تغییرات تابع :

$y = x^3 + px + q$ و ثابت کنید که این تابع در ازای دو مقدار x صفر میشود و آن دو مقدار را بدست آورید .

این مسئله در صفحه (۳۷۴) حل شده است

۹۹۸۶- ک۳۸- اولا تغییرات تابع $y=\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x-2}$ را تعیین و منحنی نمایش آنرا رسم کنید. ثانیا درشماره وعلامت ریشه‌های معادله:

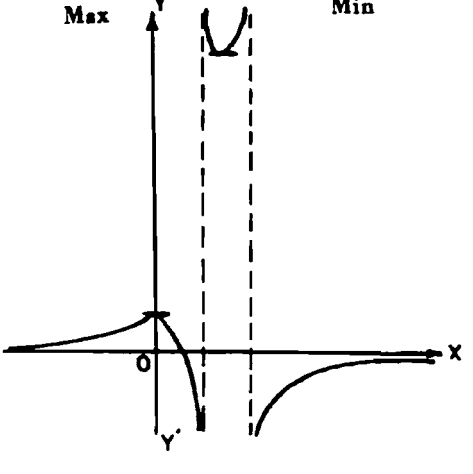
$$\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x-2}=\lambda$$

برحسب اندازه‌های مختلف λ بحث کنید. ثالثا ثابت کنید که بین x' و x'' ریشه‌های این معادله رابطه‌ای مستقل از λ وجوددارد وآن‌را بدست آورید.

حل:

$$y=\frac{2-3x}{x^2-3x+2} \quad \text{و} \quad y'=\frac{x(3x-4)}{v^2}$$

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{2}{3}$		1		$\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
y'			$+$		0		$-$		$-$		0		$+$		$+$
y	0	↗	$\frac{5}{6}$	↗	1	↘	0 ↘	$-\infty$	$+\infty$ ↘	9 ↗	$+\infty$	$-\infty$		↗	0



ازروی شکل به‌آسانی بحث زیر نتیجه میشود.

λ	$-\infty$		0		1		9		$+\infty$
بحث	$x'>x''>0$		$x''<0<x'$		ریشه ندارد		$x'>x''>0$		
	$x'=\infty$ و $x''=1$				$x'=x''=0$		$x'=x''=4\div 3$		

۱۹۸۷- ک ۴۹ - اولا تغییرات تابع $y=1+\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+2}$ را تعیین ومنحنی نمایش آنرا رسم کنید. ثانیا- برحسب مقادیر مختلف h درشماره وعلامت ریشه‌های معادلهٔ

$$h=1+\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+2} \qquad (1)$$

بحث کنید وبخصوص بگویید در ازای چه مقادیر h این معادله ریشه مضاعف دارد. ثالثا بفرض آنکه معادله (۱) دارای دو ریشه متمایز x_1 و x_2 باشد ثابت کنید که :

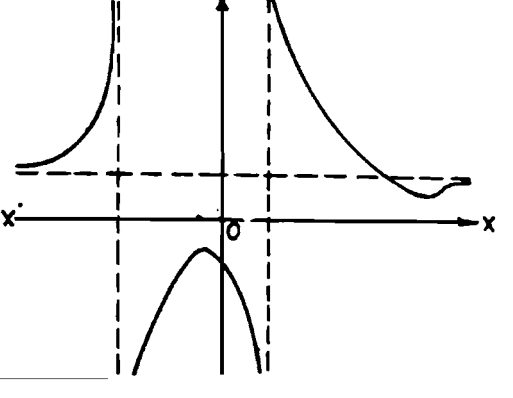
$$\frac{x_1-4-3\sqrt{2}}{x_1-4+3\sqrt{2}}\cdot\frac{x_2-4+3\sqrt{2}}{x_2-4-3\sqrt{2}}$$

بستگی به h ندارد ومقدار آنرا بدست آورید. رابعا چه مقداری باید به h داد تا بتوان دو ریشه معادله را سینوس وکسینوس یك زاویه اختیار کرد وچگونه می‌توان اندازه‌های آن زاویه را بدست آورد

حل:

$$y=\frac{x^2+2}{x^2+x-2} \quad و \quad y'=\frac{x^2-8x-2}{v^2}$$

x	$-\infty$		-2		$4-3\sqrt{2}$		0		1		$4+3\sqrt{2}$		$+\infty$
y'			$+$		0			$-$	$-$		0	$+$	$+$
y	1	$\nearrow$	$+\infty$	$\nearrow$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-2\sqrt{2}}{3}$ Max	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$	$\searrow$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$ Min	$\nearrow$	1



ثانیاً- $h = \frac{x^2+2}{x^2+x-2} \Longrightarrow (h-1)x^2+hx-2h-2=0$

اگر ازروی شکل بحث کنیم نتیجه زیر بدست می‌آید:

h	$-\infty$	-2	$\frac{-2\sqrt{2}}{3}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	1	$+\infty$
بحث	$x''<0<x'$	$x'>x''>$	ریشه ندارد	$x'>x''>0$	$x'>0>x''$	
	$x''=0<x'$		$x'=x''=2+3\sqrt{2}$		$x'=\infty$ و $x''=22$	
		$x'=x''=2-3\sqrt{2}$				

بازاء $h=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$ دارای ریشه مضاعف است.

ثالثاً- اگر عبارت فوقدا مساوی K فرض کنیم داریم:

$$K=\frac{x_1x_2-4(x_1+x_2)+3\sqrt{2}(x_1-x_2)-2}{x_1x_2-4(x_1-x_2)-3\sqrt{2}(x_1-x_2)-2}$$

اگر دررابطه فوق بجای x_1x_2 مساویش $\frac{2h+2}{-h+1}$ وبجای x_1+x_2 مساویش $\frac{-h}{h-1}$

و بجای x_1-x_2، یعنی $\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$ یعنی $\frac{\sqrt{9h^2-8}}{h-1}$ را قرار دهیم وخلاصه و مرتب نمائیم

K به h بستگی ندارد مساوی (۱) میباشد.

رابعاً، اگر $x'=\sin\alpha$ و $x''=\cos\alpha$ فرض شود نتیجه میشود:

$$\begin{cases} x'^2=\sin^2\alpha \\ x''^2=\cos^2\alpha \end{cases} \text{ ازجمع } \begin{cases} x'^2+x''^2=1 \\ (x'+x'')^2-2x'x''=1 \end{cases} \text{ دورابطه}$$

$$\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}=1 \Longrightarrow b^2-2ac=a^2$$

$$h^2+4(h+1)(h-1)=(h-1)^2 \Longrightarrow 4h^2+2h-5=0$$

$$h=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{4}$$

$$\sin\alpha\cos\alpha=x'x''=\frac{c}{a}=\frac{-2(h+1)}{h-1} \Longrightarrow \sin 2\alpha=\frac{-4(h+1)}{h-1}$$

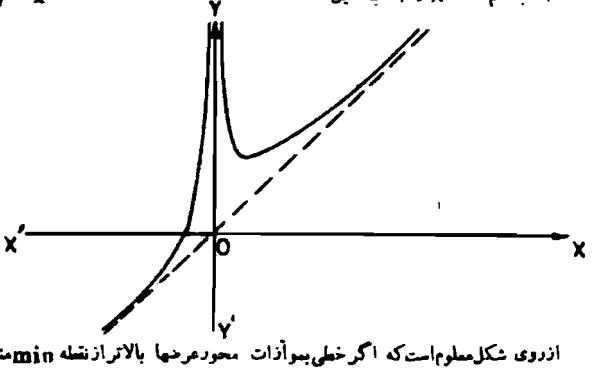
حال در این رابطه بجای h مساویش $\frac{-1 \pm \sqrt{21}}{3}$ را قرار داده و $\sin 2\alpha$ و سپس خود α را محاسبه میکنیم.

۱۹۸۸ـ ک ۵۰ـ اولا به وسیله رسم منحنی نمایش تغییرات تابع $y = x + \frac{1}{2x^2}$ معین کنید که معادله $x + \frac{1}{2x^2} = a$ در ازای چه مقادیر a دارای سه ریشه حقیقی است. ثانیاـ از نقطه بطول ۱ این منحنی، خطی باضریب زاویه‌ای m مرور می‌دهیم تا منحنی را در دو نقطهٔ دیگر M' و M'' تلاقی کند. مختصات نقطه I وسط قطعه خط M'M'' را برحسب m حساب کنید و مکان I را بدست آورید و بگویید چه قسمت از این مکان متعلق به نقاط حقیقی M' و M'' است.

حل: $y' = \frac{x^3 - 1}{x^3}$ و $y = \frac{2x^3 + 1}{2x^2}$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$		0		1		$+\infty$
y'		+			∞	−	0	+	
y	$-\infty$	↗		↗	$+\infty$	↘	$1/5$	↗	$+\infty$

مجانب قائم $x = 0$ و مجانب مایل $y = x$



از روی شکل معلوم است که اگر خطی بموازات محور عرضها بالاتر از نقطه min منحنی رسم شود منحنی را در سه نقطه قطع میکند پس بازاء $a > 1/5$ معادله دارای سه جواب حقیقی است

ثانیاً ـ

$$x=1 \Longrightarrow y=1/5 \Longrightarrow M(1 \text{ و } 1/5)$$

$$y-1/5=m(x-1) \Longrightarrow y=mx-m+1/5$$

$$y=\frac{2x^2+1}{2x^2} \Longrightarrow mx-m+1/5=\frac{2x^2+1}{2x^2}$$

$$2(m-1)x^2-(2m-3)x^2-1=0$$

چون یکی از ریشه‌های این معادله مساوی یک میباشد پس بر $x-1$ بخش‌پذیر است.

$$(x-1)[2(m-1)x^2+x+1]=0 \Longrightarrow 2(m-1)x^2+x+1=0$$

x' و x'' ریشه‌های معادله فوق طول‌های نقاط M' و M'' می‌باشد.

$$X_1=\frac{x'+x''}{2}=\frac{-b}{2a}=\frac{-1}{4(m-1)} \text{ و } y=mx-m+1/5$$

$$Y_1=\frac{-m}{4(m-1)}-m+1/5=\frac{-4m^2+m-6}{4(m-1)}$$

$$I\ (X=\frac{-1}{4(m-1)} \quad \text{و} \quad Y=\frac{-4m^2+9m-6}{4(m-1)}$$

اگر m را برحسب X بدست آورده و در رابطه Y بجای m قرار دهیم و خلاصه کنیم معادله مکان بصورت زیر در می‌آید.

$$Y=\frac{4X^2+X+1}{4X}$$

قسمتی از این مکان که بالای خط $y=1/5$ واقع شده است قابل قبول است.

۱۹۸۹ـ ک ۵۱ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x^2+\frac{\lambda^2}{x^2-1}$ را (C) مینامیم.

اولا این منحنی را در ازای $\lambda=\frac{1}{2}$ رسم کنید. ثانیا مختصات نقاطی از (C) را که در آنجا مماس بر منحنی موازی محور x هاست برحسب λ حساب کنید و در شمارهٔ آنها برحسب اندازه‌های λ بحث کنید.

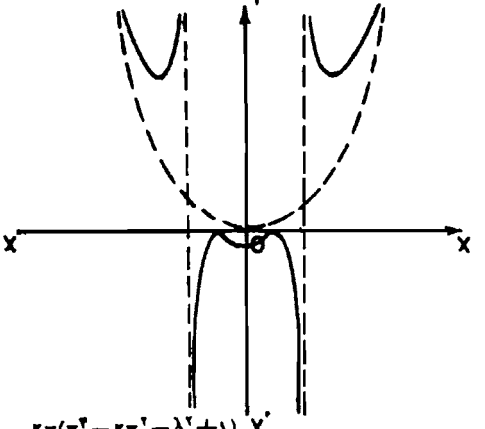
$$\lambda=\frac{1}{2} \Longrightarrow y=\frac{(x^2-\frac{1}{2})^2}{x^2-1} \quad \text{و} \quad y'=\frac{2x\,(x^2-\frac{1}{2})\,(x^2-\frac{3}{2})}{x^2}$$

معادله مجانب منحنی است $y=x^2$

x	$-\infty$		$-\sqrt{1/5}$		-1		$-\sqrt{0/5}$		0		$\sqrt{0/5}$		1		$\sqrt{1/5}$		$+\infty$
y'		$-$	0		$+$		0	$-$	0	$+$	0		$-$		0	$+$	
y	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$	↗	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0	↘	$-\infty$	↗	2	↗	$+\infty$

جدول منحنی مجانب

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$			0		$+$		$+$		
y	$+\infty$	↘	-1	↘	0	↗	1	↗	4	↗	$+\infty$



ثانیاً ـ

$$y' = \frac{2x(x^3-2x^2-\lambda^2+1)}{v^2}$$

$y' = 0 \Longrightarrow m = 0$ محور طولها $= m$ مماس

$2x(x^3-2x^2-\lambda^2+1)=0 \Longrightarrow x=0$ و $y=-\lambda^2$

$x^3-2x^2-\lambda^2+1=0$ و $A(0$ و $-\lambda^2)$

برای اینکه در صدر یشه‌های معادله دو مجذوری درجه چهارم بحث نمائیم باید علامت Δ و

$\frac{-b}{a}$ و $\frac{c}{a}$ معادله حلال زیر بحث کنیم

$$x^2=y \Longrightarrow y^2-2y-\lambda^2+1=0$$

$\Delta'=1+\lambda^2-1=\lambda^2>0$ معادله حلال همواره دو ریشه دارد

$$\frac{c}{a}=-\lambda^{2}+1\Longrightarrow-\lambda^{2}+1=0\Longrightarrow\lambda=\pm1$$

$$\frac{-b}{a}=2>0$$ همواره مثبت است

λ	$-\infty$ $\quad -1$	1	$+\infty$
Δ	$+$	$+$	$+$
$\frac{c}{a}$	$-$ $\quad 0$	$+$ $\quad 0$	$-$
$\frac{-b}{a}$	$+$	$+$	$+$
معادله حلال	$y'>0>y''$	$y'>y''>0$	$y'>0>y''$
معادله اصلی	دو ریشه دارد	چهار ریشه دارد	دو ریشه دارد
	بلتریشه صفر و دو ریشه قرینه دارد		

باذاء $\lambda<-1$ سه نقطه وجود دارد:

$-1<\lambda<1$ پنج نقطه وجود دارد.

$\lambda>1$ سه نقطه وجود دارد .

۱۹۹۰- ۵۲ ج- جدول تغییرات و منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x^{2}-3x}{x+2}$ را رسم کنید. از نقطه $A(3,0)$ خطی (D) باضریب زاویه‌ای m می‌گذرانیم. مختصات M نقطه تلاقی (D) و (C) را برحسب m حساب کنید از نقطه A خط (D') راعمود بر (D) رسم میکنیم تا منحنی را در M' تلاقی کند. مختصات وسط MM' را حساب کنید.

حل: لطفاً جدول و منحنی نمایش تابع را خودتان رسم کنید.

$$A(3,0)\Longrightarrow y-0=m(x-3)$$

نقطه A روی منحنی است چون مختصات آن درمعادله آن صدق میکند.

$$y=\frac{x(x-3)}{x+2}\Longrightarrow m(x-3)=\frac{x(x-3)}{x+2}$$

$$(x-3)[(m-1)x+2m]=0\Longrightarrow(m-1)x+2m=0$$

$$X_M = \frac{-2m}{m-1} \quad , \quad y = m(x-3) \Longrightarrow Y_M = m\left(\frac{-2m}{m-1} - 3\right)$$

$$Y_M = \frac{-5m^2+3m}{m-1} \quad , \quad X_M = \frac{-2m}{m-1}$$

$$D' \perp D \Longrightarrow m_{D'} \times m_D = -1 \Longrightarrow m_{D'} = -\frac{1}{m}$$

$$A(3,0) \Longrightarrow y = \frac{-1}{m}(x-3)$$

$$y = \frac{x(x-3)}{x+2} \Longrightarrow \frac{-1}{m}(x-3) = \frac{x(x-3)}{x+2}$$

$$(x-3)[(m+1)x+2] = 0 \Longrightarrow (m+1)x+2 = 0$$

$$X_{M'} = \frac{-2}{m+1} \quad , \quad y = \frac{-1}{m}(x-3) \quad , \quad Y_{M'} = \frac{3m+5}{m(m+1)}$$

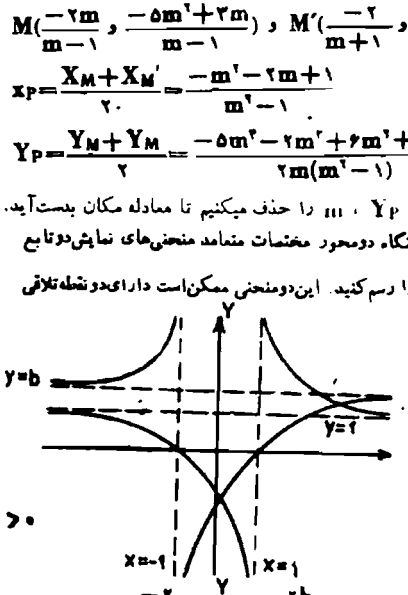
$$M\left(\frac{-2m}{m-1}, \frac{-5m^2+3m}{m-1}\right) \quad , \quad M'\left(\frac{-2}{m+1}, \frac{3m+5}{m^2+m}\right)$$

$$x_P = \frac{X_M + X_{M'}}{2} = \frac{-m^2-2m+1}{m^2-1}$$

$$Y_P = \frac{Y_M + Y_M}{2} = \frac{-5m^3-2m^2+6m^2+2m-5}{2m(m^2-1)}$$

بین X_P و Y_P ، m را حذف میکنیم تا معادله مکان بدست آید.

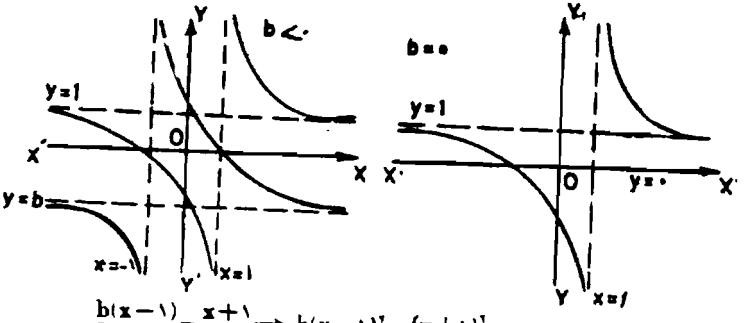
۱۹۹۱ـ ک۵۳ـ نسبت بیک دستگاه دومحور مختصات متعامد منحنی‌های نمایش دوتابع $y = \frac{x+1}{x-1}$ و $y = \frac{b(x-1)}{x+1}$ را رسم کنید. این دومنحنی ممکن است دارای دو نقطه تلاقی A و B باشند. مختصات A و B را بدست آورید و برحسب مقادیر مختلف b در وجود این دو نقطه بحث کنید. معادله خط AB را بنویسید و ثابت کنید که این خط دارای جمیع مقادیر b از نقطه ثابتی میگذرد. در ازای چه مقادیر b مختصات A و B اعداد منطقند.



حل:

$$y_1' = \frac{-2}{(x-1)} \quad , \quad y_2' = \frac{2b}{(x+1)^2}$$

شکل دوتابع نسبت بهم برحسب $b=0$ و $b>0$ و $b<0$ بصورت‌زیر است:



$$\frac{b(x-1)}{x+1}=\frac{x+1}{x-1}\Longrightarrow b(x-1)^2=(x+1)^2$$

$$(b-1)x^2-2(b+1)x^2+b-1=0 \quad \text{و} \quad \Delta'=2b$$

$$X_{AB}=\frac{b+1\pm 2\sqrt{b}}{b-1} \quad \text{و} \quad Y_{AB}=\pm\sqrt{b}$$

بازاء $b>0$ دومنحنی دونقطه تقاطع دارند.

$$AB=\frac{y-\sqrt{b}}{x-b-1-2\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{b}+\sqrt{b}}{b+1+2\sqrt{b}-b-1+2\sqrt{b}}=\frac{1}{2}$$

$$AB=2y-2\sqrt{b}=x-b-1-2\sqrt{b}$$

$$AB=2y-x+b+1=0$$

تمام خطوطی که باراء مقادیر مختلف b بدست‌میآیند باهم موازی هستند پس از نقطه ثابتی نمیگذرند.

اگر b مربع کامل باشد مختصات A و B اعدادمنطق میشود.

۱۹۴۲ـ ک۵۴ـ اولا نسبت بدومحورمختصات متعامد ox و oy سهمی (P) بمعادله $y=x^2$ مفروض‌است. معادلهٔ مماس براین منحنی درنقطه M بطول a را بنویسید. این‌مماس محور xهارا در H ومحور yها را در K قطع میکند مختصات H و K را حساب کنید. مختصات‌اوساط قطعات MK، MH و HK را بدست‌آورید. سهمی (P) ونیزدوسهمی (Q) و (Q') مکان اوساط MH و HK را، وقتی‌که M روی‌سهمی P تغییرمکان‌پیدامیکند، رسم کنید. ثانیاً روی‌سهمی (P) دونقطه M و M' متقارن نسبت به oy وبطول‌های a و $-a$ و

نیز نقطه M_1 بطول $2a$ را اختیار میکنیم. ثابت کنید که نقاط تلاقی مماس بر (P) در M_1 با مماسهای (P) در M و M' بترتیب روی سهمیهای (Q) و (Q') واقعند. ثالثا معادلات D_1 و D' قائمهای بر (P) در نقاط M' و M را بنویسید و مکان هندسی نقطه تلاقی آنها را بدست آورید.

حل:

$x = a \Longrightarrow y = a^2 \Longrightarrow M(a \text{ و } a^2)$

$y' = 2x \Longrightarrow$ مماس $m = 2a$ و $y - a^2 = 2a(x - a)$

معادله مماس در M $\quad y = 2ax - a^2$

$H(0/5a \text{ و } 0)$ و $K(0 \text{ و } -a^2)$

MK وسط $N(0/5a \text{ و } 0)$

معادله مکان Q $\quad y = \frac{8}{9}x^2$ و $Q(\frac{3a}{4} \text{ و } \frac{a^2}{2})$ وسط MH

معادله مکان Q $\quad y = -8x^2$ و $Q'(\frac{a}{4} \text{ و } -\frac{a^2}{2})$ وسط HK

$M(a \text{ و } a^2)$ و $M'(-a \text{ و } a^2)$ و $M_1(2a \text{ و } 4a^2)$

اگر معادله مماس بر سهمی P را در نقاط M_1 و M و M' نوشته و مختصات محل مماس در M_1 را با دو مماس دیگر بدست آوریم می بینیم که مختصات آنها بترتیب در معادلات سهمیهای Q و Q' صدق میکند.

ثالثا ـ جواب: معادله مکان هندسی محل تلاقی D_1 و D $\quad y = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{2}$

۱۹۹۳ ـ ک۵۵ ـ اولا نسبت بدو محور مختصات متعامد دو منحنی (C) و (C') بمعادلات زیر را رسم کنید:

$$(C) \qquad y = \frac{1}{x} \qquad\qquad (C') \qquad y = x + \frac{1}{x}$$

ثانیا روی (C) نقطه M بطول a را اختیار میکنیم و تصاویر آنرا روی محورها بترتیب P و Q می‌نامیم معادله مماس بر (C) در M را بنویسید. اگر نقاط تلاقی این مماس با محورها بترتیب u و v باشند، تحقیق کنید که P وسط ou و Q وسط ov است. از آنجا نتیجه بگیرید که مساحت مثلث ouv ثابت است و بستگی به جای نقطه M ندارد.

ثالثا فرض کنیم که M' نقطه تلاقی خط PM با (C') باشد. معادله مماس بر منحنی (C') در نقطه M' را بنویسید و تحقیق کنید که خط مزبور محور yها را در نقطه v تلاقی میکند.

رابعاً ـ همچنین اگر N و N′ نقطه‌های بطول b از (C) و (C′) باشند، تحقیق کنید که دو خط MN و M′N′ یکدیگر را در نقطه S بر روی محور yها تلاقی میکنند و بفرض آنکه خط MN طوری تغییر کند که S ثابت بماند تحقیق کنید که وسط MN روی خط ثابتی تغییر مکان خواهد داد و نتیجه بگیرید که مکان وسط M′N′ نیز خطی است راست.

حل: اولاً ـ منحنی را خود تان رسم کنید.

ثانیاً ـ $M(a \text{ و } \frac{1}{a})$ و $P(a \text{ و } 0)$ و $Q(0 \text{ و } \frac{1}{a})$

معادله مماس در M $y=\frac{-x}{a^2}+\frac{2}{a}$ و $m=\frac{-1}{a^2}$ مماس و $y'=\frac{-1}{x^2}$

$o(0 \text{ و } 0)$ و $v(0 \text{ و } \frac{2}{a})$ و $u(2a \text{ و } 0)$

اگر مختصات وسط ou و ov را بدست آوریم همان مختصات P و Q حاصل میشود

مثلث ouv $S=2a\times\frac{1}{a}=2$

پس مساحت مثلث برابر مقدار ثابت ۲ میباشد و بجای M بستگی ندارد.

ثالثاً ـ $PM=x=a\Longrightarrow M'(a \text{ و } \frac{a^2+1}{a})$

$y=\frac{a^2-1}{a^2}x+\frac{2}{a}$ و $m=\frac{a^2-1}{a^2}$ مماس و $y'=\frac{x^2-1}{x^2}$

معادله مماس در M′ بر منحنی C′ چون $V(0 \text{ و } \frac{2}{a})$ در معادله مماس صدق میکند پس خط مماس محور عرضها را در V قطع می‌نماید.

رابعاً $M'(a \text{ و } \frac{1}{a})$ و $M(a \text{ و } \frac{1}{a})$ و $N'(b \text{ و } \frac{b^2+1}{b})$ و $N(b \text{ و } \frac{1}{b})$

$\frac{a^2+1}{a})$

$MN=y=\frac{-x+a+b}{ab}$ و $M'N'=y=\frac{(ab-1)x+a+b}{ab}$

اگر معادله دو خط MN و M′N′ را باهم حل نمائیم نتیجه میشود که:

$S(0 \text{ و } \frac{a+b}{ab})$

که این نقطه روی محور yها قرار دارد.

$$MN \text{ وسط } X_K = \frac{a+b}{2} \quad و \quad Y_K = \frac{a+b}{2ab}$$

چون نقطه S ثابت است پس عرض آن یعنی $\frac{a+b}{ab}$ نیز مقداریست ثابت پس چون عرض نقطه با عرض نقطه S است پس عرض نقطه K هم مقداریست ثابت پس نقطه همیشه بر روی $y=\frac{a+b}{2ab}$ تغییر مکان میدهد و بهمین دلیل مکان وسط M'N' روی یك خط راست است

۱۹۹۴ـ ك۵۶ـ تابع $y=\frac{3x^2-2}{x^2+2x+a}$ که در آن a پارامتر می‌باشد مفروض است.

اولاـ درازای چه مقادیری از a این تابع همواره در یك جهت تغییر میکند.

ثانیاـ در ازای چه مقادیر a تابع دارای یك ماکزیمم و یك مینیمم است؟ ثابت کنید که شرایط لازم و کافی برای آنکه تابع در ازای x ماکزیمم و در ازای x'' مینیمم باشد این است که $x'<x''$ و $x'x''=\frac{2}{3}$ باشد. a را طوری معین کنید که تابع در ازای $\frac{1}{3}$ ماکزیمم و در ازای ۲ مینیمم شود. در این حالت منحنی نمایش تغییرات y را رسم کنید.

ثالثاـ معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش M و m ماکزیمم و مینیمم y باشد و رابطه‌ای مستقل از a بین M و m بدست آورید.

حل: اولاـ

$$y'=\frac{6x^2+2(3a+2)x+4}{v^2}$$

$$y'=0 \Longrightarrow 6x^2+2(3a+2)x+4=0$$

$$\Delta'=(3a+2)^2-24=9a^2+12a-20 \quad و \quad a=6>0$$

اگر $\Delta'<0$ باشد تابع همواره صعودی است.

$$9a^2+12a-20=0 \Longrightarrow a=\frac{-2\pm2\sqrt{6}}{3}$$

پس تابع بازاء $\frac{-2-2\sqrt{6}}{3} < a < \frac{-2+2\sqrt{6}}{3}$

همواره صعودی است و بازاء سایر مقادیر دارای ماکزیمم و مینیمم است.

$x'x''$ همواره مساوی $\frac{2}{3}=\frac{2}{6}$ میباشد و چون علامت درجه دوم مشتق مثبت است پس ریشه

کوچکتر مشتق یعنی x' طول نقطه ماکزیمم و ریشه بزرگتر یعنی x'' طول نقطه می‌نیمم است پس $x' < x''$

$$x=2 \Longrightarrow y'=0 \Longrightarrow 6(2)^2+2(2+3a)+4=0 \Longrightarrow a=-\frac{7}{2}$$

ثالثاً ـ

$$y=\frac{3x^2-2}{x^2+2x+a} \Longrightarrow (y-3)x^2+2yx+ay+2=0$$

$$\Delta'=(1-a)y^2+(3a-2)y+6=0 \quad \text{و} \quad M=y' \text{ و } m=y''$$

$$\begin{cases} y'+y''=\dfrac{2-3a}{1-a} \quad \text{و} \quad y'y''=\dfrac{6}{1-a} \end{cases}$$

اگر بین این دو رابطه a را حذف کنیم نتیجه میشود :

$$6(y'+y'')+y'y''=18$$

۱۹۹۰ ـ ۵۷ ـ اولاً ـ بافرض آنکه h پارامتری بزرگتر ازواحد باشد، منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=\dfrac{x+h}{1-x^2}$ را رسم کنید. ثابت کنید که اگر تابع در ازای $x=x_0$ ماکزیمم یا می‌نیمم باشد، مقدار این ماکزیمم یا می‌نیمم برابر $\dfrac{-1}{2x_0}$ است .

ثانیاً ـ فرض میکنیم که خط (D) بمعادله $y=m$ منحنی C را در دو نقطه M_1 و M_2 قطع کند و A نقطه بطول a از خط D باشد. مطلوب است مکان هندسی نقطه B مزدوج توافقی A نسبت به M_1 و M_2 وقتی که D بموازات خود تغییر مکان می‌دهد. a را چگونه باید اختیار کرد تا این مکان مبدل به خط راست شود؟ حالت مخصوص $a=\infty$.

$$y'=\frac{x^2+2hx+1}{v^2}=0 \Longrightarrow x^2+2hx+1=0$$

$$x=-h\pm\sqrt{h^2-1}$$

x	$-\infty$		$-h-\sqrt{h^2-1}$		$-h$		-1		0		$-h+\sqrt{h^2-1}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0			$-$		$-$		$-$	0			$+$	
y	0	↗	$\dfrac{h-\sqrt{h^2-1}}{2}$	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	h	↘	$\dfrac{h+\sqrt{h^2-1}}{2}$	$+\infty$	$-\infty$	↗	0	

خطوط مجانبند $x=\pm 1$ و $y=0$

تذکر: h را مساوی عددی بزرگتر ازواحد مثلا مساوی $\sqrt{3}$ فرض کرده و منحنی را رسم کنید .

$$y=\frac{f(x)}{g(x)} \text{ و } y'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{v^2}$$

$$y'=0 \Longrightarrow f'(x)g(x)-g'(x)f(x)=0 \Longrightarrow f'(x)g(x)=g'(x)f(x)$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f(x)}{g(x)} \Longrightarrow y_{\max \text{یا} \min}=\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$y=\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{1}{-2x} \text{ و } x=x_0 \Longrightarrow y=\frac{-1}{2x_0}$$

ثانیاـ $y=m \Longrightarrow m=\frac{x+h}{1-x^2} \Longrightarrow mx^2+x-m+h=0$

میدانیم x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌فوق طول‌های نقاط M_1 و M_2 و a طول نقطه A میباشد رابطه‌مزدوج توافقی را می‌نویسیم.

$$(x_1+x_2)(a+X_B)=2(x_1x_2+aX_B)$$

$$\frac{-1}{m}(a+x)=2\left(\frac{-m+h}{m}+x\right)$$

اگر در این رابطه بجای m مساویش y را قرار دهیم و سپس y را برحسب x و h و a بدست آوریم نتیجه میشود:

$$y=\frac{x+a+2h}{2-2ax} \qquad a=\frac{2h\pm\sqrt{2h^2-2}}{2}$$ جواب قسمت آخر

۱۹۹۶ ـ ک ۵۸ ـ اولاـ منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=x^3-x-6$ را رسم کنید.

ثانیاـ معادله‌مماس برمنحنی (C) را در نقطه‌تلاقی آن بامحور yها بنویسید.

ثالثاـ مماس بر (C) در نقطه بطول $x=2$ را بدست آورید و نقطه‌تلاقی این مماس را با منحنی تعیین کنید.

رابعاـ مساحت سطحی را که واقع است بین منحنی ومحور xها وخطی که از نقطه‌ظهر ماکزیمم y موازی محور yها می‌گذرد حساب کنید.

حل: راهنمائی: $x^3-x-6=(x-2)(x^2+2x+3)$

ثانیاـ $x=0 \Longrightarrow y=-6 \Longrightarrow A(0,-6)$ و $y'=3x^2-1$

مماس $m=y'=-1$ و $y+6=-1(x-0) \Longrightarrow y=-x-6$

ثالثاـ $x=2 \Longrightarrow y=8-2-6=0 \Longrightarrow B(2,0)$

معادله‌مماس $y=11(x-2)$ و $m=y'=3(2)^2-1=11$ مماس در B

$$x^3-x-6=11(x-2)\Rightarrow(x-2)(x^2+2x+3)-11(x-2)=0$$

$$(x-2)(x^2+2x-8)=0\Rightarrow x=2 \text{ و } x=+2 \text{ ؛ } x=-4$$

$$x=-4\Rightarrow y=11(-4-2)=-66\Rightarrow C(-4 \text{ و } -66)$$

رابعاً ـ واحد مربع $S=\frac{72\sqrt{3}+355}{26}$

۱۹۹۷ ـ ک۵۹ ـ اولاً ـ نسبت بیکدستگاه دومحور مختصات متعامد سهمی $y=\frac{x^2}{2p}$ مفروض است (p ثابت). از نقطه A بطول a واقع برمحور xها خطی (D) باضریب زاویه‌ای m مرور میدهیم. m را برحسب a طوری تعیین کنید که D برسهمی مماس باشد. دراین صورت معادله مماس ومختصات نقطه تماس M را بنویسید.

ثانیاً ـ وقتی که a جمیع مقادیر ممکنه را اختیار میکند، تغییرات تانژانت زاویه بین دو خط OM و AM را تعیین ومنحنی نمایش آنرا رسم کنید.

ثالثاً ـ تعیین کنید مکان هندسی پایهٔ عمود وارد از A بر خط OM را وقتی که a تغییر میکند.

حل: $A(a \text{ و } 0)$ و $y=m(x-a)$

$$y=\frac{x^2}{2p}$$

$$mx-ma=\frac{x^2}{2p}\Rightarrow x^2-2pmx+2pma=0$$

$$\Delta=0\Rightarrow p^2m^2-2pma=0\Rightarrow mp(pm-2a)=0\Rightarrow m=0 \text{ و } \frac{2a}{p}$$

$$y=m(x-a)\Rightarrow y=\frac{2a}{p}(x-a) \quad \text{معادله مماس} \quad \text{و تماس } x=\frac{-b}{2a}$$

$$\text{تماس } x=pm=2a \text{ و } y=m(x-a)=\frac{2a}{p}(2a-a)=\frac{2a^2}{p}$$

$$M(2a \text{ و } \frac{2a^2}{p}) \text{ و } O\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right. \text{ و } A(a \text{ و } 0)$$

$$OM \text{ خط } m=\frac{Y_M-Y_O}{X_M-X_O}=\frac{a}{p} \text{ و } AM \text{ خط } m=\frac{2a}{p}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\pm\frac{m'-m}{1+mm'}=\frac{ap}{p^2+2a^2}$$

ثالثاً- معادله خطی که از A میگذرد و بر OM عمود است می‌نویسیم و معادله آن را با معادله خط OM حل نموده تا مختصات پایه عمود بدست آید و سپس بین x و y نقطه H پای عمود را حذف می‌نمائیم تا مکان نقطه H بدست آید.

۱۹۹۸- ک-ع- تعیین کنید که نقطه M(a,b) در چه ناحیه از صفحه دو محور مختصات متعامد ox و oy باید باشد برای آنکه معادله زیر دو ریشه بین ۱- و ۱+ داشته باشد.

$$2x^2+2(a+b)x+a^2+b^2=0$$

حل: برای اینکه $x'>-1$ و $x''<1$ باشد باید $af(-1)>0$ و $1+\frac{b}{2a}<0$ و

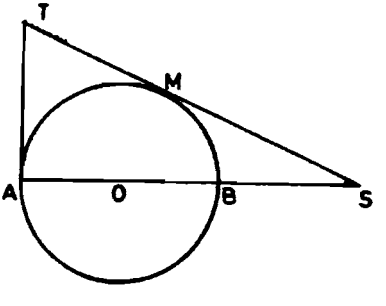
$\Delta'>0$ و $af(1)>0$ و $1+\frac{-b}{2a}>0$

بنابراین هریک از عبارات فوق را بدست آورده و سپس منحنی نمایش یا خط نمایش آنها را رسم کرده و طبق قواعد کلاس پنجم تعیین علامت می‌نمائیم.

۱۹۹۹- ک۶۱- از نقطه S واقع بر قطر AB از یک دایره O یک خط رسم میکنیم تا بر دایره در M مماس شود و مماس در A بر دایره را در T قطع کند. OS را x می‌نامیم.

اولاً- برحسب R و x حساب کنید (y) مساحت مثلث TAS و (z) نسبت $\frac{TS}{OS}$ را

ثانیاً- تغییرات z را وقتی که S روی قطر AB تغییر مکان پیدا میکند. معلوم کنید ببینید در ازای چه وضعی از S مساحت (y) مثلث TAS می‌نیمم خواهد بود.



حل: اگر خط AB را محور طولها و عمود منصف آنرا محور عرضها فرض کنیم نتیجه زیر بدست میآید.

$OA=R$ و $AS=x+R$

$SM^2=x^2-R^2$

$SM=\sqrt{x^2-R^2}$

از تشابه دو مثلث SAT و SOM میتوان نوشت.

$$\frac{TA}{OM}=\frac{SA}{SM}$$

$$\frac{TA}{R}=\frac{x+R}{\sqrt{x^2-R^2}} \quad , \quad TA=\frac{R(x+R)}{\sqrt{x^2-R^2}}$$

$$\text{مثلث } TAS \quad S=\frac{TA\times AS}{2}=\frac{R(x+R)^2}{2\sqrt{x^2-R^2}}$$

$$TS^2=AS^2+AT^2=(x+R)^2+\frac{R^2(x+R)^2}{R^2-x^2}$$

$$TS^2=\frac{x^2(x+R)}{x-R}\Longrightarrow TS=x\sqrt{\frac{(x-R)}{x-R}}$$

$$Z=\frac{TS}{OS}=\sqrt{\frac{x+R}{x-R}}$$

ثانیاً ـ منحنی نمایش تابع فوق را خودتان رسم کنید .

۲۰۰۰ ـ ۶۷ ـ اولاً ـ جدول تغییرات و منحنی (C) نمایش تابع $y=x+\frac{4}{x^2}$ (۱) را رسم کنید.

ثانیاً ـ ثابت کنید که تابعی مانند $F(x)=ax^2+b+\frac{c}{x}$ وجود دارد که مشتق آن برابر تابع (۱) باشد.

ثالثاً ـ اگر A نقطه‌ای بطول ۲ واقع بر منحنی (C) باشد، مطلوب است سطح محصور بین منحنی C و مجانب مایل آن در فاصله $x=2$ و $x=\lambda>2$ حد سطح فوق را بازای $\lambda=\infty$ تعیین کنید

رابعاً ـ مختصات نقطه تلاقی مماس بر A را با منحنی (C) پیدا کنید.

حل: اولاً مسأله را خودتان حل نمائید که بسیار آسان است.

ثانیاً ـ $F(x)=ax^2+b+\frac{c}{x}$ و $F'(x)=2ax-\frac{c}{x^2}$

اگر مقایسه $F'(x)$ با ۱ بابع نتیجه میشود:

$$2a=1\Longrightarrow a=\frac{1}{2} \quad , \quad \Longrightarrow c=-2$$

مقدار b هر عدد دلخواهی می‌تواند باشد.

ثالثاً ـ $x=2\Longrightarrow y=3\Longrightarrow A(2,3)$

$$y_1 = x + \frac{3}{x^2} \quad و \quad y_2 = x \quad و \quad y = y_1 - y_2 = \frac{3}{x^2}$$

$$Y = \frac{-3}{x} + c \quad و \quad F(2) = -2 + c \quad و \quad F(\lambda) = \frac{-3}{\lambda} + c$$

$$S = \left|F(\lambda) - F(2)\right| = \frac{-3}{\lambda} + 2 = \frac{2\lambda - 3}{\lambda}$$

$$\lambda \Longrightarrow \infty \Longrightarrow S = 2$$ واحد مربع

$$y' = 1 - \frac{8}{x^3} \quad و \quad A \text{ مماس در } m_A = 1 - 1 = 0$$

$$y - 3 = 0(x - 2) \Longrightarrow y = 3$$ معادله مماس در A

$$y = x + \frac{3}{x^2} \Longrightarrow 3 = x + \frac{3}{x^2} \Longrightarrow x^3 - 3x^2 + 3 = 0$$

$$(x-2)^2(x+1) = 0 \Longrightarrow x = 2 \quad و \quad x = -1 \quad و \quad A'(-1, 3)$$

۴۰۰۱ـ ۶۸ ـ تابع $y = \frac{x^2 + bx + c}{x^2 + px + q}$ مفروض است.

اولاـ مقادیر p، b، c و q را بقسمی تعیین کنید که تابع به ازای $x = 1$ دارای ماکزیمم برابر ۳ و به ازای $x = -1$ می‌نیمم برابر -3 داشته باشد و منحنی نمایش آنرا رسم کنید.

ثانیاـ اگر خطی موازی محور xها به معادله $y = m$ منحنی را در دو نقطه M و M' قطع کند، حدود m را قسمی تعیین کنید که دو نقطه M و M' وجود داشته باشد و در این صورت مختصات نقاط تلاقی را حساب کنید.

ثالثاـ ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای این که سه نقطه به طولهای x_1، x_2 و x_3 واقع بر منحنی بر یک استقامت باشند این است که داشته باشیم:

$$x_1 x_2 x_3 - (x_1 + x_2 + x_3) = \frac{2}{3}$$

رابعاـ به کمک رابطه اخیر یا مستقیماً ثابت کنید که منحنی دارای سه نقطه عطف است و این نقاط بر یک استقامتند.

خامساـ به کمک همان رابطه یا مستقیماً ثابت کنید که از هر نقطه به طول a واقع بر منحنی

دومماس میتوان برآن رسم کرد طولهای نقاط تماس ریشه‌های معادله :
$3ax^2-6x-(3a+2)=0$ میباشد.

حل: اولاً ـ میدانیم طول نقطه ماکزیمم و می‌نیمم مشتق را صفر می‌نماید.
ثانیاً ـ مختصات آنها در معادله منحنی صدق می‌نماید $A(1,3)$ ماکزیمم و $B(-1,-3)$ می‌نیمم .

جواب: $c=p=1$ و $p=2\div 3$ و $b=6$

چون رسم منحنی آسانست خودتان منحنی را رسم کنید.

ثانیاً
$$\begin{cases} y=\dfrac{3(x^2+6x+1)}{3x^2+2x+3} \\ y=m \end{cases} \quad m=\dfrac{3x^2+18x+3}{3x^2+2x+3}$$
و $3(m-1)x^2+2(m-9)x+3(m-1)=0$

$$\Delta'=(m-9)^2-9(m-1)^2=0 \Longrightarrow m=\pm 3$$

پس بازاء $-3<m<3$ خط منحنی را در دو نقطه قطع میکند.

ثالثاً ـ
$$y=ax+b=\frac{3x^2+18x+3}{3x^2+2x+3}$$

$$3ax^2+(2a+3b-3)x^2+(3a+2b-18)x+3b-3=0$$

$$x_1+x_2+x_3=\frac{3-3b-2a}{3a} \quad \text{و} \quad x_1x_2x_3=\frac{3-3b}{3a}$$

اگر این دو رابطه را از هم کم نمائیم رابطه مسأله بدست می‌آید.

رابعاً ـ راهنمائی ـ باید ثابت کنیم که معادله $y''=0$ دارای سه ریشه است و بین ریشه‌های آن رابطه فوق برقرار است .

خامساً ـ $x_1=a$ و $x_2=x_3=x$ باید در رابطه فوق صدق کند.

$$ax^2-(a+2x)=0 \xrightarrow{\frac{2}{3}} 3ax^2-6x-3a-2=0$$

۳۰۰۳ ـ ۶۹ ـ خط $y=x\operatorname{tg}\alpha$ پارامتری است (غیر α) عذلولی $y=\dfrac{bx}{x-a}$ در دو نقطه تلاقی میکنند (a و b مقادیری ثابت و مثبتند). اگر r فاصله دو نقطه تلاقی خط و منحنی باشد ، برحسب α منحنی تغییرات r را رسم کنید.

حل: $x\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{bx}{x-a} \Longrightarrow x^2\operatorname{tg}\alpha-(a\operatorname{tg}\alpha+b)x=0$

$$x=0 \quad , \quad \frac{a\,tg\alpha+b}{tg\alpha} \longrightarrow O \Big|_{\cdot} \text{ و } A\left(\frac{a\,tg\alpha+b}{tg\alpha} \text{ و } a\,tg\alpha+b\right)$$

$$r=OA=\sqrt{(a\,tg\alpha+b)^2+\left(\frac{a\,tg\alpha+b}{}\right)^2}=\frac{a\,tg\alpha+b}{\sin\alpha}$$

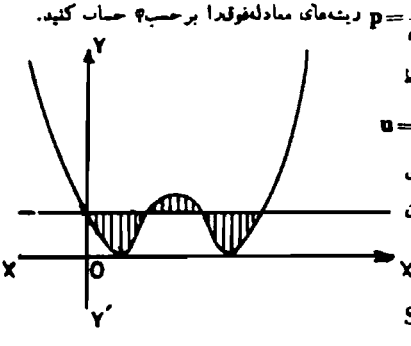
چون منحنی فوق یك منحنی مثلثاتی است خودتان آنرا رسم کنید.

۲۰۰۳ـ ك ۷۰ـ اولاً منحنی نمایش تغییرات تابع $y=(x^2-2x+1)^2$ را رسم کنید.

ثانیاً ـ مساحت سطح محصور بین منحنی C و خط $y=1$ را حساب کنید.

ثالثاً ـ معادله $(x^2+px+1)^2=m^2$ که در آن m و p دو مقدار ثابتند و $m>0$ مفروض است بچه شرط معادله فوق چهار ریشه دارد؟ رابطه بین p و m را پیدا کنید بقسمی که چهار ریشه معادله مفروض جمله‌های متوالی تصاعد عددی باشد.

رابعاً ـ باشرط فوق و $p=\frac{2}{\cos\varphi}$ ریشه‌های معادله فوق را برحسب φ حساب کنید.



خامساً ـ بفرض آنکه شرایط فوق برقرار باشد و بفرض $u=\sqrt{5}\,tg\frac{\varphi}{2}$ ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای برای اینکه ریشه‌ها منطق باشند این است که u منطق باشد.

حل: اولاً را خودتان حل کنید

$$S_1=\frac{19}{30} \quad \text{و} \quad S_2=\frac{11}{30}$$

$$S_3=\frac{19}{30} \quad \text{و} \quad S=S_1+S_2+S_3$$

$$S=\frac{49}{30}$$

ثالثاً.

$$(x^2+px+1)^2=m^4$$

$$(x^2+px+1+m)(x^2+px+1-m)=0$$

بشرطی دارای چهار جواب است که

$$\Delta_1=p^2-4m-4>0$$

$$\Delta_2=p^2+4m-4>0$$

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله پرانتز اول و x_3 و x_4 ریشه‌های معادله پرانتز دوم باشد باید $x_1 - x_2 = x_3 - x_4$ یعنی:

$$x_1 - x_2 = x_3 - x_4 \Longrightarrow \frac{\sqrt{\Delta_1}}{a_1} = \frac{\sqrt{\Delta_2}}{a_2} \Longrightarrow \Delta_1 = \Delta_2$$

$$p^2 - 4m - 4 = p^2 + 4m - 4 \Longrightarrow m = 0$$

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله پرانتز اول و x_3 و x_4 ریشه‌های معادله پرانتز دوم باشد باید:

$$x_1 + x_2 = 2x_3 \Longrightarrow -p = 2x_3 \Longrightarrow x_3 = -\frac{p}{2}$$

$x_3 = -\frac{p}{2}$ باید درمعادله پرانتز دوم صدق کند.

$$\frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + 1 - m = 0 \Longrightarrow +p^2 - 4 + 4m = 0$$

رابطه و خاصاً را خودتان حل کنید.

۲۰۰۴ـ ک ۷۱ـ معادله درجه‌دوم زیر صفر دش است:

$$(1 + \sin\varphi)x^2 - (1 + \sin^2\varphi)x + \sin\varphi(1 - \sin\varphi) = 0$$

که $\sin\varphi$ پارامتری است متغیر.

اولاـ رابطه‌ای بین ریشه‌ها را پیدا کنید که بمقدار φ بستگی نداشته باشد.

ثانیاـ بازای چه مقدار $\sin\varphi$ ریشه‌ها متساویند؟

ثالثاـ منحنی تغییرات حاصل‌ضرب دو ریشه را وقتی که φ بین صفر تا 2π تغییر میکند رسم کنید.

حل: $x' + x'' = \frac{1 + \sin^2\varphi}{1 + \sin\varphi}$ و $x'x'' = \frac{(\sin\varphi - \sin^2\varphi)}{1 + \sin\varphi}$

از جمع دو رابطه نتیجه میشود:

$$x' + x'' + x'x'' = \frac{1 + \sin\varphi}{1 + \sin\varphi} \Longrightarrow x' + x'' + x'x'' = 1$$

ثانیاـ $x' = x'' \Longrightarrow \Delta = 0 \Longrightarrow 1 + \sin^4\varphi + 2\sin^2\varphi - 4\sin\varphi + 4\sin^2\varphi = 0$

$$\sin^4\varphi + 4\sin^2\varphi + 2\sin^2\varphi - 4\sin\varphi + 1 = 0$$

$$(\sin^2\varphi + 2\sin\varphi - 1)^2 = 0$$

$$\sin^2\varphi + 2\sin\varphi - 1 = 0 \Longrightarrow \sin\varphi = -1 + \sqrt{2}$$

۷۲۴ـ $y = x'x'' = \frac{\sin\varphi(1-\sin\varphi)}{1+\sin\varphi}$

(منحنی مثلثاتی است خودتان رسم کنید).

۷۲۵ـ ۳۰۰ تابع $y = \frac{x^2+2}{x^2-x-2}$ مفروض است.

اولاـ منحنی (C) نمایش تغییرات آنرا رسم کنید.

ثانیاـ در تعداد نقاط تلاقی خط $y = m$ با منحنی (C) بحث کنید و برحسب مقادیر m ریشه‌های معادله حاصل را با دو عدد ۱ـ و ۱ مقایسه کنید و نتیجه را روی شکل نیز تحقیق کنید.

ثالثاـ اگر این خط منحنی را در دو نقطه M_1 و M_2 و محور yها را در نقطه B قطع کند، مطلوب است مکان اوساط M_1M_2 و تحقیق این که این مکان از نقاط مشخص منحنی (C) می‌گذرد و همچنین مکان هندسی نقطه D مزدوج توافقی نقطه B نسبت به دو نقطه M_1 و M_2 را بیابیـ مقدار m را چنان پیدا کنید که $M_1M_2 = d = 3$ شود.

اولاً ـ را خودتان حل کنید

ثانیاـ $\frac{-2\sqrt{2}}{3} < m < \frac{2\sqrt{2}}{3}$ خط منحنی را قطع نمیکند و بازاء این دو مقدار خط بر منحنی مماس است و بازاء سایر مقادیر خط منحنی را در دو نقطه قطع میکند و مقایسه بصورت زیر است:

m	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		$\frac{-2\sqrt{2}}{3}$		$\frac{2\sqrt{2}}{3}$		1		$+\infty$
بحث		$x'<-1<1<x'$		$x'<x''<1$	ریشه ندارد	$x'>x''<-1$		$-1<x'<x''<1$		$-1<x'<x''=1$	
		$x''=\infty$ و $x''<-1$									
							$-1<x'=x''<1$				

جواب: ثالثاـ معادله مکان $y = \frac{2x}{2x-1}$ میباشد که منحنی فوق از نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع فوق میگذرد و معادله مکان نقطه D بصورت $\frac{-3}{x+3}$ میباشد.

جواب: رابیاـ $m = \frac{3}{2}$

۳۰۰۶- ۷۴ ـ تابع $y=\frac{x^4-ax^2-a^2x+5a^3}{x^2-2ax+a^2}$ مفروض است ثابت کنید که تابعی مانند $z=\frac{\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x}{x-a}$ میتوان یافت که مشتق آن نسبت به x مساوی تابع y شود.

دراین صورت α و β و γ را پیدا کنید ومنحنی (C) نمایش تابع y را بازای $a=1$ رسم کنید وسطح محصور بین منحنی C ومجانب آن ودوخط $x=3$ و $x=\lambda>3$ را حساب کنید.

آیا این سطح بازای $\lambda=\infty$ دارای حدی هست یا خیر؟

حل:
$$z'=\frac{2\alpha x^3+(\beta-3a\alpha)x^2-2\beta ax-a\gamma}{x^2-2ax+a^2}$$

$$z'=y\Longrightarrow 2\alpha x^3+(\beta-3a\alpha)x^2-2\beta ax-a\gamma=$$
$$x^4-ax^2-a^2x+5a^3\Longrightarrow 2\alpha=1\Longrightarrow\alpha=0/5$$
$$\beta-3a\alpha=-a\Longrightarrow\beta-1/5a=-a\Longrightarrow\beta=0/5a$$
$$-a\gamma=5a^3\Longrightarrow\gamma=-5a^2$$
$$S=\frac{4\lambda-12}{2\lambda-2}\ \text{و}\ \lambda=\infty\Longrightarrow\lim S=2$$

۳۰۰۷- ۷۵ ـ منحنی (C) تغییرات تابع $y=(\frac{x+1}{x-1})^2$ را رسم کنید وتحقیق کنید که منحنی فقط دارای یك نقطه عطف است.

ثانیاً ـ ثابت کنید بازای جمیع مقادیر m خط (D) بمعادله $y=mx+1$ از نقطه ثابتی میگذرد و مختصات آن نقطه را حساب کنید.

ثالثاً ـ خط (D) منحنی (C) را در یك نقطه ثابت A قطع میکند. معین کنید بازای چه مقادیر m آنرا دردو نقطه دیگر P_1 و P_2 قطع میکند؟ وثابت کنید که وقتی m تغییر میکند، وسط P_1P_2 همواره روی خط ثابتی که معادله آنرا تعیین خواهید کرد تغییر میکند.

رابعاً ـ اندازه P_1P_2 را برحسب زاویه α که خط D باجهت مثبت محور xها میسازد حساب کنید وتغییرات آنرا وقتی که α ازصفر تا $\frac{\pi}{2}$ تغییر میکند تعیین کرده و منحنی آن را رسم کنید.

حل: اولاً ـ
$$y'=\frac{-2(x+1)}{(x-1)^3}\ \text{و}\ y''=\frac{8(x+2)}{(x-1)^4}$$

چون $y''=0$ فقط دارای یك جواب $x=-2$ میباشد پس دارای یك نقطه عطف است.

ثانیاً $y=mx+1 \Longrightarrow mx-y+1=0 \Longrightarrow A(0,1)$

ثالثاً ـ چون مختصات نقطهٔ A در معادله منحنی صدق میکند پس خط منحنی را در نقطه ثابت $A(0,1)$ قطع می‌نماید.

$$y=mx+1 \Longrightarrow mx+1=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$$

$$mx^2-2mx^2+(m-4)x=0 \Longrightarrow x(mx^2-2mx+m-4)=0$$

$$mx^2-2mx+m-4=0 \text{ و } \Delta'>0 \Longrightarrow m^2-m^2+4m>0$$

$4m>0 \Longrightarrow m>0$ شرط این که خط در دو نقطه دیگر منحنی را قطع کند

P_1P_2 وسط $K(1 \text{ و } m+1)$

پس مکان نقطه K خط $x=1$ میباشد.

رابعاً ـ جواب $P_1P_2=\frac{2\sqrt{2\sin 2\alpha}}{\sin 2\alpha}$

۴۰۰۸ ـ ۷۸ ـ معادله $x^2-2yx+a(y-4a)=0$ که در آن x متغیر و a طول ثابتی است مفروض است.

اولاً ـ منحنی تغییرات $y=f(x)$ را تعیین کنید.

ثانیاً ـ در ازای هر مقدار از y دو مقدار نظیر x_1 و x_2 برای x بدست می‌آید. ثابت کنید که بین x_1 و x_2 رابطه‌ای مستقل از y وجود دارد.

ثالثاً ـ مستطیلی بمساحت قدر مطلق x_1-x_2 و بارتفاع قدر مطلق نظیر y در نظر می‌گیریم. اگر این مستطیل حول ضلع عمود بر قاعده دوران کند، مطلوب است محاسبه V حجم استوانه حادث و تعیین تغییرات و رسم منحنی V (توجه کنید . مقدار عددی حجم همیشه مثبت است)

حل:

$$x^2-2yx+ay-4a^2=0$$

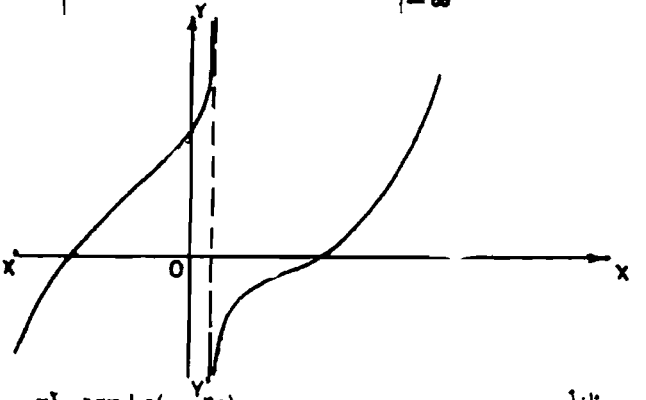
$$-y(2x-a)=-x^2+4a^2 \Longrightarrow y(2x-a)=x^2-4a^2$$

$$y=\frac{x^2-4a^2}{2x-a} \qquad y'=\frac{2(x^2-ax+4a^2)}{v^2}>0$$

بفرض $a>0$ جدول و شکل منحنی بصورت زیر است.

معادله مجانب مایل $y=0/5x+0/25a$

x	$-\infty$		$-2a$		$0/5a$		$2a$		$+\infty$
y'		+		+		+		+	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$2a$	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$



ثانیاً_ $x^2-2yx+a(y-3a)=0$

$x_1+x_2=2y$ و $x_1x_2=ay-3a^2$

$y=\frac{x_1+x_2}{2}$ و $x_1x_2=\frac{a(x_1+x_2)}{2}-3a^2$

$2x_1x_2-a(x_1+x_2)+8a^2=0$

ثالثاً_ ارتفاع استوانه $=\sqrt{y^2-ay+3a^2}\,2=\frac{\sqrt{\Delta}}{a}=x_1-x_2=$ قاعده مستطیل $=$

$V=3\pi R^2h$ و $=y$ شعاع دوران

$V=80\pi y^2\sqrt{y^2-ay+3a^2}$

دراین تابع V تابع و y متغیر است رمنحنی نمایش تابع اصرا خود تان رسم کنید.

۳۰۰۹_ ۷۹ ک_ تابع $y=\frac{x^2+ax+b}{x^2-2x+3}$ مفروض است.

اولا_ مقادیر a و b را قسمی پیدا کنید که ماکزیمم‌ومی‌نیمم آن برابر ۲ و ۱ـ باشد

ویا بازای $x=3$ ماکزیمم برابر ۲ داشته‌باشد.

ثانیاً ـ به‌ازای $a=2$ و $b=-$ منحنی نمایش تغییرات آن را رسم کنید و تحقیق کنید که منحنی دارای سه نقطه مشترک است که بر یک استقامت قرار دارند.

ثالثاً ـ اگر خط $y=m$ منحنی را در دو نقطه M_1 و M_2 قطع کند و تصاویر این نقاط را روی محور xها N_1 و N_2 بنامیم، ثابت کنید همواره نقطه‌ای مانند P بر روی محور x می‌توان یافت بقسمی که $PN_1 \times PN_2$ مقدار ثابتی باشد. محل نقطه P و این مقدار ثابت را پیدا کنید و از آنجا بگویید که دو دایر بقطر N_1N_2 چگونه اند و دارای یک محور اصلیند. معادله محور اصلی را بنویسید و همچنین دو دایر مار بر N_2N_1 همگی با دایره ثابتی متعامدند، مرکز و شعاع این دایره را تعیین کنید.

حل: اولاً پس از طرفین وسطین کردن و خلاصه نمودن بصورت زیر درمی‌آید.

$$(y-1)x^2-(2y+a)x+3y-b=0$$

$$\Delta=8y^2-4(3+a+b)y+4b-a^2=0$$

$$y=2 \Longrightarrow \begin{cases} a^2+8a+4b=8 \\ a^2-4a-8b=20 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a^2+16a+8b=16 \\ a^2-4a-8b=20 \end{cases}$$

$$y=-1 \Longrightarrow$$

$$\text{از جمع دو رابطه} \Longrightarrow 3a^2+12a=36 \Longrightarrow a^2+4a-12=0$$

$$a=2 \text{ و } -6 \text{ و } a^2-4a-8b=20$$

$$a=2 \Longrightarrow 4-8-8b=20 \Longrightarrow b=-3 \text{ و } (a=-6 \text{ و } b=5)$$

ثانیاً . $\begin{matrix} a=2 \\ b=-3 \end{matrix}$ $\quad y=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-2x+3}$ و $y'=\dfrac{4x(3-x)}{v^2}$

x	$-\infty$		-3		0		1		3		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

$$y'' = \frac{۴(۲x^۳ - ۹x^۲ + ۹)}{x^۳} \qquad y'' = ۰ \Longrightarrow ۲x^۳ - ۹x^۲ + ۹ = ۰$$

$$x = \frac{۱}{X} \Longrightarrow \frac{۲}{X^۳} - \frac{۹}{X^۲} + ۹ = ۰ \Longrightarrow ۹X^۳ - ۹X + ۲ = ۰$$

$$X^۳ - X + \frac{۲}{۹} = ۰ \quad \text{و} \quad \Delta = ۴p^۳ + ۲۷q^۲ = -۴ + \frac{۴}{۳} = \frac{-۸}{۳} < ۰$$

پس $y'' = ۰$ سه ریشه دارد یعنی تابع‌دارای سه‌نقطه عطف‌است وبرای اینکه ثابت‌کنیم که این سه‌نقطه روی یك‌خط‌راست قراردارد معادله منحنی را بامعادله خط $y = ax + b$ حل‌نموده ومعادله‌بدست‌آمده‌را برحسب x مرتب می‌نمائیم (ریشه‌های این معادله طول‌های سه‌نقطه از منحنی است که‌بریك‌استقامتند ورابطه بین‌ریشه‌های معادله فوق‌باضرایبش‌را می‌نویسیم ورابطه‌ای بدست میآوریم‌که بستگی به‌aوb نداشته‌باشد اگر این‌رابطه بین‌ریشه‌های معادله $y'' = ۰$ برقرارباشد نقاط عطف‌هم بریك استقامتند.

$$ax + b = \frac{x^۲ + ۲x - ۳}{x^۲ - ۲x + ۳}$$

$$ax^۳ - (۲a - b + ۱)x^۲ + (۳a - ۲b - ۲)x + ۳b + ۳ = ۰$$

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = \frac{۲a - b + ۱}{a}$$

$$x_۱x_۲ + x_۱x_۳ + x_۲x_۳ = \frac{۳a - ۲b - ۲}{a} \quad \text{و} \quad x_۱x_۲x_۳ = \frac{-۳b - ۳}{a}$$

$$۳(x_۱x_۲ + x_۱x_۳ + x_۲x_۳) - ۲x_۱x_۲x_۳ = ۹$$

$$y'' = ۰ \Longrightarrow ۲x^۳ - ۹x^۲ + ۹ = ۰ \quad \text{و} \quad ۳(۰) - ۲(\frac{-۹}{۲}) = ۹$$

چون $۹ = ۹$ میباشد پس رابطه‌فوق بین‌طول‌های نقاط عطف وجوددارد.

حل: ثالثاً-

$$y = m \Longrightarrow m = \frac{x^۲ + ۲x - ۳}{x^۲ - ۲x + ۳}$$

$$(m - ۱)x^۲ - ۲(m + ۱)x + ۳(m + ۱) = ۰$$

$$P(x, ۰) \quad \text{و} \quad N_۱(x_۱, ۰) \quad \text{و} \quad N_۲(x_۲, ۰)$$

$$PN_۱ \times PN_۲ = (x_۱ - x)(x_۲ - x) = x_۱x_۲ - (x_۱ + x_۲)x + x^۲ = a$$

$$x^۲ - (x_۱ + x_۲)x + x_۱x_۲ - a = ۰$$

$$x^2-\frac{2(m+1)}{m-1}x+\frac{3(m+1)}{m-1}-a=0$$

$$(m-1)x^2-2(m+1)x+3m+3-am+a=0$$

$$m(x^2-2x+3-a)-x^2-2x+3+a=0$$

برای اینکه به‌ازاء جمیع‌مقادیر m این تساوی برقرار باشد باید:

$$\begin{cases}x^2-2x+3-a=0\\-x^2-2x+3+a=0\end{cases}$$ از جمع دو رابطه $$\begin{cases}-4x+6=0\\x=1/5 \text{ و } p(1/5,0)\end{cases}$$

$$-x^2-2x+3+a=0 \text{ و } x=1/5 \Longrightarrow -2/25-3+a=0$$

مقدار ثابت $a=2/25$

چون $PN_1\times PN_2=a=2/25$ میباشد پس‌نقاط N_1وN_2 نسبت به‌نقطه P منعکس یکدیگرند (وP مرکز انعکاس‌است) ومیدانیم که محوراصلی دوایر بقطر N_1N_2 از مرکز انعکاس میگذرد وبرقطر N_1N_2 عموداست پس‌خط $x=1/5$ محور اصلی‌دوایر بقطر N_1N_2 میباشد (مربوط بفصل انعکاس درهندسه مخروطات است)

قسمت بعد مانند مسأله‌شماره ۱۹۳۵ حل‌میشود.

طریقه‌دوم:

تذکر: اگردو دایره به‌قطرهای N_1N_2 و AB برهم عمودباشند نقاط N_1وN_2 مزدوج توافقی‌نقاط AوB میباشند پس‌اگرطول‌های نقاط AوB را بترتیب a و b بنامیم ورابطه‌توافقی‌را بنویسیم‌نتیجه‌میشود.

$$(x_1+x_2)(a+b)=2(x_1x_2+ab)$$

$$\frac{2(m+1)}{m-1}(a+b)=\frac{6(m+1)}{m-1}+2ab$$

$$2m(a+b)+2a+2b=6m+6+2abm-2ab$$

$$(2a+2b-6-2ab)m+2a+2b-6+2ab=0$$

برای اینکه این‌رابطه به‌m بستگی نداشته باشد باید

$$\begin{cases}2a+2b-6-2ab=0\\2a+2b-6+2ab=0\end{cases}$$ از تفریق دو رابطه $$\begin{cases}ab=0\\a=0 \text{ یا } b=0\end{cases}$$

$$\text{ازجمع دو رابطه} \Longrightarrow 4a+4b-12=0 \Longrightarrow a+b=3$$

$$a=0\Longrightarrow b=3 \text{ یا } b=0\Longrightarrow a=3$$

پس نقاط $A(0,0)$ و $B(3,0)$ دوسرقطر دایره عمود بر دایره بر قطر N_1N_2 می‌باشد.

$$X_K = \frac{0+3}{2} = 1/5 \Longrightarrow K(1/5,0)$$ مرکز دایره

معادله دایره $(x-1/5)^2+y^2=2/25$

۲۰۱۰ـ ۸۰ ـ تابع $y=\frac{ax^2+bx+a}{ax+b+a}$ مفروض است.

اولاـ تحقیق کنید به‌ازای جمیع مقادیر a و b منحنیهای تابع مفروض از نقطه ثابتی مرور می‌کنند و مختصات آن نقطه را پیدا کنید.

ثانیاـ اگر $M\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$ واقع درصفحه محورهای مختصات باشد، تعیین کنید محل نقطه M را برای اینکه منحنی تابع مفروض دارای یک ماکزیمم و یک مینیمم باشد یا این‌که در یک جهت تغییر کند. ضمناً تحقیق کنید که آیا منحنی فوق می‌تواند فقط یک ماکزیمم یا فقط یک مینیمم داشته باشد؟ مکان نقطه M را چنان تعیین کنید که منحنی تابع برمحور xها مماس باشد.

ثالثاـ تحقیق کنید که خط مرسوم بر نقاط ماکزیمم و مینیمم به‌ازای جمیع مقادیر a و b امتداد ثابتی دارد. آن امتداد را پیدا کنید

رابعاـ به‌فرض $a=1$ مقدار b را قسمی تعیین کنید که مماس بر منحنی در نقطه بطول ۱ موازی خط $y=\frac{3}{2}x$ شود.

خامساـ به‌ازای $a=1$ و $b=2$ منحنی نمایش تغییرات تابع y را رسم کنید.

سادساـ اگر درمعادله: $y=\frac{x^2+2x+1}{x+3}$ ، y پارامتر باشد، ریشه‌های معادله درجه‌دوم حاصل را با اعداد ۱ و ۵ـ مقایسه کنید و نتیجه مقایسه را از روی منحنی نیز تحقیق کنید.

حل: اولاـ

$$axy+bx+ay-ax^2-bx-a=0$$
$$a(xy+y-x^2-1)+b(y-x)=0$$
$$\begin{cases} y-x=0 \Longrightarrow y=x \\ xy+y-x^2-1=0 \Longrightarrow x^2+x-x^2-1=0 \Longrightarrow x=1 \end{cases}$$

$x=1 \Longrightarrow y=1 \Longrightarrow A(1,1)$

ثانیاً ـ معادله فوقرا می‌توان بصورت زیر نوشت :

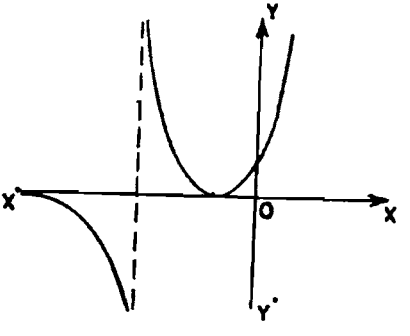
$$ax^2+(b-ay)x-by+a-ay=0$$

$$\Delta=0 \Longrightarrow (b-ay)^2-4a(a-ay-by)=0$$

$$a^2y^2+2(ab+3a^2)y+b^2-4a^2=0$$

$$\Delta'>0 \Longrightarrow (ab+2a^2)^2-a^2(b^2-4a^2)>0$$

$$8a^2+4ab>0 \Longrightarrow 4a(2a+b)>0$$



برای اینکه بر محور طولها مماس شود باید $ax^2+bx+a=0$ یك جواب داشته باشد.

$$\Delta=b^2-4a^2=0$$

$$b^2=4a^2 \Longrightarrow b=\pm 2a$$

پس خط $y=\pm 2x$ جواب مسئله است.

ثالثاً ـ میدانیم معادله مکان نقاط اکزیمم و مینیمم بصورت $y=\frac{f'(x)}{g'(x)}$ یعنی بصورت $y=\frac{2ax+b}{a}$ و یا بصورت $y=2x+\frac{b}{a}$ میباشد پس امتداد آن ثابت است.

رابعاً ـ $a=1 \Longrightarrow y=\frac{x^2+bx+1}{x+b+1}$ مماس و $m=\frac{3}{4}$

$$y'=\frac{x^2+2bx+2x+b^2+b-1}{(x+b+1)^2}$$

$$\frac{3}{4}=\frac{1+2b+2+b^2+b-1}{(1+b+1)^2}$$

$$3(b^2+4b+4)=4(b^2+3b+2) \Longrightarrow b^2=4 \Longrightarrow b=\pm 2$$

خامساً ـ رسم منحنی آسان است خودتان رسم کنید.

سادساً ـ پس از طرفین وسطین کردن و خلاصه نمودن بصورت زیر درمیآید و جدول حل

وبحث بصورت زیر است.

$$x^2+(2-y)x+1-3y=0$$

y	$-\infty$	-8		1	$+\infty$
بحث	$x'<-5<x''<1$	ریشه ندارد	$-5<x'<x''$	$-5<x'<1<x''$	
		$x'>x''=-5$	$-5<x'<x''$	$-5<x'<x''<1$	

۳۰۱۱ - ک۸۱ـ تابع $y=\frac{2x+1}{2x^2+1}$ مفروض است.

اولاـ منحنی نمایش تغییرات آنرا رسم کنید ودر وجود نقاط تقاطع خط $y=k$ با منحنی بحث کنید.

ثانیاً اگر نقطهٔ تلاقی خط $y=k$ را با منحنی M_1 و M_2 بنامیم ، مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ M وسط M_2M_1 و همچنین مکان هندسی نقطهٔ P مزدوج توافقی نقطهٔ D محل تلاقی M_2M_1 با محور yها نسبت به دو نقطهٔ M و M_2 .

ثالثاـ مطلوب است تشکیل معادله درجه دومی که ریشه‌هایش ضریبهای زاویه‌ای دو خط OM_1 و OM_2 باشد (O مبدأ مختصات است) وتحقیق کنید که بین این ضریبهای زاویه‌ای رابطه‌ای مستقل از k وجود دارد. وهمچنین تحقیق کنید که بین طولهای نقاط M_1 و M_2 رابطه مستقلی از k وجود دارد. از آنجا ثابت کنید که تصاویر این دو نقطه بر روی محور $x'x$ مزدوج توافقی دو نقطه ثابتند و آن دو نقطه را بیابید .

رابعاـ برای این که سه نقطه از منحنی به طولهای x_1 x_2 و x_3 بر یک استقامت باشند باید داشته باشیم:

$$4x_1x_2x_3+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)-2(x_1+x_2+x_3)=1$$

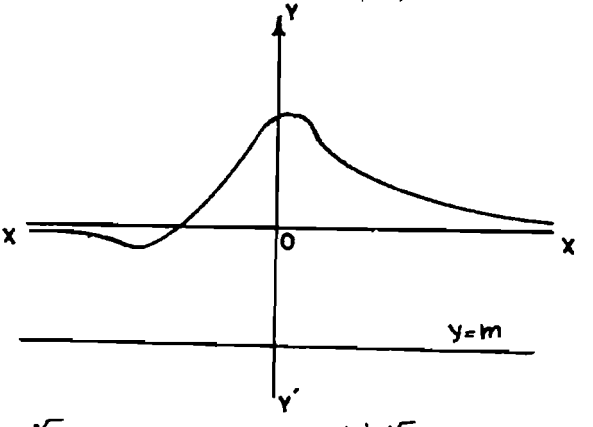
خامساـ ثابت کنید که نقاط ماکزیمم و مینیمم منحنی ونقطه‌ای که محور yها را قطع میکند بر یک استقامت است.

سادساـ ثابت کنید که سه نقطه بر منحنی وجود دارد که در آنها دو مماس مرسوم از یک نقطه بر منحنی برهم منطبقند ،

حل: اولاـ

$$y=\frac{-2x^2-4x+2}{x^2}$$

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$		$\frac{-1}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
y'		−	۰	+		+	۰	−	
y	۰	↘	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	↗	۰	↗	۱	↗ $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ↘	۰



k	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$			$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
بحث	ریشه ندارد		$x'<x''<0$	$x'<0<x''$		$x'>x''>0$	ریشه ندارد	
			$x'=\infty$ و $x''=\frac{-1}{2}$	$x'=0<x''$		$x'=x''=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$		
			$x'=x''=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$					

$$y=K \Longrightarrow K=\frac{2x+10}{2x^2+1} \Longrightarrow 2Kx^2-2x+2K-10=0$$

M_1M_2 وسط $X_M=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-b}{2a}=\frac{1}{2k} \Longrightarrow M\left(\frac{1}{2k}, K\right)$

$$x=\frac{1}{2K} \quad \text{و} \quad y=K \Longrightarrow x=\frac{1}{2y} \Longrightarrow 2xy=1 \Longrightarrow y=\frac{1}{2x}$$

$D(0,K)$ و $M_1(x_1,K)$ و $M_2(x_2,K)$ و $P(?,K)$

$(x_1+x_2)(0+Xp)=2(x_1x_2+0\times Xp)$

$\frac{-b}{a}Xp=\frac{2c}{a}\Longrightarrow Xp=\frac{-2c}{b}=\frac{-2(K-1)}{-2}$

$Xp=K-1$ و $Yp=K\Longrightarrow X=Y-1$ معادله مکان P

OM خط $m_1=\frac{Y_{M_1}-0}{X_{M_1}-0}=\frac{K}{x_1}$ و OM_2 خط $m_2=\frac{K}{x_2}$ تانا

$S=m_1+m_2=\frac{K}{x_1}+\frac{K}{x_2}=\frac{K(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\frac{-b}{c}$

$S=\frac{2k}{k-1}$ و $P=m_1m_2=\frac{k^2}{x_1x_2}=\frac{k^2a}{c}$

$P=\frac{k^2(2k)}{k-1}=\frac{2k^3}{k-1}$ و $X^2-SX+P=0$

$X^2-\frac{2k}{k-1}X+\frac{2k^3}{k-1}=0\Longrightarrow(k-1)X^2-2kX+2k^3=0$

$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{1}{k} \\ x_1x_2=\frac{k-1}{2k}\end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{2}(x_1+x_2)=\frac{1}{2k} \\ x_1x_2=\frac{k-1}{2k}\end{cases}$

از جمع دو رابطه $\Longrightarrow x_1x_1+\frac{1}{2}(x_1+x_2)=\frac{k}{2k}\Longrightarrow 2x_1x_2+x_1+x_2=1$

اگر طولهای دو نقطه را a و b فرض کنیم می‌توانیم بنویسیم.

$(a+b)(x_1+x_2)=2(ab+x_1x_2)$

$2x_1x_2-(a+b)(x_1+x_2)=-2ab$

با مقایسه این رابطه با رابطه $2x_1x_2+1(x_1+x_2)=1$

نتیجه میشود $a+b=-1$ و $2ab=-1$ یا $ab=-0/5$

$x^2-Sx+P=0\Longrightarrow x^2+x-0/5=0\Longrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

$A(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},0)$ و $B(\frac{-1-\sqrt{3}}{2},0)$

رابعاً

$$y=ax+b \Longrightarrow ax+b=\frac{2x+1}{2x^2+1}$$

$$2ax^3+2bx^2+(a-2)x+b-1=0$$

$$x_1+x_2+x_3=\frac{-b}{a} \quad , \quad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{a-2}{2a}$$

$$x_1+x_2+x_3=\frac{-b+1}{2a}$$

$$4x_1x_2x_3+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)-2(x_1+x_2+x_3)=1$$

$$\frac{-2b+2}{a}+\frac{a-2}{a}+\frac{2b}{a}=1 \Longrightarrow 1=1$$

خامساً

$$P(0,1), M\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) \text{ و}$$

$$N\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

معادله MN را بنویسید خواهید دید که مختصات P در آن صدق میکند.

سادساً نقطه‌ای از منحنی طول a را در نظر میگیریم $A\left(a, \frac{1+2a}{1+2a^2}\right)$ و از نقطه A مماس AB را بر منحنی رسم میکنیم و معادله زیر را تشکیل می‌دهیم

$$2(2a-1)x^2+3(a-1)x-2a-1=0$$

حال برای اینکه یکی از مماس‌ها بر مماس نقطه A منطبق شود باید $x=a$ در معادله فوق صدق کند

$$2(2a+1)a^2+3(a-1)a-2a-1=0 \Longrightarrow 4a^3+6a^2-6a-1=0$$

معادله فوق همان معادله مشتق ثانی میباشد که ریشه‌های نقاط عطف بودند و بر یک استقامت واقع بودند. پس سه نقطه روی منحنی وجود دارد که در آنها دو مماس مرسوم بر هم منطبق‌اند و این سه نقطه همان نقاط عطف منحنی هستند.

۳۰۱۳ تابع $y=\frac{(x+1)^2}{x}$ مفروض است از نقطه $M\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ چند مماس میتوان بر منحنی نمایش فوق رسم کرد وضع نقطه M را در صفحه دو محور تعیین کنید بطوری که بتوان دو مماس بر منحنی c رسم کرد.

ثانیاً- مطلوب است مکان هندسی نقطه M درصورتی که دو مماس مرسوم بر یکدیگر عمود باشند و این مکان را رسم کنید.

جواب: $\alpha^2+2\alpha+1-\alpha\beta=0$ و $\alpha^2+\beta^2-2\beta=0$

۲۰۱۳ - $y=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x}$ مفروض است برای اینکه چهار نقطه بطولهای a و b و c و d واقع بر منحنی بر یک استقامت باشند چه روابطی باید مابین اعداد فوق برقرار باشد.

جواب:
$$\frac{1-(a^2+ab+b^2)}{b(b^2-1)}=\frac{1-(a^2+ac+c^2)}{c(c^2-1)}=\frac{1-(a^2+ad+d^2)}{d(d^2-1)}$$

۲۰۱۴- تابع $y=\frac{x^2-2mx+1}{x^2+1}$ را درنظر میگیریم ومنحنی نمایش آن را (C) می‌نامیم.

به‌ازاء چه مقادیری از m منحنی (C) محور xها را قطع نمیکند و به‌ازای چه مقادیری بامحور xها دو نقطه تلاقی M' و M'' دارد؟ این دو نوع مقدار با دو عدد m_1 و m_2 ازهم مجزی میشوند که به‌ازاء آنها (C) با x'x مماس است (بترتیب درنقاط T_1 و T_2) - موقعی که دو نقطه تلاقی M' و M'' وجود دارد یک رابطه بین xهای این دو نقطه میتوان یافت که در آن m نباشد- (ازروی این رابطه بگوئید M' و M'' نسبت به T_1 و T_2 چه وضعی دارند و دوایر بقطر M'M'' چگونه‌اند.)

۲۰۱۵ - تعیین کنید از نقطه $A\begin{vmatrix}4\\2\end{vmatrix}$ چند قائم می‌توان بر منحنی $y=2\pm\sqrt{4x^2-8x}$ رسم کرد. معادله خط قائم ومختصات نقاطی ازمنحنی که قائم بر آن وارد میشود تعیین کنید:

معادله قائم $y=2$ و $B(0,2)$ و $A'(2,2)$

۲۰۱۶ - تابع $y=\frac{x^2}{x^2-3x+2}$ مفروض است اگر خط $y=m$ منحنی C را در نقاط M' و M'' قطع کند m را چنان تعیین کنید که زاویه M'OM'' قائم باشد.

جواب. $m=2$ و -1 و 0

۲۰۱۶- تابع $y=\frac{x^2}{x^2-3x+2}$ مفروض است خط $y=m$ منحنی را در نقاط M' و M'' قطع میکند اگر تصاویر این نقاط بر روی محور xx' به N' و N'' نمایش دهیم ثابت کنید دوایر بقطر $N'N''$ دارای محور اصلی مشترکی میباشند معادله این محور را بنویسید.

۲۰۱۷- تابع $y=x+a+\sqrt{x^2+bx+1}$ مفروض است a و b را چنان تعیین کنید که معادله مجانب به ازاء $x=-\infty$ بصورت $y=2x-3$ باشد.

۲۰۱۸- تابع $y=ax+b+\sqrt{x^2+1}$ مفروض است مقدار a و b را چنان تعیین کنید تا به ازاء $x=-\infty$ حد تابع برابر ۴ باشد.

مسائل امتحانات دبیرستانهای

مختلف کشور

امتحانات مسائل دبیرستانها

دبیرستان البرز ثلث اول

۲۰۱۹- تابع اسم $y=\sqrt{2(x^2-1)}$ را رسم کنید. بازاء چه مقادیری از m خط $y=mx+1$ بر منحنی مزبور مماس است.

۲۰۲۰- تابع $\frac{y(y-8)}{x(x-6)}=2$ در دستگاه مختصات xoy مفروض است :

اولاً- مختصات نقطه k مرکز تقارن منحنی این تابع را حساب کنید .

ثانیاً- اگر دستگاه مختصات xoy با انتقال موازی بدستگاه مختصات $x'ky'$ تبدیل شود معادله تابع مزبور را در این دستگاه بصورت $F(x' \text{ و } y')=0$ بنویسید.

ثالثاً- اگر دستگاه مختصات $x'ky'$ با انتقال دورانی بدستگاه مختصات XKY تبدیل شود بقسمی که محور طولهای آن از نقطه O بگذرد معادله تابع مزبور را در این دستگاه مختصات بصورت $F(X \text{ و } Y)$ بنویسید.

۲۰۲۱- تابع $y=\frac{x-1}{x^2+1}$ مفروض است ثابت کنید که سه نقطه عطف منحنی نمایش تابع مزبور بر روی یک خط مستقیم که معادله آنرا تعیین خواهید کرد قرار دارند.

دبیرستان خوارزمی ثلث اول

۲۰۲۲- مشتق تابع $y=\sin^2 x$ را از راه مستقیم حساب کنید.

۲۰۲۳- مشتق تابع $y=3\sqrt[3]{x}$ را محاسبه نمائید.

۲۰۲۴- یک تابع اولیه از تابع $y=\sin^2 x\cos^2 x+1$ را پیدا کنید.

۲۰۲۵- یک تابع اولیه از تابع $y=x(2x-3)^n$ را بدست آورید.

۲۰۲۶- تحقیق کنید تابع $y=\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^2$ و دومشتق اولیه آن در رابطه $y''y-y'^2=n\left(\frac{y}{x}\right)^2 \times f(x)$ صدق می‌کنند و $f(x)$ را حساب کنید.

۲۰۲۷- حد عبارت $\sqrt{x^2-1}-\sqrt[3]{x^3+x}$ را بازاء $x=+\infty$ پیدا کنید.

۲۰۲۸- با استفاده از قاعده هوپیتال مقدار عبارت :

$y=\frac{x^2+\sin^2 x}{x^2+(1-\cos x)^2}$ را بازاء $x=0$ پیدا کنید.

۲۰۲۹- بدون استفاده از قاعده هوپیتال مقدار عبارت:

$y=\frac{\sqrt{2-\sin x}-1}{3\cos x}$ را بازاء $x=\frac{\pi}{2}$ پیدا کنید.

۲۰۳۰- اولا- از نقطه A بطول $x=1$ واقع بر منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x-1}{x+1}$ یك مماس ویك قائم براین منحنی رسم ومعادلات آنرا بنویسید.

ثانیاً- از نقطه $B(2,2)$ قائم‌هایی بر منحنی (C) رسم می‌کنیم تعداد آنها را معلوم کنید ومختصات پای قائم را بنویسید.

دبیرستان شماره ۱ هدف ثلث اول

۲۰۳۱- جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع زیر را رسم کنید.

$$y=\left(\frac{x}{2-x}\right)^2$$

۲۰۳۲- مجانبهای تابع زیر را تعیین کنید.

$$y=\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{x+1}$$

۲۰۳۳- حد تابع زیر را بازاء $x=\pi$ بطریقه مستقیم وهوپیتال تعیین کنید. جواب $\frac{1}{2}$

$$y=\frac{x-\pi}{tg3x-tgx}$$

دبیرستان شماره ۳ هدف ثلث اول

۲۰۳۴- اولا مطلوبست رسم منحنی تابع $y=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x$

ثانیاً- مطلوبست تعیین معادله خطوطی را که از نقطه M بطول ۲ واقع بر منحنی باضریب زاویه m گذشته باشند در محل تلاقی این خط با منحنی بحث نموده و m را چنان تعیین کنید که یکی از دو نقطه تلاقی دیگر این خط با منحنی مبدأ مختصات باشد در این صورت مختصات

نقطه تقاطع دیگر را حساب کنید.

۲۰۳۵- اولا- مطلوبست تعیین معادله مماس وقائم برمنحنی

$y^2-2xy-3x^2-2y+6x+12=0$ درنقطه‌ای بطول سه واقع برمنحنی.

ثانیاً- مطلوبست تعیین معادله مماسهای وارد از مبدأ مختصات برمنحنی مزبور و تعیین مختصات نقاط تماس. ثالثاً- مطلوبست تعیین معادله خطوط مجانب منحنی مزبور.

۲۰۳۶- اولا برحسب مقادیر مختلف m ریشه‌های معادله

$$(5m-2)x^2-2(2m+1)x+4-m=0$$

را با اعداد ۲- و ۱+ مقایسه نمائید. ثانیاً- بازاء $m=\sqrt{3}+1$ مقادیر عددی ریشه‌ها را حساب کنید

دبیرستان شاهپور (شیراز) ثلث اول

۲۰۳۷- مطلوبست تعیین معادلات مماس وقائم برمنحنی $x^2+y^2-2xy-x=0$ در نقاطی ازمنحنی بطول ۱

۲۰۳۸- ثابت کنید هذلولی بمعادله $x^2-y^2=5$ وبیضی بمعادله $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$ یکدیگر را بزاویه قائمه قطع می‌کنند.

۲۰۳۹- تابع $y=\frac{-(x-1)^2}{x^2+x+a}+b$ مفروض است b و a را طوری تعیین کنید که یکی از ریشه‌های مشتق برابر (۱-) وماکزیمم و مینیمم تابع مختلف‌العلامه باشند.

۲۰۴۰- منحنی نمایش تابع $y=\frac{x^2+2x+1}{x^2+x+1}$ را رسم کنید.

۲۰۴۱- تابع $y=\frac{ax^2+bx+a}{ax+a+b}$ مفروض است b و a مختصات نقطه‌ای مانند M در صفحه محورهای مختصات می‌باشد مطلوبست مکان هندسی نقطه M بطریقیکه نمایش هندسی تابع یك خط راست باشد. ثانیاً- M درجه ناحیه ازصفحه دومحور واقع باشد تا تابع در یك جهت تغییر کند.

۲۰۴۲- تحقیق کنید بین y' و y'' مشتقات اول ودوم تابع $y=(x+\sqrt{x^2-1})^n$ رابطه زیر برقرار است.

$$(x^2-1)y''+xy'-n^2y=0$$

دبیرستانهای هدف ثلث دوم

۲۰۴۳- جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع زیر را رسم کنید.

$$(2x+y-4)(y-2x)=4$$

۲۰۴۴- تابع $y=\frac{(m^2-m)x^3+mx+1}{mx^2(x+2)^2}$ مفروض است

اولاً- مقدار m را چنان تعیین کنید تا محور طولها یکی از مجانبهای منحنی نمایش تغییرات تابع مفروض باشد. ثانیاً- تحقیق کنید نقطه $A(-1,0)$ مرکز تقارن منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x+1}{x^2(x+2)^2}$ می باشد.

۲۰۴۵- جدول و منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x+1}{x^2(x+2)^2}$ را رسم کنید.

۲۰۴۶- تابع اولیه تابع $y=\frac{x+1}{x^2(x+2)^2}$ را چنان تعیین کنید که بازاء $x=1$ برابر $\frac{5}{2}$ شود.

۲۰۴۷- اگر $Y=\frac{2x^2+4x-1}{2x^2+4x}$ یکی از توابع اولیه تابع $y=\frac{x+1}{x^2(x+2)^2}$ باشد مساحت سطح محصور بین منحنی (C) و محور طولها و خط $x=1$ را (آنقسمت که سمت راست خط $x=2$ قرار دارد) حساب کنید.

۲۰۴۸- معادله $x^2+(m-1)x-m=0$ مفروض است.

اولاً- در وجود و علامت و بزرگی نسبی ریشه‌های معادله مفروض بازاء مقادیر مختلف m بحث کنید. ثانیاً- در روی شکل نیز بحث بالا را با جزئیات نتیجه بگیرید.

دبیرستان خوارزمی ثلث دوم

۲۰۴۹- شکل منحنی نمایش تغییرات تابع:

$$y=\frac{(x+1)^2}{(m-1)x^2-2mx+m+1}$$

را معلوم کنید (رسم منحنی لازم نیست).

۲۰۵۰- منحنی‌های (C_1) و (C_2) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{(x+1)^2}{(m-1)x^2-2mx+m+1}$ را بازاء $m=1$ و $m=2$ بطور جداگانه رسم کنید.

۲۰۵۱- معادله $(\lambda-1)x^2-2(2\lambda+1)x+3\lambda-1=0$ (۱) مفروض است رابطه‌ای مستقل از λ بین ریشه‌های معادله (۱) بدست آورید.

۲۰۵۴ـ اگر M' و M'' نقاط تقاطع خط $y=\lambda$ با منحنی (C_2) و N' و N'' تصاویر این نقاط روی محور xها و A و B تصاویر نقاط اکسترموم (C_2) روی محور xها و ω وسط AB باشد از راه جبری ثابت کنید $\omega N' \times \omega N''$ مقدار ثابتی است و این مقدار ثابت را بدست آورید. (تعبیر هندسی)

۲۰۵۴- ریشه‌های معادله (۱) را به کمک منحنی (C_2) با اعداد -1 و $-\frac{5}{3}$ مقایسه کنید (مقایسه جبری لازم نیست).

دبیرستان سخن ثلث دوم

۲۰۵۴- تابع $y=x+a\sqrt{x^2+3}$ مفروض است. اولاـ مقدار a را آنطور تعیین کنید تا خط $y+x=0$ مجانب منحنی باشد. ثانیاـ جدول تغییرات و منحنی (C) نمایش تابع $y=x\pm 2\sqrt{x^2+3}$ را رسم کنید. ثالثاـ وضع ریشه‌های معادله درجه دوم زیر را نسبت باعداد او -1 از روی منحنی (C) مقایسه کنید و نتیجه را در جدولی بنویسید.

$$3x^2+2mx+12-m^2=0$$

۲۰۵۵ـ تابع $y=\frac{(x+1)^3}{x^2}$ مفروض است. اولاـ جدول تغییرات و منحنی (C') نمایش تابع را رسم کنید. ثانیاـ ثابت کنید باز ازاء مقادیر مثبت h از نقطه $p(0,h)$ همواره میتوان دو مماس بر منحنی (C') رسم کرد سپس در حالت مخصوص که $h=\frac{1}{3}$ اختیار می‌شود معادلات خطوط مماس و مختصات نقاط تماس را تعیین کنید. ثالثاـ باز ازاء جمیع مقادیر m در وجود علامت طولهای نقاط تلاقی منحنی تابع $y=\frac{m}{x}$ با منحنی تابع (C') بحث کنید درحالتیکه برهم مماس می‌شوند مختصات نقطه مماس و نقطه تلاقی آنها را بدست آورید.

دبیرستان پهلوی ملایر ثلث دوم

۲۰۵۶ـ دایره‌ای بقطر $AB=2R$ مفروض است نقطه‌ای مانند M روی آن اختیار کرده $(\widehat{MAB}=x)$ از نقطه A خط AC را موازی BM و از نقطه B خط BD را موازی AM رسم می‌کنیم تا مماس در نقطه M بر دایره را در C و D قطع کند. اولاـ ثابت کنید عبارت زیر مقداریست ثابت

$$\frac{MB}{MA}\times\frac{MD\times AC}{MC\times BD}$$

ثانیاـ مطلوبست اثبات رابطه زیر :

$$MB+MD+AC+MA+MC+BD=\frac{R\sqrt{2}}{\sin\frac{x}{2}\,\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}$$

ثالثاً ـ مطلوبست رسم جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{AC+BD}{CD}$ هرگاه x از صفر تا 2π تغییر کند ومساحت سطح حادث بین منحنی ومحور $x'x$ ومحور $y'y$ قسمتی را که بالای $x'x$ واقعست حساب کنید.

رابعاً ـ ترسیم جدول ومنحنی تغییرات تابع $y=\frac{MD\,MB\cdot BD}{AB^{-2}}$ هرگاه $\cos x=z$ فرض شود و z از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند مقصود تابع جبری y است صرفنظر از آنکه z مساوی $\cos z$ قوس است.

خامساً ـ خط $y=2$ منحنی فوق را قطع می‌کند مختصات نقاط تقاطع وهمچنین سطح محصور بین منحنی ومحور x وخط $y=2$ را حساب کنید.

۲۰۵۷ـ محورهای متعامد $x'ox$ و $y'oy$ ونقطه ثابت C بعرض R واقع بر $y'y$ مفروضند درزاویه xoy دایره‌ای رسم کنید که مرکزش C وشعاعش R باشد وازنقطه بطول x واقع برمحور ox مماس دیگری غیراز $x'x$ بردایره رسم میکنیم فرض می‌شود T نقطه تماس و P محل تلاقی MT با محور yها باشد دوشکل رسم کنید یکی درحالت $x>R$ ودیگری درحالت $x<R$ ودر دوحالت ثابت کنید که عرض نقطه P برابر است با $\frac{2Rx^2}{x^2-R^2}$

ثانیاً ـ سطح مثلث MOP وتغییرات آنرا وقتی نقطه M بر ox تغییر کند تعیین نمائید.

۲۰۵۸ـ مطلوبست تعیین ابعاد مستطیلی بسطح ماکزیمم که درمثلثی بقاعده a وارتفاع h محاط شده باشد.

۲۰۵۹ـ ازنقطه C واقع برمنصف الزاویه xoy قاطعی چنان رسم کنید که قطعه‌ای از آن واقع بین دوضلع زاویه قائمه برابر L باشد.

۲۰۶۰ـ مطلوبست تعیین کوچکترین مربعی که درمربع بضلع a محاط باشد.

دبیرستان آذر ـ ثلث اول

۲۰۶۱ـ ثابت کنید که ازنقطه $M(1,3)$ دوقائم برمنحنی نمایش:

$x^2-4y^2-2x-3=0$ میتوان رسم کرد طولهای نقاط پای قائم را بدست آورید و معادلات قائم را بنویسید.

۲۰۶۲ـ مقدار a را درتابع $y=ax+\sqrt{x^2-2x}$ چنان پیدا کنید که در ازاء $x=-\infty$ برابر ۱ شود. ثانیاً ـ مقدار تابع $y=x+\sqrt{x^2-2x+3}$ را در ازاء

$x=\pm\infty$ پیدا کنید.

۲۰۶۳- مکان هندسی نقطه $A(x=\frac{(1+t)^2}{1+t^2}$ و $y=\frac{3t^2+1}{t^2+1})$ را پیدا کنید.

۲۰۶۴- تعیین کنید که نقطه $O'(1,2)$ مرکز تقارن منحنی نمایش: $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ است.

۲۰۶۵- سوی تغیر و مختصات نقطه عطف منحنی $y=\frac{x+2}{(x+1)^2}$ را وقتیکه x از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند پیدا کنید و معادله خط مماس بر منحنی فوق را بطول $x=-4$ بنویسید و نقطه دیگر تلاقی این مماس را (در صورت وجود) با منحنی فوق بدست آورید.

دبیرستان البرز ثلث اول

۲۰۶۶- تابع ضمنی $F(x,y)=3x^2-4xy+y^2+6x-2y+1=0$ که در آن y تابع x متغیر است مفروض می‌باشد «الف»: مختصات مرکز تقارن منحنی نمایش این تابع را تعیین کنید. «ب»: معادلات مجانبهای این تابع را تعیین کنید.

راهنمایی- برای تعیین معادلات مجانب از دو تابع صریح $y=F(x)$ که از تابع ضمنی مزبور بدست می‌آید آنرا انتخاب کنید که علامت جلوی رادیکال مثبت باشد.

۲۰۶۷- معادله درجه سوم پارا متری $x^3-mx-20=0$ مفروض است «الف» بازاء مقادیر مختلف پارامتر m در وجود و علامت ریشه‌های معادله مزبور بحث کنید.

«ب»: بازاء $m=11$ ریشه‌های این معادله را حساب کنید.

راهنمایی- روش جبری از طریقه کاردان- روش هندسی از طریقه تبدیل به دو منحنی

۲۰۶۸- مقدار حقیقی تابع زیر را وقتیکه $x\to\infty$ محاسبه کنید:

$$y=\sqrt[12]{x}\times\frac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt[6]{x+1}-\sqrt[6]{x}}$$

دبیرستان اندیشه ثلث اول

۲۰۶۹- در تابع $y=\frac{(a-1)x+8}{x^2}+\frac{b}{2(x-1)^2}$ مقادیر a و b را چنان پیدا کنید که ماکزیمم یا مینیمم آن بر نقطه (۱و۲) منطبق شود

ثانیاً- منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{8}{x^2}-\frac{1}{(x-1)^2}$ را رسم کنید. ثانیاً- جهت

تقعر منحنی تابعی را که رسم کرده‌اید پیدا کنید. ثالثاً ـ معادله $\frac{8}{x^2}-\frac{1}{(x-1)^2}=1$ را حل کنید :

۲۰۷۰ـ در وجود و علامت طول‌های نقاط تلاقی دو تابع زیر بحث کنید و در حالتی که برهم مماس‌اند مختصات نقاط مشترك را پیدا کنید.

$$\begin{cases} y=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+\frac{5}{2} & (C) \\ y=-\frac{3}{2}x^2-3x+m & (C') \end{cases}$$

ثانیاً ـ باذاء $m=\frac{1}{2}$ منحنی نمایش دو تابع را رسم کنید و معادله مماس بر منحنی (C) را در نقطه‌ای که مرکز تقارن آنست پیدا کنید.

دبیرستان خوارزمی شماره ۱۰ ثلث اول

۲۰۷۱ـ تابع $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ مفروض است مقادیر a و b و c و d را چنان پیدا کنید که نقطه $I(0,2)$ نقطه عطف منحنی نمایش آن باشد و مماس در نقطه بطول ۱ از منحنی بر خط $x-2y=0$ عمود شود و $f(x)$ بر $x-2$ قابل قسمت باشد.

۲۰۷۲ـ منحنی نمایش تغییرات دو تابع زیر را رسم کنید.

$$(C) \quad y=x^2-5x+2$$
$$(C') \quad y=3x^2-7x+2$$

و سپس مختصات نقاط تلاقی آنها را پیدا کنید.

۲۰۷۳ـ اگر $A(1,-2)$ و $B(2,0)$ و $C(0,2)$ باشد مختصات رأس چهارم D از متوازی‌الاضلاع ADBC را بدست آورید.

۲۰۷۴ـ اولاً ـ در وجود و علامت طول‌های نقاط تلاقی خط $2x+y=m$ با منحنی $y=x^3-5x+2$ بحث کنید و در حالتی که خط بر منحنی مماس است مختصات نقطه تماس و نقطه تلاقی را بدست آورید. ثانیاً ـ m را چنان پیدا کنید که خط $2x+y=m$ بر منحنی $y=3x^2-7x+2$ مماس باشد درحالتی که خط منحنی را قطع می‌کند ثابت کنید مکان نقطه تلاقی روی خط $x=\frac{5}{6}$ قرار دارد آیا تمام خط $x=\frac{5}{6}$ جزو مکان است اگر جواب این سئوال منفی است حدّ مکان را معین کنید.

۲۰۷۵ـ جهت تقعر منحنی نمایش تابع $y=x^3-5x+2$ را بوسیله یك جدول نشان دهید.

دبیرستان خوارزمی شماره ۲ ثلث اول

۲۰۷۶ـ m را چنان تعیین کنید تا یکی از ریشه‌های معادله :
$x^2-2(m+1)x+7m-3=0$ بین اعداد ۲ − و ۱ قرار گیرد.

۲۰۷۷ـ منحنی (C) بمعادله $y^2-2(x+1)y+7x-3=0$ مفروض است مختصات مرکز تقارن آن‌را تعیین کنید.

۲۰۷۸ـ خط $y=3x+a$ منحنی (C) را در ازاء بعضی مقادیر a در دو نقطه A و B قطع می‌کند مطلوبست تعیین مکان‌هندسی وسط قطعه خط AB وقتی a تغییر کند.

۲۰۷۹ـ درنقطه‌ای بعرض ۲ واقع برمنحنی (C) قائمی بر آن رسم‌شده‌است معادله قائم را بنویسید.

۲۰۸۰ـ جهت تغییرات تابع $y=x+1+\sqrt{x^2-5x+4}$ را تعیین کنید.

۲۰۸۱ـ سوی‌تقعر و تحدب تابع $y=x+1-\sqrt{x^2-5x+4}$ را معلوم کنید.

۲۰۸۲ـ در ازاء $x=\pm\infty$ مقدار تابع $y=x+1\pm\sqrt{x^2-5x+4}$ را حساب کنید .

۲۰۸۳ـ مقدار حقیقی کسر

$$y=\frac{\sin^2(2x-\frac{\pi}{4})-\sin^2(x-\frac{\pi}{12})}{tg^2(3x-\frac{\pi}{4})-cotg^2(x-\frac{5\pi}{12})}$$

را در ازاء $x=\frac{\pi}{6}$ حساب کنید.

دبیرستان مرجان ثلث اول

۲۰۸۴ـ اولا منحنی نمایش تغییرات توابع زیر را رسم کنید :

(c) $y=8x^5-10x^3+5x$

(c') $y=3x^3$

(d) $y=3x$

ثانیاً ـ مختصات نقاط مشترک (c) و (c') و (d) را بدست آورید. ثالثاً ـ توضیح دهید که چرا مراکز تقارن دو منحنی (c) و (c') برهم منطبق‌اند.

۲۰۸۵ـ ازنقطه A بطول ۱ واقع برمنحنی $y=3x^3$ خطی با ضریب زاویه m گذرانده‌ایم. اولاً ـ m را چنان پیدا کنید که خط برمنحنی مماس باشد. ثانیاً ـ درحالتی که خط منحنی را در دو نقطه دیگر B و C قطع می‌کند ثابت کنید مکان M وسط پاره خط BC نیم‌خطی است ازخط $2x+1=0$ مبدأ این نیم خط را معین کنید.

۲۰۸۶ـ معادلات خطوط مماس را پیدا کنید که از مبدأ مختصات بر منحنی نمایش تابع

$y=8x^5-10x^3+5x$ رسم شده‌اند.

دبیرستان نظام وفا اهواز ثلث اول

۲۰۸۷- اگر $a>b>c$ باشد از دوراه ثابت کنید معادله زیر همیشه دارای دو ریشه حقیقی است.

$$(x-a)^2(1+a^2)-(x-b)(x-c)=0$$

۲۰۸۸- معادله زیر مفروض است:

$$(m^2-m-6)x^2-2(m^2-1)x+m^2+m=0$$

اولا- بازاء چه مقادیر m طرف اول معادله فوق بازاء جمیع مقادیر x منفی است. ثانیاً- بازاء چه مقادیر m اعداد صفر و یك بین ریشه‌های این معادله واقعند. ثالثاً- بازاء چه مقادیر m فقط یك ریشه معادله بین صفر و یك واقع است.

۲۰۸۹- عبارتهای زیر را حساب کنید:

$$\frac{\sqrt{x+7}-\sqrt{5-x^2}}{x^2-\sqrt{2x^5-3}}$$ و بازاء $x=1$

$$\sqrt{x^2+5x^2}-\sqrt{x^2+8x}$$ بازاء $x=\pm\infty$

$$\frac{x\sin x}{1-\cos x}$$ و بازاء $x=0$

$$x+1+\sqrt{x^2+x-2}$$ $x=+\infty$

۲۰۹۰- تابع $y=\frac{ax^2+b}{x^2-2x+b}$ مفروض است. اولا- a و b را طوری بگیرید که نقطه $M(-2 \text{ و } \frac{1}{2})$ نقطه می‌نیمم منحنی این تابع باشد.

۲۰۹۱- منحنی تابع $y=\frac{x^2+2}{x^2-2x+2}$ را رسم کنید. ثالثاً- خط $y=m$ منحنی حرسوم را در نقاط M و N قطع می‌کند m را طوری بگیرید که $MN=1$ باشد.

۲۰۹۲- تابع $y=x^2+2mx+m^2-m$ مفروض است. اولا- m را طوری بگیرید که جواب مشتق جواب تابع نیز باشد.

ثانیاً- منحنی توابع زیر را رسم کنید $y=x^2$ و $y=(x-1)^2(x+2)$

دبیرستان اندیشه ثلث دوم

۲۰۹۳- a را چنان پیدا کنید که منحنی $y=\frac{(x+a)^2}{x^2+1}$ مجانب خود را در نقطه‌ای بطول

۱ — قطع کند. ثانیاً ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{(x-1)^3}{x^2+1}$ را رسم کنید و مختصات محل تلاقی آنرا با مجانبش پیدا کنید. ثانیاً ـ معادله مماس برمنحنی را در نقطه تلاقی آن با محور عرضها بنویسید ثالثاً ـ ببینید آیا این منحنی مرکز تقارن دارد یا نه؟

۲۰۹۴ـ اولاً ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ را رسم کنید. ثانیاً ـ سطح محصور بین منحنی و محور $x'x$ را درفاصله $x=2$ و $x=3$ بدست آورید. ثالثاً ـ حجمی که از دوران همین سطح دور محور xx' بدست می‌آید محاسبه کنید.

۲۰۹۵ـ اولا علامت عبارت $y=\sqrt{(x+1)^2}-2\sqrt{x^2}$ را وقتی که x تمام مقادیر ممکنه را اختیار کند بدست آورید. ثانیاً ـ نمایش تغییرات تابع : $y=\sqrt{(x+2)^2}-2\sqrt{x^2}$ را رسم کنید.

دبیرستان گورش ثلث دوم

۲۰۹۶ـ تابع $y=\frac{2x^2+bx+c}{x^2+b'x+c'}$ مفروض است . ضرایب b و c و b' و c' را چنان معلوم کنید که منحنی تابع برابر ۱ روی محورها بوده و خط $x=1$ یکی از مجانبهای منحنی تابع باشد و منحنی مجانب موازی محور طولها را در نقطه‌ای بطول $\frac{3}{4}$ قطع کند

۲۰۹۷ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{2x^2-4x+3}{x^2-4x+3}$ را رسم کنید. ثانیاً ـ بر حسب m در وجود و علامت ریشه‌های معادله :

$(m-2)x^2+4(1-m)x+3m-3=0$ به کمک رسم منحنی بحث کنید و ریشه‌های معادله را با اعداد ۱ — و ۲ مقایسه کنید.

۲۰۹۸ـ الف ثابت کنید منحنی نمایش تابع :

$y=(m-1)x^3+(5-4m)x-2$ بازاء جمیع مقادیر m از سه نقطه ثابت می گذرد مختصات این سه نقطه را محاسبه کنید. ب ـ برحسب m در وجود و تعداد نقاط تقاطع $y=x^3+6x^2+9x+m$ با محور xها برحسب m بحث کنید و درحالیکه منحنی تابع بر محور طولها مماس می‌شود مختصات نقاط تماس و تقاطع با محور طولها را بدست آورید.

۲۰۹۹ـ منحنی تابع $(x-1)y^2=2x^3$ را رسم کنید.

دبیرستان خوارزمی شماره ۱ ثلث دوم

۲۱۰۰- رابطه‌ای بین a و b چنان پیدا کنید که تابع $y=\frac{(x+a)^3}{(x+b)^2}$ دارای مجانبی بمعادله $y=x-5$ باشد.

۲۱۰۱- منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ را رسم کنید و مختصات محل تلاقی منحنی را با مجانب مایل آن را پیدا کنید. ثانیاً- سطح محصور بین منحنی و محور عرضها مجانب مایل را پیدا کنید. ثالثاً- معادله قائم منحنی را در نقطه تلاقی آن با محور عرضها بنویسید.

۲۱۰۲- در تابع $y=(x-a)\sqrt{\frac{x}{2a-x}}$ مقدار a را چنان پیدا کنید که نقطه تلاقی آن با خط $y=x-1$ روی محور طولها واقع باشد.

۲۱۰۳- منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\pm(x-1)\sqrt{\frac{x}{2-x}}$ را رسم کنید.

۲۱۰۴- علامت عبارت $y=x-1+\sqrt{x^2}$ را با ازاء مقادیر مختلف x بدست آورید. ثانیاً- نمایش تغییرات تابع y را روی محورهای مختصات رسم کنید.

گروه فرهنگی هدف ثلث دوم

تابع $y=\frac{ax^2+bx+b}{(x+1)^4}$ مفروض است

۲۱۰۵- اولا مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که منحنی نمایش تغییرات تابع مفروض بر محور طولها در نقطه‌ای بطول $(-\frac{1}{2})$ مماس شود.

۲۱۰۶- منحنی (c) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{(2x+1)^2}{(x+1)^4}$ را رسم کنید. ثانیاً- بوسیله محاسبه ثابت کنید از مبدأ مختصات می‌توان سه مماس بر منحنی (c) رسم نمود که بر هم منطبق می‌شوند مختصات نقاط تماس و معادله خط مماس مشترک را تعیین کنید. ثالثاً- مساحت سطح محصور بین منحنی (c) و دو محور مختصات را (آن قسمت که در ربع اول قرار گرفته) محاسبه کنید. خامساً- در تعداد و علامت ریشه‌های معادله $m(x+1)^4-(2x+1)^2=0$ بحث کنید و نتیجه را در جدولی ثبت نمائید و درستی نتیجه را روی منحنی (c) تحقیق کنید.

۲۱۰۷- تابع $y=ax+b+\sqrt{x^2-1}$ مفروض است. اولا- مقادیر a و b را چنان تعیین کنید تا خط $y=1$ در ربع اول بامنحنی نمایش تغییرات تابع مفروض مجانب شود. ثانیاً- تحقیق کنید نقطه $\omega(1,0)$ مرکز تقارن منحنی (c) نمایش تغییرات تابع $y=1-x\pm\sqrt{x^2-1}$ می‌باشد. ثالثاً- منحنی (c) را رسم کنید.

دبیرستان بابکان ثلث اول

۲۱۰۸- مختصات نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع $y = \frac{۴x^۲-۴x-۲}{۲x+۱}$ را بدست آورده بدون جدول تغییرات نقطه ماکزیمم و می‌نیمم را تشخیص دهید (بکمک مشتق دوم) .

۲۱۰۹- مختصات مرکز تقارن منحنی تابع $y = \frac{۴x^۲-۴x-۲}{۲x+۱}$ را معین نموده و تحقیق کنید مرکز تقارن منحنی محل تلاقی خطوط مجانب منحنی تابع است.

۲۱۱۰- ثابت کنید خطوطی که از مبدأ مختصات می‌گذرد همواره منحنی $y = \frac{۴x^۲-۴x-۲}{۲x+۱}$ را در دو نقطه قطع می‌کند و معادله مکان هندسی وسط دو نقطه تقاطع را بدست آورید.

۲۱۱۱- ریشه‌های معادله درجه دوم $۴x^۲-۲(m+۲)x-m-۲=۰$ را با اعداد ۲- و ۱ مقایسه کنید .

۲۱۱۲- معادلات خطوط مجانب منحنی توابع $y=۱-x\pm\sqrt{x^۲-۴x+۳}$ را بدست آورید .

۲۱۱۳- از عبارتهای زیر تابع اولیه بگیرید .

$$x\sqrt{x^۲-۱} \quad و \quad \frac{۴x^۲-۴x-۱}{(۲x-۱)^۲}$$

$$\frac{\sqrt{۲-۵x-x^۲}}{x^۲\sqrt{۲-۵x}} \quad و \quad x^۲\sqrt{x-۱}$$

دبیرستان‌ها خوارزمی ثلث اول

۲۱۱۴- تابع $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ مفروض است. اولاً- مشتقات $f'(x)$ و $f''(x)$ را بدون باز کردن پرانتزها حساب کنید. ثانیاً- بدون تفکیک Δ ثابت کنید معادله $f'(x)=۰$ دارای دو جواب است و حدود ریشه‌ها را معلوم کنید. ثالثاً- مقدار توابع $F(x)$ و $\varphi(x)$ را برحسب $f(x)$ و $f'(x)$ و $f''(x)$ پیدا کنید.

$$F(x)=\frac{۱}{x-a}+\frac{۱}{x-b}+\frac{۱}{x-c}$$

$$\varphi(x)=\frac{۱}{(x-a)(x-b)}+\frac{۱}{(x-b)(x-c)}+\frac{۱}{(x-c)(x-a)}$$

۲۱۱۵- تابع $y=\frac{x+۱}{x-۲}$ مفروض است. اولاً- مرکز تقارن این منحنی را پیدا کنید.

ثانیاً ـ از نقطهٔ $P(-\frac{3}{2}$ و $\frac{5}{2})$ قائم بر منحنی تابع y رسم می‌کنیم معادلات این قائم‌ها و مختصات پای آنها را پیدا کنید.

۲۱۱۶ـ تابع اولیه‌ای از تابع

$$y=\frac{x^5}{\sqrt{x^2-1}}$$

را پیدا کنید که باازاء $x=2$ برابر صفر گردد

دبیرستان نظام وفا اهواز ثلث اول

۲۱۱۷ـ عبارتهای زیر را حساب کنید :

$$y=tg x\ (1-tg\frac{x}{2})\quad \text{باازاء}\quad x=\frac{\pi}{2}$$

$$y=\sqrt{x^3+3x^2-5}-\sqrt{x^3-4x^2+11}\quad \text{باازاء}\quad x=+\infty$$

۲۱۱۸ـ تابع زیر را حساب کنید $y=ax^3+bx^2+cx+d$ ضرایب را طوری تعیین کنید که منحنی این تابع در نقطه A به طول (۱ ـ) وروی محور طولها ماکزیمم بوده و ضریب زاویه مماس بر منحنی در نقطه‌ای به طول ۲ مساوی ۳ باشد وطول نقطه عطف آن $\frac{1}{3}$ گردد.

ثانیاً ـ مطلوبست رسم منحنی تابع $y=(x+1)^2(x-3)$ و تعیین مختصات مرکز تقارن آن.

۲۱۱۹ـ مشتق تابع ضمنی زیر را پیدا کنید :

$$y^2\cdot tg^3x+y\cdot\cos x+8=0$$

۲۱۲۰ـ مشتق تابع زیر را پیدا کنید:

$$y=\cos^2\sqrt{x+1}+tg^2\frac{1}{x}$$

۲۱۲۱ـ معادله زیر مفروض است $2x^2+(m-3)x+3-m=0$

باازاء چه مقدار m هر دو ریشه این معادله بین ۱ و ۱ ـ قرار دارد.

۲۱۲۲ ـ معادله زیر مفروض است $(m-2)x^2+6x+m+5=0$

m را طوری پیدا کنید که ریشه کوچکتر این معادله از صفر و یك کوچکتر و ریشه بزرگتر معادله از صفر و یك بزرگتر باشد.

دبیرستان وفا (اهواز) ثلث اول

۲۱۲۳ـ کسر زیر را باازاء $x=1$ و $x=+\infty$ حساب کنید.

$$\frac{\sqrt{x+8}-\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt[4]{5x-4}}{x^2+\sqrt{3x+1}-\sqrt[3]{5x+22}}$$

۲۱۲۴- تابع $y=-x^3+4x^2-4x+m^2+2m-2$ مفروض‌است m را طوری پیدا کنید که‌عرض نقطه‌ماکزیمم‌منحنی تابع‌صفر باشد .

۲۱۲۵- مطلوبست رسم منحنی تابع $y=-x^3+4x^2-4x$ و تعیین مختصات نقطه عطف آن.

۲۱۲۶ - تابع $y=x\cdot\sin ax$ مفروض است a را طوری‌بگیرید که رابطه‌زیر محقق باشد $y+y''=2\cos x$

۲۱۲۷- معادله زیر مفروض است $x^2-(m+2)x+m^2-4=0$

بدون تشکیل $\frac{c}{a}$ مقدار m را طوری‌بگیرید که معادله دارای دوریشه مختلف‌العلامه یا دو ریشه متحدالعلامه باشد. ثانیاً m را طوری بگیرید که‌یکی‌ازریشه‌های معادله بین‌صفر ویك‌باشد

۲۱۲۸- m را طوری بگیرید که‌عدد m بین ریشه‌ها باشد.

۲۱۲۹- اولا- منحنی تغییرات تابع $y=(x^2-1)^2$ را رسم‌کنید. ثانیاً- اگر $x=\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}$ باشد مشتق y را نسبت به‌متغیر t بدست‌آورید.

۲۱۳۰- از تابع زیر مشتق بگیرید درصورتی‌که y تابع x باشد

$$y^5x^2+y^2x^5+x-y+12=0$$

دبیرستان ادیب ثلث‌اول

۲۱۳۱- تابع $y=\frac{ax^2+bx-5}{x+c}$ مفروض است ضرائب a و b و c را چنان تعیین کنید تا خطوط $x=4$ و $y=2x+7$ مجانبهای منحنی باشند.

۲۱۳۲- مختصات مرکز تقارن منحنی بمعادله $xy-4y-2x^2+x+5=0$ را تعیین کنید .

۲۱۳۳- از نقطه $M(\frac{1}{2}$ و $-1)$ دوممماس برمنحنی $y=\frac{x^2+x-2}{x+1}$ میتوان رسم کرد معادلات خطوط مماس ومختصات نقاط تماس‌را تعیین کنید .

۲۱۳۴ - جهت تحدب تقعر ومختصات نقطه عطف منحنی بمعادله $y=\frac{x^2+x}{(x-1)^2}$ راتعیین کنید.

۲۱۳۵ - معادلات خطوط مجانب منحنی بمعادله $y=x\pm\sqrt{4x^2-x-2}$ را تعیین کنید.

۲۱۳۶- خط (D) بمعادله $y=2mx+m$ مفروض است. اولا- ثابت کنید که

۲۱۵۴- تابع $y=x^3+ax^2+bx+c$ مفروض است a و b و c را چنان معین کنید که نقطه A بطول ۱ روی محور xها ماکزیمم منحنی باشد ومحورها را درنقطه B بعرض ۲ – قطع کند آن گاه مختصات نقطه عطف این منحنی را بدست آورده وجهت تقعر آنرا در ازاء مقادیر x پیدا کنید ومعادله مماس برمنحنی را درنقطه عطف بدست آورید.

۲۱۵۵- تابع $y=(x-2)\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$ مفروض است، مجانبهای آنرا بدست آورید.

۲۱۵۶- معادلات مجانبهای $y=\frac{x^3-2x^2+4x}{x^2-5x+6}$ را بدست آورید.

۲۱۵۷- مقدار حقیقی تابع $y=2x+\sqrt{x^2-3x}$ را بازاء $x=\pm\infty$ بدست آورید.

دبیرستان علوی ثلث اول

۲۱۵۸- مکان هندسی نقطه M را طوری تعیین کنید بطوریکه $A(1,2)$ و $B(7,0)$ وزاویه $\widehat{AMB}=45^\circ$ باشد.

۲۱۵۹- معادله قائم بر منحنی بطول α را حساب کنید:

$$y=-2+\sqrt{-x^2-2x+8}$$

ثانیاً- ثابت کنید این معادله از نقطه ثابتی بازاء جمیع مقادیر α میگذرد مختصات آن نقطه را حساب کنید.

۲۱۶۰- مجانب منحنی زیر را تعیین کنید.

$$y=\sqrt{x-2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2})$$

۲۱۶۱- مکان هندسی نقطه M را بدست آورید.

$$M(\sin\alpha\cos\alpha \text{ و } \frac{1+2tg\alpha-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha})$$

دبیرستان قناد (بابل) ثلث اول

۲۱۶۲- درتابع $y=ax^3+bx^2+cx+d$ مطلوبست تعیین مقادیر a و b و c و d بنحوی که تابع بازاء $(x=0)$ ماکزیمم برابر ۴ وبازاء $x=2$ می‌نیمم برابر صفر داشته باشد. ثانیاً- تعیین کنید تابع $y=x^3-3x^2+4$ درچه فاصله محدب یا مقعر است و نقطه عطف منحنی را تعیین کنید وتحقیق کنید که نقطه عطف مرکز تقارن منحنی می‌باشد. ثالثاً- منحنی مفروض را رسم کنید.

۲۱۶۳- اولا مقدار حقیقی تابع زیر را بازاء $x=\pm\infty$ تعیین کنید:

$y=3x+1\pm\sqrt{9x^2+2x+5}$ ثانیاً- مجانب منحنی مفروض را تعیین کنید.

۲۱۶۴ـ تابع $y=\frac{x^2-2mx+1}{x^2+1}$ را در نظر می‌گیریم و منحنی نمایش تغییرات آنرا (c) می‌نامیم. اولاـ بازاء جمیع مقادیر m منحنی C از نقطه ثابت A میگذرد که مختصات آنرا حساب خواهید کرد و ثابت کنید که m هرچه باشد A مرکز تقارن منحنی (C) می‌باشد. ثانیاـ مطلوبست مقادیری از x که بازاء آن y ماکزیمم یا می‌نیمم می‌شود و ماکزیمم و می‌نیمم تابع را نیز حساب کنید و بازاء مقادیر مختلف m تعیین کنید مکان هندسی نقاطی از منحنی (C) را که در آنجا y ماکزیمم یا می‌نیمم است. ثالثاـ منحنی مفروض را بازاء $m=1$ رسم کنید. رابعاـ بازاء چه مقادیری از a منحنی مفروض خط $y=a$ را قطع می‌کند.

خامساـ مکان ماکزیمم و می‌نیمم تابع $y=\frac{x^2-2x+m^2}{x^2+m}$ را تعیین کنید.

دبیرستان گلشن راز (شبستر) ثلث اول

۲۱۶۵ـ تابع $y=\frac{ax^2-4x+b}{x+a}$ مفروض است. اولاـ a و b را طوری تعیین کنید که منحنی نمایش تابع فوق از مبدأ مختصات گذشته و تفاضل بین مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم تابع برابر $4\sqrt{5}$ باشد.

۲۱۶۶ـ تحقیق کنید که منحنی بمعادله $y=\frac{x^2-4x}{x+1}$ دارای مرکز تقارنی است که مختصات آنرا تعیین خواهید کرد.

۲۱۶۷ـ جدول تغییرات و منحنی (C) نمایش تابع $y=\frac{x^2-4x}{x+1}$ را رسم کنید.

۲۱۶۸ـ تحقیق کنید که از نقطه $M(-5,0)$ دو مماس بر منحنی (C) می‌توان رسم کرد معادلات مماسها را بنویسید و تانژانت زاویه بین دو مماس را محاسبه کنید.

۲۱۶۹ـ اگر خط $y=m$ منحنی (C) را در دو نقطه A و B قطع کند مبادله مکان هندسی نقطه P وسط AB چیست.

مقدار تابع $y=\frac{tg\,x-\sin x\cos x}{1-\cos x}$ را بازاء $x=0$ بدست آورید.

دبیرستان هدایت (سنندج) ثلث اول

۲۱۷۰ـ اولا منحنی نمایش تابع $y=\frac{(x-1)^2}{x^2}$ را رسم نمائید. ثانیاـ قوسهای محدب و مقعر منحنی را نسبت بجهت مثبت محور yها بدست آورید و نقطه عطف آنرا تعیین کنید. ثالثاـ معادلات مماسهای بر این منحنی را که از نقطه‌ای بعرض $-\frac{3}{4}$ واقع روی محور yها میگذرد بنویسید.

خط D از نقطه ثابت A میگذرد ومختصات نقطه A را تعیین کنید. ثانیاً ـ معادله درجه دوم ذیل مفروض است.

$$(1-3m)x^2+(1-3m)x-m=0$$

درحالیکه معادله دارای دو ریشه حقیقی x' و x'' می‌باشد خط (D) نقاط P و Q را بقسمی انتخاب می‌کنیم که طولهای آنها بترتیب x' و x'' ریشه‌های معادله (۱) باشد ثابت کنید که نقاط P و Q نسبت به A قرینه یکدیگرند و نیز ثابت کنید مکان هندسی این نقاط بصورت $y=\frac{x^2+x}{2x+1}$ است.

دبیرستان البرز ثلث اول

۲۱۳۷ـ مطلوبست رسم جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x\sqrt{x^2-1}}{x+2}$

۲۱۳۸ـ تابع $y=\sqrt{x^2+1}$ ونقطه L بعرض λ روی محور عرضها فرض میشود حدود λ را طوری تعیین کنید که بتوان از نقطه L دو قائم بر منحنی تابع مزبور رسم نمود

۲۱۳۹ـ مطلوبست تعیین تابع ضمنی $F(x \text{ و } y)=0$ درصورتیکه y' و y'' مشتقات مرتبه اول ودوم تابع مزبور عکس یکدیگر بوده وثانیاً منحنی نمایش تغییرات تابع مزبور در مبدأ مختصات برمحور طولها مماس باشد.

دبیرستان ایرانشهر بزرگ ثلث اول

۲۱۴۰ ـ الف: مکان هندسی نقطه $M(\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha \text{ و } \frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha})$ را تعیین کرده مرکز تقارن آنرا بدست آورید.

۲۱۴۱ـ تحقیق کنید بین y' و y'' مشتق اول ودوم تابع $y=(x+\sqrt{x^2-1})^m$ رابطه زیر برقرار است

$$(x^2-1)y''+xy'-m^2y=0$$

۲۱۴۲ـ مجموع زیر را بدست آورید:

$$1+x+2^2x^2+3^2x^3+\dots+n^2x^n+\dots$$

۲۱۴۳ ـ حد تابع $y=\frac{(\cos x-1)\operatorname{tg}x\sin x}{x^3}$ را بازاء $x=0$ بدست آورید.

دبیرستان ششم بهمن خوی ثلث اول

۲۱۴۴ـ حد عبارت زیر را از راه مستقیم و ازروش هوپیتال بازاء $x=0$ پیدا کنید.

$$\frac{\sin x\cos x-\sin x-1+\cos x}{2\sin^2 x\cos x+\sin 2x}$$

۲۱۴۵ـ حد عبارت زیر را بازاء $x=-\infty$ پیدا کنید.

$$\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x^2+1}$$

۲۱۴۶ـ حد عبارت زیررا بازاء $x=\frac{\pi}{3}$ پیدا کنید :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

۲۱۴۷ـ تابع $y=\frac{ax^2+bx+c}{x+2}$ مفروض است. اولاً. a و b و c را چنان تعیین کنید که منحنی فوق محورعرضها رادرنقطه‌ای بعرض $-\frac{1}{2}$ ونیمساز ربع دومرا درنقطه‌ای بعرض ۱ — قطع کرده درنقطه اخیر min باشد.

۲۱۴۸ـ مطلوبست رسم جدول ومنحنی تابع $y=\frac{x^2-2x-1}{x+2}$. ثانیاً. اگرازنقطه A(۷ — و۴) دومماس برمنحنی رسم کنیم معادلات آنهارا نوشته مختصات B و D نقاط تماس را محاسبه کنید. ثالثاً ـ معادلات قائم‌های برمنحنی C رادرنقاط B و D بنویسید ومختصات محل تلاقی آنها را پیدا کنید. رابعاً ـ مکان هندسی نقاطی ازصفحه محورهای مختصات رسم کرده وتحقیق کنید که این مکان دایره است که مرکزش محل تلاقی مجانبهای منحنی C وشعاعش ۶ است. خامساً ـ تحقیق کنید چهار نقطه ازمکان فوق وجوددارد که ازآنها فقط یك مماس می‌توان بر منحنی رسم کرد که نقطه تماس دربی‌نهایت دورنباشد. مختصات چهارنقطه را پیدا کنید.

دبیرستان علم (بیرجند) ثلث اول

۲۱۴۹ـ ریشه‌های معادله $mx^2-mx=3x-2m$ را بااعداد ۱و۲ — بازاء مقادیر مختلف m مقایسه کنید.

۲۱۵۰ـ تابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ که درآن f(x) و g(x) بصورت کثیرالجمله‌ای از x هستند مفروض است مطلوبست مقدارحقیقی y بازاء $x=\infty$ با درنظر گرفتن درجه صورت ومخرج درحالات مختلف.

۲۱۵۱ـ معادله $(y-2)^2=4(y+x-1)$ مفروض است تحقیق کنید منحنی نمایش تغییرات مربوط به آن دارای محور تقارنی بموازات محور xهااست معادله آنرا بنویسید.

۲۱۵۲ـ مطلوبست مکان هندسی نقاطی که مجموع فواصل آنها ازدو نقطه M(۳و۴) و M'(۴ و ۳ —) مساوی ۲۰ باشد.

۲۱۵۳ـ نقطه A(۱و۱) و منحنی $x^2+y^2+4y+3=0$ مفروضند ازنقطه A چندمماس براین منحنی می‌توان رسم کرد معادلات مماسهارا بنویسید .

۲۱۷۱ـ تابع $y=\frac{x^2-2ax+1}{x-2a}$ مفروض است. اولاـ پارامتر a را چنان تعیین کنید که فقط یکی از دومقدار ماکزیمم و یا می‌نیمم تابع برابر ۲ شود در این حالت دیگری را نیز محاسبه کنید، دراین محاسبه خواهید دید برای a دومقدار بدست می‌آید تحقیق کنید که بازاء هریك از دومقدار a کدامیك از ماکزیمم یا می‌نیمم برابر ۲ است.

۲۱۷۲ـ منحنی (C_1) نمایش تابع $y=\frac{(x-1)^2}{x-2}$ و منحنی (C_2) نمایش تابع $y=\frac{1-2x}{2x}$ را دقیقاً در یکدستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

ثانیاـ خط (D) بمعادله $y=m$ عموماً منحنی (C_1) را در دونقطه M و N قطع می‌کند معادله‌ای تشکیل دهید که ریشه‌هایش طول‌های نقاط تقاطع باشند و نیز همین خط منحنی (C_2) را در نقطه P که مختصات آنرا پیدا خواهید کرد قطع می‌کند مکان هندسی مزدوج های توافقی P را نسبت به M و N که نقاط نظیر Q است پیدا کنید.

ثالثاـ بازاء دومقدار m که آنرا خواهید یافت نقطه P دروسط MN قرار دارد اگر P_1 و P_2 نقاط نظیر دومقدار m و O_1 و O_2 مراکز تقارن دومنحنی (C_1) و (C_2) باشند ثابت کنید چهار نقطه P_1 و P_2 و O_1 و O_2 روی یك خط راست قرار دارند.

۲۱۷۳ـ تابع $y=\frac{mx-2m}{x^2-2m}$ مفروض است. اولاـ ثابت کنید بازاء جمیع مقادیر m منحنی‌های فوق از دونقطه ثابت می‌گذرند و در یکی از این دو نقطه بر خط ثابتی مماس میباشند نقطه تقاطع مماس ثابت را با منحنی فوق بدست آورید.

ثانیاـ ثابت کنید مکان هندسی ماکزیمم یا می‌نیمم‌های توابع فوق خطی است مستقیم.

ثالثاـ نشان دهید که منحنی‌های فوق همواره دارای سه نقطه عطف واقع بر یك استقامتند که معادله آنرا بدست می‌آورید.

دبیرستان طباطبائی ثلث دوم

۲۱۷۴ـ تابع $y=\frac{x^2-x-m}{x+m}$ داده شده است $(m\neq 0)$

اولاـ معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن عرضهای نقاط ماکزیمم و می‌نیمم این تابع باشند. ثانیاـ بااستفاده ازاین معادله نشان دهید که بازاء همه مقادیر m (باستثنای $m=0$) تابع دارای یك ماکزیمم و یك می‌نیمم است. ثالثاـ وقتیکه m تغییر می‌کند از دو نقطه ماکزیمم و می‌نیمم جای یك نقطه ثابت ماند و جای نقطه دیگر تغییر مکان می‌دهد مختصات نقطه ثابت و

معادله مکان نقطه متحرک را بدست آورید. را بطوریکه مقدار m را چنان تعیین کنید که نقطه (m) بطول (۲ −) بر مرکز تقارن منحنی باشد. خاصاً ـ منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y = \frac{x^2 - x - 2}{x + 2}$ را رسم کنید (واحد $\frac{1}{2}$ سانتیمتر)، سادساً ـ بدون محاسبه فقط با کمک منحنی (C) اعداد (۳.۰ −) را با ریشه‌های معادله $x^2 - (1+\lambda)x - 2(1+\lambda) = 0$ مقایسه کنید سابعاً ـ خط $y = \lambda$ و منحنی (C) را با ازاء مقادیر λ که از روی شکل مربوط بقسمت قبل تعیین خواهید کرد در دو نقطه مانند A و B قطع می‌کند مکان مراکز دوایری بقطر AB را بیابید خواهید دید که نقاط ماکزیمم و می‌نیمم منطبق با این مکان است علت آن چیست.

۲۱۷۵ـ برحسب مقادیر مختلف در تعداد ریشه‌های معادله $x^2 - px - 2 = 0$ بحث کرده و در حالتی که $4p^3 + 27q^2 = 0$ می‌باشد ریشه‌های معادله را بدست آورید.

مسائل جهت تعیین بهترین دانش آموز استان خوزستان

۲۱۷۶ـ تابع $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x + 2}$ مفروض است ضرایب a و b و c را طوری تعیین کنید که عرض نقطه ماکزیمم یا می‌نیمم منحنی این تابع صفر شده و مجانب مایل آن $y = x - 2$ باشد.

ـ حد عبارت $\sqrt{x^2 - 3x + 2} - x$ را بازاء $x = \mp\infty$ پیدا کنید.

۲۱۷۷ـ زاویه بین دو منحنی دو تابع $x^2 + y^2 - 2x = 1$ و $x^2 + y^2 - 2y = 9$ را پیدا کنید (رسم منحنی‌ها لازم نیست)

۲۱۷۸ـ فاصله بین دو خط $2x - 4y = 8$ و $6x - 8y = 6$ را پیدا کنید.

۲۱۷۹ـ معادله $x^2 - (a+b)x + a^2 = 0$ مفروض است که a و b مختصات نقطه M می‌باشند محل نقطه M را طوری پیدا کنید که این معادله دارای دو ریشه مساوی باشد یا اینکه عدد یک بین ریشه‌های معادله واقع باشد.

دبیرستان دارالفنون (ثلث اول)

۲۱۸۰ـ تابع $y = \frac{x^2 + b}{x^2 + ax}$ مفروض است. اولاً ـ چنانچه پارامترهای a و b طوری تغییر کنند تا منحنی‌های تابع فوق دارای ماکزیمم و می‌نیمم باشند ثابت کنید مجموع و حاصلضرب این مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم برابر یکدیگرند. ثانیاً ـ چه رابطه‌ای بین دو پارامتر a و b باید برقرار باشد تا آنکه منحنی تابع فوق مجانب افقی خود را در نقطه‌ای بطول ۱ − قطع کند اگر حاصلضرب طول‌های نقاط ماکزیمم و می‌نیمم منحنی تابع در این حالت (۱ −) باشد مقدار a و b چقدر است.

۲۱۸۱ـ جدول تغییرات منحنی (C) نمایش تابع $y = \frac{x^2+1}{x^2-x}$ را رسم کنید. ثانیاً ـ منحنی (C) را با خط $y = k$ قطع نموده‌ایم اگر M_1 و M_2 نقاط تلاقی باشند k را طوری تعیین کنید تا حاصلضرب ضریب زاویه‌های دو خط OM_1 و OM_2 برابر (۲ ـ) باشد (O) مبدأ دستگاه است (معادله درجه سومی که در این خالت بدست می‌آورید از راه تجزیه حل کنید) پس از تعیین مقدار k مختصات نقطه M_1 و M_2 را تعیین کنید: ثالثاً ـ معادله قائم بر منحنی (C) را در نقطه‌ای به طول $\sqrt{2}+1$ واقع بر منحنی بنویسید.

۲۱۸۲ـ تابع $y=(1-\lambda)x^2+\lambda x$ مفروض است. اولاً ـ ثابت کنید منحنی‌های نمایش تابع فوق در ازاء مقادیر مختلف پارامتر λ همواره بر سه نقطه ثابت که بر خط ثابتی قرار دارند می‌گذرند مختصات این نقاط و معادله این خط راست را بدست آورید ثانیاً ـ معادله خط مماس بر منحنی در یک نقطه غیر مشخص را تشکیل داده ثابت کنید که این مماس منحنی را در یک نقطه دیگر قطع می‌کند که طولش از حیث قدر مطلق دو برابر طول نقطه تماس است. ثالثاً ـ با ازاء $\lambda=\frac{3}{2}$ جدول تغییرات و منحنی تابع حاصل را رسم کنید.

۲۱۸۳ـ معادلات خطوط مجانب منحنی‌های تابع $y = x \pm \sqrt{x^2-3x+1}$ را بدست آورید.

۲۱۸۴ـ مقدار حقیقی کسر زیر را بازاء $x =$ حساب کنید.

$$\frac{\sqrt{27+x}-\sqrt{27-x}}{x+2\sqrt{x^2}}$$

دبیرستان دکتر نصیری ثلث دوم

۲۱۸۵ـ اولاً معادله زیر را حل کنید (رابطه ۱)

$$(m+1)x^2-m^2(m-1)x+(m-1)^2=0$$

خواهید دید که هر دو ریشه معادله بحسب مقادیر منطقی هستند و یک ریشه علامت ثابتی دارد مقادیر m را آنطور تعیین کنید که ریشه دیگر منفی باشد. ثانیاً ـ اگر S مجموع دو ریشه معادله (۱) باشد داریم:

$$\pm\sqrt{S}=\pm m\sqrt{\frac{m-1}{1+m}}$$

منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\pm x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ را رسم کنید. ثالثاً اگر P حاصل ضرب دو ریشه معادله (۱) باشد داریم $\left(\frac{m}{m-1}\right)^2=\frac{S}{P}$

دائره: منحنی (C) نمایش تغییرات تابع زیر را رسم کنید $y=\left(\frac{x}{x-1}\right)^2$

«ب» : نقاطی از منحنی را پیدا کنید که مماس بر آنها از مبدأ مختصات بگذرد معادلات خطوط مماس و ضریب زاویه قائم نقاط تماس را تعیین کنید.

«ج» : بدون هیچگونه محاسبه جدید وفقط ازروی منحنی(C) ریشه‌های معادله $(k-1)x^2-2kx+k=0$ را با اعداد $1+\sqrt{2}$ — مقایسه کنید و نتیجه‌را درجدولی نشان‌دهید. رابطه تحقیق کنید اگر یکریشه معادله(۱) برابر با ۳ فرض‌شود مقادیر نظیر m ریشه‌های معادله $m^3-6m-2=0$ هستند.

«الف» : معادله فوق‌را خواه مستقیماً و خواه‌بکمك قسمت اول حل کنید.

«ب» : منحنی (C') نمایش تغییرات تابع $y=x^3-6x-2$ را رسم‌نمود،وجهت تحدب وتقعر آنرا نسبت به‌جهت مثبت محورهرضها تعیین کنید.

خاصاً بنقطه عطف منحنی (C') یعنی $A(0,-2)$ خطی باضریب زاویه ۳مرور دهید و سطح محصور بین این خط ومنحنی (C') آن قسمت راکه سمت راست محورهرضها واقع‌است حساب کنید.

دبیرستان‌شماره۱و۲ آذر ثلث‌اول

۲۱۸۶ـ مقدار تابع $y=\frac{\sin 5x\sin 3x\sin 5x}{x^3}$ را در ازاء $x=0$ پیدا کنید.

۲۱۸۷ـ معادله‌خط قائم برمنحنی $y=2-\sqrt{x^2+2x-3}$ را از نقطه $M(2,2)$ بنویسید.

۲۱۸۸ـ مکان هندسی نقطه

$$P\left(x=\frac{\sin^2\alpha-2\sin\alpha+1}{1+\sin^2\alpha}\ \text{و}\ y=\frac{3(1-\sin^2\alpha)}{1+\sin^2\alpha}\right)$$

وقتی که α جمیع‌مقادیر را اختیار کند تعیین کنید و چنانکه این‌مکان هندسی مرکز تقارنی دارد آنرا پیدا کنید.

گروه فرهنگی آرش ثلث‌اول

۲۱۸۹ـ تابع $y=\frac{x^2+ax+b}{x^2+b}$ مفروض‌است ثابت کنید بازاءجمیع مقادیر aوb منحنی‌نمایش‌تابع‌فوق از نقطه ثابتی‌می‌گذرد وتحقیق کنیداین‌نقطه مرکز تقارن‌منحنی‌میباشد.

۲۱۹۰ـ تابع $y=\frac{x^4-2x^3+ax^2+bx-4}{x^3+mx^2+nx+p}$ مفروض‌است‌خواهیم‌پیدا باشرائط زیر بدست‌آوریم

الف ـ صورت‌کسر دارای دوریشه‌مساوی ودوریشه‌قرینه است. ب ـ خط $x=3$ یکی از مجانبهای منحنی‌است. ج ـ بازاء $x=2$ تابع‌فوق مبهم وبه‌صورت $\frac{0}{0}$ می‌باشد کمقدار حقیقی‌آن بسمت۲ میل‌می‌کند.

دبیرستان ادیب ثلث اول

۲۱۹۱ـ درتابع $y=\frac{2}{x^2-1}$ اولا معادلات خطوط قائمی که ازمبدأ مختصات برمنحنی رسم می‌شوند تعیین کنید ومختصات پاهای قائم را حساب کنید.

۲۱۹۲ـ معادلات خطوط مجانب منحنی بمعادله $y=2x-3\pm\sqrt{x^2-x+5}$ را تعیین کنید.

دبیرستان امیر کبیر ثلث اول

۲۱۹۳ـ درتابع $y=\frac{x^2-m}{mx^2-x+m+1}$ حدود m را بقسمی تعیین کنید که منحنی نمایش تابع فوق دارای ۲ ویا یک مجانب موازی محورعرضها بوده ویا دارای چنین مجانبی نباشد m را چنان تعیین کنید که تابع فوق خط $y=1$ را قطع نکند.

دبیرستان پهلوی (ساری) ثلث اول

۲۱۹۴ـ منحنی C بمعادله $y=\frac{x^2-2ax+b}{x+a}$ مفروض است. الف ـ مکان هندسی نقاط ماکزیمم ونیمم منحنی را پیدا کنید وقتی که b ثابت بماند و a تغییر کند. ب ـ مقادیر b و a را تعیین کنید بطوری که حاصلضرب ماکزیمم ونیمم تابع برابر ۴ گردد ومرکز تقارن روی خط $y=b-4$ قرار داشته باشد.

دبیرستان دین ودانش (قم) ثلث اول

۲۱۹۵ـ ثابت کنید جمیع منحنی‌های $m^2-2my-x^2+1=0$ بردایره ثابتی مماس می‌باشد.

دبیرستان دکتر کریم فاطمی ثلث اول

۲۱۹۶ـ تابع $y=\frac{ax^2+bx-1}{ax^2+x-b}$ مفروض است. الف: اگر $M(a,b)$ باشد بازاء جمیع مقادیر مختلف a و b درجهت تغییرات تابع بحث کنید. ب ـ ثابت کنید بازاء جمیع مقادیر b منحنی تابع فوق برمنحنی تابع $y=x^2+x+1$ در نقطه‌ای بطول یک مماس است.

۲۱۹۷ـ تابع $y=\frac{x^2+ax+b}{x+c}$ مفروض است. الف ـ ضرایب a و b و c را طوری بیابید که نقطه $O'(1,3)$ مرکز تقارن منحنی بوده وخط $2y=x-2$ برمنحنی عمود باشد ومختصات پای قایم را حساب کنید.

۲۱۹۸ـ خط $y=m$ منحنی تابع $y=\frac{x^2+x+1}{x-1}$ را در A و B قطع می‌کند اگر A و B تصاویر A و B بر محور طول باشند ثابت کنید که اولا ـ دوایری بقطر $A'B'$ دارای

یك محور اصلی‌اند. ثانیاً ـ بردایره ثابتی‌صودند ومعادله‌دایره را تعیین کنید اگر یکی‌از دوایر بقطر $A'B'$ منعکس خط $x=1$ نسبت بمبدأ مختصات باشند معادله این دایره را معین کرده ومقدار m را در این‌حالت بدست‌آورید.

دبیرستان‌شاهدخت‌سه‌ماهه‌اول

۳۹۹۹ـ منحنی (C) بمعادله $y=\frac{x^2-mx+m^2}{x-m}$ مفروض است ثابت کنید که منحنی‌های تابع‌مفروض‌همواره‌بر یك‌خط‌ثابت مماس‌بوده ودارای‌مجانب‌ثابتی‌می‌باشند.

۴۳۰۰ـ معادله مماس وقائم برمنحنی (γ) بمعادله:

$x^2+y^2+1=0$ و $x^2+(2-y^2)x^2+1/2$ بنویسید و همچنین مجانب‌های منحنی γ را پیداکرده تحقیق کنید مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی است.

۴۳۰۱ـ مقدارحقیقی عبارت $\frac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$ را درازاء $x=0$ تعیین کنید.

دبیرستان‌شاهپور(شیراز) سه‌ماهه‌اول

۴۳۰۲ـ خط $y=m$ منحنی (C) نمایش تغییرات‌تابع $y=\frac{x^2+1}{1-x}$ را عموماً در دونقطه مانند A و B قطع می‌نماید حدود m را طوری تعیین‌نمائیدکه طول یك‌نقطه برخورد بین اعداد ۱ و ۲ وطول‌دیگر بین ۲ و ۵ قرار گیرد وتحقیق کنید فقط باازاء یك‌مقدارصحیح m این وضع صورت می‌گیرد.

۴۳۰۳ـ مختصات مرکز تقارن تابع معکوس تابع $y=\frac{x^2+1}{1-x}$ را پیداکنید.

دبیرستان‌گلشن‌راز(شبستر) سه‌ماهه‌اول

۴۳۰۴ـ تابع $y=\frac{x^2-2ax}{ax+1}$ مفروض است $a\neq 0$ الف ـ بدون‌استفاده‌از مشتق ثابت‌کنید بازاء جمیع مقادیر a تابع فوق دارای یك‌ماکزیمم ویك‌می‌نیمم‌است‌ومقادیر ماکزیمم‌ومی‌نیمم‌آن‌را پیداکنید. ب ـ مقدارعددی a را طوری‌بیابیدکه بین y_1 و y_2 مقادیر ماکزیمم‌ومی‌نیمم تابع‌فوق رابطه $3y_1y_2-y_1-y_2=13$ برقرار باشد.

دبیرستان‌محمدقزوینی سه‌ماهه‌اول

۴۳۰۵ـ مقدار حقیقی کسر $\frac{\cos^2 3mx}{\sin^2 2x}$ بازاء مقادیر m و $x=\frac{\pi}{2}$ حساب کنید (m عددیست حسابی)

۴۳۰۶ـ تابع $y=ax-\sqrt{x^2-1}$ مفروض است مقدار این تابع‌را بازاءمقادیر مختلف a و $x=+\infty$ حساب کنید.

دبیرستان هدایت (شیراز) سه‌ماهه‌اول

۴۳۰۷ـ تابع $y=2x+\sqrt{ax^2+bx-2}$ مفروض است ضرایب a و b را طوری

تعیین کنید که خط $y=x+1$ مجانب منحنی آن باشد.

دبیرستان آذر ثلث دوم

۲۲۰۸ـ برحسب آنکه سه جمله‌ای درجه دوم ax^2+bx+c دارای ریشه باشد یا نباشد جهت تغییرات تابع $y=\frac{ax^2+bx+c}{2ax+b}$ را تعیین نمائید. ثانیاً ـ ضرائب تابع $y=\frac{ax^2+bx+c}{2ax+b}$ را چنان تعیین نمائید که عرض از مبدأ مجانب غیر موازی آن $\frac{3}{4}$ ـ و منحنی آن محور xها را در نقطه بطول یك قطع کند آیا این دو شرط برای تعیین ضرائب کافی است یا خیر؟ چرا؟ ثالثاً ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x^2-3x+2}{2x-3}$ را رسم کنید.

۲۲۰۹ـ اولا ضرائب a و b را در تابع $y=\frac{ax^3-6x^2+bx-8}{x^2}$ چنان تعیین کنید که منحنی نمایش تغییرات تابع دارای نقطه عطفی بطول ۲ واقع برمحور xها باشد. ثانیاً ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{(x-2)^3}{x^2}$ را رسم کنید

۱۲، b و ۱ = a

گروه فرهنگی آرش ثلث دوم

۲۲۱۰ـ تابع $y=\frac{ax^2+b}{x^2+x+1}$ مفروض است مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که y منحنی محصورین ۲ و $\frac{2}{3}$ باشد.

۲۲۱۱ـ تابع اولیه $y=\frac{x}{\sqrt{x+1}}$ را بدست آورید.

دبیرستان ادیب ثلث دوم

۲۲۱۲ـ تابع $y=\frac{m}{3}x^3-(m+1)x$ مفروض است. اولا ـ تحقیق کنید که تابع فوق بازاء جمیع مقادیر m از سه نقطه ثابت می‌گذرد که هر سه نقطه بر یك خط مستقیم قرار دارند. ثانیاً ـ مکان هندسی نقاط ماکزیمم و مینیمم را بدست آورید.

دبیرستان انوشیروان دادگر ثلث دوم

۲۲۱۳ـ تابع $y=\frac{ax^2+bx+a}{ax+b+a}$ مفروض است. اولا ـ ثابت کنید که منحنی نمایش آن همواره از نقطه ثابتی می‌گذرد $(a\neq 0)$ و ضرائب a و b را طوری تعیین کنید که منحنی

مماس برمحور xها باشد آیا شرط کافی است یا نه، چرا؟

۲۲۱۴- منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x^2+2x+1}{x+3}$ را رسم کنید و مرکز تقارن آنرا پیدا کنید.

دبیرستان پهلوی (کرمان) ثلث دوم

۲۲۱۵- تابع $y=\frac{2x}{x^2-2x+1}$ مفروض است مقدار عبارت $y^2(x+2)-x^2y$ را از تابع فوق بدست آورید.

۲۲۱۶- تابع $y=\frac{mx-2m}{x^2-2m}$ مفروض است ثابت کنید کمیکان هندسی نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع هرگاه پارامتر تغییر کند همواره روی خطی است مستقیم.

دبیرستان خوارزمی شماره ۲ ثلث دوم

۲۲۱۷- حد تابع زیر را پیدا کنید (بدون استفاده از قانون هوپیتال)

$$y=\frac{tg\,x\,tg\,2x\,tg\,3x\,tg\,4x\cdots tg\,nx}{x^n}$$

$x\to 0$

$$y=\frac{1-\sqrt{2}\sin t}{\cos 2t}\quad (t\to\frac{\pi}{4}\ :\ \text{بازاء})$$

۲۲۱۸- سطح مابین منحنی $y=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$ و محورهای ox و oy را حساب کنید.

۲۲۱۹- تابع اولیه توابع زیر را بیابید.

$$y=\frac{x^2}{(x-1)^{100}}\quad \text{و}\quad y=\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

۲۲۲۰- تابع $y=f(x)$ را طوری تعیین کنید که مشتق اول و دوم تابع هیچ یک دیگر باشند و بدانیم منحنی نمایش تابع در مبدأ مختصات بر محور xها مماس است.

۲۲۲۱- مطلوبست محاسبه حجمی که از دوران سطح محصور بین منحنی نمایش اسم $y=\sqrt{x}(x-1)^5$ و محور طولها حول این محور حاصل می‌شود.

دبیرستان دکتر کریم فاطمی ثلث دوم

۲۲۲۲- تابع $y=\frac{x^2+ax+b}{x^2-cx+1}$ مفروض است اولاً- ضرائب a و b و c را طوری

تبیین کنید که خط $x=1$ تنها مجانب موازی محور عرضها بوده و خط $y=\frac{x}{2}+1$ در نقطه‌ای بطول ۱ — بر منحنی مماس باشد.

۲۲۲۳ـ تابع $y=\frac{2x^2+2ax+a^2-1}{x-1}$ مفروض است. اولاـ ثابت کنید بازاء جمیع مقادیر a منحنی بر خط ثابتی مماس است. ثانیاـ درعده نقاط تقاطع منحنی فوق و منحنی تابع $y=-4x^2-2x$ و علامت آن بحث کنید.

دبیرستان شاهپور (شیراز) ثلث دوم

۲۲۲۴ـ تابع کسری $y=\frac{x^2+h}{x-h}$ که در آن $h\neq 0$ می‌باشد مفروض است. الفـ ثابت کنید بازاء جمیع مقادیر $h\neq 0$ تصاویر نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع مفروض (در صورتی که موجود باشند) روی محور طولها مردوج توافقی مبدأ مختصات و نقطه برخورد مجانبهای تابع $y=\pm\sqrt{x^2+2x}$ که روی آن محور است می‌باشند. بـ پارامتر h را طریقی تعیین کنید که مجانب مایل تابع کسری مفروض منحنی تابع $y=\pm\sqrt{x^2+2x}$ را قطع نکند.

دبیرستان فخرالدین (گرگان) ثلث دوم

۲۲۲۵ـ تابع $y=\frac{x^2+ax+1}{x+a}$ مفروض است. الفـ بدون استفاده از مشتق ثابت کنید که در ازاء جمیع مقادیر a تابع فوق دارای یک ماکزیمم و یک مینیمم است. بـ a را طوری تعیین کنید که مرکز تقارن منحنی های تابع فوق روی خط $y=2x+2$ واقع باشد.

دبیرستان فردوسی (تبریز) ثلث دوم

۲۲۲۶ـ تابع $y=\frac{x^2-bx+a}{x^2+x-2}$ مفروض است. اولاـ a و b را چنان بیابید که تابع در نقطه‌ای بطول ۲ در روی محور xها ماکزیمم یا مینیمم باشد.

ثانیاـ با دانستن $b=4$ وقتی a تغییر می‌کند از راه محاسبه و برهان امکان هندسی p وسط ماکزیمم و مینیمم را بیابید.

دبیرستان قناد (بابل) ثلث دوم

۲۲۲۷ـ تابع اولیه توابع زیر را بیابید. $y=15x(2x+4)(2x^2+6x^2+5)^5$

$$y=\frac{3x^2-12x+5}{x^3-6x^2+5x+2}$$

دبیرستان گلشنر از شبستر ثلث دوم

۴۲۲۸ـ تابع $y=\frac{2x^2+a^2}{x-2a}$ مفروض است $(a\neq 0)$ اولاـ بازاء جمیع مقادیر a تابع فوق بر دو خط ثابت مماس است معادلات آن دو خط را بدست آورید. ثانیاـ مکان هندسی محل تلاقی مجانبهای منحنی فوق را تعیین کنید.

دبیرستان مروی ثلث دوم

۴۲۲۹ـ تابع $y=\frac{ax^2-x+1}{x+b}$ مفروض است. اولاـ a و b را طوری تعیین کنید که نقطه $C(1,1)$ مرکز تقارن منحنی تابع باشد. ثانیاـ منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$ را رسم کنید. ثالثاـ خط $y=m$ منحنی (C) را در دو نقطه A و B قطع می کند معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن ضریب زاویه‌های OA و OB باشند. رابعاـ اگر A′ تصویر A و B′ تصویر B روی محور $x'x$ باشند معادله مکان هندسی مرکز مستطیل $ABB'A'$ را تعیین کنید.

گروه فرهنگی هدف ثلث دوم

۴۲۳۰ـ تابع $y=\frac{x^2+ax+b}{x+b}$ مفروض است. الفـ مقادیر a و b را چنان تعیین کنید تا نقطه $\omega(-1,-2)$ مرکز تقارن منحنی نمایش تغییرات تابع مفروض شود.

بـ منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{(x-1)^2}{x+1}$ را رسم کنید. ج عدد m را با ریشه‌های معادله $x^2-(m+2)x+1-m=0$ مقایسه کنید نتیجه را از روی منحنی (C) تحقیق نمائید. دـ منحنی (C′) نمایش تغییرات تابع $y=-4\pm\sqrt{-x^2-2x+15}$ را در همان دستگاهی رسم کنید که منحنی C رسم شده است هـ. ثابت کنید بر روی خط $y=-4$ دو نقطه می توان یافت که اگر از هر یک از آنها دو مماس بر منحنی C رسم کنیم برهم عمود شوند.

۴۲۳۱ـ تابع $y=\sqrt{(ax+b)^2(2-x)}$ مفروض است مقادیر a و b را چنان تعیین کنید تا زاویه منحنی نمایش تغییرات تابع مفروض در نقطه $A(0,1)$ قائمه باشد (منظور زاویه بین دو مماس بر منحنی است).

دبیرستان آذر ثلث اول

۴۲۳۲ـ معادله مکان هندسی $M\left(x=\frac{(1+\sin\alpha)^2}{1+\sin^2\alpha}\right.$ و $y=\frac{1}{1+\sin^2\alpha}$

را وقتی که α همه مقادیر ممکنه‌را بگیرد پیدا کنید.

۴۲۳۳ـ مقدار حقیقی هریك از توابع زیر را در ازاء مقداری که در آن مقابل آن نوشته شده پیدا کنید.

$$y=\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2+4x-2}\right)^{\frac{\sin x}{x}} \qquad x\to 0$$

$$y=\left(\frac{2\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right)^{\frac{2x-1}{x+1}} \qquad x\to\pm\infty$$

$$y=\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x} \qquad x\to 0$$

دبیرستان البرز ثلث اول

۴۲۳۴ـ حد تابع $y=\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt[3]{3x+5}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+8}-\sqrt{x^2+3}}$ را بازاء $x=1$ پیدا کنید

۴۲۳۵ـ تابع $y=2x\pm\sqrt{x^2-1}$ مفروض است. الف ـ مختصات مرکز تقارن آن را حساب کنید. ب ـ نوع کمانهای منحنی تابع را مشخص نمائید. ج ـ منحنی نمایش تغییرات تابع را رسم نمائید. د ـ تعیین کنید محورهای مختصات را به چه اندازه باید دوران دهیم تا معادله فوقه بصورت $ax^2+by^2+c=0$ درآید.

دبیرستان امیر کبیر (مشهد) ثلث اول

۴۲۳۶ـ تابع $y=(x-a)(x-b)(x-c)$ که در آن $a<b<c$ مفروض است اولاً ـ مشتق تابع را حساب کرده و ثابت کنید مشتق همواره یك جواب بین a و b و یك جواب بین b و c دارد.

ثانیاً ـ a و b و c را بقسمی بیابید که $x=-1$ جواب مضاعف و $x=0$ جواب ساده معادله $(x-a)(x-b)(x-c)=0$ باشد.

دبیرستان دانش وهنر ثلث اول

۴۲۳۷ـ اولا در تابع $y=\dfrac{ax+b}{x^2+x-2}$ مقادیر a و b و c را بقسمی تعیین کنید که تابع دارای ماکزیمم و می‌نیمی مساوی $\frac{1}{2}$ و 3 باشد. ثانیاً ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات.

۲۲۳۸- تابع $y=\frac{3x-6}{x^2+x-2}$ را رسم می‌کنیم. ثالثاً- فقط از روی شکل منحنی بازاء جمیع مقادیر m ریشه‌های معادله زیر را با اعداد ۱ و ۲ — مقایسه کرده نتیجه را در جدولی یادداشت کنید.

$$mx^2+(m-3)x-2m+6=0$$

۲۲۳۹- تابع اولیه تابع زیر را حساب کنید.

$$y=x^2\sqrt{x^2+2}+\frac{x^2-2}{\sqrt{x}}+\sin 3x\cos^2 x$$

دبیرستان شاهپور (شیراز) ثلث اول

۲۲۴۰- معادله مجانب مایل توابع $y=2|x|\pm\sqrt{x^2+x}(|x|\pm x)$ را بنویسید.

دبیرستان فرسگام ثلث اول

۲۲۴۱- تابع $y=\frac{x^2-x}{x^2-x-2}$ مفروض است ثابت کنید دو نقطه برمنحنی میتوان یافت بطوری که مماسها در آن نقاط محور yها را در نقطه‌ای به عرض $y=1$ قطع کند طولهای این دو نقطه را تعیین کنید.

دبیرستان قطب ثلث اول

۲۲۴۲- تحقیق کنید که خطوط معادله $m^2x-my+3=0$ برمنحنی ثابتی که معادله‌اش را پیدا خواهید کرد مماس می‌باشند.

۲۲۴۳- ثابت کنید بین y' و y'' مشتقات متوالی تابع $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$ رابطه $2y^3+yy''=2y'^2$

دبیرستان کورش ثلث اول

۲۲۴۴- تحقیق کنید منحنی تابع $y=\frac{x^2+ax+a}{x}$ بازاء جمیع مقادیر a بیساز ربع اول و سوم دستگاه مختصات را در یک نقطه ثابت قطع می‌کند و ضمناً a را چنان معلوم کنید تا خط مماس برمنحنی در این برنیمساز ربع اول عمود باشد.

۲۲۴۵- تابع $y=x+1+\sqrt{ax^2+bx+3}$ مفروض است. اولاً- a و b را چنان تعیین کنید که خط $y=2$ بمشاخه منفی منحنی مجانب شود. ثانیاً- بازاء $a=1$ و $b=-4$ خطوط مجانب منحنی را بدست آورید.

دبیرستان گلشن راز (شبستر) ثلث اول

۲۲۴۶- تابع $y=(1-m)x^2+mx$ مفروض است. اولاً- ثابت کنید منحنی

نمایش تابع فوق باراء جمیع مقادیر m از سه نقطه ثابت که بر یك استقامت هستند می گذرند و معادله این خطرا بدست آورید ثانیاً. m را چنان تعیین کنید که خط مماس بر منحنی نمایش تابع فوق را در نقطه‌ای به طول یك از منحنی بر خط $x=2$ عمود شود

۴۴۴۷- منحنی نمایش تابع $y=5x+2\pm 2\sqrt{6x^2+3}$ دارای دومحور تقارن بموازات نیمسازهای محورها می باشد معادلات این دومحور تقارن را بدست آورید.

۴۴۴۸- تابع زیررا درنظر می گیریم $y=E(x)+\sqrt{x-E(x)}$ که در آن مقصود از $E(x)$ بزرگترین عدد صحیح موجود در x می باشد ثابت کنید که این تابع انصالی است ونمایش هندسی آنرا رسم کنید.

۴۴۴۹- منحنی‌های (c) و (c') بمعادلات زیر مفروض اند.

$$(c)\ :\ y=\frac{ax^3}{(x-1)^2}$$

$$(c')\ :\ y=\frac{b(x-1)^3}{x^2}$$

اولاً- مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که منحنی (c) بر خط $y=\frac{27}{4}$ و منحنی (c') بر خط $y=-\frac{27}{4}$ مماس باشد و پس از تعیین مقادیر a و b دو منحنی (c) و (c') و دریك دستگاه محورهای مختصات رسم کنید ثانیاً- خط $x=k$ عموماً منحنی (c) را دریك نقطه M و منحنی (c') را دریك نقطه N قطع می کند اگر O و A نقاط تلاقی (c) و (c') بامحور طولها باشد ثابت کنید که چهار نقطه A، O، N، M همواره بر یك دایره واقع می باشند آیا امکان دارد که دایره مزبور برمحور $y'y$ مماس باشد؟

دبیرستان نادرشاه ثلث اول

۴۴۵۰- تابع $y=ax+\sqrt{b^2x^2-2x}$ مفروض است. اولاً- مقادیر a و b را چنان پیدا کنید که در ازاء $x=-\infty$ حد تابع برابر یك گردد. ثانیاً- تحقیق کنید که نقطه ω بطول واحد واقع بر نیمساز ربع اول مرکز تقارن منحنی $y=x\pm\sqrt{x^2-2x}$ می باشد. ثالثاً- معادلات مجانبهای منحنی نمایش تابع $y=x\pm\sqrt{x^2-2x}$ را بدست آورید.

دبیرستان آریامهر (زاهدان) سه ماهه دوم

۴۴۵۱- مستقیماً بکمك تعریف مجانب، مجانبهای منحنی‌های نمایش توابع زیررا بیابید

$$y = x^p + a_1x^{p-1} + a_2x^{p-2} + \dots + a_{p-1}x + a_p + \frac{c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \dots}{bx^n + b_1x^{n-1} + \dots}$$

با فرض $c_1 \neq 0$ اولاً- درصورتی که b و b_1 مساوی صفر باشند و $b_2 \neq 0$
ثانیاً- درصورتی که $b' = 0$ و $b_1 \neq 0$ و $b_1 \neq 0$ ثالثاً- درصورتی که $b \neq 0$

دبیرستان ادیب سه ماهه دوم

۳۲۵۲- ثابت کنید که منحنی نمایش تغییرات تابع $y = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$ دارای سه نقطه عطف است که بر یک خط مستقیم واقع اند

۳۲۵۳- مطلوبست محاسبه توابع اولیه تابع زیر

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \sqrt[3]{\frac{\sin^2 x}{\cos^{14} x}} + \frac{1}{(2x-1)^2}$$

دبیرستان البرز سه ماهه دوم

۳۲۵۴ تابع $y = \frac{2(x+a)}{x^2+2x+2}$ مفروض است

اولاً - a را بقسمی تعیین کنید که مقدار Max یا Min تابع برابر : $\frac{2\sqrt{2}}{4}$ باشد .

۳۲۵۵- جدول و منحنی (C) نمایش تغییرات تابع. $y = \frac{2(x+1)}{x^2+2x+2}$

و رسم کنید .

۱- مساحت سطح محصور بین منحنی (C) و محورهای مختصات را محاسبه نمائید.

۲- ثابت کنید منحنی تابع دارای ۳ نقطه عطف است.

۳- معادله خطی را تعیین کنید که از نقاط عطف منحنی می گذرد.

۴- خط Δ موازی امتداد $3x + 2y = 0$ و با عرض از مبدأ $3m$ مفروض است درتعداد نقاطی تلاقی خط Δ و منحنی (C) به ازاء مقادیر مختلف m بحث کنید و هنگامی که خط و منحنی مماسند مختصات نقاط تماس را بدست آورید.

۵- اگر خط $y = p$ منحنی (C) را در M و N قطع کند وتساویر این دو نقطه را روی محور xx' به ترتیب M' و N' بنامیم نقطه ثابتی مانند A روی محور xx' تعیین کنید بطوری که $AM' \cdot AN'$ مقدار ثابتی باشد.

۶- می توان دو نقطه ثابت روی محور xx' یافت که هموار، مزدوج توافقی نقاط

M' و N' باشند طولهای این دو نقطه را تعیین کنید.

۷ ـ جدول و منحنی (C') نمایش تغییرات تابع $y=\overline{OM'}-\overline{ON'}$ را رسم کنید.

دبیرستان پهلوی (همدان) سه ماهه دوم

۲۲۵۶ـ تابع $y=\frac{x^2+m^2}{2x-m}$ مفروض است. اولاـ بدون استفاده از مشتق ثابت کنید در ازاء جمیع مقادیر m منحنی نمایش تغییرات تابع فوق بجز $m=0$ دارای یك نقطه ماکزیمم ویك نقطه مینیمم است. ثانیاـ اگر m تغییر کند ثابت کنید مرکز تقارن این منحنی ها روی نیمساز ربع اول حرکت میکند. ثالثاـ ثابت کنید در ازاء مقادیر مختلف m خطوط مماس بر منحنی ها در محل تلاقی با محور y ها بموازات هم تغییر مکان داده ومعادله این خطوط متغیر را بنویسید.

۲۲۵۷ـ مطلوبست تعیین تابع اولیه تابعهای زیر:

$$y=\frac{\cot g x(\cot g x-1)^m}{\sin^2 x} \quad \text{و} \quad y=\frac{\sin 2x}{(1+\sin x)^n}$$

دبیرستان خوارزمی شماره ۱ ثلث دوم

۲۲۵۸ـ مقدار تابع y را بازاء $x=\frac{\pi}{3}$ حساب کنید.

$$y=\frac{\sin(3n+1)x-\cos(3n+1)x}{\sin x-\cos x}$$

۲۲۵۹ـ توابع اولیه هریك از توابع زیررا حساب کنید.

$$y=\frac{\sin^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}} \quad \text{و} \quad y=\frac{\sqrt{x^2+x^{-4}+1}}{x^5}$$

دبیرستان رهنما ثلث دوم

۲۲۶۰ ـ توابع اولیه دو تابع زیررا بدست آورید.

$$y=\frac{3x}{(3x-1)^2} \quad \text{و} \quad y=\sin^2 x+\cos^2 x\,tg x$$

دبیرستان فرگام ثلث دوم

۲۲۶۱ ـ تابع $y=\frac{ax^2-3x+b}{x+a}$ مفروض است b و a را چنان تعیین کنید که منحنی نمایش تابع فوق ازمبدأ مختصات بگذرد وتفاضل بین مقادیر ماکزیمم ومینیمم برابر $2\sqrt{5}$ باشد.

دبیرستان فیروز بهرام ثانی دوم

۲۲۶۲- اولا منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x}{3}(1+\frac{8}{1-9x^2})$ را رسم کنید.

ثانیاً- از مبدأ مختصات دو خط عمود برهم رسم کنید تا منحنی را غیر از مبدأ در نقاط دیگری قطع کنند اگر m ضریب زاویه یکی از این دو خط فرض شود در تقاطع این خطوط (هر دو خط) با منحنی بحث کنید در صورتی که خط بتواند بر منحنی مماس شود معادلات مماسها را بنویسید. ثالثاً- در حالی که دو خط متعامد فوق منحنی را در چهار نقطه M و M' و N و N' قطع می کنند m را چنان پیدا کنید که این چهار نقطه رئوس مربعی باشند. رابعاً- در تعداد نقاط تقاطع خط $5y=m$ با منحنی هم از روی شکل و هم بکمك جدول بر حسب مقادیر مختلف m بحث کنید.

دبیرستان کاوس سه ماهه دوم

۲۲۶۳- اگر m عددی معلوم و بزرگتر از یك باشد. اولا- مطلوبست توابع درجه دوم $y=F(x)$ بطوری که بازاء $x=\pm 1$ داشته باشیم

$$F(-1)=m-1 \quad F(+1)=m+1$$

ثانیاً- اگر منحنی های نمایش این توابع بصورت یك دسته سهمی باشند مکان رئوس این دسته منحنی ها را تعیین کنید. ثالثاً- مساحت سطح محصور بین یکی از این سهمیها و محور طولها و دو عرض نقاط $x=\pm m$ را محاسبه کنید. رابعاً- بازاء چه مقدار عددی m این مساحت مربوط به سهمی انتخاب شده نیست.

دبیرستان مروی سه ماهه دوم

۲۲۶۴- تابع $y=x+1\pm\sqrt{ax+b}$ مفروض است. اولا- ضرائب a و b را قسمی تعیین کنید که منحنی نمایش آن هم با محور طولها و هم با محور عرضها مماس گردد. ثانیاً- ثابت کنید که نیمساز ناحیه اول محور تقارن منحنی $y=x+1\pm 2\sqrt{x}$ می باشد. ثالثاً- جدول تغییرات و منحنی نمایش دو تابع $y_1=(1-\sqrt{x})^2$ و $y_2=(1+\sqrt{x})^2$ را روی یك دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

دبیرستان های هدف سه ماهه دوم

۲۲۶۵ تابع $y=\frac{ax^2+bx}{ax^2+bx+c}$ مفروض است $(a\neq 0)$ بین منحنی های نمایش تابع مفروض آن را اختیار کنید که خط $x=-1$ تنها مجانب قائم آن باشد معادله منحنی را بنویسید.

۲۲۶۶- تابع $y=-x-\sqrt{ax+b}$ مفروض است بدون استفاده از مشتق مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که نقطه $M(\frac{7}{4}$ و $-\frac{9}{4})$ نقطه میانی منحنی نمایش تابع مفروض باشد.

دبیرستان البرز ۴۸-۴۹ سه ماهه اول

۲۲۶۷ ۱- حد تابع زیر را وقتی $x \to 0$ تعیین کنید. ۲ نمره

$$y = \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos^2 x \sqrt[3]{\cos^3 x}}}{x^2}$$

۲- تابع $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 22 = 0$ مفروض است مختصات نقاطی از منحنی تابع را تعیین کنید که فاصله آن نقاط تا مبدأ مختصات ماکزیمم باشد ۳ نمره

۲۲۶۸ تابع $y = \frac{ax^3}{(x-1)^2}$ مفروض است.

۲۲۶۹ a را بقسمی تعیین کنید که منحنی تابع بر خط $y = \frac{27}{2}$ مماس گردد ۲ نمره

۲۲۷۰ - انحناء منحنی تابع $y = \frac{2x^3}{(x-1)^2}$ و مختصات نقطه عطف آنرا تعیین کنید ۳ نمره

۲۲۷۱ - از نقطه A^3 قائم‌هائی بر منحنی تابع $y = \frac{2x^3}{(x-1)^2}$ رسم میکنیم طولهای پای قائم‌ها را حساب کنید. ۳ نمره

۲۲۷۲- جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع $y = \frac{2x^3}{(x-1)^2}$ را رسم کنید ۳ نمره

۲۲۷۳- از نقطه A بطول $\frac{3}{4}$ واقع بر منحنی (C) خطوطی با ضریب زاویه m میگذرند این خطوط بازاء بعضی مقادیر m منحنی (C) را در دو نقطه دیگر مانند P و Q قطع میکند. حدود m را طوری تعیین کنید که نقطه A بین نقاط P و Q واقع گردد

گروه فرهنگی کارون ثلث اول

۲۲۷۴ - ۱- بازاء چه مقادیر از a تابع $y = \frac{1}{x^2 - 2ax + 1}$ همواره متصل است.

۲- مشتق تابع $y = \sin^2 x$ را مستقیماً بدست آورید.

۲۲۷۵- مشتق تابع $y_1 = f(\frac{x-1}{x+2})$ و تابع $y_2 = \sin^2 \sqrt[5]{x^2}$ را بدست آورید.

۲۲۷۶- معادله قائم بر منحنی $xy^3 - y^5 + 3x - 7 = 0$ را در نقطه بعرض ۱ بنویسید.

۲۲۷۷- معادله‌های مماس بر دایره $x^2 + y^2 = 10$ از نقطه بعرض ۲ — واقع بر محور yها را بنویسید.

۳۲۷۸- از نقطه $A\left|\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}\right.$ قائمهائی برمنحنی $y=\frac{x-2}{x+3}$ رسم کرده‌ایم معادله‌ایکه طولهای پای قائم‌را مشخص‌میکند بنویسید.

۳۲۷۹- در تغیر وتحدب منحنی $y=\frac{1}{(x+1)^2}$ برحسب‌مقادیرمختلف x بحث کنید.

۳۲۸۰- طول‌های نقاط‌ماکزیمم‌ومی‌نیمم‌تابع $y=\frac{x}{x^2+1}$ را بدست‌آورید وبدون استفاده ازجدول تعیین کنید کدام‌طول‌مربوط به Max وکدام مربوط به Min است.

دبیرستان خوارزمی(شمیران) آذرماه۴۸

۳۲۸۱- منحنی‌نمایش‌تابع $y=\frac{x^2+2}{(x+1)^2}$ را رسم کنید. ۳ نمره

۳۲۸۲- منحنی نمایش تابع $y=2x+3\sqrt[3]{(x+1)^2}$ را رسم کنید. ۳نمره

۳۲۸۳- مجانبهای منحنی $y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ را بدست‌آورید. ۳نمره

۳۲۸۴- درمثلث‌قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A}=90^\circ$) نیمساز داخلی‌زاویه B ضلع AC را درنقطه D قطع‌میکند اگر نقاط B وC ثابت بمانند مکان‌هندسی نقطه D را تعیین کنید.

۳۲۸۵- تابع $y=\frac{x^2-1}{x^2+ax+b}$ مفروض‌است‌خراب a وb رافسمی تعیین کنید که اگر درنقاط برخورد منحنی‌آن با محورطولها قائمهائی برآن‌رسم کنیم این‌دوقائم‌بکدیگر را درروی‌محورعرضها بزاویه‌قائمه قطع کنند. ۳نمره

۳۲۸۶- بدون‌استفاده‌ازمشتق‌مختصات‌نقاط‌ماکزیمم‌ومی‌نیمم‌تابع $y=\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x-3}$ را بدست‌آورید. ۲/۵ نمره

۳۲۸۷- مختصات نقاط عطف‌وجهت تقعر و تحدب منحنی‌تابع $y=\frac{x-1}{x^2+1}$ را تعیین کنید. ۲/۵ نمره

دبیرستان خوارزمی(شمیران) نوبت‌اول

۳۲۸۸- مختصات قرینه نقطه $A\left|\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right.$ رانسبت‌بخط $2x-3y+5=0$ تعیین کنید.

۴۲۸۹ـ مختصات نقطه عطف و جهت تقعر و تحدب منحنی نمایش تابع $y=\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1}$ را نسبت بجهت مثبت محور مرضها تعیین کنید.

۴۲۹۰ـ بدون تشکیل مبین ثابت کنید معادله $\frac{a^2}{x-p}+\frac{b^2}{x-q}=1$ دارای ریشه‌های حقیقی است.

۴۲۹۱ـ مکان هندسی مرکز تقارن و همچنین مکان هندسی نقاط ماکزیمم و مینیمم منحنی‌های (C) بمعادله $y=\frac{x^2+2x+m}{x-m}$ را وقتی که m تغییر کند بدست آورید.

۴۲۹۲ـ از نقطه $\begin{vmatrix}-3\\-1\end{vmatrix}$ M مماسهائی بر منحنی $y=\frac{x^2-x}{(x+1)^2}$ رسم کرده‌ایم مختصات نقاط تماس و معادلات خطوط مماس را تعیین کنید.

۶ـ دو سر پاره خط AB بطول ثابت a روی دو محور عمود برهم x'ox و y oy میلغزند از A و B خطوطی بموازات محورهای مزبور رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در M قطع کنند مکان هندسی M را تعیین کنید.

۴۲۹۳ـ منحنی نمایش هندسی تابع $(2x+|x|)^2+y+2|y|=9$ را رسم کنید.

دبیرستان مرجان سه ماهه اول آذرماه ۴۸

۴۲۹۴ـ تابع $y=\frac{x^4-1}{x^2}$ مفروض است.

اولاً ـ منحنی نمایش تغییرات آنرا رسم کنید و تحقیق کنید که بین تابع و مشتق آن رابطه $xy'+2y=4x^2$ برقرار است. ۴ نمره

ثانیاً ـ مختصات نقاط عطف و جهت تقعر منحنی را معین کنید. ۳ نمره

ثالثاً ـ اگر نقطهٔ بطول $\sqrt[4]{3}$ یکی از نقاط عطف منحنی باشد، معادله مماس بر منحنی را در این نقطه بنویسید و ثابت کنید که از حل معادله خط مماس با معادله منحنی، بمعادله‌ای میرسیم که $\sqrt[4]{3}$ ریشهٔ تکراری از مرتبه سوم آنست. ضمناً نقطه تلاقی دیگر این مماس را با منحنی بدست آورید. ۴ نمره

۴۲۹۵ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-4}}$ را رسم کنید. ۴ نمره

۳۲۹۶- مطلوبست محاسبه: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(2x+1+\sqrt{4x^2-3x+5}\right)$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+6}-x}$$

جبر ششم ریاضی دبیرستان مرجان

۳۲۹۷- تابع $y=\dfrac{ax^2+bx+a}{ax+b+a}$ مفروض است.

اولا- تحقیق کنید که منحنی نمایش تغییرات این تابع بازاء جمیع مقادیر a و b همواره از نقطه ثابتی که مختصات آنرا تعیین می کنید می گذرد.

ثانیاً- رابطه‌ای بین a و b تعیین کنید که تابع همواره در یک جهت تغییر کند.

ثالثاً- بازاء $a=1$ و $b=2$ جدول و منحنی (C) نمایش تغییرات تابع فوق را رسم کنید

رابعاً- دو عدد ۱ و ۲- را با ریشه‌های معادله

$$x^2+(2-m)x+1-3m=0$$

بوسیله منحنی (C) مقایسه نموده و نتیجه را در جدولی بنویسید.

۳۲۹۸- اولا- در تابع $y=ax+b+\sqrt{x^2-9}$ مقادیر a و b را قسمی تعیین کنید که نیمساز ربع اول مجانب شاخه $-\infty$ منحنی باشد.

۳۲۹۹- منحنی نمایش تغییرات تابع $y^2-4xy+3x^2+9=0$ را رسم کنید.

۳۳۰۰- در وجود و علامت ریشه‌های معادله $(m-1)x^3+3(m-1)x^2+2=0$ بازای مقادیر مختلف m بحث کنید.

دبیرستان اروندرود دیماه ۴۸

۳۳۰۱- تابع $y=(x-1)(x^2+x+1-m)$ مفروض است. اولا- m را طوری تعیین کنید که منحنی تابع مذکور بر محور xها مماس باشد. ثانیاً- بازاء همه مقادیر m منحنی نمایش تغییرات این تابع را رسم کنید. ۴ نمره

۳۳۰۲- تابع $y=\dfrac{x-2}{(x-1)^2}$ مفروض است.

اولا- تقعر و تحدب منحنی (C) نمایش تغییرات تابع فوق را معلوم کرده و مختصات نقطه عطف این منحنی را پیدا کنید. ۳ نمره

ثانیاً- ریشه‌های معادله $m(x-1)^2-x+2=0$ را با دو عدد (۰) و (۲-) مستقیماً مقایسه کنید. ۳ نمره

ثالثاً- هرگاه خط $y=m$ منحنی (C) را در دو نقطه A و B قطع کند بازاء چه مقدار

m زاویه $\widehat{AOB}$ قائمه میشود (O مبداء مختصات) ۲ نمره

۲۳۰۳- جدول تغییرات و منحنی نمایش تابع $y=\frac{x-2}{(x-1)^2}$ را رسم کنید ۳ نمره

۲۳۰۴- تابع $ax^2+by^2-2xy-4y=0$ مفروض است.

الف- a و b را طوری تعیین کنید که نقطه $M\left|\begin{matrix}4\\3\end{matrix}\right.$ نقطه ماکزیمم تابع باشد. ۲ نمره

ب- مختصات مرکز تقارن منحنی (C_1) نمایش تغییرات تابع فوق را بدست آورید.

ج- معادله قائم منحنی (C_1) را در نقطه $A\left|\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right.$ بنویسید. ۲ نمره

گروه فرهنگی هدف دسته B اسفند ۴۷

۲۳۰۵- مسأله اول- تابع $y=\frac{ax^2+b}{x^2+4-b}$ مفروض است.

اولا- مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که منحنی نمایش تابع مفروض از نقطه $M\left|\begin{matrix}-2\\3\end{matrix}\right.$ بگذرد. نیمساز ربع دوم و چهارم محانب آن باشد. ۲ نمره

۲۳۰۶- منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{4-x^3}{x^2}$ را رسم کنید ۴ نمره

ثانیاً- مساحت سطح محصور بین منحنی (C) و مجانب $y=-x$ آن و خط $x=-1$ و $x=a$ را حساب کنید $(a<-1)$ و حد این مساحت را وقتی که a بسمت $(-\infty)$ میل کند بدست آورید. ۳ نمره

ثالثاً- بوسیله محاسبه معین کنید در نقطه $B\left|\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right.$ چند مماس میتوان بر منحنی (C) رسم کرد؟ معادلات مماسها و مختصات نقاط تماس را پیدا کنید. ۴ نمره

۲۳۰۷- تابع زیر مفروض است. $(y-1)(y+2x-1)=1$

اولا- منحنی (C') نمایش تغییرات تابع مفروض را رسم کنید. ۵ نمره

ثانیاً- از روی منحنی (C') تعیین کنید بازاء چه مقادیری از m یکی از دو ریشه معادله زیر بین صفر و (-1) واقع میشود. $y^2+2(m-1)y-2m=0$ ۲ نمره

گروه فرهنگی هدف سه ماهه دوم

۲۳۰۸- تابع $y=\frac{x^2+ax+b}{b-x}$ مفروض است

مقادیر a و b را چنان تعیین کنید تا نقطه $\omega\left|\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right.$ مرکز تقارن منحنی تغییرات تابع مفروض شود. ۲ نمره

۳۳۰۹- منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{(x+1)^2}{1-x}$ را رسم کنید. ۳ نمره

۳۳۱۰- عدد ۱ − را با ریشه‌های معادله $x^2+(m+2)x+1-m=0$ مقایسه کنید و درستی نتیجه را از روی منحنی (C) تحقیق نمائید. ۲ نمره

۳۳۱۱- منحنی (C') نمایش تغییرات تابع $y=-4\pm\sqrt{-x^2+2x+15}$ را در همان دستگاهی رسم کنید که منحنی (C) رسم شده است ۲ نمره

ثانیاً- ثابت کنید بر روی خط $y=-4$ دو نقطه می‌توان یافت که اگر از هر یک از آنها دو مماس بر منحنی (C) رسم کنیم بر هم عمود می‌شوند ۳ نمره

۳۳۱۲- تابع $y=\sqrt{-x(ax+b)^2}$ مفروض است.

۱- مقادیر a و b را چنان تعیین کنید تا زاویه منحنی نمایش تغییرات تابع مفروض در نقطه $A\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.$ قائمه باشد. (منظور زاویه بین دو مماس بر منحنی است) ۲ نمره

۳۳۱۳- منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=\sqrt{-x(x+1)^2}$ را رسم کنید. ۳ نمره

ثانیاً- مساحت سطح محصور بین منحنی (C) و محور طولها را حساب کنید. ۲ نمره

دبیرستان هدف شماره ۴

۳۳۱۴- حجمی را که از دوران سطح محصور بین منحنی C نمایش تغییرات تابع $y=(x+1)^{12}\sqrt{2x+1}(3x+1)$ و محور xx' و محور yy' و خط D بمعادله $x=1$ را حول محور xx' بدست می‌آید محاسبه کنید.

۲- تابع $y=ax+b\pm\sqrt{x^2-2x-3}$ مفروض است a و b را طوری تعیین کنید که خط Δ بمعادله $y=2x$ مجانب مایل منحنی نمایش تغییرات تابع $y=ax+\sqrt{x^2-2x-3}$ در ناحیه اول محورهای مختصات باشد.

۳۳۱۵- جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x+1\pm\sqrt{x^2-2x-3}$ را رسم کنید و مختصات مرکز تقارن و محورهای تقارن این منحنی را بدست آورید.

۳۳۱۶- حد تابع زیر را در ازاء $x=0$ بدست آورید.

$$y=\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}$$

دبیرستان شماره ۴ هدف

۳۳۱۷- تابع $y=\frac{-2x}{1+x^2}$ مفروض است. اولاً- جدول و منحنی (C) نمایش تغییرات این تابع را رسم کنید. ثانیاً- ثابت کنید منحنی (C) سه نقطه عطف دارد که این سه نقطه در روی یک خط راست واقعند. ثالثاً- با دو عدد ۱ و ۱- ریشه‌های معادله درجه دوم $mx^2+2x+m=0$ را هم بوسیله رسم منحنی و هم بوسیله جدول مقایسه کنید.

۳۳۱۸- معادلهٔ قائم بر منحنی نمایش تغییرات معادله $x^2-2xy=4$ را از مبدا مختصات نوشته و مختصات پای قائم را بدست آورید.

۳۳۱۹- اولا بدون استفاده از مشتق ماکزیمم یا مینیمم منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{(1+x)}{x^2}$ بدست آورید. ثانیاً- جدول و منحنی نمایش تغییرات این تابع را رسم کنید. ثالثاً- بوسیله رسم منحنی در تعداد و علامات ریشه‌های معادله درجه سوم $mx^3-9(1+x)=0$ بحث کنید.

۳۳۲۰- مسأله اول { اولا ۲ نمره / ثانیاً ۳ نمره } مسأله دوم (۴ نمره) مسأله سوم { اولا ۲ نمره / ثانیاً ۳ نمره / ثالثاً ۳ نمره }

دبیرستانهای آذر سه ماهه اول

بر منحنی $y=\frac{2x+1}{x+2}$ از نقطه $A\begin{cases}2/1\\-2/3\end{cases}$ چند قائم می‌توان رسم کرد معادلات قائم را بنویسید.

۳۳۲۱- معادله درجه دوم $(E)x^2+ax+2=0$ و $(E')ax^2+x+2=0$ مفروض‌اند. اولا. حدود a را چنان تعیین کنید که هر دو معادله دارای ریشه‌های منفی باشند. ۱ نمره

ثانیاً- حدود a را چنان تعیین کنید که یکی از ریشه‌های معادله (E) محصور بین ریشه‌های معادله (E') باشد ۳ نمره

۳۳۲۲- تابع $y=\frac{ax^2+x+1}{x^2+bx}$ مفروض است. a و b را چقدر باشد که خط $x=\frac{-1}{2}$ محور تقارن منحنی باشد. ۲ نمره

۴- تابع $y=2x-\sqrt{mx^2+x}$ مفروض است. اولا- مقدار m را چنان معین کنید که منحنی مجانب موازی محور xها داشته باشد. ۲ نمره

ثانیاً- مقدار m را چنان معین کنید که مجانبهای مایل (غیر موازی) منحنی بر هم عمود باشند. ۳ نمره

۵ـ تابع $y=\frac{x^2+2x+1}{(x+1)^2}$ مفروض است تابع اولیه این تابع را چنان تعیین کنید که عرض از مبدأ مماس برمنحنی نمایش تغییرات آن در نقطه‌ای بطول صفر برابر $\frac{-1}{6}$ باشد

دبیرستان مروی اسفندماه ۳۶

۳۳۲۳ـ مسأله اول ـ تابع $y=\frac{x^2+ax+b}{x^2+x+1}$ مفروض است. اولاً ـ ضرائب a و b را بقسمی تعیین کنید که منحنی نمایش آن در نقطه‌ای بطول (۲ ـ) با خط (d) بمعادله $y=x+5$ مماس گردد. ثانیاً ـ جدول تغییرات منحنی (C) نمایش تابع $y=\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$ را رسم کنید. ثالثاً ـ از نقطه M بطول ۱ ـ واقع برمنحنی (C) دو مماس (غیر از مماس در این نقطه) میتوان برمنحنی مزبور رسم کرد مختصات نقاط تماس و معادلات خطوط مماس را بدست آورید و ثابت نمائید خطی که دو نقطه تماس را بهم وصل میکند در یکی از این دو نقطه قائم بر منحنی (C) میباشد. (اولا ۱/۵ نمره ، ثانیا ۳/۵ نمره . ثالثا ۳ نمره)

دبیرستان رهنما اسفند ۳۶

۳۳۲۴ ـ مسأله اول ـ تابع $y=\frac{ax+b}{(x-2)^2}$ مفروض است مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که منحنی محور y'y را در نقطه‌ای بعرض $-\frac{1}{2}$ قطع کرده و $x=-\frac{1}{3}$ طول نقطه می‌نیمم باشد. ثانیاً ـ جدول و منحنی تغییرات تابع $y=\frac{2x-2}{(x-2)^2}$ را رسم کرده و بکمک آن در وجود و علامت ریشه‌های معادله $m=\frac{2x-2}{(x-2)^2}$ بحث کنید.

مسأله دوم ـ تابع ضمنی $y^2-2x(x+1)+x+2=0$ مفروض است بازای چه مقادیری از x برای y مقدار حقیقی بدست می‌آید. ثانیاً ـ در محل تلاقی منحنی تابع بالا با محور x'x مماس برمنحنی رسم میکنیم معادله این خط مماس را بنویسید.

۳۳۲۵ـ جدول منحنی تغییرات تابع $y=x+1+\sqrt{x^2+x-2}$ را رسم کنید.

۳۳۲۶ـ توابع اولیه تابعهای زیر را بدست آورید .

$$y=\frac{2x}{(2x-1)^2}$$

$$y=\sin^2 x+\cos^2 x\, g x$$

دبیرستان کیهان سهمیاهه اول

۴۳۲۷- تابع $y = \frac{x+1}{(x-1)^2}$ مفروض است ملحنی‌های محدب ومقعر ومختصات نقطه‌عطف آنرا تعیین کنید درنقطه عطف مماس برمنحنی رسم میکنیم مختصات نقاط تلاقی مماس بامنحنی را تعیین کنید. ۳ نمره

۴۳۲۸- تابع $y = \frac{2}{x^2+1}$ مفروض است ازمبدأ مختصات قائمهائی برآن رسم میکنیم معادلات آنها را تعیین کنید. ۶ نمره

۴۳۲۹- تابع $y = \frac{(x-1)^2}{x^2-2x}$ مفروض است خط $y = m$ منحنی تابع را درنقاط A وB وخط $x = 4$ را درنقطه C قطع میکند مختصات نقطه D مزدوج توافقی C را نسبت به A وB تعیین کرده ومعادله مکان هندسی آنرا بنویسید. ۶ نمره

دبیرستان ملی سهند دیماه ۴۷

۴۳۳۰- a وb را بقسمی تعیین کنید که بازاء $x = \frac{1}{2}$ مقدار تابع $y = \frac{x^2-1}{ax^2-(b+2)x+b}$ برابر $-\infty$ گردد. ۲ نمره

۴۳۳۱ جدول تغییرات وتابع منحنی نمایش هندسی تابع $y = \frac{(2x+1)^2(x-1)}{(2x-1)^2}$ را رسم کنید. ۴ نمره

۴۳۳۲ - تابع $y = \frac{ax^2+bx^2}{(x-2)^2}$ مفروض است a وb را بقسمی تعیین کنید که منحنی تابع فوق درنقطه‌ای بطول $x = 1$ برمنحنی تابع $y = -x^2+9x-6$ مماس باشد

۴۳۳۳- معادلات مماس وقائم برمنحنی تابع $x^2y-2y^2+xy-3=0$ را درنقاطی بعرض ۱ بنویسید. ۲/۵ نمره

۴۳۳۴ - تابع $y = \frac{x+a}{x^2+2}$ مفروض است a را بقسمی تعیین کنید که مقدار ماکزیمم یا مینیمم تابع برابر $\frac{1}{3}$ باشد. ۲/۵ نمره

۴۳۳۵- جدول تغییرات و منحنی نمایش هندسی تابع $y = \frac{x^2-2x}{(x+1)^2}$ را

رسم کنید . ۳/۵ نمره

۳۳۶ - b و a را بقسی تعیین کنید که معادله مجانب مایل تابع $y = ax + 2 - \sqrt{x^2 + bx}$ مربوط بشاخه $x = -\infty$ برابر $y = 2x - 1$ باشد

دبیرستان زاگرس — سه ماهه دوم

۳۳۷ - مسئله اول - تابع $y = \frac{ax+1}{x^2-2}$ مفروض است .

۱- ثابت کنید که تمام منحنی‌های تابع فوق با اراء جمیع مقادیر a از نقطه ثابت A مرور میکنند. مختصات این نقطه را پیدا کنید ۱/۵ نمره

۲- اگر c_1 و c_2 دو منحنی نظیر دو مقدار متمایز a_1 و a_2 باشند، ثابت کنید:

الف- در منحنی مزبور نقطه مشترک دیگری غیر از A ندارند و نیز در نقطه A میتوانند برهم مماس باشند ۲ نمره

ب - شرط آنکه در منحنی مزبور از نقطه A نسبت بهم قائم باشند این است که : $a_1 a_2 = -4$ باشد. ۲ نمره

۳- در حالتی که تابع فوق دارای نقطه کزیمم و مینیمم نیست، تحقیق کنید که مجموع این دو مقدار بستگی به a ندارد و نیز تحقیق کنید کدام از این دو مقدار بزرگتر از دیگری است.

۴- مقدار a را طوری تعیین کنید تا منحنی نظیر تابع فوق محور طولها را در نقطه‌ای بطول ۰/۲ قطع کند. ۲ نمره

۳۳۸ - منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y = \frac{-5x+1}{x^2-2}$ را رسم کنید ۳ نمره

ثانیاً - در معادله $mx^2 + 5x + m + 1 = 0$ حدود m را طوری تعیین کنید تا فقط یک ریشه آن بین اعداد ۱ — و ۳ قرار گیرد و بعد . از روی منحنی (C) ریشه‌های معادله را با اعداد ۳ و ۱ — مقایسه کنید . ۴ نمره

ثالثاً - خط $y = mx$ منحنی (C) را عموماً در سه نقطه قطع میکند. مقدار m را طوری تعیین کنید تا خط مزبور در نقطه‌ای بطول $\frac{-1}{6}$ بر منحنی مماس شود . مختصات نقطه تلاقی دیگر این خط را با منحنی پیدا کنید . ۲ نمره

۳۳۹ - توابع اولیه تابع $y = 3x^2 + \frac{1}{x^2} + \sqrt{2x+3}$ را بدست آورید و از میان آنها آنرا انتخاب کنید که منحنی نمایش آن از نقطه $M \left| \begin{matrix} -1 \\ \frac{1}{3} \end{matrix} \right.$ بگذرد. ۲ نمره

دبیرستان شاهپور شیراز نلشدوم

۲۳۴۰ـ تابع $y=\frac{x^2+ax}{x^2-a}$ مفروض است. اولاً ـ ثابت کنید که منحنی‌های تابع فوق بازاء جمیع مقادیر a دریك نقطه ثابت بریك خط ثابت مماسند. ثانیاً ـ ثابت کنید که مکان هندسی نقاط ماکزیمم و می‌نیمم این تابع خطی است مستقیم معادله این خط را بدست آورید ثالثاً ـ a را بقسمی پیدا کنید که اگر ازمبدأ مختصات دو خط برمنحنی نمایش آن مماس کنیم (غیر از مماس درمبدأ) تانژانت زاویه بین دو خط مماس برابر با $-\frac{8\sqrt{3}}{11}$ گردد:

۲۳۴۱ـ منحنی (c) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x^2-3x}{x^2-3}$ را رسم کنید و از روی منحنی c ریشه‌های معادله $(m-1)x^2+3x+3m=0$ را با دو عدد ۳ ـ و ۱ مقایسه کنید و نتیجه را در جدولی بنویسید. ثانیاً ـ تحقیق کنید که منحنی (c) دارای سه نقطه عطف واقع بریك خط راست می‌باشد معادله این خط را بدست آورید و درهمان دستگاه مختصات منحنی (c) رسم کنید.

۲۳۴۲ـ منحنی و جدول تابع اسم زیر را رسم کنید :

$$y=x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x-2}$$

و اندازه حجمی را که از دوران سطح محور بین منحنی و محور xها و خطوط $x=1$ و $x=2$ حول محور xها حاصل می‌شود بدست آورید.

دبیرستانهای آذر سه‌ماهه اول

۲۳۴۳ـ تابع $y=\frac{x^2+a}{x^2+bx+1}$ مفروض است ضرایب a و b را چنان تعیین کنید که تابع دارای ماکزیمم و می‌نیمم برابر $\frac{4}{3}$ و ۰ باشد.

۲۳۴۴ـ منحنی (c) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x^2}{x^2+x+1}$ را رسم کنید

ثانیاً ـ معادله خطی را که از سه نقطه عطف منحنی (c) میگذرد بنویسید. ۳۷ ـ ۹۸ ـ ا

ثالثاً ـ معادله درجه دوم $(m-1)x^2+mx+m=0$ مفروض از روی شکل منحنی در وجود و علامت ریشه‌های معادله درجه دوم فوق برحسب مقادیر مختلف m بحث کنید.

رابعاً ـ درحالتیکه خط $y=m$ منحنی (c) را در دو نقطه A و B قطع می‌کند

چنانچه تساویر این نقاط را روی محور xها نقاط A' و B' می‌نامیم تحقیق کنید همواره نقطه ثابتی مانند P روی محور xها می‌توان یافت بطوریکه $PA' \times PB'$ مقدار ثابتی باشد طول نقطه P و همچنین مقدار ثابت را مشخص کنید.

۲۳۴۵ـ تابع $y = x \pm 2\sqrt{ax+b}$ مفروض است ضرائب a و b را چنان تعیین کنید که منحنی نمایش تابع فوق بر خطوط $x = 1$ و $y = 0$ مماس شود.

۲۳۴۶ـ بر منحنی $y^2 + x^2 - 2xy - 4x + 4 = 0$ از نقطه $M(-1, -2)$ چند مماس می‌توان رسم کرد معادلات مماسها و مختصات نقاط تماس را بدست آورید.

گروه فرهنگی بوعلی شماره ۱۰ ثلث دوم

۲۳۴۷ـ جدول و منحنی تابع $y = (x-1)^2(x+2)$ را رسم کنید. ثانیاً ـ ثابت کنید که از نقطه $A(\alpha, 0)$ بازاء بعضی مقادیر α که تعیین خواهید کرد سه مماس بر منحنی تابع فوق می‌توان رسم کرد که یکی از آنها بستگی بوضع نقطه A ندارد و معادله‌ای تشکیل دهید که ریشه‌هایش طول نقاط تماس دو مماس باشد سپس α را طوری بدست آورید که ۲ مماس عمود بر هم باشند

دبیرستان حکمت (قم) سه ماهه دوم

۲۳۴۸ـ تابع $y^2 = x(x-2)$ مفروض است. اولاً ـ ثابت کنید منحنی تابع فوق نقطهٔ Min یا Max ندارد (بااستفاده و بدون استفاده از مشتق). ثانیاً ـ منحنی نمایش تغییرات تابع فوق را رسم کنید. ثالثاً ـ معادلات خطوط مماس و قائم بر منحنی در نقطه $x = 3$ و با عرض مثبت را بنویسید.

دبیرستان خوارزمی شماره ۲ ثلث دوم

۲۳۴۹ـ توابع اولیه توابع زیر را بدست آورید.

$$\begin{cases} y_1 = x^{22}(5-x)^{100} \\ y_2 = (1-x)(1-2x)(1-3x) \\ y_3 = \dfrac{\sqrt{x^2+x^{-2}+2}}{x^5} \end{cases}$$

۲۳۵۰ـ تابع $y = \dfrac{7x^2+px+q}{x^2+2x-3}$ مفروض است. اولاً ـ مطلوبست تعیین p و q بشرطی که منحنی از مبدأ بگذرد و مماس در نقطه $(x = -4)$ افقی باشد. ثانیاً ـ منحنی (c) را با تعیین تمام خصوصیاتش رسم کنید (مجانبها ـ ماکزیمم و مینیمم‌ها نقاط تلاقی با محورهای و نقطه تلاقی با مجانب افقی و مماسهای نقاط تلاقی). ثالثاً ـ اگر A و B تساویر ماکزیمم و مینیمم روی محور x و c تصویر نقطه تلاقی منحنی با مجانب افقی روی x و p' و p'' تساویر نقاط تقاطع M' و M'' منحنی با خط $y = h$ باشند رابطه مستقلی از h بین x_0 و x'

ثلث اول. گروه فرهنگی کارون

۲۳۶۰- تابع $y = x^3 + 3x^2 + ax + 2$ مفروض است اولاً- a را چنان تعیین کنید که نقطه عطف منحنی روی محور طولها واقع باشد (۱ نمره) ثانیاً- a را چنان تعیین کنید که منحنی بر خط $y = 2$ مماس باشد (۱/۵ نمره) ثالثاً- بازاء $a = -6$ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع فوق را رسم کنید. (۲/۵ نمره)

۲۳۶۱- تابع $y = \frac{x^2 + bx - 4}{x + a}$ مفروض است a و b را چنان تعیین کنید که نقطه $O'(1, 2)$ مرکز تقارن منحنی نمایش تغییرات تابع فوق باشد (۲ نمره) و بازاء مقادیر بدست آمده منحنی نمایش تغییرات تابع فوق را رسم کنید (۴ نمره)

۲۳۶۲- تابع $y = \frac{x^2 + ax + b}{4 - x}$ مفروض است a و b را چنان تعیین کنید که بین x' و x'' طولهای نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع فوق روابط زیر برقرار باشد $x' + x'' = 8$ و $x'^2 x'' + x''^2 x' = 80$ برقرار باشد (۲/۵ نمره)

ثانیاً- بفرض $b = 2a$ معادله مکان هندسی نقطه h وسط خطی که نقاط ماکزیمم و می‌نیمم را بهم وصل میکند بدست آورید (۲/۵ نمره)

۲۳۶۳- اولاً- معادله مکان هندسی نقطه $M\left[\frac{1 + \sin^2\alpha}{1 + \sin\alpha} \text{ و } \frac{\sin\alpha(1 - \sin\alpha)}{1 + \sin\alpha}\right]$ را وقتی α تغییر میکند بدست آورید.

ثانیاً- در تابع $y = \frac{x^2 + ax + 2}{x + 3}$ مقدار a را چنان تعیین کنید که ماکزیمم تابع سه برابر می‌نیمم تابع فوق باشد

M می‌توان بر منحنی رسم کرد مختصات نقاط تماس و معادلات خطوط مماس را بدست آورید و ثابت کنید خطی که دو نقطه تماس را بهم وصل می‌کند در یکی از این دو نقطه قائم بر منحنی (c) میباشد. رابعاً- تحقیق کنید که منحنی دارای سه نقطه عطف است که بر یک استقامت واقعند معادله این خطوط را تعیین کنید. خامساً- بر خط $y = m$ بازاء بعضی از مقادیر m که تعیین میکنید منحنی (c) را در دو نقطه A و B قطع میکند اگر تصاویر این دو نقطه را روی محور xها A' و B' بنامیم ثابت کنید این دو نقطه نسبت بدو نقطه ثابت که تعیین میکنید مزدوج توافقی یکدیگرند.

دبیرستان فیروز بهرام سه‌ماهه دوم

۲۳۶۴- معادله منحنی $y = \frac{3mx^2 - mx + m^2}{x - m}$ مفروض است. ثابت کنید بازاء جمیع مقادیر مختلف پارامتر m این منحنی بر دو خط ثابت مماس است معادله این دو خط را بنویسید

۲۳۶۵- مکان هندسی نقطه $M(\frac{1+\cos t}{\cos t}$ و $\operatorname{tg} t)$ را پیدا کنید و مختصات مرکز تقارن این مکان را معین کنید.

دبیرستان محمد قزوینی (قزوین) سه‌ماهه دوم

۲۳۶۶ - در تابع $y = \frac{ax^2 + bx}{x^2 + cx + d}$ ، اولاً- a و b و c و d را چنان بیابید که منحنی نمایش تابع فوق دارای تنها یک مجانب قائم بمعادله $x = 2$ باشد و منحنی فوق محور طولها را در نقطه‌ای بطول ۴ قطع کند و با خط $y = -1$ در بی‌نهایت مماس شود. ثانیاً- تابع $y = \frac{4x - x^2}{(x-2)^2}$ را رسم کنید. ثالثاً- به کمک منحنی فوق ریشه‌های معادله $(m+1)x^2 - 4(m+1)x + 4m = 0$ را با اعداد ۱ - و ۳ مقایسه کنید. رابعاً- سطح محصور بین منحنی و محور طولها و دو خط $x = 1$ و $x = a$ $(a > 1)$ را حساب کنید و وقتی که a بسمت ۲ میل کند آیا سطح فوق دارای حدی خواهد بود.

دبیرستان مروی سه‌ماهه دوم

۲۳۶۷- در وجود و علامت ریشه‌های معادله $x^3 + (m-2)x^2 + 4 = 0$ برحسب مقادیر مختلف m بحث کنید و در حالتی که معادله دارای ریشه مضاعف است ریشه مضاعف و ریشه ساده آن را بدست آورید.

۲۳۶۸- $y = \sqrt{x^2 - 4x}$ را وقتی که $x \to \pm\infty$ بدست آورید و از اینجا نتیجه بگیرید که منحنی $y = x^2$ مجانب منحنی تابع $y = \sqrt{x^2 - 4x}$ می‌باشد.

طول‌های نقاط P' و P'' پیدا کنید و اثبات نمائید که دایره بقطر $P'P''$ عمود بر دایره به قطر AB است

۲۳۵۱ـ اگر $F(x)=a+bx$ باشد ثابت کنید .

$$F^{n(::)}=\overbrace{FFF\ldots F(x)}^{n\ \text{مرتبه}}=a\times\frac{b^n-1}{b-1}+b^n x$$

دبیرستان خوارزمی سه‌ماهه‌دوم

۲۳۵۲ـ تابع اولیه $y=\frac{2}{\sqrt{2\cos^2 x}\sqrt{\sin 2x}}$ را چنان بیابید که بازاء $x=\frac{\pi}{4}$ مقدار تابع اولیه برابر $\frac{16}{5}$ گردد.

دبیرستان دانش و هنر (مشهد) سه‌ماهه‌دوم

۲۳۵۳ـ تابع $y=\frac{3x}{ax^2+b}$ مفروض است. اولاـ a و b را قسمی تعیین کنید که منحنی تابع در نقطه $A(1,1)$ ماکزیمم یا مینیمم باشد .

ثانیاً ـ جدول و منحنی (c) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{3x}{x^2+2}$ را رسم کنید. ثالثاً ـ منحنی را با خط $y=m$ قطع می‌کنیم. «الف» ـ اگر x_1 و x_2 و x_3 طولهای نقاط برخورد باشند رابطه چنان تعیین کنید که رابطه $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{4}{x_3}=0$ برقرار باشد.

«ب» ـ برحسب مقادیر مختلفه m در وجود و علامت طول‌های نقاط تلاقی بحث کنید در حالتیکه $y=m$ بر منحنی مماس است مختصات نقطه تماس و نقطه تلاقی را بدست آورید .

ج ـ سطح محصور بین منحنی و محور طولها و دو خط $x=0$ و $x=1$ را حول محور $x'x$ دوران می‌دهیم اندازه حجم حاصل را بدست آورید.

دبیرستان رازی (شیراز) سه‌ماهه‌دوم

۲۳۵۴ـ تابع $y=\frac{3-2x}{(21-x)^2}$ مفروض است . اولاـ منحنی تغییرات آنرا رسم کنید و به کمک رسم منحنی ریشه‌های معادله زیر را با اعداد $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ ـ مقایسه کنید

$$2mx^2-2x(2m-1)+2m-3=0$$

ثانیاً ـ خط $y=m$ بازاء بعضی از مقادیر m منحنی را در نقاط A و B قطع میکند

۲۳۵۵ـ تابع $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ مفروض است بدون تشکیل Δ ثابت کنید که معادله $f'(x)=x$ دارای دو ریشه است .

دبیرستان رهنما سه‌ماهه دوم

۲۳۵۶ـ منحنی (c') بمعادله $y^2-2y(x+1)-2x-3=0$ مفروض است.
اولاـ خطی بمعادله $y=3x+\lambda$ بازاء جمیع مقادیر λ منحنی (c') رادر نقاط A و B قطع میکند مکان هندسی نقطه E وسط AB را بازای جمیع مقادیر λ بدست آورید (معادله‌اش را بنویسید). ثانیاـ در نقطه‌ای به عرض ۲ واقع بر منحنی c' قائمی بر آن رسم شده است معادله آنرا بنویسید. ثالثاـ اگر ω مرکز تقارن منحنی (c') باشد مختصات ω را بدست آورید

دبیرستان فارابی سه‌ماهه دوم

۲۳۵۷ـ مطلوبست بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله درجه سوم زیر برحسب مقادیر مختلف m :

$$27(m+2)x^3+27(m+1)x^2-4(2m+1)=0$$

۲۳۵۸ ـ مطلوبست تابع اولیه توابع زیر :

$$y=\frac{2x^3-9x^2+21x-18}{(x^2-3x+5)^2}$$

$$y=21\sin^6 x\cos^2 6x-28\cos^6 x\sin^2 6x+32\sin^6 6x+32\cos^2 6x$$

گروه فرهنگی فرگام سه‌ماهه دوم

۲۳۵۹ـ تابع $y=\frac{x^2+ax+b}{x^2+x+1}$ مفروض است .

اولاـ a و b را طوری تعیین کنید که منحنی نمایش آن در نقطه‌ای بطول (-2) بر خط $y=x+5$ مماس گردد. ثانیاـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع (c) $y=\frac{(x-1)^2}{x^2+x+2}$ را رسم کنید.
ثالثاـ از نقطه M بطول (-1) واقع بر منحنی (c) دو مماس غیر از مماس در نقطه

۲۳۶۹- درتابع $y=\frac{x^2+2x+a}{x^2-3x+b}$ مقادیر a و b را به‌قسمی تعیین کنید که اگر نقطه A ماکزیمم و نقطه B می‌نیمم منحنی تابع فوق باشند معادله خط AB بصورت $y=2x-4$ گردد.

دبیرستان اندیشه ثلث اول

۲۳۷۰- درتابع $y=\frac{(a-1)x+8}{x^2}+\frac{b}{2(x-1)^2}$ مقادیر a و b را چنان پیدا کنید که ماکزیمم یا می‌نیمم آن بر نقطه $A\left|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right.$ منطبق شود. ثانیاً- منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{8}{x^2}-\frac{1}{(x-1)^2}$ را رسم کنید. ثالثاً- جهت تقعر منحنی تابعی که رسم کرده‌اید پیدا کنید. رابعاً- معادله $\frac{8}{x^2}-\frac{1}{(x-1)^2}=1$ را حل کنید.

۲۳۷۱- اولا درو جود و علامت طول‌های نقاط تلاقی دو تابع زیر بحث کنید و در حالتی که برهم مماس‌اند مختصات نقاط مشترک را پیدا کنید:

$$\begin{cases} y=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+\frac{5}{2} & (c) \\ y=-\frac{3}{2}x^2-3x+10 & (c') \end{cases}$$

ثانیاً- بازاء $m=-\frac{1}{2}$ منحنی نمایش تغییرات دو تابع را رسم کنید و معادله مماس بر منحنی (c) را در نقطه‌ای که مرکز تقارن آنست پیدا کنید.

دبیرستان آذر شماره ۱ ثلث دوم

۲۳۷۲- a و b را در تابع $y=\sqrt{\frac{ax^2+bx}{x+3}}$ چنان تعیین کنید که خط مجانب منحنی y در شاخه $-\infty$ خط $y=-x+1/5$ شود.

۲۳۷۳- تابع $y=x^2+bx+\frac{4}{x}$ مفروض است مقدار b را چنان تعیین کنید که منحنی آن در نقطه‌ای بطول ۲ می‌نیمم داشته باشد.

۲۳۷۴ـ منحنی نمایش $y = x^2 - 3x + \frac{4}{x}$ را رسم کنید.

۲۳۷۵ـ اولا جدول تغییرات ومنحنی نمایش تابع $y = \frac{x-1}{4x^2-4x+1}$ راتعیین ورسم کنید .

۲۳۷۶ـ علامت وریشه عبارت $x+2+\sqrt{-x^2-4x}$ را بدست آورید.

۲۳۷۷ـ جدول تغییرات ومنحنی $y = x - \sqrt{-x^2-4x}$ را تعیین ورسم کنید.

دبیرستان ادیب ثلث دوم

۲۳۷۸ـ تابع $y = \frac{ax^2+bx-9}{x^2+cx+d}$ مفروض است ضرایب a و b و c و d را طوری تعیین کنید که خطوط $x = 0$ و $x = 2$ مجانبهای منحنی فوق بوده ومنحنی در نقطه $A(2,3)$ ماکزیمم یا می‌نیمم باشد.

۲۳۷۹ـ جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع (c) $y = \frac{x^2+2x-9}{x(x-2)}$ را رسم کنید .

ثانیاً در تعداد نقاط برخورد خط $y = k$ بامنحنی (c) از روی شکل بحث کنید و نتیجه‌را درجدولی بنویسید.

ثالثاً ـ اگر نقاط بر خورد خط $y = k$ بامنحنی (c) M_1 و M_2 فرض شود ونیز تصاویر این نقاط روی محور xها به‌ترتیب H' و H''، نقطه‌ای روی محور xها تعیین کنید که همواره حاصلضرب $PH' \cdot PH''$ مقدارثابتی باشد.

رابعاً ـ مکان هندسی نقطه N اوساط قطعه خطهای M_1M_2 را تعیین کنید.

خامساً ـ معادله‌درجه‌دومی تشکیل‌دهید که ریشه‌هایش ضریب‌زاویه‌های OM_1 و OM_2 باشد چه‌وقت این دوخط درزاویه O قائمه می‌شوند.

سادساً ـ درقسمت (۶) بمعادله‌ای بصورت $k^3 - k^2 + 9 = 0$ برمیخورید آنرا تعیین کنید این معادله درجه‌سوم دارای چند جواب است وبخصوص جهت تحدب وتقعر منحنی بمعادله $y = x^3 - x^2 + 9$ را تعیین نمائید.

۲۳۸۰ـ مطلوبست محاسبه توابع اولیه تابع

$$y = 2\sin 3x \sin x + \sqrt{3x-1} + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$$

دبیرستان البرز ثلث دوم

۲۳۸۱- تابع $y=\frac{x^2}{x^2-4x+\lambda}$ مفروض است در این تابع P و Q نقاط تلاقی مجانبها گرفته شده است مثلث SOR را در نظر میگیریم (O مبدأ مختصات و نقطه R وسط پاره‌خط PQ و S ماکزیمم و می‌نیمم تابع میباشند.

اولا ـ مکان هندسی نقطه G مرکز ثقل این مثلث را وقتی که پارامتر λ تغییر کند بدست آورید.

ثانیاً ـ مطلوبست تعیین λ در صورتی که مثلث مزبور در راس O قائم‌الزاویه باشد و در این وضع قوت نقطه K بعرض ۵ — واقع بر محور عرضها را نسبت بدایره محیطی این مثلث محاسبه کنید.

ثالثاً ـ بازاء $\lambda=3$ جدول تغییرات و منحنی نمایش تابع را رسم کنید.

رابعاً ـ از تابع نمایش منحنی مزبور تابع دیگری بصورت

$$f(x)=\frac{y'}{y^2}$$ تشکیل میدهیم

مطلوبست تعیین $F(x)$ تابع اولیه $f(x)$ در صورتی که $F(1)=2$ باشد.

خامساً ـ از نقطه K خط D باضریب زاویه $m=tg\theta>0$ رسم شده و منحنی را در نقطه متمایز A و B و C تلاقی کرده است فرض می‌کنیم $\overline{KA}=a$ و $\overline{KB}=b$ و $\overline{KC}=c$ باشد مطلوبست تعیین θ در صورتی که داشتن باشیم.

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{1}{3}$$

دبیرستان پهلوی ساری ثلث دوم

۲۳۸۲- تابع $y=\frac{mx^3}{mx^2-(m^2+1)x+m}$ منحنی (c) مفروض است

اولا ـ مکان هندسی نقاط تلاقی مجانبهای تابع (c) را بدست آورید و از آن خاصیتی را ذکر کنید و مقدار m را تعیین نمائید وقتی که مجانبها در یک نقطه همدیگر را قطع کنند در اینصورت چه وضعی بوجود می‌آید.

۲۳۸۳- جداول تغییرات و منحنی‌های توابع

$$(c)y=\frac{x^3}{(x-1)^2} \quad \text{و} \quad (c')y=2x+\frac{1}{x}$$

را در دستگاه مختصات جداگانه رسم کنید.

ثانیاً ـ فقط با استفاده از رسم منحنی اعداد ۱و۲ — را با ریشه‌های معادله

$x^3 - mx^2 + 2mx - m = 0$ مقایسه کنید نتیجه‌را درجدولی نشان‌دهید.

ثالثاً ـ اگر D بمعادله $y = ax + b$ منحنی (c') را درنقاط M و N قطع کند مکان‌هندسی نقطه P وسط MN را برحسب a بدست‌آورید بنابرآنکه b تغییر کند و حدود تغییرات b را تعیین کنید.

رابعاً ـ اگر $b = 2a$ باشد و خط D محورعرضهارا درنقطه A قطع کندمکان‌هندسی نقطه B مزدوج‌توافقی نقطه A را نسبت‌بدو نقطه M و N بدست آورید.

خامساً ـ مساحت $S = a\sqrt{\frac{a+2}{a-2}}$ مثلث OMN را حساب کنید ومقدارa را تعیین نمائید $(b = 2a)$

سادساً ـ مکان‌هندسی نقطه $c(2\sqrt{ab}, b)$ را بدست‌آورید وقتی‌که خط D برمنحنی (c') مماس باشد ثابت‌کنید این مکان همان‌مکان‌هندسی نقاطی است که میتوان‌دومماس‌عمود برهم برمنحنی (c') رسم کرد دراین‌صورت منحنی مکان فوق را رسم کنید.

۲۳۸۴ـ منحنی نمایش تغییرات‌تابع $y^2(x-2)^2 = x^2(x+2)$ را رسم نمائید

دبیرستان بابکان ثلث‌دوم

۲۳۸۵ـ تابع $y = \frac{2x + m - 1}{x^2 - m}$ مفروض‌است.

«الف» : حدود m را چنان‌معلوم کنید که‌منحنی توابع دارای‌ماکزیمم‌ومی‌نیمم‌شود.

«ب» : مطلوبست مقدار m تا می‌نیمم‌تابع ۴ برابرماکزیمم‌تابع باشد.

«ج» : m را طوری بدست‌آورید تا خط مماس‌درنقطه تلاقی‌منحنی‌بامحورعرضهازاویه 135° با محورطولها بسازد.

۲۳۸۶ـ تابع $y = \frac{2x - 5}{x^2 - 4}$ مفروض است.

«الف» : منحنی نمایش تغییرات تابع را رسم کنید

«ب» : دروجود وعلامت ریشه‌های معادله درجه‌دوم $mx^2 - 2x - 4m + 5 = 0$ به‌کمک رسم‌منحنی تابع سئوال الف بحث کرده‌وریشه‌های‌معادله‌را بااعداد ۱ ـ و ۳ مقایسه کنید

۲۳۸۷ـ منحنی نمایش تغییرات توابع $xy^2 = (x-2)^3$ را رسم کنید.

۲۳۸۸ـ دروجودریشه‌های‌معادله‌درجه‌سوم $x^3 - 6x^2 + 2(m+2)x - 2m = 0$ برحسب مقادیر مختلف m بحث کنید درحالتیکه معادله دارای ریشه مضاعف است مقدار ریشه‌های معادله‌را محاسبه کنید.

دبیرستان بدر سیرجان ثلث‌دوم

۲۳۸۹ـ اولا مرکز تقارن منحنی‌بمعادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ را پیدا کنید.

ثانیاً- معادلات قائمهائی را کمی توان از نقطه $A(۲-و۳)$ برمنحنی رسم کرد بنویسید.

۲۳۹۰- معادله $(m-۱)x^۲-۲mx+m-۳=۰$ مفروض است مطلوبست تعیین مقادیر m بقرطی که معادله مفروض اولا یك ریشه بین ۱+و۱- وثانیاً دو ریشه بین آنها داشته باشد.

۲۳۹۱- تابع $y=\frac{mx-۲m}{x^۲-۲m}$ مفروض است.

الف- ثابت کنید بازاء جمیع مقادیر m منحنی نمایش تغییرات تابع فوق بر خط ثابتی که معادله‌اش را تعیین خواهید کرد مماس است مختصات نقطه تماس و نقطه برخورد خط فوق را با منحنی تعیین کنید.

«ب» : ثابت کنید مکان هندسی نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع هر گاه m تغییر کند همواره روی خطی مستقیم قرار دارد و همچنین ثابت کنید بازاء جمیع مقادیر m نقاط عطف تابع فوق همواره روی خطی که معادله‌اش را تعیین می کنید جا دارد.

«ج» بازاء $m=-۶$ منحنی را رسم کنید.

۲۳۹۲ جدول و منحنی تابع $y=\frac{x-۱}{\sqrt{x^۲-۲x-۳}}$ را رسم کنید و سطح محصور بین منحنی وخطوط $y=۱$ و $x=۴$ و $x=a>۴$ را برحسب a حساب کنید وحد این سطح را وقتی که x بسمت $+\infty$ میل کند بدست آورید.

۲۳۹۳- تابع $y=\frac{mx^۲-۲x+m}{x^۲+۵x+۴}$ مفروض است مقدار m را طوری تعیین کنید که تابع همواره نزولی باشد آیا مقادیری برای m میتوان یافت که در ازاء آنها تابع همواره صعودی گردد ؟

«ب» : اگر خط $y=k$ منحنی را در نقاط M و M' ومحور oy را در نقطه A قطع کند مختصات نقطه B مزدوج توافقی A را نسبت به M و M' پیدا کنید.

دبیرستان دین ودانش ثلث دوم

۲۳۹۴- ثابت کنید دو منحنی $\frac{x^۲}{۱۸}+\frac{y^۲}{۱۸}=۱$ و $x^۲-y^۲=۵$ همدیگر را بزاویه قائمه قطع میکنند

۲۳۹۵- a و b را طوری بیابید که خط $y=۲x+۲$ مجانب منحنی $y=\frac{ax^۲+bx-۷}{x-۱}$ باشد.

۲۳۹۶ـ مکان هندسی نقاطی را بیابید که از آنها بتوان دو مماس عمود بر هم بر منحنی $y=\frac{2x^2+x-7}{x-1}$ رسم نمود.

۲۳۹۷ ـ تابع $y=\frac{x^3}{x^2-1}$ مفروض است ثابت کنید بین طول‌های سه نقطه از این منحنی که بر یك استقامتند. رابطه‌ای مستقل از پارامتر وجود دارد از روی این رابطه نقطه عطف منحنی را بدست آورید.

۲۳۹۸ـ تابع $y=\frac{x-2}{x^2-1}$ مفروض است. بدون استفاده از مشتق ماکزیمم و می‌نیمم تابع فوق را معین کرده معلوم کنید کدام یك ماکزیمم و کدام یك می‌نیمم است. ثانیاً ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع فوق را رسم نمائید. ثالثاً ـ هر خط $y=k$ ممولا منحنی را در دو نقطه M_1 و M_2 قطع می‌کند معادله درجه دومی که طول‌های این نقاط را می‌دهد تشکیل دهید و رابطه مستقل از k را بین x' و x'' طول‌های این نقاط بدست آورید بکمك این رابطه مزدوج توافقی تساویر M_1 و M_2 را روی محور xها پیدا کنید

۲۳۹۹ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\mp\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ را رسم نمائید و حجم حادث از دوران منحنی فوق را در حول محور xها بر حسب π محاسبه نمائید.

دبیرستان رهنما ثلث دوم

۲۴۰۰ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع ذیل را رسم کنید :

$y=2x+4\pm\sqrt{2x+4}$

۲۴۰۱ـ توابع اولیه تابع $y=x^3-x-2$ را معین کنید و از میان آنها آنرا انتخاب کنید که مماس بر تابع در نقطه‌ای بطول ۲ از مبداء مختصات بگذرد.

۲۴۰۲ـ تابع $y=\frac{x^2-x-m}{x+m}$ مفروض است.

اولا بدون استفاده از مشتق ثابت کنید که بازاء چه مقدار از m تابع دارای یك ماکزیمم یا می‌نیمم می‌باشد. ثانیاً ـ مکان ماکزیمم و می‌نیمم تابع فوق را وقتی که m تغییر میکند بدست آورید. ثالثاً ـ m را طوری محاسبه کنید تا عرض نقطه تقارن ۷ ـ شود و سپس بازاء این مقدار تابع فوق را رسم کنید.

رابعاً ـ فقط از روی شکل منحنی ریشه‌های معادله درجه دوم

$x^2-(m+1)x-3(m+1)=0$ را با اعداد ۳ و ۳ ـ مقایسه کنید.

۲۴۰۳- دروجود وعلامت ریشه‌های معادله‌درجه‌سوم $x^3-3mx+m+1=0$ بازاء مقادیر مختلف m بحث کنید.

دبیرستان علوی ثلث‌دوم

۲۴۰۴- تابع $y=\frac{x^2-mx}{x^2-mx+2}$ مفروض است اولا بدون استفاده ازمشتق ثابت کنید که منحنی‌دارای یک‌ماکزیمم‌ویک‌مینیمم است‌ومکان‌هندسی‌نقاط ماکزیمم ومینیمم‌راوقتی که m تغییر می‌کندبنویسید.

ثانیاً- مقادیر m را طوری تعیین کنید که‌عرض مینیمم ۲ برابر طولش باشد.

ثالثاً- جدول ومنحنی نمایش تغییرات $y=\frac{x^2-2x}{x^2-2x+2}$ را رسم کنید.

رابعاً- دروجود وریشه‌های معادله $(\lambda-1)x^2-2(\lambda-1)x+3\lambda=0$ با -1 و ۲ بحث کنید ونتیجه‌را بامنحنی مقایسه کنید :

۲۴۰۵- درمنحنی $y=2\pm\sqrt{-x^2+2x}$ و $y=\pm2\sqrt{2x-x^2}$ مفروض است. اولا- جدول ومنحنی نمایش تغییرات دوتابع‌را در یک‌دستگاه محور مختصات رسم کنید. ثانیاً- تحقیق کنید که از یکی ازنقاط تقاطع‌دومنحنی اگر دومماس بردومنحنی‌رسم کنیم با محور xها مثلث‌متساوی‌الساقین‌می‌سازد.

دبیرستان فخرالدین گرگان ثلث‌دوم

۲۴۰۶- تابع $y=\frac{x^2+ax+1}{x^2+b}$ ونقطه $M(a,b)$ مفروض‌است .

اولا- معادله‌مکان نقطه M را وقتی که a و b تغییر می‌کنندچنان‌پیدا کنید که‌حاصلضرب ماکسیمم‌ومینیمم تابع برابر $\frac{1}{4}$ باشد.

ثانیا- a و b را طوری پیدا کنید که منحنی‌تابع‌فوق‌روی محور yها بر خط $4y+2x=-1$ مماس‌شود.

ثالثاً- منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{(x+1)^2}{x^2-4}$ را رسم کنید.

رابعاً- خط $y=m$ عموماً منحنی‌c‌را دردونقطه قطع‌میکند ثابت‌کنید این‌نقاط‌تلاقی وتساوبر نقاط ماکسیمم ومینیمم‌منحنی(c) روی خط $y=m$ تشکیل تقسیم توافقی‌می‌دهند.

خامساً- ازروی منحنی c ریشه‌های‌معادله $(m-1)x^2-2x-4m-1=0$ را با اعداد یک‌و۳ — مقایسه‌کرده نتیجه‌را درجدولی‌ثبت نمائید.

سادساً- معادله خط قائم بر منحنی c را در نقطه تلاقیش با محور yها بنویسید.

۲۴۰۷- تابع $y = ax + \sqrt{b^2x^2 - 2x}$ مفروض است.

اولا- a و b را چنان پیدا کنید که در ازاء $x = -\infty$ حد تابع برابر یك گردد.

ثانیاً- جدول تغییرات و منحنی تابع $y = x \pm \sqrt{x^2 - 2x}$ را رسم کنید.

دبیرستان فردوسی ثلث دوم

۲۴۰۸- منحنی نمایش تابع y از x را که رابطه زیر بین آنها برقرار است رسم کنید.

$$y^2 - 6xy + 5x^2 + 4 = 0$$

۲۴۰۹- تابع اولیه زیر را بدست آورید $y = \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 1}}$

۲۴۱۰- تابع $y = \frac{x(x-m)}{(x+m)^2}$ مفروض است.

«الف»: مقدار m را طوری تعیین کنید تا منحنی نمایش تابع در مبدأ مختصات بر خط $y = -x$ مماس شود.

«ب»: منحنی (c) نمایش تابع $y = \frac{x(x-1)}{(x+1)^2}$ را رسم نموده و نقطه عطف و سوی تقعر آنرا معین کنید.

«ج»: بکمك منحنی (c) ریشه‌های معادله:

$(m-1)x^2 + (2m+1)x + m = 0$ را با اعداد $(+1$ و $-1)$ مقایسه کنید.

«د»: از نقطه $M(\alpha$ و $-1)$ مماسی بر منحنی (c) رسم شده است اگر طول نقطه تماس را β فرض کنیم تحقیق کنید β ریشه معادله درجه سوم زیر است:

$2\beta^3 + 3(1+\alpha)\beta + 1 - \alpha = 0$ و در ازاء $\alpha = -3$ معادله درجه سوم فوق دارای یك ریشه ساده و یك ریشه مضاعف است مقدار آنها را حساب کنید.

دبیرستان فیروز بهرام ثلث دوم

۲۴۱۱- تابع $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + b'x + c'}$ مفروض است.

اولا- ضرایب a و b' و c' را چنان تعیین کنید که خطوط $y = 1$ و $x = 0$ و $x = 3$ مجانبهای منحنی باشند. ثانیا- تحقیق کنید برای آنکه $x = 2$ طول نقطه ماکزیمم یا مینیمم باشد باید رابطه $c + 4(b+3) = 0$ برقرار باشد.

ثالثاً- با استفاده از رابطه فوق مختصات نقاط ماکزیمم و مینیمم را پیدا کنید و برحسب مقادیر مختلف b ماکزیمم منحنی را از مینیمم آن تشخیص دهید. رابعاً- منحنی نمایش تغییرات

تابع $y=\frac{(x-2)^2}{x-1}$ را رسم کنید. خاصاً از روی شکل در وجود و علامت ریشه‌های معادله زیر بحث کنید. همچنین اعداد ۱ — و ۳ را با ریشه‌های معادله زیر (از روی شکل) مقایسه کنید.

$$x^2-(m+4)x+(m+4)=0$$

سادساً. از نقطه M بطول (۱ —) واقع بر محور xها خطی با ضریب زاویه m رسم کنیم در تقاطع این خط و منحنی بحث کنید در حالتیکه خط منحنی را در دو نقطه A و B قطع کند مکان هندسی نقطه C وسط پاره‌خط AB را بدست آورید.

۲۴۱۲ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع $y^2-2xy-4y+4=0$ را رسم کنید

۲۴۱۳ـ در تعداد و علامت ریشه‌های معادله درجه سوم زیر بر حسب مقادیر مختلف m بحث کنید و ریشه مضاعف و ساده را بدست آورید.

$$m(m-2)x^3-3mx^2+1=0$$

دبیرستان نظام ثلث دوم

۲۴۱۴ـ تابع $y=\frac{x^2+ax+b}{x+c}$ مفروض است.

اولاً ـ مقادیر a و b و c را طوری تعیین کنید تا خط $x=-1$ مجانب منحنی بوده و تابع دارای ماکزیمم و مینیمم برابر ۶ و ۶ — باشد.

ثانیاً ـ منحنی نمایش تغییرات تابع (c) بمعادله $y=\frac{x^2+2x+10}{x+1}$ را رسم کنید.

ثالثاً ـ مرکز تقارن منحنی (c) و همچنین سوی تقعر آنرا پیدا نمائید

رابعاً ـ از روی شکل منحنی (c) ریشه‌های معادله $x^2+(2-m)x+10-m=0$ را با اعداد ۱+ و ۱ — مقایسه کنید و نتیجه را در جدولی بنویسید.

۲۴۱۵ـ ثابت کنید برای اینکه سه نقطه از منحنی $y=\frac{x^3}{x^2-9}$ بطولهای x_1 و x_2 و x_3 بر یک استقامت باشند باید داشته باشیم $x_1+x_2+x_3+x_1x_2x_3=0$

۲۴۱۶ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x\pm\sqrt{x-1}$ را رسم کنید.

۲۴۱۷ـ دو نقطه A(۲و۰) و B(— ۲و۰) مفروضند مطلوبست تعیین مکان هندسی نقطه c(xوy) بطوریکه خط AB از این نقطه بزاویه ۴۵° درجه دیده شود.

دبیرستان هدف شماره ۱۰ ثلث دوم

۲۴۱۸- تابع $y=\frac{2x+a}{x^2+ax+a}$ مفروض است

اولا- ثابت کنید که مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم تابع مفروض اگر وجود داشته باشد در رابطه $y^2=\frac{4}{4a-a^2}$ صدق میکنند و هر گاه تابع مفروض دارای یک ماکزیمم و یک می‌نیمم باشد حتماً اتصالی است. ثانیاً- مقدار a را چنان تعیین کنید که قدر مطلق تفاضل ماکزیمم و می‌نیمم تابع مفروض برابر ۲ شود و تحقیق کنید که بازاء این مقدار a ماکزیمم دارای کمترین مقدار ممکن می‌باشد.

۲۴۱۹- اولا منحنی (c) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{2(x+1)}{x^2+2x+2}$ را رسم کنید.

ثانیاً- در وجود و علامت و بزرگی نسبی ریشه‌های معادله زیر بازاء مقادیر مختلف m بحث کنید و نتیجه را در جدولی ثبت نمائید و درستی نتیجه را روی منحنی (c) تحقیق کنید

$$mx^2+2(m-1)x+2(m-1)=0$$

۲۴۲۰- تابع $y=x+a\pm2\sqrt{x+b}$ مفروض است. اولا- مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که منحنی نمایش تغییرات تابع مفروض بر دو محور مختصات مماس شود

ثانیاً- منحنی (c) نمایش تغییرات تابع $y=(1\pm\sqrt{x})^2$ را رسم کنید.

ثالثاً- بوسیله محاسبه ثابت کنید که از مبدأ مختصات می‌توان دو مماس بر منحنی (c) رسم کرد و معادلات مماسها و مختصات نقاط تماس را تعیین کنید.

رابعاً- مساحت سطح محصور بین منحنی (c) و محورهای مختصات را حساب کنید.

خامساً- ثابت کنید که هر گاه خطی عمود بر نیمساز ربع اول و سوم منحنی (c) را در دو نقطه M و M′ قطع کند این دو نقطه نسبت به نیمساز مذکور قرینه می‌باشند.

دبیرستان کارون ثلث دوم ۴۶-۴۷

۲۴۲۱- مسئله اول: جدول تغییرات و منحنی نمودار تابع: $y=2-x\pm\sqrt{x^2-4}$ را رسم کنید. ۴ نمره

۲۴۲۲- مسئله دوم: تابع اولیه تابع $y=\frac{1-x+\sqrt{2-x}}{\sqrt{x^2-2x}}$ را تعیین کنید. ۳ نمره

۲۴۲۳- مسئله سوم- تابع $y=ax+b+\frac{4}{x^2}$ مفروض است.

اولا- a و b را طوری تعیین کنید که منحنی نمودار آن در نقطه‌ای بطول (۲-) بر خط Δ بمعادله $y=2x+2$ مماس گردد. ۲ نمره

ثانیاً ـ جدول تغییرات ومنحنی (c) نمودار تابع: $y = x - ۱ + \frac{۴}{x^۲}$ را رسم کنید

(۳ نمره)

ثالثاً ـ در نقطه A بطول (۲ ـ) مماس بر منحنی (c) رسم می‌کنیم معادله خط مماس را نوشته ومختصات نقطه برخورد آن را بامنحنی تعیین کنید. ۲ نمره

رابعاً ـ بازاء مقادیر مختلف m در تعداد وعلامت ریشه‌های معادله

$x^۳ - (m+۱)x^۲ + ۴ = ۰$ بحث کنید ودرستی نتایج حاصله را ازروی منحنی (c) بررسی نمائید. ۲ نمره

خامساً ـ هرخط موازی با مجانب مایل منحنی (c) عموماً آن را در دو نقطه M و N وخط $x = ۱$ را در P قطع میکند اگر Q مزدوج توافقی P نسبت بدو نقطه M و N باشد معادله مکان هندسی آن را تعیین کنید وتحقیق کنید که مجانبهای مکان هندسی Q مجانبهای منحنی C میباشد

ثانیاً سطح محصور بین منحنی C ومجانب مایل آن و دوخط $x = ۱$ و $x = \lambda$ $(\lambda > ۱)$ را محاسبه کنید وحد این مساحت را وقتی λ بسمت بی‌نهایت میل کند تعیین نمائید. ۲ نمره

مسائل مجله یکان از شماره ۱ تا ٦٤

۲۴۲۴- ثابت کنید که در ازاء همه مقادیر m خط بمعادله $y = 8m - 4x$ بر منحنی نمایش تابع $y = x^3 - 2(2-m)x^2 - 8mx$ مماس است مکان هندسی نقطه تماس را معلوم کنید و مقدار m را چنان تعیین کنیدکه نقطه تماس مرکز تقارن منحنی باشد در این حالت خط و منحنی را در یکدستگاه محورهای مختصات رسم کنید .

جواب : در نقطه ۶ بطول ۲ـ بریکدیگر مماسند $m = -1$

۲۴۲۵- تابع $y = x^3 - 6x^2$ مفروض است اولا منحنی (c) نمایش هندسی آنرا رسم کنید .

ثانیاً اگر M نقطه عطف منحنی باطول مثبت باشد معادله خط (Δ) مماس برمنحنی را در نقطه M بدست آورید و تحقیق کنید که (Δ) در یك نقطه دیگر K منحنی را قطع می‌کند و مختصات K را تعیین کنید . ثالثاً چنانچه S تصویر خط نقاط باعرض می‌نیم تابع و SK' تصویر K رمحور $y'y$ و B نقطه تقاطع خط Δ با این محور و T قرینه S نسبت به O (مبدأمختصات)

جواب : ثانیاً $(\Delta): y = -8x + 3$ و $K(-3و27)$ باشد تحقیق‌کنید که چهار نقطه K' و L و T و S تشکیل توافقی تشکیل می‌دهند

۲۴۲۶- مطلوبست تعیین معادلات مماسهای مشترك منحنی‌های بمعادلات

$x^2 + y^2 - 6x + 5 =$ و $x^2 + y^2 = 1$

۲۴۲۷- مطلوبست تعیین مختصات مرکز تقارن و معادله محورتقارن منحنی نمایش هندسی‌تابع $y = \frac{x+1}{x-1}$

۲۴۲۸- معلوم کنید آیا منحنی(c) نمایش تغییرات تابع $y = x + 1 \pm \sqrt{4x+1}$ دارای مرکز یامحور تقارن می‌باشد یانه

۲۴۲۹ـ منحنی بمعادله $y^2-4xy+3x^2+1=0$ دارای یك مرکز و دو محور تقارن میباشد آنهارا مشخص کنید .

جوابها | مرکز تقارن | O | $x=0$ ، $y=0$ محور تقارن

۲۴۳۰ـ ثابت کنید که منحنی بمعادله $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ یك مرکز تقارن وبتعداد نامحدود محور تقارن دارد ومختصات مرکز تقارن ومعادله کلی محور تقارن آنرا بدست آورید

جواب رهون نقطه $C(1,2)$ مرکز تقارن آنست وچون دایره است دارای محورهای تقارن بی‌شمار است .

۲۴۳۱ ـ تابع $y=\frac{x^2-ax}{x+a}$ که درآن $a\neq 0$ نمایش پارامتری استمفروض است اولا بدون استفاده از مشتق ثابت کنید که تابع همواره دارای یك ماکزیمم ویك می‌نیمم است ثانیاً اگر M' و M'' نقاط نظیر ماکزیمم ومی‌نیمم تابع باشد تحقیق کنید که قطعه خط $M''M'$ همواره از مبداء مختصات بزاویه قائمه دیده می‌شود .

ثالثاً ـ مقدار a را بطریقی تعیین کنید که مرکز تقارن منحنی آن بمعادله $y=x-2$ واقع شود رابعاً (c) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x^2-x}{x+1}$ را رسم نمائید .

خاصه مکان هندسی نقاطی از صفحه محورهای مختصات را تعیین کنید که از آنها بتوان دو مماس متعامد برمنحنی (c) رسم کرد. جواب: $a=1$

۲۴۳۲ ـ اولاً تحقیق کنید که بازاء جمیع مقادیر m منحنی (c) نمایش هندسی تابع $y=\frac{-x-1}{(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+5})}m$ همواره ازدو نقطه ثابت A و B که مختصات آنهارا تعیین میکنید می‌گذرد ثانیاً ـ ثابت کنید که خط AB بازاء جمیع مقادیر M برمنحنی (c') نمایش هندسی تابع $y=n^2x^2+(2m-1)x$ مماس شده واگر مختصات نقطه تماس را (α,β) بنامیم N راچنان معلوم کنید که α و β تشکیل یك تصاعد حسابی بدهند .

جواب: $A(3,-4)$ و $B(5,6)$ و $n=\frac{3}{4}$

۲۴۳۳ ـ مقادیر m و p رامعلوم کنید برای اینکه کسر $\frac{4x^2+mx+p}{2x^2+2x+6}$ بازاء جمیع مقادیر x مساوی مقدار ثابتی باشد.

مسائل جبر کنکور دانشگاههای فرانسه

۲۴۳۴ـ شرطی را پیدا کنید که ریشه‌های یک معادله درجه سوم تشکیل تصاعد هندسی دهند موارد استعمال ریشه‌های معادله $8x^3-42x^2+63x-27=0$ را حساب کنید.

جواب: $b^2d-c^2a=0$

۲۴۳۵ـ λ را طوری معین کنید که بین ریشه‌های معادله درجه سوم: $x^3+2x^2-7x+8=0$ رابطه $x_1^2=x_2^2+x_3^2$ برقرار باشد:

جواب: $\lambda=-24$ و -2

۲۴۳۶ـ شرطی را پیدا کنید که ریشه‌های یک معادله درجه سوم تصاعد عددی تشکیل دهند موارد استعمال، مطلوبست حل معادله $8x^3-12x^2-2x+3=0$

جواب: اگر $u+h$ و u و $u-h$ بترتیب ریشه‌های معادله باشند a و b و c و d نیز بترتیب ضرایب درجات از بالا به پائین باشند رابطه مطلوب عبارتست از:

$$(2b^2-9ac)b+27a^2d$$

۲۴۳۷ـ مطلوبست تعیین m بقسمی که بین دو ریشه معادله درجه سوم $x^3-5x+m=0$ رابطه $x_1x_2=2x_1x_3$ برقرار باشد پس از تعیین m معادله را حل کنید. جواب: $m=2$

۲۴۳۸ـ اگر a و b و c ریشه‌های معادله $x^3+px+q=0$ باشد معادله‌ای تشکیل دهید که ریشه‌هایش بفرم $y=(a-b)(a-c)$ باشد و نشان دهید که می‌توان معادله مطلوب را با تبدیل همو گرافیک بدست آورید. جواب: $y^3+6py^2+9p^2y+3p^3+27q^2=0$

۲۴۳۹ـ اگر a و b و c ریشه‌های معادله $x^3+px+q=0$ باشد معادله‌ای تشکیل دهید که نسبت ریشه‌هایش $\frac{a}{c}$ و $\frac{b}{a}$ و $\frac{c}{b}$ باشد.

جواب: $q^2(x^2+x+1)^2+p^2x^2(x+1)^2=0$

۲۴۴۰ـ اگر a و b و c ریشه‌های معادله $x^3-5x^2+6x-1=0$ باشد معادله‌ای تشکیل دهید که ریشه‌هایش $\frac{b-a}{c-a}$ باشند.

۲۴۴۱ـ λ را برحسب m معلوم کنید که حاصلضرب دوریشه معادله $x+\lambda-my=0$ $(m-y)x^2-(2+my)$ بستگی به مقدار y نداشته باشد. $x'x''=\frac{\lambda-my}{m-y}$

۲۴۴۲ـ بازاء چه مقادیر a نمایش هندسی تابع $y=\frac{x^2-ax+2}{x-2}$ خط مستقیم است

۲۴۴۳ـ تحقیق کنید که منحنی‌های نمایش توابع $y=\frac{x^2-mx+1}{2x-m}$ بازاء جمیع مقادیر m از دو نقطه ثابت کنید که مختصات آنها را معلوم خواهید کرد میگذرند

۲۴۴۴ـ ثابت کنید که منحنی‌های نمایش $y=\frac{ax^2+(4-2a)x+a-2}{x^2+1}$ بازاء جمیع مقادیر a از نقطه ثابتی گذشته و در این نقطه بر خط ثابتی مماس است.

۲۴۴۵ـ ثابت کنید که منحنی‌های نمایش توابع $y=\frac{2x^2+m^2}{x-2m}$ همواره با دو خط ثابت مماس هستند (باستثنای $m=0$)

۲۴۴۶ـ تابع $y=\frac{x^3-ax^2-a^2x+5a^3}{x^2+2ax+a^2}$ مفروض است ثابت کنید که تابعی مانند $Z=\frac{\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x}{x-a}$ می‌توان یافت که مشتق آن نسبت به x مساوی تابع y شود و α و β و γ را پیدا کنید

۲۴۴۷ـ ثابت کنید که بین y' و y'' مشتقات اول و دوم تابع:

$$y=a(x+\sqrt{x^2-1})^n+b(x-\sqrt{x^2-1})^n$$

رابطهٔ بین $(x^2+1)y''+xy'-n^2y$ برقرار است.

۲۴۴۸ـ مقادیر a و b را چنان معلوم کنید که حد تابع $y=\frac{x+b}{x^2+2ax+b}$ وقتیکه $x\Rightarrow 1$ برابر باشد با ∞ و یا $+\infty$ و این حد را معین کنید.

جواب: $a=-1$ و $b=1$

۲۴۴۹ـ مقادیر a و b و c را چنان تعیین کنید که حد تابع زیر وقتیکه $x\Rightarrow+\infty$ برابر با صفر باشد.

$$y=\sqrt{ax^3+bx^2+x+1}+x-c$$

جواب: $a=0$ و $b=1$ و $c=-0/5$

جدول ومنحنی نمایش تغییرات هریك ازتوابع زیررا رسم کنید.

۲۴۵۰- $y=a+\sqrt{\frac{x^2-3x}{2-x}}$

۲۴۵۱- $y=\sqrt[5]{x^2(x-1)^2(x+2)}$

۲۴۵۲- $x^6-y^2x^2+2y^2=0$

۲۴۵۳- $y=\sqrt{(x-1)^2(x-2)}$

تابع اولیه هریك ازتوابع زیررا تعیین کنید.

۲۴۵۴) $y=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$ و $y=\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+c$

۲۴۵۵ $y=\frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x-1)^m}$ $y=\frac{-1}{(m-1)(x\sin x+\cos x-1)^{m-1}}+t$

۲۴۵۶- ثابت کنید که منحنی‌های نمایش تغییرات دوتابع $y=\frac{x^2-1}{x^2+a}$ و $y=\frac{x(x^2-1)}{a+1}$ بازاء جمیع مقادیر a درنقطه ثابتی بریکدیگر مماسند

جواب: درنقطهٔ $M(1,0)$ بریکدیگرمماسند ودرنقطهٔ $M'(-1,0)$ متقاطع و $a=-3$

۲۴۵۷- بازاء چه مقدار m منحنی‌های نمایش دوتابع $y=mx^2-1$ و $y=\frac{x-1}{x+1}$ بریکدیگر مماسند.

۲۴۵۸- ازمبدا مختصات چندخط میتوان برمنحنی نمایش تابع $y=x^3-x^2+x$ مماس کرد.

۲۴۵۹- ثابت کنید که بین تابع $y=\frac{K}{x}$ ومشتقات متوالی آن رابطه زیر برقرار است

$$y(x-1)+y'(x+2)+y''(x+3)+\dots+y^{(n-1)}(x+n)+y^{(n)}x=k$$

۲۴۶۰- ثابت کنید منحنی‌های نمایش تابع $y=(2x^2-7)^n$ درازاء جمیع مقادیر n ازچهار نقطهٔ ثابت که مختصات آنهارا تعیین خواهید کرد می گذرد.

جواب: $A(\frac{-\sqrt{۱۴}}{۴}, ۰)$ و $B(\frac{\sqrt{۱۴}}{۴}$ و $A)$ و $C(-۲, ۱)$ و $D(۲, ۱)$

توابع اولیه زیر را تعیین کنید.

۲۴۲۳) $\int \frac{da}{\sqrt[m]{xm+۱}}$

۲۴۲۴) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^۲+ax}} =$

(عدد صحیح ومثبت m)

۲۴۶۱ـ ثابت کنید که برمنحنی نمایش تابع $y=ax^۲+bx+c$ فقط دو نقطه یافت می‌شود که در آن نقاط تحت‌مماس با تحت‌قائم مساویست ومختصات این نقاط را بدست آورید.

جواب: $x=-\frac{b+۱}{۲a}$ و $x=-\frac{b-۱}{۲a}$ وبرای هردو $y=\frac{۴ac-b^۲+۱}{۴a}$

۲۴۶۲ـ منحنی (c) بمعادلهٔ زیر مفروض است. $x^۲+y^۲-۲xy-۲x-۲y=۰$

اولا) ثابت کنید که منحنی (c) دارای یك محور تقارن است ومعادله این محور را بدست آورید ثانیاً ـ ثابت کنید که برمنحنی (c) هیچ نقطه‌ای نمیتوان یافت که در آن تحت مماس با تحت‌قائم مساوی باشد.

جواب: $y=x$

ثالثاً) مکان هندسی نقاطی را پیدا کنید که از آن نقاط می‌توان دو مماس عمود برهم برمنحنی (c) رسم نمود.

رابعاً) معادلات خطوطی را که از نقطهٔ $M(\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۳}{۴})$ قائم برمنحنی (c) می‌توان رسم کرد بدست آورید.

۲۴۶۳ـ تابع $y=ax^۲$ مفروض است ثابت کنید درازاء هر دو عدد متمایز دلخواه α و β یك عدد مانند γ وجود دارد بطوریکه رابطه زیر برقرار باشد.

$$F(\beta)-F(\alpha)=(\beta-\alpha)F'(\gamma)$$

جواب: $\gamma=\frac{\alpha+\beta}{۲}$

۲۴۶۴ـ تابع $y=\sqrt{x+\sqrt{x^۲+۱}}$ مفروض است ثابت کنید که بین y' و y'' مشتق‌های اول ودوم تابع y رابطه زیر برقرار است $۴(۱+x^۲)y''+۴xy'-y=۰$

راهنمائی: اگر مشتق ثانی بگیریم رابطهٔ فوق بدست می‌آید:

۳۴۶۵ـ دوتابع‌زیر مفروض است $z=\frac{x^2}{F(x)}$ و $y=F(x)$ وفرض‌میکنیم نمایش هندسی‌دوتابع y و z درصفحه‌محورهای مختصات متمامد بترتیب منحنی‌های(c) و(c') باشد خط‌عمود بر ox درنقطه H به‌طول $\overline{OH}=x(x\neq 0)$ منحنی (c) رادر M و منحنی (c') رادر M' ومماسهای‌برمنحنی‌های (c)و(c') درنقاط M و M' محور ox را بترتیب‌درنقاط T و T' قطع‌می‌کند .

اولاـ رابطه‌زیررا بدست‌آورید $\frac{y'}{y}+\frac{z'}{z}=\frac{2}{x}$

ثانیاـ اگرنقطه Mمعلوم‌باشد نقطهٔ M' رااز‌راه ترسیم‌بدست‌آورید وبااستفاده‌ازرابطه بالاثابت‌کنیدکه تقسیم (T'وTوHوO) توافقی‌است

۳۴۶۶ـ ماکزیمم‌تابع زاذیررا پیداکنید :

$$y=a\sqrt{\sin x}+b\sqrt{\cos\alpha}$$

بفرض $a>0$ و $b>0$ و $\frac{\pi}{2}>\alpha>0$

۳۴۶۷ـ مطلوبست تعیین‌حد تابع‌زیروقتی $x\Longrightarrow\infty$

$$y=\sqrt[4]{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)}-\sqrt[3]{(x+a')(x+b')(x+c')}$$

۳۴۶۸ـ تابع‌زیرداده شده‌است $y=\cos\pi\sqrt{x}$

اولاـ معادله‌مماس برمنحنی‌نمایش‌تابع رادرنقطه‌ای ازآن‌بطول یك‌بدست‌آورید.

ثانیاـ طول‌های‌نقاط تلاقی‌منحنی‌را با محور طولهاکه درفاصله (۹ و ۰) واقع‌اند تعیین‌کنید .

جواب : معادله مماس $y=-1$ $x=\frac{25}{3}$ و $\frac{9}{2}$ و $\frac{1}{3}$

۳۴۶۹ـ اولا درتابع $y=\frac{ax^2+bx+c}{x^2-2x+2}$ ضرایب a وb وc راچنان‌تعیین‌کنید

اگربفرض منحنی‌نمایش تابع‌دارای سه‌نقطه عطف‌باشد این‌سه‌نقطه برخط بمعادله $y=x-\frac{6}{3}$

واقع باشند ثانیاً جدول تغییرات و منحنی(c) نمایش هندسی تابع $y=\frac{x^2+2x-5}{x^2-2y+2}$ را رسم کنید ثالثاً معادله مثلثاتی زیر مفروض است

$$(1-m)\sin^2 u-2(m+1)\cos u+3m+4=0$$

الف : مستقیماً آنراحل و بحث کنید . ب . بافرض $\cos u=x$ ازروی منحنی(c) حل و بحث معادله را نتیجه بگیرید .

۳۴۷۰ـ تابع $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+ax+b}}$ مفروض‌است.

اولا ضرایب a و b را بدست آورید که خطوط $x=1$ و $x=2$ مجانبهای منحنی باشند ثانیاً مطلوبست رسم منحنی نمایش تابع زیر

$$y=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}-\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}}$$

۳۴۷۱ ـ مستطیلی رسم میکنیم که دو رأسش بر خط بمعادله $x=h$ و دو رأس دیگرش برسهمی $y^2=2Px$ واقع باشدابعاد این مستطیل چگونه انتخاب شود تامساحتش ماکزیمم باشد .

۳۴۷۲ ـ مطلوبست حل و بحث معادله

$$(a+b)^2(x+\alpha^2)(x+\beta^2)\cdots(\alpha-\beta^2)(x+a^2)(x+b^2)=0$$

که درآن a و b و α و β چهارپا را متر می‌باشند

۳۴۷۳ـ دوتابع زیر مفروض‌اند

$$\begin{cases} y=(m+1)x^2+mx & (1) \\ y=\frac{3x}{4x+4} & (2) \end{cases}$$

اولا ثابت کنید منحنی های تابع درجه دوم (۱) بازاء جمیع مقادیر m از دونقطه ثابت می‌گذرد مختصات این دونقطه را بدست آورید ثانیاً مقدار m را طوری بگیرید که دو منحنی دوتابع فوق در مبدأ مختصات یکدیگر را بزاویه قائمه قطع کنند ثالثاً دو تابع زیر مفروضند .

$$y=\frac{3x}{4x+4} \text{ و } y=\frac{-x^2-4x}{3}$$

مختصات نقطه برخورد دومنحنی را یافته سپس منحنی دو تابع راروی یکشکل رسم کرده وزاویه بین آنها را در مبدأ مختصات بدست آورید .

رابعاً ـ معادله مماس بر یکی از دو منحنی‌را در نقطه($\frac{5}{2}$ و $-\frac{5}{2}$)A نوشته وسپس زاویه بین این مماس و مجانب موازی محور طولهارا در تابع کسری بدست آورید

۳۴۷۴ـ مشتق تابع زیر راحساب کنید

$$y=\left(\sin^2 x+\sqrt[2]{x^{0/5}+\cos^2 x}\right)^m$$

۳۴۷۵ ـ تابع $y=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ مفروض‌است مشتق اول و دوم این تابع‌را حساب کرده ثابت کنید $yy'-y''=0$

۳۴۷۶ ـ دونقطه A (m و ۲m) و B(−m و ۰) مفروض‌اند مقدار m را طوری بگیرید که نقطه($-\frac{1}{3}$ و $\frac{4}{3}$)O′ روی عمود منصف AB واقع شود .

۳۴۷۷ ـ در تابع $y=ax\sin by$ ضرایب b و a را چنان معلوم کنید که بین y و مشتق دوم آن y″ رابطه زیر برقرار باشد $y''+y=2\cos x$

جواب $a=\pm 1 \Leftarrow b=\pm 1$

۳۴۷۸ ـ معادله یك منحنی نسبت به x و y از درجه دوم است مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی است از نقطه (۲ − و ۶) M میگذرد و در نقطه به‌عرض صفر برخط $y=2$ مماس است معادله این منحنی را تعیین کنید مسئله را در حالتی حل کنید که منحنی در نقطه بعرض ابر خط $x=2$ مماس شود

جواب $17x^2-32y^2+32xy-100=0$ و $x^2-8y^2-5=0$

۳۴۷۹ ـ درصفحه محورهای مختصات متعامد خط Δ بمعادله $x=a$ مماست رادرنظر می‌گیریم دایره‌ای بقطر a بر o مبدأ مختصات میگذرد و بر Δ مماس‌است نیم خط متغییر ot دایره را در A وخط Δ را در B قطع می‌کند از نقاط A و B خطوطی بموازات محور های مختصات رسم می‌کنیم که یکدیگر را در M قطع می‌کنند معادله مکان هندسی نقطه M را بدست آورید

جواب: $y=\pm a\sqrt{\frac{a-x}{x}}$

۳۴۸۰ـ اولاً تابع $y=f(x)$ را چنان‌تعیین کنید که‌فضل عرض‌هر نقطه از منحنی بر عرض نقطه هم طول آن از تنها مجانب مایلش برابر باعکس طول آن نقطه باشد و بعلاوه نقطه (۱و۰) ω مرکز تقارن منحنی بوده تفاضل طولهای نظیر ماکزیمم و مینیمم تابع از

لحاظ قدر مطلق برابر باشد .

۲۴۸۱- مربع ABCD مفروض است از رأس A ودرداخل مربع خطی چنان رسم میکنیم که با AB زاویه α ساخته وضلع BC رادر M قطع کند زاویه α راچنان تعیین کنید که طول AM، m برابر فاصله آن ازمرکز مربع باشد .

جواب : $\sin(2\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{m-4}{m\sqrt{2}}\Longrightarrow m>\frac{4}{3}$

تمرین- مطلوبست محاسبه توابع اولیه زیر :

۲۴۸۲- $y=x(x-2)(x-1)^n$

۲۴۸۳- $y=x(x^2+3x+3)(x+1)^n$

۲۴۸۴- نقطه $A(-a,0)$ مفروض است از A خطی رسم می کنیم که محور $y'y$ را درB قطع کند وبرخط AB دونقطه N و M راچنان انتخاب می کنیم که :

$BM=BN=BO$

باشد معادله مکان نقاط M و N راوقتی که B محور $y'y$ رابنماید یافته وبه فرض $a=1$ منحنی نمایش هندسی آنرا رسم کنید محورهای مختصات متعامد هستند .

۲۴۸۵- مطلوبست رسم مکان هندسی نقاطی که مختصات آنها درزیر صدق میکند.

$$\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=1$$

۲۴۸۶- اولا جدول تغییرات ونمایش هندسی تابع زیررا رسم کنید .

$$y=\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x+1)}$$

ثانیاً- ازراه محاسبه معلوم کنید که خط $y=mx$ بازاء چه مقادیر m منحنی نمایش هندسی تابع را قطع می کند ودرستی نتیجه را ازروی شکل تحقیق کنید.

۲۴۸۷- تابع زیر مفروض است $y=\sqrt[3]{x^3+px+q}$ درازاء مقادیر مختلف p و q درتعداد نقاط عطف منحنی تابع فوق بحث کنید.

۲۴۸۸- درسنجه محورهای مختصات متعامد یك نقطه M وخط بمعادله $y=x-2$ رادرنظر می گیریم عمود MH رابر $x'x$ رسم میکنیم که Δ رادر p قطع میکند اگر O مبداء مختصات باشد بفرض اینکه $Mp=\sqrt{2}MO$ باشد .

اولا- معادله مکان M رابدست آورید ثانیاً- منحنی (c) مکان نقطه M را رسم کنید. ثالثاً- نزدیکترین نقطه منحنی (c) را تاخط Δ پیدا کنید رابعاً- ثابت کنید که نیمساز ربع دوم محورها محور تقارن منحنی (c) است خامساً- معادلات مماسهای مرسوم از نقطه $I(1,0)$ را برمنحنی (c) بدست آورید سادساً- از نقطه اختیاری p واقع بر Δ خطی قائم برمنحنی (c) رسم

میکنیم بفرض اینکه این قائم در نقطه $T(x_0 y_0)$ منحنی (c) را قطع کند رابطه بین x_0 و y_0 را بدست آورید و با استفاده از نمودار Δ معلوم کنید که از هر نقطه خط Δ فقط یك خط قائم بر منحنی (c) می‌توان رسم کرد .

۲۴۸۹- مطلوبست تعیین معادلهٔ دایره‌ای که در نقطهٔ بطول ۲ بر منحنی x ها مماس بوده و از نقطهٔ $M(-1,3)$ بگذرد. جواب: $x^2+y^2-4x-6y+4=0$

۲۴۹۰- نمایش هندسی تابع زیر را رسم کنید .

$$|y+x-2|+|y-2x+1|=6$$

۲۴۹۱- در مکعبی به طول یال a استوانه‌ای دوار چنان محاط کنید که محورش با یك قطر مکعب موازی بوده و حجمش ماکزیمم باشد و حجم آنرا برحسب a حساب کنید .

جواب : $V=\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{18}$

۲۴۹۲- مطلوبست حل و بحث معادلهٔ زیر: $x-|x-1|=(m-1)x+1$

تابع اولیه هریك از دو تابع زیر را بدست آورید.

۲۴۹۳- $y=\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$ ۲۴۹۴ $y=\frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}$

۲۴۹۵- اولا منحنی (c) بمعادله $xy^2-2y+x^2=0$ را رسم کنید در انعکاس به قطب O (مبدا مختصات) و بقوت K نقطهٔ $P(X,Y)$ منعکس نقطه $M(x,y)$ میباشد مقادیر X و Y را برحسب x و y تعیین کنید ثانیاً- ثابت کنید که در انعکاس به قطب $A(1,0)$ و قوت $K=4$ منحنی (c) تغییر ناپذیر باقی می‌ماند .

۲۴۹۶- دو دایره بشعاعهای R و R' بمرکزهای O و O' $(OO'=a)$ مفروضند مکان هندسی نقاطی مانند M را پیدا کنید که اگر از آن نقاط مماسهای MT و MT' را بر دو دایره فوق رسم کنیم داشته باشیم .

$$\frac{MT}{MT'}=k .$$

جواب $B(x=\frac{aK^2}{K^2-1}$ و $y=0)$

۲۴۹۷- از کانون F' (باطل منفی) بیضی به معادله $20x^2+25y^2=900$ شعاعی نورانی خارج می‌شود که با محور ox زاویه برابر با $\Lambda\operatorname{cotg}(-2)$ می‌سازد این شعاع نورانی پس از برخورد با بیضی منعکس می‌شود معادله خط محل شعاع منعکس را تعیین کنید .

۳۴۹۸ ـ ثابت کنید که دو بیضی بمعادله‌های

$$n^2x^2+m^2y^2-m^2n^2=0$$
$$n^2x^2+m^2y^2-m^2n^2=0$$

$(m\neq n)$ یکدیگر را در چهار نقطه واقع بر دایره قطع می‌کنند مرکز و اندازه شعاع این دایره را مشخص کنید

۳۴۹۹ ـ تابع $y^2-2xy-1=0$ داده شده است منحنی نمایش تغییرات این تابع از دوشاخه متمایز (T_1) و (T_2) تشکیل شده است

اولا معادلات (T_1) و (T_2) را بصورت $y=F(x)$ و $g=y(x)$ بدست آورید ثانیاً اگر α_1 طول نقطه غیرمشخص از شاخه (T_1) باشد ثابت کنید که روی شاخه (T_2) نقطه‌ای بطول α_2 یافت می‌شود بقسمی که

$F'(\alpha_1)=g'(\alpha_2)$ ثانیاً . (T_1) و (T_2) محور عرضها را بترتیب در A_1 و A_2 قطع می‌کنند معادله قائم بر (T_1) را در A_1 وقائم بر (T_2) را در A' بنویسید ملاحظه خواهید کرد که این دو قائم متوازیند تعبیر هندسی این توازی چیست . رابعاً قائم بر (T_1) در A_1 و مماسی بر (T_2) در A_2 یکدیگر را در A_3 قطع می‌کنند مختصات نقطه A_3 و اندازه زاویه $A_3A_1A_2$ را برحسب رادیان بدست آورید

۳۵۰۰ ـ اگر معادله درجه دوم $x^2-p^2x+p^2q^2=0$ دوریشه داشته و ریشه x' در شرط $x'>2q^2$ صدق کند ثابت کنید که ریشه x'' در شرط $q^2<x''<2q^2$ صدق خواهد کرد .

۳۵۰۱ ـ سهمی به معادله $y=ax^2+bx+c$ و خط Δ به معادله $y=ax+b$ مفروض است؛ اگر Δ سهمی را در A و B و محور تقارن سهمی را در N و محور طولها را در M قطع کند چه رابطه‌ای بین a و b و c باید برقرار باشد تا چهار نقطه A، B، M، N یك تقسیم توافقی تشکیل دهند جواب : $b^2+ab-2ac=0$

۳۵۰۲ ـ فاصله نقطه M از O مبدأ مختصات را با r و زاویه (OM,OX) را با a نشان میدهیم مختصات M را برحسب a و r بنویسید نقطه M را برمنحنی به معادله

$$[2(x^2+y^2)-x]^2=y^2(x^2+y^2)$$

چنان تعیین کنید که فاصله‌اش تا مبدأ مختصات ماکزیمم یا مینیمم باشد .

جواب : $M(x=r\sin\alpha,\ y=r\sin\alpha)$

۳۵۰۳ ـ اگر x کمان محصور بین $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ باشد حدکسر زیرراوقتی $x\to 0$

$$\frac{\operatorname{Arccotg} mx+\operatorname{Arcsin} mx}{\operatorname{Arctg} nx+\operatorname{Arcsin} nx}$$

۲۵۰۴ ـ اگر معادله محور اصلی دو دایره

$$(C):(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=4$$
$$(C'):(x-\varphi)^2+(y-\gamma)^2=9$$

عبارت باشد از $x-3y+2=0$ مقادیر α و β و γ را پیدا کنید

جواب : $\alpha=\frac{3}{4}$ و $\beta=\frac{7}{4}$ و $\gamma=-\frac{5}{4}$

۲۵۰۵ ـ اولاً ثابت کنید اگر درتابع

$y=F(x)$ یا $F(x,y)=0$ تبدیل $x=y-b$ و $y=x+b$ را انجام دهیم و عبارت تابع فرق نکند خط بمعادله $y=x+b$ محور تقارن منحنی نمایش تابع است :

ثانیا معلوم کنید برای اینکه خط بمعادله $y=x+b$ محور تقارن یك منحنی باشد چه تبدیلاتی از نوع تبدیلات فوق را باید انجام دهیم تاعبارت تابع فرق نکند .

ثانیا : بااستفاده از آنچه گفته شد چگونه می‌توان معلوم کرد .

یك منحنی دارای محور تقارنی موازی بایکی از نیمسازهای محورها هست یا نه

۲۵۰۶ ـ ثابت کنید که مکان هندسی نقاط تلاقی منحنی‌های بمعادلات زیر یك بیضی است

۱) $4m^2y^2-4mx^2+16(m^2+2)x^2+8m^2x-15^2=0$

۲) $y=mx^2+4x^2+2x-\frac{15}{4}$

جواب : معادلهٔ $4y^2+16x^2+8x-15=0$ معادلهٔ یك بیضی است

۲۵۰۷ ـ تابع $y=\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}$

اولا معلوم کنید به ازاء چه مقادیر از x تابع معین است ثابت کنید که :

$y^2=4(x-2)\Leftarrow x\geq 3$ و $y^2=4\Leftarrow 2<x<3$ ثالثا منحنی رارسم کنید:

جواب : تابع وقتی است که $x\geq 2$ باشد .

۲۵۰۸ ـ تابع زیرمفروض است $y=\frac{|x-1|x-(x-1)|x|}{x^2-1}$ اولا وقتی x به‌ازاء مقادیر کوچکتر از یك و به ازاء مقادیر بزرگتر از یك بسمت یك میل کند حد تابع چه میباشد

ثانیا منحنی نمایش تابع رارسم کنید جواب $\lim y=1$

۲۵۰۹ ـ نامعادلهٔ زیر را حل وبحث کنید . $|x|-1|<|x-m|$

تمرین توابع اولیه توابع زیررا تعیین کنید .

۲۵۱۰تا۲۵۱۹

$$y=\frac{x^2+2x}{\sqrt{2x+1}} \quad , \quad y=\frac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x^2-2x+1}}$$

$$y=\frac{4x+5}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} \quad , \quad y=\frac{x^2+1}{x\sqrt{x+1}}$$

$$y=\frac{4x^2+4x+1}{(2x+1)^2} \quad , \quad y=\frac{2x+3}{x^2\sqrt{x+1}}$$

$$y=\frac{x^3+x}{\sqrt{x^2+4}} \quad , \quad y=\frac{x}{\sqrt{2x+1}}$$

$$y=x\sqrt{2x+1}$$

۲۵۲۰ـ تابع $y=a(x+1)+(x-1)+(2-a)x-a-1$ مفروض است.
اولاـ بااستفاده ازنمودارتابع حدود a را تعیین کنید برای آنکه در ازاء هرمقدارازy برای x فقط یك مقدار بدست آید. ثانیاـ فرض میکنیم که شرط اولا برقرار باشددرصورتی که ازتابع بالا مقدارx بصورت $x=\alpha|y+1|+\beta|y-1|+\gamma y+Q$ مقادیر αوβ وQ را برحسب a حساب کنید.

۲۵۲۱ـ از راه محاسبه مختصات نزدیکترین و دورترین نقاط منحنی بمعادله :

$$x^2+y^2-xy-2=0$$

را از مبدأ مختصات پیدا کنید.

۲۵۲۲ـ بر محور ox نقطه ثابت A را درنظر گرفته آنرا بنقطه متغیر M واقع بر oy وصل میکنیم وازM خطی رسم میکنیم که با MA زاویه α بسازد ومحورox را در β سمت راست A قطع بکند اگر ω مرکز دایره محیط مثلث AMB باشد معادله ω مرکز دایره محیطی مثلث AMB باشد معادله مکان ω را بدست آورید.

۲۵۲۳ـ معلوم کنید که منحنی نمایش تابع $y=\frac{mx^2-mx+x-2}{3mx-m}$ از نقطه ثابت A میگذرد. ثانیاـ اگر P وQ نقطه‌های نظیر ما کزیمم و می‌نیمم تابع مزبور باشد معادله مکان هندسی نقطه G محل تلاقی میانه‌های مثلث APQ را بدست آورید.

۲۵۲۴ـ تابع زیر مفروض است.

$$y=(x-a)\sqrt{\frac{ax^2+(a-1)x+2a-1}{(2-a)x^2-2ax+4a-3}}$$

اولاـ مقدار a را معلوم کنید که مماس بر منحنی نمایش تابع در نقطه‌ای بطول a از آن با محور

$x'x$ زاویه ۳۰° بسازید.

ثالثاً ـ معادله خط TT' را بدست آورید و ثابت کنید وقتی m تغییر کند این خط از نقطه ثابت S می‌گذرد این خاصیت خط TT' را تعبیر هندسی کنید.

۴۵۴۵ ـ در صفحه محورهای مختصات متمامد نقطه $M(xy)$ در چه ناحیه‌ای واقع باشد تا عبارت زیر بتواند برابر سینوس یک زاویه حاده باشد.

$$S = \frac{x^۲+y^۲-۴}{(x+y-۲)\ (x-y+۲)}$$

۲۵۲۶ـ منحنی نمایش تابع $y=5x+2\pm2\sqrt{6x^2+3}$ دارای دومحور تقارن بموازات نیمسازهای زاویه‌های محورها می‌باشد معادلات آنهارا بدست آورید .

۲۵۲۷ـ منحنی (C) بمعادله $xy^2=a(a>0)$ مفروض است. اولاً ـ ثابت کنید که تحت مماس درهر نقطه برمنحنی دوبرابر طول این نقطه است. ثانیاً ـ نقطه‌ای ازمنحنی راتعیین کنید که فاصله آن از مبدأ مختصات می‌نیم باشدواگر این مقدار می‌نیم برابر $\sqrt{2}$ باشد مقدار a را تعیین کنید. ثالثاً ـ بازاء $a=2$ ازروی جدول تغییرات تابع منحنی (C) را رسم کنید و مساحت سطح محصور بین شاخه‌ای ازمنحنی که دارای عرضهای مثبت است وخطوط بمعادلهای $y=k$ و $y=2$ و $x=k$ را برحسب $k>2$ حساب کنید ودرحالتی که این مساحت برابر باواسطهٔ حسابی مساحتهای دومربع به ضلعهای $k-1$ و $k-2$ باشد مقدار k را تعیین کنید .

۲۵۲۸ـ تابع زیر مفروض است.

$$(I)\quad y=\frac{(x-a)(ax+1)}{1+x^2}$$

اولاً ـ بازاء دومقدار قرینه a_1 و $-a_1$ از a وضع دو منحنی نظیررا نسبت بهم معلوم کنید. ثانیاً ـ ثابت کنید بازاء جمیع مقادیر a (غیراز ±1) تابع (I) دتدای یک ماکزیمم و یک می‌نیمم است مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم وهمچنین مقادیر x نظیر آنها نسبت بهم چه وضعی دارند .

ثالثاً ـ بفرض $a>0$ جدول تغییرات تابع را در ازاء مقادیر $a<1$ و $a=1$ و $a<1$ و منحنی نمایش تغییرات تابع را در ازاء مقادیر ۲ و ۱ و $\frac{1}{2}$ و $a=0$ رسم کنید .

رابعاً ـ اگر φ و α دوزاویه باشند بقسمی که $tg\alpha=a$ و $tg\varphi=x$ باشد تابع (I) را می‌توان بفرم زیر نوشت $y=A\sin2(\varphi-\alpha)$ که A تابعی است از α. خامساً ـ اگر x_1 و φ_1 بترتیب مقادیر غیرمشخص از φ و x و M_1 نقطه نظیر آنها ازمنحنی تابع y M_2M_3 نقاط متناظر منحنی تابع (I) برابر مقادیر $\varphi_2=\varphi_1-\frac{\pi}{3}$ و $\varphi_3=\varphi_1+\frac{\pi}{3}$ باشد ثابت کنید که عرض نقطه مرکز ثقل مثلث $M_1M_2M_3$ مستقل از φ_1 است وطول نقطه G را برحسب φ_1 حساب کرده تغییرات آنرا وقتی φ_1 ازصفر تا π تغییر کند بدست آورید. سادساً ـ بافرض $m=\frac{2a}{1-a^2}$ ثابت کنید که جوابهای معادله $y''=0$ (مشتق دوم تابع (I) است) همان جوابهای معادله $tg3\varphi=tg2\alpha$ می‌باشد و ازروی آن نتیجه بگیرید که منحنی تابع (I) دارای سه نقطه عطف می‌باشد.

۲۵۲۹ـ بازاء چه مقادیر m و n دومعادله زیردارای ریشه مشترک $x=2$ می‌باشند. در اینصورت مقدار نظیر k چقدرخواهدبود عرض مرکز دایره مزبور تابعی است از k این تابع را مشخص کنید. جواب: $a=1$ و $b=1$

۲۵۳۰ـ تابع زیر مفروض است :

$$y = \frac{a\sin^2 x}{\cos 2x} \quad , \quad a \neq 0 \quad 0 < x < \pi$$

اولاً ـ هم مستقیماً وهم با استفاده ازجدول تغییرات تابع در تعداد نقاط تلاقی منحنی تابع فوق وخط $y = k$ بازاء مقادیرمختلف k بحث کنید. ثانیاً ـ بفرض اینکه منحنی وخط مزبور بازاء مقادیر $-1 < k < 0$ نقطه مشترك نداشته باشند مقدارعددی a را معلوم کنید.

جواب: $a = 1$

۴۵۳۱ـ دوتابع زیررا در نظر میگیریم :

$$y_1 = ax\sqrt{x^2+1} \quad \text{و} \quad y_2 = \frac{bx}{\sqrt{x^2+1}}$$

اولاً ـ خط Δ بمعادله $x = k$ منحنی (c_1) نمایش‌هندسی تابع y_1 را در M ومنحنی تابع (c_2) نمایش هندسی‌تابع y_2 را در N قطع می‌کند اگر مثلث MNO دررأس O شبه‌قاعده بوده و (c_1) و (c_2) درنقطه O (مبدأ مختصات) بر یکدیگر مماس باشند. مقادیر a و b را تعیین کنید بشرط آنکه مقادیر طول وعرض هریك از نقاط M و N هم‌علامت باشند (مثلث ABC بهرأس A شبه‌قاعده نامیده می‌شود هرگاه تماس دوزاویه B و C برابر 90° باشد ۲ ـ بفرض $a = b = 1$

اولاً ـ منحنی‌های (c_1) و (c_2) را دریك دستگاه محورهای مختصات رسم کرده وضع نسبی آنها را درنقطه O تعیین کنید.

جواب:

ثانیاً ـ معلوم کنید که بازاء چه مقادیر از λ خط (D) بمعادله $y = \lambda x$ با هریك ازمنحنی‌های C_1 و C_2 علاوه‌برO منقاطع می‌باشد اگر (D_1) و (D_2) دو وضع از (D) باشند که نسبت به‌نیمساز ربع‌اول‌وسوم محورها قرینه یکدیگر باشند و (D_1) منحنی (C_1) را در M و (D_2) منحنی (C_2) را در N قطع کند ثابت کنید که M و N روی خطی عمودبر xx' قراردارند. ثالثاً ـ مساحت سطح محصور بین دومنحنی ومبدأ مختصات وخط $k = > 0$ را حساب کنید.

۴۵۳۲ـ ثابت کنید که منحنی نمایش تابع $(x+y)^2 = 2(x+3y-1)$ دارای محور تقارنی بمعادله $y = -x+2$ می‌باشد تبدیل $x = -y+2$ و $y = -x+2$ را انجام می‌دهیم $(-y-x+2)^2 = 2(-y-3x+7)$ بعد از اختصار همان‌معادله مفروض بدست می‌آید پس خط مزبور محورتقارن منحنی‌است.

۴۵۳۳ـ تابع زیر مفروض‌است $y = x^2 + px + q$ چه‌رابطه‌ای‌بین p و q برقرار باشد تا منحنی نمایش تابع نیمساربع‌اول وسوم را درسه‌نقطه قطع کند واین سه‌نقطه‌ومبدأ مختصات یك‌تقسیم توافقی تشکیل‌دهند.

۲۵۳۴- تابع اولی تابع زیر را تعیین کنید

$$y=\frac{\sqrt[7]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[7]{x^{8}}+\sqrt[14]{x^{15}}}$$

۲۵۳۵- تابع اولی تابع زیر را تعیین کنید.

$$y=\varphi^{2n}x$$

۲۵۳۶- اگر $y=ax^{m}+bx^{-n}$ و a و b در عدد صحیح و m و n دو عدد صحیح و مثبت باشند مقادیر m و n را چنان تعیین کنید که داشته باشیم $x^{2}y''+2xy=12y'$

۲۵۳۷- مقدار x را برحسب n چنان تعیین کنید که تابع زیر ماکزیمم باشد.

$$y=\left[x^{\frac{2}{n}}-x^{\frac{n+1}{n}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

جواب

$$x=\left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

۲۵۳۸- تابع $y=F(x)$ و پارامتر a را چنان تعیین کنید که بین مشتقات تابع رابطه $y''(x-1)+2y=2a$ برقرار بوده ضریب زاویه مماس بر منحنی نمایش تابع در نقطه $A(2,1)$ برابر با ۲ و ضریب زاویه مماس بر منحنی در ازاء $x=1$ برابر صفر باشد.

جواب: $a=1$

۲۵۳۹- مکان هندسی نقاطی را تعیین کنید که مماس‌های مرسوم از آن نقاط بر منحنی‌های $y=x^{2}$ و $y=x^{3}$ بترتیب بر یکدیگر عمود باشند:

۲۵۴۰- تابع بشکل: $ax^{2}+bxy+cy^{2}+dx+e=0$ را چنان تعیین کنید که بازاء جمیع مقادیر پارامتر d نقاط نظیر ماکزیمم و می نیمم منحنی نمایش تابع بر دایره $x^{2}+y^{2}=5$ قرار داشته باشند. ثابت کنید که منحنی نمایش تابع حاصل همواره بر دو نقطه ثابت می گذرد.

۲۵۴۱- منحنی (E) بمعادله زیر مفروض است: $b^{2}x^{2}+a^{2}y^{2}=a^{2}b^{2}$ براین منحنی دو نقطه M و N را چنان انتخاب می کنیم که زاویه MON قائمه باشد (O مبدأ مختصات) و عمود OH را بر MN رسم می کنیم. وقتی M و N بشرط فوق بر منحنی تغییر مکان دهند معادله مکان هندسی نقطه H را بدست آورید.

۲۵۴۲- تغییرات تابع زیر را تعیین کنید و معادلات مجانبهای آنرا بدست آورید و همچنین معادلات مماس‌های بر منحنی را در نقطه‌ای از آن بطول یك بدست آورید.

۲۵۴۳- مکان هندسی نقاط تلاقی منحنی‌های بمعادلات زیر را تعیین کنید:

$$y=\frac{rx^{2}+mx+p}{ax^{2}+bx+r}\ ,\quad y=\frac{-mx^{2}+rx+p}{ax^{2}+bx+m}$$

۲۵۴۴- در شکل منحنی نمایش تابع زیر بحث کنید: $y=\sqrt{ax^{2}+bx+c}$

۲۵۴۵- مقدار حقیقی A را چنان تعیین کنید که داشته باشیم: (k عددی است محدود)

$$\lim\left(\sqrt{x^{2}+x+1}-Ax\right)=k$$

۲۵۳۶ـ یکی ازمسائل زیررا باختیار حل کنید. $\lim_{x \to 0} \left[\frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x \sqrt[3]{\cos 3x}}}{x^2} \right]$

$\int x^2 \sin x dx$

۲۵۳۷ـ معادله $mx^2 - (m^2+1)x + m^2 + 2m + 1 = 0$ مفروض است.
اولاـ بین ریشه‌های این معادله رابطه مستقلی از m وجود دارد این رابطه را پیدا کنید.
ثانیاً ـ جدول ومنحنی نمایش تغییرات حاصلضرب ریشه‌های معادله بالارا وقتی پارامتر m تغییر کند رسم کنید.

ثالثاـ اگر نقطه $M \left| \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix} \right.$ نقطه‌ای باشد که ازآن بتوان دوممـاس برمنحنی رسم کرد چه رابطه‌ای باید بین x_1 و y_1 وجود داشته باشد ونیز رابطه‌ای بین x_1 و y_1 را پیدا کنید که این دوممـاس برهم عمود باشند (معادله مکان M را پیدا کنید).

رابعاً ـ درمعادله درجه دوم $mx^2 - (m^2+1)x + m^2 + 2m + 1 = 0$
m را طوری تعیین کنید که یکی ازریشه‌های معادله بین دوعدد -1 و $+1$ قرار گیرد.
خامساً ـ ازمنحنی رسم شده استفاده کنید و (بدون محاسبه جدید) منحنی حاصل جمع ریشه‌های معادله بالارا روی همان صفحه مختصات رسم کنید.

۲۵۳۸ـ ازتابع $y = ax\sqrt{bx+c} - 2x\sqrt{x^2-4}$ تابع اولیه بگیرید.

۲۵۳۹ـ اولاـ درتابع $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ مقادیر a و b و c و d را تعیین کنید بشرط آنکه نقطه ماکزیمم آن روی محور yها بعرض ۴ و نقطه مینیمم آن بطول ۲ روی محور xها باشد.

ثانیاً ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y = x^3 - 3x^2 + 4$ را رسم کنید.

ثالثاـ ازنقطه $M \left| \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right.$ خطی باشریب زاویه m مرور می‌دهیم تعیین کنید که بازاء چه مقادیری ازm این خط منحنی را قطع می‌کند ویا با آن مماس است وبعلاوه تحقیق کنید که اگر این خط منحنی را دردو نقطه دیگر قطع کند نقطه M همواره موسط این ۲ نقطه تلاقی می‌باشد.

رابعاً ـ تعیین کنید که ازنقطه $A \left| \begin{matrix} 5 \\ 54 \end{matrix} \right.$ چند مماس میتوان برمنحنی رسم کرد معادلات مماسها را بنویسید ومختصات نقاط تماس را تعیین کنید.

۲۵۴۰ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y = x \pm 3\sqrt{10 - x^2}$ را رسم کنید و تحقیق کنید که این منحنی دارای مرکز تقارن است مختصات آنرا تعیین کنید.

۲۵۵۱- تابع $f(x)$ مفروض است درصورتی که عددی مانند a وجودداشته باشد بقسمی که $f(a)$ و $f(a-x)$ معین بوده وداشته باشیم $f(x)=f(a-x)$ ثابت کنید که خط بمعادله $x=\frac{a}{2}$ محور تقارن منحنی نمایش تابع $y=f(x)$ میباشد.

۲۵۵۲- ثابت کنید که دو منحنی C_1 و C_2 نمایشهای هندسی دو تابع $(C_1): y-x^2-2x-3=0$ و $(C_2): y^2-4y-x+3=0$ نسبت بخطی که آنرا تعیین خواهید کرد قرینه یکدیگرند.

۲۵۵۳- ثابت کنید که اگر تابعی زوج باشد مشتق آن تابعی است فرد و اگر تابعی فرد باشد مشتق آن تابعی است زوج.

۲۵۵۴- تابع: $y=\frac{x^2+ax+1}{x^2+x-a}$ مفروض است ثابت کنید که اگر منحنی نمایش این تابع دارای مرکز تقارن I باشد نقطه I همان نقطه تلاقی منحنی بامجانب افقی آن میباشد مقدار a را پیدا کنید برای آنکه منحنی نمایش تابع مرکز تقارن داشته باشد.

۲۵۵۵- تابع مقابل را در نظر میگیریم: $y=\frac{2x^2+a}{x^2+2x-3}$ اولا - کوچکترین مقدار $|a|$ را تعیین کنید برای آنکه در ازاء مقادیر صحیح از x ماکزیمم و مینیمم داشته باشد ثانیاً- بفرض $a=0$ الف- منحنی C نمایش هندسی تابع را رسم کنید. ب- خط متغیر $x=k$ عموماً منحنی C را در M ومجانب افقی آنرا در B ومحور $x'x$ را در A قطع میکند اگر N مزدوج توافقی M نسبت به A و B باشد معادله مکان هندسی نقطه N را بدست آورده منحنی C' نمایش هندسی آنرا درهمان شکل منحنی C رسم کنید.

۲۵۵۶- منحنی نمایش هندسی تغییرات تابع زیر را رسم کنید

$$y=|x|+|x^2-1|\pm\sqrt{2-x^2}$$

۲۵۵۷- تابع: $a\neq b$ و $y=(x-a)\sqrt[3]{(x-b)^2}$ مفروض است اولا- بدون محاسبه مشتق تابع معادله مماس برمنحنی نمایش تابع را درهریك از نقاط تلاقی آن بامحور طولها بدست آورید ودرصورتی که معادله یکی از این مماسها $y=x-3$ باشد مقادیر a و b را معلوم کنید. ثانیاً- بازاء $a=3$ و $b=-2$ جدول تغییرات و منحنی نمایش تابع را رسم کنید ومساحت سطح محصور بین منحنی ومحور طولها را حساب کنید.

۲۵۵۸- تابع: $y=\frac{ax-5}{x^2-1}$ مفروض است که درآن عدد a مخالف باصفر ومخالف

با ± 5 است. اولاـ جدول تغییرات تابع‌را به‌ازاء مقادیر مختلف a رسم کنید . ثانیاً ـ در حالتی که تابع y یك ماکزیمم و یك‌می‌نیمم دارد معلوم کنید که کدامیك ازآنها بزرگتراست ثالثاً ـ مقدار aرا معلوم کنیدبرای‌آنکه جهت تغییرات‌تابع درازاء $x=2$ عوض‌شودومنحنی C نظیرآنرا رسم کنید .

۲۵۵۹ـ دایره ثابت C به‌مرکز O وبه‌شعاع یك وروی نیم‌خط Ox نقطه A بفاصله $OA=x$ از O مفروض است دایره‌های T و Ω را درنظرمیگیریم که اولی به مرکز A است وبر O میگذرد ودومی بمرکز O است وبر A می‌گذرد. اولاـ اگر H پای Δمحور اصلی دایره‌های TوC باشد طول OH را برحسب x حساب کنید مقادیری از x را تعیین کنید که‌بازاءآنها Δ با دایره C بوده وNوMدریکطرف Hواقع‌باشند نسبت زیررا برحسب x بدست‌آورید $y=\frac{HM}{HN}$ تغییرات yرا معین‌کرده منحنی نمایش آنرا رسم‌کنید . ثالثاً ـ محور $x'x$ را منطبق برOx ومحور $y'y$ را عمود بر $x'x$ در O انتخاب میکنیم هرگاه P وسط‌کمان AM از دایره Ω باشد معادله مکان P را نسبت بمحورهای انتخابی‌بدست آورده نوع‌منحنی این‌مکان‌را معین‌کنید .

۲۵۶۰ـ درصفحه محورهای مختصات متعامد $x'Ox$ و $y'Oy$ دایره C بمرکز O وبه‌شعاع R را درنظر میگیریم اگر P یکی ازنقاط تقاطع خط Δ به معادله $x=\frac{R}{2}$با دایره CوM نقطه بطول x از $x'x$ و M' نقطهٔ‌تلاقی دیگرخط Δ بادایره C باشد. الف ـ تابع‌زیررا برحسب xوR مشخص کنید $y=\frac{\overline{M'M}}{\overline{M'P}}$ جدول‌تغییرات‌آنرا معلوم‌کنید ومنحنی نمایش‌تغییرات‌آنرادرازاء $x=R$ رسم‌کنید هرگاهkعددجبری‌معلوم‌باشدبافرض $y=k$در وجود نقطهM بحث‌کنید. ب ـ برخطPM نقطه Q را درنظرمیگیریم که $k=\frac{\overline{MQ}}{\overline{MP}}$باشد ثابت‌کنید که‌مقدار این‌نسبت مستقل از xاست ومکانQرا تعیین‌کنیدوبا استفاده‌ازآن‌مجدداً دروجودنقطهM برحسب مقادیر k بحث‌کنید. ج ـ هرگاه k درفاصله‌ای تغییر کند که‌مسئله ممکن‌باشد همواره دونقطه M متناظر وجوددارندکه نسبت به‌دونقطه ثابت‌که آنها را تعیین میکنید مزدوج توافقی میباشند.

مسائل مجله نشریه جوانان حزب مردم
و مسائل کنکور

دانشکده‌های ایران و چند کشور خارجی
ومسائل امتحانات نهائی

از سال ۱۳۰۸ تا سال ۱۳۵۱

مسائل جبر ششم ریاضی مستخرج از نشریه سازمان جوانان حزب مردم

تذکر: این مسائل به کمک دبیران ارجمند آقایان : موسی آذرنوش- ابوترابیان - جم‌نژاد - خسرو محمدی - پرویز شهریاری - حبیب‌الله عبدالهی - محمدکاظم نائینی - محمدعلی لاهیجی - نجات خوش‌آهنگ تهیه شده‌است.

۲۵۵۱- اولا منحنی (c) نمایش‌تغییرات‌تابع $y=\frac{x^2-9}{\sqrt{x^2-x-2}}$ را رسم کنید .

ثانیاً- باتوجه‌به‌منحنی (c) ثابت‌کنید ، معادلهٔ درجه چهارم زیر همیشه چهار ریشهٔ حقیقی دارد :

$$x^4-(m^2+18)x^2+m^2x+2m^2+81=0 \qquad (m\neq 0)$$

۲۵۵۲- اولا منحنی نمایش‌تغییرات تابع $y=x^2-4\sqrt{x^2+3}$ را رسم کنید .

ثانیاً- معین‌کنید درچه‌فواصلی این‌تابع‌صعودی ودرچه‌فواصلی نزولی است .

ثالثاً- جوابهای $y=0$ را بدست‌آورید .

رابعاً- درنقطه $A\left|\begin{matrix}0\\3\end{matrix}\right.$ ، مماس برمنحنی به‌چه‌وضعی‌درمی‌آید؟

خامساً- ثابت‌کنید خطهای مماس برمنحنی درنقاط تلاقی‌آن‌با محورطولها یك‌لوزی بوجود می‌آورند .

مختصات رأسهای این لوزی‌را محاسبه‌کنید.

۲۵۵۳- تابع $y=\frac{ax+2}{(2x+3)^3}$ مفروض است اولاً- مقدار a را چنان تعیین کنید که منحنی نمایش تابع فوق y در نقطه‌ای بطول $-\frac{5}{2}$ سوی تقعرش تغییر کند. ثانیاً- بازاء $a=1$ بدون آنکه مخرج را بقوه برسانید تحقیق کنید که خط $y=\frac{2}{7}$ بر منحنی فوق مماس است. ثالثاً- منحنی نمایش تابع $y=\frac{x+2}{(2x+3)^3}$ را رسم کنید. سوی تقعر و نقطه عطف منحنی را تعیین کنید. معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش طولهای نقاط تلاقی خط مماس بر منحنی در نقطه‌ای بطول $-\frac{5}{2}$ با منحنی شود و از آنجا طولهای نقاط تقاطع این خط مماس را با منحنی بدست آورید.

۲۵۵۴- تابع $y=x\sqrt{\frac{x^2-1}{(x-2)^2}}$ مفروض است اولاً- معادلات مجانبهای این تابع را بدست آورید. ثانیاً- اگر x_1 و x_2 طولهای نقاط ماکزیمم یا مینیمم تابع فوق باشند مقدار عددی $x_1^2-x_2x_3$ را پیدا کنید.

۲۵۵۵- تابع اولیه $y=2(4x-3)(3x-2)(2x-1)^m$ را حساب کنید.

۲۵۵۶- مطلوبست رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y=\pm\sqrt{x^3+3x}$ (مختصات نقطه یا نقاط عطف را نیز در موقع رسم منحنی بدست آورید).

۲۵۵۷- از تابع $y=ax\sqrt{bx+c}-3x\sqrt{x^2-4}$ تابع اولیه بگیرید.

۲۵۵۸- تابع $y=x-1\pm\sqrt{(a-1)x^2-ax+a}$ مفروض است.

بازاء چه مقادیری از a تابع مفروض همواره معین میباشد.

اولاً- منحنی (c') نمایش هندسی تابع $y=x-1\pm\sqrt{x^2-2x+2}$ را رسم کنید.

ثانیاً- ثابت کنید هر خط به موازات محور عرض‌ها منحنی (c') را در دو نقطه M و M' قطع میکند که وسط پاره‌خط MM' همواره روی خط ثابتی واقع است و با استفاده از این خاصیت چگونه میتوان از نمایش تابع $y=x-1+\sqrt{x^2-2x+2}$ نمایش هندسی تابع : $y=x-1-\sqrt{x^2-2x+2}$ را نتیجه گرفت .

ثالثاً- حجم حادث از دوران سطح محصور بین منحنی $y=x-1+\sqrt{x^2-2x+2}$ و محور طولها و دو خط $x=0$ و $x=1$ را حول محور طولها حساب کنید.

رابعاً- از نقطه $\omega(0,1)$ چند قائم میتوان بر منحنی (c') رسم کرد . ضریب زاویهٔ قائم را بیابید .

۲۵۵۹- تابع $y=\frac{ax+b}{3x^2-12x+11}$ مفروض است.

اولا- ضرائب a و b را چنان معین کنید که نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع روی خط $y+x=1$ قرار گیرد. ثانیاً- در ازاء $a=-4$ و $b=5$ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع فوق را رسم کنید.

۲۵۶۰- تابع $y=2x^3-15x^2+36x+23$ مفروض است:

اولا- تحقیق کنید که از هر نقطهٔ M بطول α واقع بر منحنی دو مماس میتوان بر آن رسم کرد. چنانچه m' و m'' ضریب زوایای این دو مماس فرض شوند، رابطه‌ای مستقل از α بین m' و m'' بدست آورید. ثانیاً- ثابت کنید فقط یك نقطه روی منحنی یافت میشود که دو مماس مرسوم بر منحنی از این نقطه بر هم منطبق میباشند، مختصات این نقطه را بدست آورید. ثالثاً- درحالی که خط $y=ax+b$ منحنی را در سه نقطه بطولهای α و β و γ قطع میکند ثابت کنید مجموع طولهای این سه نقطه همواره مقداریست ثابت و بکمك آن نتیجه بگیرید که نقاط ماکزیمم و مینیمم و نقطه عطف منحنی بر یك خط راست واقعند. معادله این خط راست را بنویسید.

۲۵۶۱- توابع اولیه $y=\frac{\sin 2x}{(1+\sin x)^3}$ را بدست آورید.

۲۵۶۲ - تابع $y=\frac{x+a}{x^2-2x+2}$ مفروض است.

الف- a را بقسمی تعیین کنید که منحنی تابع با خط $y=x-1$ مماس باشد.

ب- جدول و منحنی (c) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x-1}{x^2-2x+2}$ را رسم کنید.

ج- مساحت سطح محصور بین منحنی (c) و محور xx' و خط $x=3$ را حساب کنید.

د - خط $y=mx-\frac{1}{2}$ منحنی (c) را در نقطه ثابت A و در دو نقطه دیگر B و C قطع میکند مختصات نقطه D مزدوج توافقی A را نسبت به B و C تعیین کنید.

۲۵۶۳ - تابع $y=\frac{mx^2+x+m}{x^2+m}$ مفروض است m را بقسمی تعیین کنید که طول یکی از نقاط عطف منحنی تابع برابر یك باشد.

۲۵۶۴ - الف - نمایش هندسی تابع $y=\frac{x^2-x+7}{x^2-2x-3}$ را رسم کنید.

ب ـ از نقطه I محل تلاقی مجانب افقی بامنحنی، خط D را باضریب زاویه‌ای $(-\frac{1}{2})$ رسم کرده تحقیق کنید برمنحنی مماس است.

ج ـ خط $y = m$ منحنی را دردو نقطه M' و M'' قطع میکند اگر N' و N'' تصاویر قائم این دو نقطه روی خط مجانب افقی باشد مکان هندسی مراکز مستطیل‌های $M'M''N'N''$ را بدست آورید.

د ـ ثابت کنید $IN' \times IN''$ مقدار ثابتی است این مقدار ثابت را حساب کنید.

۲۵۶۵ـ تابع $9x^2 - 24x + 16y^2 - 18x - 101y + 19 = 0$ مفروض است یکمك دوران محورهای xOy محور تقارن منحنی را موازی محورهای جدید کنید سپس نوع منحنی را تحقیق کرده مختصات رأس و کانون و معادله خط هادی آنرا بنویسید.

۲۵۶۶ـ مکان نقطه $M\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$ را چنان معین کنید که معادله $(b+1)x^2 - 3x + 2a = 0$ دارای ریشه مضاعف باشد این مکان را رسم کرده ناحیه‌ای از سطح محورهای مختصات را که معادله دارای یك ریشه است هاشور بزنید.

۲۵۶۷ـ خطوط مجانب تابع $y = x(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4+1}} - \sqrt{2})$ را بدست آورید.

۲۵۶۸ـ تابع اولیه $f(x) = \frac{x-1}{(2x+3)^3}$ را حساب کنید.

۲۵۶۹ـ ثابت کنید اگر در تابع $y = \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ معادله: $a'x^2+b'x+c' = 0$ ریشه نداشته باشد معادله $y' = 0$ فقط دو ریشه متمایز دارد.

۲۵۷۰ـ ثابت کنید اگر در تابع $y = \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ معادله: $a'x^2+b'x+c' = 0$ دو ریشه متمایز داشته باشد $y' = 0$ نمی‌تواند ریشه مضاعف داشته باشد.

۲۵۷۱ـ در تابع $y = \sqrt{\frac{ax^2+x}{x+b}}$ مقادیر a و b را چنان پیدا کنید که منحنی نمایش تابع فوق در ازاء $x = -\infty$ مجانب غیرموازی بمعادله $y = -x + \frac{3}{2}$ داشته باشد و

بازاء این مقادیر a و b منحنی نمایش تغییرات آنرا رسم کنید .

۲۵۷۲ـ منحنی نمایش تابع $y=\sqrt{x+1}\pm\sqrt{x-1}$ را رسم کنید تحقیق کنید از مبداء مختصات چندمماس برمنحنی فوق رسم میشود طول نقطه تماس ومعادله خط مماس را بنویسید وطول پای قائمی را که ازمبدأ مختصات برمنحنی رسم میشود تعیین کنید ومعادله این خط قائم را بنویسید .

۲۵۷۳ ـ تابع $y=\frac{x^2+ax+b}{x-3}$ مفروض است. اولاـ ضرائب a و b را بقسمی تعیین کنید که مماس در نقطه‌ای بطول ۲ واقع برمنحنی نمایش تابع y برخط $3y-x=1$ عمود گردد و مجموع طول ازمبدأ وعرض ازمبدأ مماس برابر ۲۸ باشد ثانیاـ جدول تغییرات و منحنی (C) نمایش تابع $y=\frac{(x-1)^2}{x-3}$ را بدست آورید ثالثاـ خط (D) بمعادله $y=mx$ را درنظر میگیریم درحالتیکه (D) منحنی (C) را قطع میکند نقاط تلاقی را M و N مینامیم اولاـ حدود m را طوری تعیین کنید که نقاط M و N درطرفین خط $x=1$ واقع شوند ثانیاـ حدود m را بقسمی پیدا کنید که نقاط M و N درطرفین محور yها واقع باشند رابعاً ـ تحقیق کنید که نیمسازهای زوایای بین دومجانب محورهای تقارن منحنی (C) می‌باشند ازآنجا نتیجه بگیرید محل تلاقی دومجانب مرکز تقارن منحنی است.

۲۵۷۴ـ درچه وجودو علامت ریشه‌های معادله $x^3+(m+2)x^2-4=0$ بحث کنید درحالتیکه بین سه ریشه رابطه $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-15$ برقرار باشد پارامتر m را تعیین کنید سپس بعداز تعیین m معادله حاصل را حل نمائید.

۲۵۷۵ـ تابع $y=\frac{x}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$ مفروض است هرگاه $a<-b<0$ باشد اولاـ ثابت کنید تابع y دارای می نیمم است ومقدار آنرا برحسب a و b بساده‌ترین صورت خود نوشته تحقیق کنید که این مقدار مثبت است ثانیاـ خط (D) بمعادله $y=m$ خطوط $x=a$ و $x=b$ را بترتیب درنقاط A و B قطع میکند اگر M تصویر نقطه مینیمم روی (D) فرض شود ثابت کنید وقتی m تغییر میکند نقطه N مزدوج توافقی M نسبت بنقاط A و B همواره برخط ثابتی حرکت میکند.

۲۵۷۶ـ جدول تغییرات ومنحنی تابع $y=\frac{\pm(x-1)}{\sqrt{x^2-2x+2}}$ را بدست آورید

سپس مساحت سطح محصور بین منحنی نمایش تابع $y=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+4}}$ و محور xها و دو خط $x=0$ و $x=2$ را حساب کنید.

۲۵۷۷ـ تابع $y=\frac{mx+n}{f(x)}$ مفروض است هرگاه $f(x)=ax^2+bx+c$ و $b^2-4ac>0$ باشد ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آنکه تابع y دارای یك ماکزیمم و یك مینیمم باشد باید ریشه صورت خارج ریشه‌های مخرج واقع شود در حالتیکه $b^2-4ac<0$ و $b^2-4ac=0$ میباشد آیا برای وجود یك ماکزیمم ویك مینیمم برای y شرط دیگری خواهیم داشت؟ چگونگی آنرا توضیح دهید.

۲۵۷۸ـ توابع اولیه توابع $y=\frac{\cos x(\cot g x-1)^{11}}{\sin^3 x}$ و $y=\frac{x^2(x^2+2x+3)}{(x^2+x+1)^2}$ را حساب کنید.

۲۵۷۹ـ در تابع $y=\frac{x^2-mx+m}{x^2-2x+1}$ مقدار m را طوری بیابید که منحنی نمایش آن برمحور xها مماس باشد.

۲۵۸۰ـ منحنی نمایش تابع $y=(\frac{x}{x-1})^2$ را رسم کنید و بدون هیچگونه محاسبه فقط از روی منحنی فوق اعداد (۱ و ۱ ـ) را با ریشه‌های معادله :

$(k-1)x^2-2kx+k=0$ مقایسه کنید.

۲۵۸۱ـ در وجود و علامت ریشه‌های معادله $(2x-1)^3+k(2x-1)+2$ باز اعمقادیر مختلف k بحث کنید.

۲۵۸۲ـ تابع اولیه تابع $y=\sqrt{4x^2-4x+1}$ را حساب کنید در صورتیکه خط مماس برمنحنی نمایش آن در نقطه‌ای بطول صفر ازمبدأ مختصات بگذرد.

۲۵۸۳ـ دو تابع $(c)\ y=\frac{x+2}{x^2+3x+m+2}$ و $(c')\ y=\frac{-1}{mx+1}$ مفروض‌اند. اولاـ بازاء چه مقادیر از m منحنی‌های (c) و (c') دو نقطه تلاقی دارند آیا دو منحنی میتوانند بر هم مماس باشند ۲ ثانیاً ـ اگر تساویر دو نقطه را بر محور طولها A و B فرض کنیم دایره ثابتی پیدا کنید که بر دایره به قطر AB عمود باشد و در اینصورت معادله محور اصلی دو دایره را پیدا کنید. ثالثاً ـ m را چنان پیدا کنید که منحنی (c) ماکزیمم

یا می‌نیمی برابر واحد داشته باشد. رابعاً- بازاء $m=1$ دومنحنی را رسم کنید. خامساً- ثابت کنید منحنی تابع $y=\frac{x+2}{x^2+3x+4}$ دارای سه نقطه عطف است وضمناً ثابت کنید سه نقطه عطف بر یك استقامتند ومعادله خطی را که ازاین سه نقطه میگذرد بدست آورید.

۲۵۸۴- تابع اولیه تابع $y=\frac{2x^3-x}{\sqrt{x^2-1}}$ را بدست آورید.

۲۵۸۵- اولا- در تعداد نقاط تلاقی خط $y=2x+m$ با منحنی $y=\frac{x^2+x-1}{x-1}$ بحث کنید. ثانیاً- درحالتی که یکدیگر را در دو نقطه قطع میکنند مکان وسط نقاط تلاقی را معین کنید. ثالثاً- اگر تصاویر نقاط تلاقی را برمحور xx' نقاط A و B بنامیم نقطه ثابتی بنام ω وعدد ثابتی بنام a چنان پیدا کنید که در انعکاس بمرکز ω وضریب انعکاس a در دو نقطه A و B همواره منعکس یکدیگر باشند.

۲۵۸۶- ازتابع $y=ax\sqrt{bx+c}-3x\sqrt{x^2-4}$ تابع اولیه بگیرید.

۲۵۸۷- اولا- در تابع $y=ax^3+bx^2+cx+d$ مقادیر a و b و c و d را چنان تعیین کنید بشرط آنکه نقطه ماکزیمم آن روی محور yها بعرض ۴ ونقطه می‌نیمم آن بطول ۲ روی محور xها باشد. ثانیاً- منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x^3-3x^2+4$ را رسم کنید. ثالثاً- از نقطه $M(2,1)$ خطی باضریب زاویه M مرور میدهیم تعیین کنید که بازاء چه مقادیری از m این خط منحنی را قطع میکند ویا با آن مماس است وبعلاوه تحقیق کنید که اگر این خط منحنی را در دو نقطه دیگر قطع کند نقطه M همواره وسط این دو نقطه تلاقی میباشد. رابعاً- تعیین کنید که از نقطه $A(5,52)$ چند مماس میتوان بر منحنی رسم کرد معادلات مماس‌ها را بنویسید ومختصات نقاط تماس را تعیین کنید.

۲۵۸۸- منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x\pm 3\sqrt{10-x^2}$ را رسم کنید وتحقیق کنید که این منحنی دارای مرکز تقارن است مختصات آن را تعیین کنید.

۲۵۸۹- تابع اولیه $f(x)=\frac{x-1}{(2x+3)^3}$ را حساب کنید.

۲۵۹۰- بازاء مقادیر مختلف m در وجود و علامت ریشه‌های معادله درجه سوم $x^3-3(m-1)x+2(m-1)=0$ بحث کنید.

۲۵۹۱- جدول ومنحنی تغییرات تابع $y=\frac{x(x^2-9)}{x^2-1}$ را رسم کنید.

۲۵۹۲- ثابت کنید شرایط لازم و کافی برای آنکه سه نقطه از منحنی تغییرات تابع $y=\frac{x(x^2-9)}{x^2-1}$ بطولهای x' و x'' و x''' روی یك خط راست باشد اینست که :

$$x'+x''+x'''+x'x''x'''=0$$

۲۵۹۳- تعیین کنید که بموازات یك امتداد مفروض چند خط مماس بر منحنی تابع $x=\frac{(x^2-9)}{x^2-1}$ رسم کرد (بحث کنید).

۲۵۹۴- نقطه A را بطول a روی منحنی تابع $y=\frac{(x^2-9)}{x^2-1}$ اختیار میکنیم مطلوبست محاسبه طولهای نقاط تلاقی خطی که از A موازی محور xها رسم شود و منحنی را قطع کند.

ثانیاً - مختصات نقاط مماس هائیکه از نقطه A برمنحنی تابع مزبور میتوان رسم کرد (غیر از نقطه A) برحسب a محاسبه کنید سپس معادله خطی که نقاط تماس را بهم وصل میکند بنویسید وثابت کنید این خط وقتی که پارامتر a تغییر میکند بر یك منحنی ثابت مماس است معادله این منحنی را معین کرده رسم کنید.

۲۵۹۵- تابع اولیه تابع

$$y=\frac{5}{\sqrt[3]{2x^2-12x+9}}+\sin^2 2x-3(2x^2-5x+2)^4(4x-5)$$

را محاسبه کنید.

۲۵۹۶- مکان نقاطی از صفحه مختصات را تعیین کنید که مختصات آن نقاط در نامساوی زیر صدق کنند.

$$(x^2-y^2)(x^4-y^4-2x^2+1)<0$$

۲۵۹۷- منحنی توابع زیر را در یك دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

$$y=\pm\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2}\right)$$

$$y=\pm\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}-\sqrt{2}\right)$$

۲۵۹۸- اولا- جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x+\frac{1}{a^2}$ را رسم کنید . ثانیاً- از نقطه‌ای بطول واحد واقع برمنحنی مماسی بر آن رسم کرده‌ایم محل تلاقی این مماس را بامحور طولها A می‌نامیم ثابت کنید از نقطه A تنها همین مماس را میتوان برمنحنی رسم کرد نقطه مشترك دیگر این مماس را بامنحنی پیدا کنید.

۲۵۹۹- تابع $y=\frac{2x^2-8}{2x^2+2x+a}$ مفروض است: اولاً اگر y_1 و y_2 عرضهای ماکزیمم ومی‌نیمم این تابع باشد a را طوری پیدا کنید که $7y_1=4y_2$ بشود.

۲۶۰۰- نقاط A و B ماکزیمم ومی‌نیمم تابع $y=\frac{x^2+x+2a}{x+3b}$ در دستگاه مختصات xOy میباشد مثلث AOB را درنظر میگیریم: مطلوبست تعیین a ، b درصورتیکه مثلث مزبور درراس O قائم‌الزاویه بوده ونقطه c(a و b) روی وتر آن واقع باشد.

۲۶۰۱- تعداد وعلامت ریشه‌های معادله درجه سوم $x^3-11x-20=0$ را مشخص کنید وآنرا محاسبه نمائید.

سئوالات جبر جهت تعیین بهترین دانش آموزان ششم ریاضی

درسا تحصیلی ۴۸-۴۹ (مدت ۴۰ دقیقه)

۲۵۷۳- تابع $y=\frac{2}{x(x^2-1)}$ مفروض است رابطه‌ای بین a و b و c و d طول‌های چهار نقطه واقع بر منحنی فوق چنان پیدا کنید که این چهار نقطه بر یك خط راست واقع شوند. (۳ نمره)

۲۵۷۴- تابع $y=\frac{x^2+ax+a^2+7}{ax-3}$ مفروض است حدود a را چنان معین کنید که در بینهایت مثبت منحنی بالای مجانب مایل قرار گیرد. (۳ نمره)

۲۵۷۵- توابع اولیه عبارت: $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$ را بدست آورید. (۴ نمره)

۲۵۷۶- تابع $y=\frac{(1-2a)x^2+2x+1}{x^2}$ که در آن $a\neq\frac{1}{2}$ میباشد . مفروض است (واضح است با تغییر پارامتر a منحنی‌های مختلفی رسم میشود) تا بی آنچنان پیدا کرده رسم کنید که بکمك منحنی نمایش تغییرات این تابع بتوان جمیع منحنی‌های (c) را بدون محاسبه رسم کرد . (۵ نمره)

۲۵۷۷- تابع $y^2+3xy+x^2-1=0$ را رسم کنید. (۵ نمره)

سؤالات جبر و مثلثات برای تعیین بهترین دانش آموزان سال ششم طبیعی استان مرکز (چهارم اردیبهشت ۱۳۴۸)

۲۵۷۸ـ معادله دایره‌ای را بنویسید که معادلات اقطار آن بصورت

$x(m+4)+y(m-7)+2m-3=0$

بوده و بر دایره $x^2+y^2=2x$ مماس باشند. (۲/۵ نمره)

۲۵۷۹ـ معادلات مماس مشترک هر دو سهمی (c) و (c') بمعادلات $y^2=16x$ و $x^2=16y$ را تعیین کنید. (۳ نمره)

۲۵۸۰ـ مکان هندسی مراکز دوایری را تعیین کنید که با دایره : $x^2+y^2-10x+16=0$ مماس خارج بوده و بر خط $x=-2$ مماس باشد. (۳/۵ نمره)

۲۵۸۱ـ دو نقطه $N\left|\begin{matrix}\frac{a}{\cos\theta}\\ b\,tg\theta\end{matrix}\right.$ و $N'\left|\begin{matrix}\frac{a}{\sin\theta}\\ b\cot g\theta\end{matrix}\right.$

و هذلولی بمعادله $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

مفروض‌اند θ را چنان تعیین کنید که حاصلضرب فواصل رؤس هذلولی از خط NN' مساوی b^2 باشد. (۴ نمره)

۲۵۸۲ـ معادله مثلثاتی $\cos x=\cos^2\frac{3}{2}x$ را حل کنید و جوابهای کلی x را تعیین کنید (۳/۵ نمره)

۲۵۸۳ـ توابع اولیه تابع $y=\frac{1}{5-3\sin x+2\cos x}$ را تعیین کنید (۳/۵ نمره)

دانشکده علوم (رشته شیمی) ۱۳۳۶

۲۵۸۴ـ جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع : $y=\frac{3x^2+4x+1}{x^2-x}$ را رسم نمائید

دانشکده فنی ۱۳۳۶

۲۵۸۵ ـ معادله $x^4-8x^3-46x^2+128x+156=0$ را حل کنید. درصورتیکه مجموع وحاصلضرب دوریشه آن بترتیب ۶ و ۵۵− باشد .

۲۵۸۶ ـ حد تابع $\frac{tg\,x-\sin x}{\sin x(\sin 2x-\cos x)}$ را بازاء $x=0$ تعیین کنید.

دانشکده کشاورزی کرج ۱۳۳۶

۲۵۸۷ ـ باروش ترسیم یا ازروی خواص ریشه‌های سه‌جمله‌ای درجه دوم‌معادله زیر را برحسب مقادیر m بحث کنید .

$$(m+1)x^2+2mx+m-3=0$$

دانشکده کشاورزی تبریز ۱۳۳۶

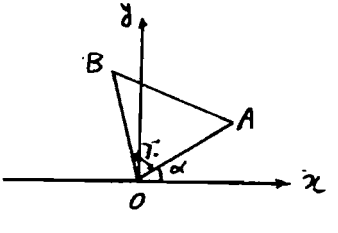
۲۵۸۸ ـ نمایش‌هندسی‌تابع $y=\frac{x}{x^2-7x+12}$ رارسم کنید :

دانشکده علوم رشته فیزیك ۱۳۳۶

۲۵۸۹ـ توابع اولیه تابع‌های $\sin\frac{x}{2}$ و $\cos^2 2x$ را حساب کنید.

۲۵۹۴ـ مساحت سطح محصور بین منحنی $y=\cos 2x$ و محور Ox و خطوط $x=\frac{\pi}{4}$ و $x=\frac{\pi}{2}$ راحساب کنید.

دانشکده علوم (رشته آمارگری) ۱۳۳۷



۲۵۹۰ـ OAB مثلثی است متساوی الاضلاع $xOA=\alpha$ دورهٔ OAB را روی محور xها و روی محور yها تصویرمیکنیم اتحادهای حاصل را بنویسید .

۲۵۹۱ـ حساب کنید مساحت سطح محصور بین منحنی $y=\cos^3 x$ و محور xها و خط $x=\frac{\pi}{2}$.

۲۵۹۲ـ معادله خطوطی راکه ازنقطه (۰ و ۲ −) میگذرندو برمنحنی $y=x^2+2x$ مماس میشود بنویسید.

دانشکده علوم (رشته ریاضی) ۱۳۳۷

۲۵۹۳ـ مشتق $y=\frac{2tg\,x}{1+tg^2 x}$ را حساب کنید ونتیجه راتعیین نمائید.

۲۵۹۴ـ نقطه عطف منحنی نمایش تابع $y=x^3-3x$ رابدست آورید و ثابت کنید که آن نقطه مرکز تقارن منحنی است.

۲۵۹۵ـ مجانبهای تابع $y=x\pm\sqrt{x^2-3x+2}$ را معین کنید.

۲۵۹۶ـ مطلوب است محاسبه سطح محصوربین محورها ودوخط $x=0$ و $x=\frac{\pi}{3}$ ومنحنی نمایش $y=\sin^2 2x-\sin 2x$

جواب ۰/۱۰۷۲ـ

دانشکده علوم (رشته فیزیك) ۱۳۳۷

۲۵۹۷ـ مختصات نقاطی از منحنی $y=3x^3-3x$ رابدست آورید که مماس درآن نقاط بامحور yهازاویه ۴۵° بسازد ومعادله این مماسهارا بنویسید.

۲۵۹۸ ـ بازاء چه مقادیری‌از x عبارت $\frac{-2-x}{(x-1)(x+2)}$ منفی است؟

۲۵۹۹ـ $F_1(x)=\sqrt{x^2-3}$ و $F_2(x)=\sqrt{x^2+3}$

داده شده است‌عبارت $F_1(a+\frac{1}{a})+F_2(a-\frac{1}{a})$ را حساب کنید وآنرا بصورت ساده‌ای درآورید.

۲۶۰۰ ـ مشتق $y=(x^3-x)^5$ راحساب کنید.

۲۶۰۱ ـ درتابع $y=\sin 2x$ نموی مانند h به x داده نموی‌که برای yحاصل میشود بصورت حاصل ضرب دوتابع مثلثاتی بنویسید.

دانشکده هنرهای زیبا (رشته معماری) ۱۳۳۷

۲۶۰۲ ـ درتابع $y=x^3-3x^2-36x$ نقاطماکزیمم ومی‌نیمم را بااستفاده ازمشتق‌های اول ودوم بدست‌آورید.

۲۶۰۳ ـ مقدار حقیقی کسر $\frac{x^2-x-12}{x^2-6x+8}$ را بازاء $x=4$ بوسیله میتوانید حساب کنید .

۲۶۰۴ ـ از نقطه $M(-2,0)$ خطی برمنحنی $y=x^2-3x$ مماس کنید (رسم منحنی لازم نیست فقط معادله مماس را بدست آورید)

۲۶۰۵ ـ مشتق تابع $y=\frac{x^2+\sqrt{2\cos 3x}}{\sin^2 x}$ راحساب کنید .

۲۶۰۶ ـ تابع اولیه $x^2-\cos^2 x$ در فاصله $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\pi$ حساب کنید.

دانشکده فنی ۱۳۳۷

۲۶۰۷ ـ مطلوب است محاسبه A و B بشرطیکه عبارت Ax^4+Bx^2+1 بر $(x-1)^2$ بخش‌پذیر باشد.

۲۶۰۸ ـ ثابت کنید که عبارت $x^3+y^3+z^3-3xyz$ بر $x+y+z$ قابل قسمت است .

دانشکده فنی تبریز ۱۳۳۷

۲۶۰۹ ـ تساوی زیررا تحقیق نمائید :

$$\frac{\sqrt{\sqrt[3]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[3]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[3]{8}+\sqrt{\sqrt{2}+1}}}=$$

۲۶۱۰ـ مقدار عبارت $A=\frac{x\,tg\,x}{\sqrt{1+tg^2 x}-1}$ را بدون استفاده از مشتق بازاء $x=0$ حساب کنید.

۲۶۱۱ـ تابع زیرمفروض است $y=x^3+px^2+qx+r$ مطلوب است:

اولا: تعیین مقادیر p و q و r بقسمی که نقطه تلاقی خط $x=-1$ ومنحنی فوق برمحور xها واقع شود بعلاوه بازاء $x=-2$ تابع فوق ماکزیمم یا می‌نیمم برابر یك داشته باشد.

ثانیاً ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=(x+1)(x^2+2x+1)$ را رسم کنید

ثالثاً ـ حساب کنید سطح محصور بین محور xها ومنحنی وعرض‌هائیکه طول نظیر آنها بترتیب (-1)و(-2) باشند .

دانشکده کشاورزی گرج ۱۳۳۷

۲۶۱۲ ـ ازمبداء مختصات نیم خط OD را طوری رسم میکنیم که با محور xها زاویه α را تشکیل دهد. روی OD نقطه M را بفاصله $OM=r$ ازمبداء O جدامی کنیم ازنقطه M عمود MN را برOD وارد میسازیم این عمود محور xها رادرنقطه P قطع میکند.

اولا ـ معادله خط MN رابنویسید . ثانیاً مساحت S مثلث MOP را حساب کنید.

ثانیاً ـ اگرزاویه α ازصفر تا $\frac{\pi}{2}$ تغییر کند منحنی مساحت S رابرحسب α رسم کنید.

رابعاً ـ اگر خط OD حول محور xها دوران کند مثلث OMP جسمی را تولید مینماید حجم این جسم را حساب کنید .

دانشکده کشاورزی تبریز ۱۳۳۷

۲۶۱۳ ـ مشتق عبارت زیررا بدست‌آورده وآنرا مختصر نمائید .

$$y=\frac{x\sqrt{\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}}-\sqrt{\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}}}{x\sqrt{\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}}+\sqrt{\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}}}$$

هنرسرایعالی فنی ۱۳۳۷

۲۶۱۴ ـ توابع $y=\frac{x^2-1}{2x-1}$ و $y=x^2+x$ مفروضند منحنی‌های نمایش تغییرات این دوتابع رادریك دستگاه مختصات رسم نموده وزاویه بین‌دومنحنی راپیدا کنید.

۲۶۱۵ ـ تابع $y=-2x^2+x$ مفروض است.

اولا ـ سطح واقع بین این منحنی ومحور xها رامحاسبه کنید .

ثانیاً ـ خط $y=m$ منحنی فوق رادردونقطه N و M قطع میکند مکان هندسی وسط پاره خط MN چیست؟

۲۶۱۶ ـ تابع $y=x^3-3x^2+5x$ مفروض است قائم‌برمنحنی رادرنقطه‌عطف بنویسید.

۲۶۱۷ ـ معادله درجه دوم $mx^2-2x-2m-1=0$ مفروض است .

اولاً ـ m باطوری تعیین کنید که مجموع مجذورات ریشه‌ها باضافه مجموع ریشه‌ها ۱۱ گردد.

ثانیاً ـ مطلوب است تعیین رابطه مستقلی بین ریشه‌های معادله فوق که بپارامتر m بستگی نداشته باشد.

۲۶۱۸ ـ ثابت کنید مکان هندسی نقاطی که از یک خط و یک دایره بیک فاصله باشند سهمی است خط هادی و کانون سهمی را پیدا کنید.

۲۶۱۹ ـ دو نقطه F و F′ بفاصله ۸ ازیکدیگر دوکانون هذلولی هستند که شعاع دایره اصلیش ۲/۴ است.

محورهای هذلولی را محورهای مختصات فرض کنید وازنقطه O مبداء مختصات خطوطی برهذلولی مماس نموده ومعادله مماسها رابنویسید.

پلی تکنیک (انستیتو برق) ۱۳۳۸

۲۶۲۰ ـ معادلات مجانبهای منحنی زیررا بیابید:

$$y=0/25(-3+\sqrt{12x^2+45})$$

۲۶۲۱ ـ معادله درجه سوم $x^3-x^2-14/75x+21=0$ مفروض است ریشه های این معادله راپیدا کنید مشروط براینکه مجموع دوریشه آن ۵ و حاصلضرب همین دو ریشه ۵/۲۵ باشد.

۲۶۲۲ ـ ثابت کنید عبارت $a^3+b^3+c^3-3abc$ بر $a+b+c$ قابل قسمت است

پلی تکنیک (انستیتو ساختمان) ۱۳۳۸

۲۶۲۳ ـ توابع $y=ax$ و $y=x^2$ مفروضند مطلوب است تعیین مقدار a برای اینکه سطح محصور بین منحنی وخط برابر مقدار $\frac{1}{6}$ باشد.

۲۶۲۴ ـ دستگاه دومعادله دومجهولی زیررا حل کنید.

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=3 \text{ و } xy+\sqrt{xy}=6$$

۲۶۲۵ ـ مطلوب است حد کسر $\frac{\sin x-\sin 2x}{\sin 3x}$ بازاء $x=0$

پلی تکنیک (انستیتو نساجی) ۱۳۳۸

۲۶۲۶ ـ ازبین مستطیلهائی که محیطشان ۴۰ سانتیمتر است کدامیک مساحتش ازهمه بیشتر است؟

دانشکده علوم (رشته آمار گری) ۱۳۳۸

۲۶۲۷ - منحنی نمایش تغییرات تابع - $y=\frac{1+2x}{1-2x}$ مفروض است. نقطه‌ای در روی این منحنی پیدا کنید که ضریب زاویه مماس برمنحنی در این نقطه برابر ۲ باشد. معادله مماس برمنحنی در نقطه $x=0$ را بنویسید.

۲۶۲۸ - علامت سه‌جمله‌ای $x^2-11x+28$ را برحسب مقادیر مختلف x معین کنید.

۲۶۲۹ - دستگاه معادلات زیر را حل کنید :

$$2x-3y=7 \text{ و } 3x-y=5$$

۲۶۳۰ تابع اولیه $1+tg^2x$ را که بازاء $x=0$ مساوی بایك است بنویسید.

دانشکده علوم (رشته ریاضی) ۱۳۳۸

۲۶۳۱ - دستگاه زیر را که در آن x و y مجهولند حل کنید :

$$x\sin m-y\cos m=b \text{ و } x\cos m+y\sin m=a$$

۲۶۳۲ - مطلوبست معادله خطی که میتوان از نقطه $\left|\begin{matrix}-3\\0\end{matrix}\right.$ a بر منحنی $y=x^2+2x$ مماس کرد .

۲۶۳۳ - روی خط $5x+3y=6$ نقاط A و B طولهای ۱ - و ۲ را در نظر گرفته‌ایم و C نقطه تلاقی خط با محور yها است مزدوج توافقی C را نسبت به A و B پیدا کنید .

۲۶۳۴ - مقدار حقیقی $\frac{\sqrt{x^2-8}-2}{2-\sqrt{2x-3}}$ را در ازاء $x=3$ بدست آورید.

۲۶۳۵ - در تعداد ریشه‌های معادله $x^3-9x+m=0$ برحسب مقادیر m بحث کنید

دانشکده علوم (رشته زمین شناسی) ۱۳۳۸

۲۶۳۶ - تابع $y=2x^3-12x^2+18x-8=2(x-3)(x-1)^2$ مفروض است .

اولا - جدول و منحنی نمایش تغییرات آنرا رسم کنید ثانیاً - معادله مماس برمنحنی را در نقطه $x=1$ بدست آورده و خط مماس را رسم کنید ،

ثالثاً - سطح محصور بین منحنی و محور ox و خطوط $x=1$ و $x=3$ را حساب کنید.

دانشکده علوم (رشته زیست شناسی) ۱۳۳۸

۲۶۳۷ - منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{2x-1}{x-3}$ را رسم کنید .

دانشکده علوم (رشته‌شیمی ۱۳۳۸)

۲۶۳۸ ـ دستگاه معادلات زیررا حل کنید :

$$\frac{2x}{3}+\frac{y}{5}=6 \quad و \quad \frac{x}{6}-\frac{y}{2}=-2$$

۲۶۳۹ ـ معادله $x^2=4x$ راحل کنید .

۲۶۴۰ ـ نامساوی $x^2<16$ راحل کنید .

۲۶۴۱ ـ بازاء چه‌مقادیری از x مقدار $x+\frac{1}{x}<2$ است ؟

۲۶۴۲ ـ مشتق تابع $y=(\sin^2 x+5)^{12}$ راحساب کنید .

۲۶۴۳ ـ تابعی پیدا کنید که‌مشتقش $y=\frac{1}{x^2}+x^2$ وبازاء $x=1$ مساوی با -1 باشد.

۲۶۴۴ ـ بازاء چه مقادیری از x تابع : $y=x^3-3x^2-9x$ صعودی است

دانشکدهٔ فنی (مرحله اول) ۱۳۳۸

۲۶۴۵ ـ عبارت زیر را مختصر کنید:

$$\frac{a^2b^2}{c}\div\left[\frac{a^2c^2}{b}\div\frac{\frac{b^2c^2}{a}\times\frac{ac}{b^2}}{\frac{ab}{c^2}\div\frac{bc}{a^2}}\right]$$

۲۶۴۶ ـ مطلوبست محاسبه m و n بشرطیکه عبارت A:

$$A=x^4+(m+n)x^3+(m-n)x^2+(m^2+2n-1)x+(m+2n+4)$$

برعبارت x^2-2x+1 بخش پذیر باشد.

۲۶۴۷ ـ مطلوبست علامت مشتق تابع : $y=\sqrt{x^2-1}+2x$

دانشکده فنی (مرحله‌دوم) ۱۳۳۸

۲۶۴۸ ـ اولاـ مطلوبست محاسبه مقدار $tg\,2a$ برحسب $tg\,a$. ثانیاـ رسم منحنی (C) نمایش تغییرات‌تابع : $y=\frac{2(x-x^3)}{1-6x^2+x^4}$

باواحد ۲سانتی‌متر وتعیین معادلات مماسهای منحنی (C) درنقاط تلاقی بامحورxها ورسم این مماسها .

ثالثاً ـ درتابع فوق اگر $y=tg\,2a$ فرض شود معادله حاصل راحل‌کنید وجوابهارا برحسب خطوط مثلثاتی زاویه a بساده‌ترین صورت درآورید.

۲۶۴۹ـ دستی رابطه زیر را تحقیق کنید :

$$(a^{2}+a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}+(b^{2}+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

۲۶۵۰ ـ عبارت $f(x)=x^{2}-(\sqrt{b}+b)x+b$ را بحاصل ضرب عوامل تجزیه واذایشرو معادله $f(x)=0$ راحل کنید .

دانشکده فنی تبریز ۱۳۳۸

۲۶۵۱ ـ m راطوری تعیین کنید که مجموع عکس ریشه‌های معادله درجه سوم $2x^{3}+(m+9)x^{2}+mx+4=0$ برابر ۲/۲۵ باشد. بازاء این مقدار از m معادله چندریشه دارد ؟

۲۶۵۲ ـ جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{\sqrt{x}}{x^{2}+1}$ رارسم کرده و حجم حاصل ازدوران این منحنی راحول محور xx' درفاصله صفرو $\frac{\sqrt{3}}{3}$ حساب کنید .

دانشکده کشاورزی کرج ۱۳۳۸

۲۶۵۳ ـ تابع $y=\frac{x^{2}+x+5+\sin\alpha}{x+\cos\beta}$ مفروض است .

اولاـ دوزاویه α و β راطوری تعیین کنید که مماس برمنحنی تابع بالا درنقطهٔ M بطول $x=1$ ودرنقطه N بطول $x=-2$ موازی محور xx' باشد. ثانیاً مقدار α و β را درتابع قرار داده ومنحنی نمایش دهنده تابع را بکشید .

ثالثاً ـ این منحنی دارای دوسجانب است که همدیگر رادریك نقطه P قطع میکنند ثابت کنید که سه‌نقطه M و N و P روی یك خط مستقیم واقعند ومعادله این خط رابنویسید

رابعاً ـ خطی باضریب زاویه (۱ ـ) از نقطه M رسم کنید این خط محور xxرا در نقطه Q میبرد مثلث PMQ دورمحور xها میچرخد سطح وحجم جسم‌دورانی راپیدا کنید

دانشکده کشاورزی تبریز ۱۳۳۸

۲۶۵۴ ـ جدول ونمایش هندسی تابع $y=\frac{1}{(x-1)^{2}}$ رارسم کنید

۲۶۵۵ ـ تابع اولیه عبارت $y=2\cos^{2}3x-4\cos^{2}x$ را حساب کنید .

هنرسرای عالی فنی ۱۳۳۸

۲۶۵۶ ـ حد تابع $y=\frac{x-\sqrt{2+x}}{\sqrt[3]{4x+1}-3}$ را بازاء $x=2$ پیدا کنید .

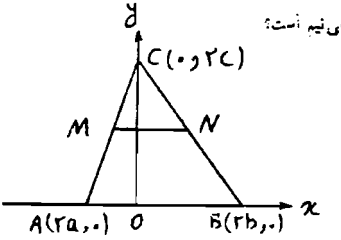
۲۶۵۷ ـ سطح محصور بین منحنی $y=x^3$ و خط $y=x$ را که در ربع اول واقع است محاسبه کنید .

۲۶۵۸ ـ معادله مکان هندسی نقطه $M\ (x=\frac{\sin t}{1+\cos t}$ و $y=\frac{\cos t}{1+\cos t})$ را وقتیکه t تغییر میکند پیدا کنید.

۲۶۵۹ ـ معادله زیر را حل کنید.

$$3^{x^2+1/2096}\times\frac{1}{3^{2/5x}}=\frac{1}{3^{0/3}}$$

۲۶۶۰ ـ اگر نقطه M برمنحنی تغییرات تابع:
$y=\frac{x^2-5x+4}{x^3+5x^2+4x}$ حرکت نماید طول وعرض این نقطه برمحورهای مختصات مستطیل میسازد تحقیق کنید بازاء چه مقدار این مساحت می‌نیمم است؟



۲۶۶۱ ـ با استفاده از (شکل مقابل) ثابت کنید قطعه‌خط محصور بین اوساط دوضلع مثلث باضلع سوم متوازی ونصف آنست .

دانشکده هنرهای زیبا (رشته معماری) ۱۳۳۸

۱۶۶۲ ـ تابع اولیه تابع زیر را در فاصله‌های $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\pi$ حساب کنید .

$$y=\cos^2 x+\cos 5x-\sin 2x$$

۲۶۶۳ ـ m را طوری تعیین کنید که $y=\frac{x^2+mx}{2x-1}$ در نقطه‌ای بطول $x=2$ ماکزیمم ویا می‌نیمم باشد .

۲۶۶۴ ـ l را طوری تعیین کنید که خط $y=3lx+6$ محور طولها را در نقطه‌ای بطول ۴ قطع کند.

۲۶۶۵ـ m را طوری تعیین کنید که نامساوی $mx^2-2mx-4<0$ همیشه محقق باشد.

۲۶۶۶ـ مشتق $y=\sqrt[3]{\frac{x}{2x-1}}$ را بدست آورید:

پلی‌تکنیک تهران ۱۳۳۹

۲۶۶۷ـ مقدار عددی عبارت زیر را حساب کنید:

$$\left|{}_{9}-0/25+\left(\frac{1}{{}_{2}-1/5}\right)^{-\frac{3}{2}}\right|\times\left|{}_{9}-0/25\ {}_{-(3\sqrt{3})}-1-\frac{1}{2}\right|$$

۲۶۶۸ ـ خارج قسمت تقسیم زیر را بنویسید:

$$\left({}_{a}{}^{-1}-{}_{b}{}^{-1}\right)\div\left({}_{a}{}^{-\frac{1}{4}}\ {}_{-b}{}^{-\frac{1}{4}}\right)$$

۲۶۶۹ ـ عبارت $\sqrt{2+\sqrt{8+\sqrt{33+8\sqrt{2}}}}$ را مختصر کنید.

۲۶۷۰ـ عبارت زیر را بحاصلضرب دوعامل تبدیل کنید:

$$bc\sqrt{ac}-b^2c+a^2b-c^2a+bc\sqrt{ac}$$

۲۶۷۱ـ اگر n و p عددهای درست ومثبتی باشند ثابت کنید:

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}$$

دانشکده علوم (رشته آمارگری) ۱۳۲۹

۲۶۷۲ـ تابع $y=\frac{x^2-3}{x+2}$ مفروض است.

اولاـ مجانبهای منحنی نمایش تابع فوق راپیدا کنید. ثانیاً ـ مختصات نقاط ماکزیمم و مینیمم راحساب کنید. ثالثاً ـ معادله مماس درنقطه‌ای ازمنحنی بطول $x=1$ را بنویسید.

۲۶۷۳ـ مشتق تابع $y=(5x^2+\sqrt{2x^2+1})^2$ راحساب کنید.

دانشکده علوم (رشته زمین شناسی) ۱۳۳۹

۲۶۷۴ـ مشتق تابع $y=\sqrt{\frac{2x}{x+1}}$ را حساب کنید .

۲۶۷۵ـ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که نقطه (۳و۲) C مرکز تقارن منحنی $y=\frac{ax+1}{bx-2}$ گردد .

۲۶۷۶ـ بیضی بمعادله $x^2+4y^2-4x-8y+4=0$ مفروض است. مختصات مرکز ورئوس وکانونهای این بیضی را بدست آورید .

دانشکده علوم (رشته زیست شناسی) ۱۳۳۹

۲۶۷۷ـ نقاط $A\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}-3\\-1\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}3\\-4\end{matrix}\right.$ سه رأس مثلث ABC می‌باشند معادله ارتفاع AA' این‌مثلث را بنویسید .

۲۶۷۸ـ مختصات مرکز وطول اقطار بیضی زیررا بدست‌آورید .

$$x^2-2x+1+4y^2-16y=0$$

۲۶۷۹ـ معادله خط مماس برمنحنی $y=2x^3-5x^2$ را در نقطه‌ای بطول $x=1$ بنویسید .

۲۶۸۰ـ مشتق تابع زیررا بدست‌آورید .

$$y=\sin 2x+tg^2x$$

دانشکده علوم (رشته شیمی) ۱۳۳۹

۲۶۸۱ـ معادله خطی را بنویسید که ازنقطه (۳و۲) A گذشته و برخط $y=3x+5$ عمود باشد.

۲۶۸۲ـ طولهای نقاط برخورد خط $y=3x-5$ را بامنحنی $y=\frac{25-x}{x-1}$ بدست آورید .

۲۶۸۳ـ مجانبهای منحنی زیررا پیدا کنید .

$$y=\frac{2x+1}{x-1}$$

۲۶۸۴ـ اگرضریب زاویه خط D برابر $m=-\sqrt{3}$ باشد خط D چه زاویه‌ای با جهت مثبت محور xها میسازد .

۳۶۸۵ـ دایره‌ای بمعادله $x^2+y^2-2x-6y-15=0$ مفروض است. مختصات مرکز وشعاع دایره راحساب کنید .

۳۶۸۶ ـ تابع اولیه عبارت $\frac{1}{x^2}+\cos\frac{x}{2}+\sin^2 x$ راحساب کنید.

دانشکده علوم (رشته ریاضی) ۱۳۳۹

۳۶۸۷ـ $y=\sqrt{\frac{x^3}{x^2-1}}$ رابصورت دوعامل توشته مشتق آنراحساب کنید.

۳۶۸۸ ـ بازاء جمقادیری از m سه‌جمله‌ای x^2-mx+m مثبت است .

۳۶۸۹ـ مطلوب است معادله یك‌سهمی که محورآن موازی بامحور yها ورأس آن نقطه $S(1,-1)$ باشد وازنقطه $A(2,0)$ بگذرد .

۳۶۹۰ـ مطلوب است تابع اولیه $y=\sin^2 3x+\cos 3x$

۳۶۹۱ ـ معادله مماس درنقطه عطف منحنی زیررا بنویسید :

$$y=(x-2)(x^2+2x+3)$$

۳۶۹۲ ـ تحقیق کنیدکه $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ برابر است با $2+\sqrt{3}$

دانشکده علوم (رشته فیزیك) ۱۳۳۹

۳۶۹۳ـ علامت عبارت زیر را بازاء مقادیر مختلف x تعیین‌کنید :

$$-8+4x-x^2$$

۳۶۹۴ـ عبارت زیر را بساده‌ترین صورت درآورید :

$$\frac{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}}{1+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}$$

۳۶۹۵ـ دستگاه معادلات زیررا حل کنید .

$$\frac{4}{x}-\frac{5}{y}=3 \text{ و } \frac{6}{x}-\frac{10}{y}=1$$

۳۶۹۶ـ تابع $f(x)=\frac{1}{x-1}$ مفروض‌است عبارت $\frac{f(x)}{f(x^2)}$ رابساده‌ترین‌صورت‌بنویسید

۳۶۹۷ـ نقطه‌ای مانند M روی منحنی C بمعادله $y=x^3-4x$ بدست‌آورید که‌ضریب زاویه‌مماس برمنحنی C درنقطه M مساوی با ۱۰۴ باشدمعادله‌مماس برمنحنی)درنقطه M رابنویسید

۲۶۹۸ـ تابعی بدست‌آورید که مشتق آن مساوی با $x^{3}-\frac{1}{x^{2}}$ باشد و بازاء $x=1$ مساوی با $\frac{1}{4}$ گردد.

۲۶۹۹ـ مشتق تابع $y=\cos(\frac{\pi}{5}+2x)$ را بدست‌آورید.

دانشکده کشاورزی کرج ۱۳۳۹

۲۷۰۰ـ تابع : $y=mx^{2}-(2m-1)x+m+2$ مفروض است.

اولا ـ بازاء چه مقدار m منحنی (۱) از مبداء میگذرد.

ثانیاً ـ پس از تعیین m بطریق بالا منحنی نمایش دهنده تابع فوق را رسم‌کنید.

ثالثاً ـ بازاء چه مقدار از m تابع فوق محورطول‌ها را دردونقطه قطع می‌کند.

رابعاً ـ بازاء چه مقدار از m منحنی تابع فوق برمحور طول‌ها مماس میشودطول این نقطه را پیداکنید.

دانشکده کشاورزی تبریز ۱۳۳۹

۲۷۰۱ـ مشتق عبارت $y=\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$ را بدست‌آورید.

دانشکده فنی (مرحله اول) ۱۳۳۹

۲۷۰۲ـ دستگاه دومعادله دومجهولی زیرمفروض است.

$x+y=2$ و $x^{4}+y^{4}+x^{3}y+xy^{3}=a$

معادله درجه دومی تشکیل دهیدکه ریشه‌های آن جوابهای دستگاه فوق باشد.

۲۷۰۳ـ مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{64}+\sqrt[3]{56}+\sqrt[3]{49}}$ را گویاکنید.

دانشکده فنی (مرحله دوم) ۱۳۳۹

۲۷۰۴ـ در تابع $y=\frac{P(x)}{Q(x)}$ که درآن $P(x)$ و $Q(x)$ دوکثیرالجمله از x هستند اگر صورت ومخرج دارای یك ریشه مشترك باشند ثابت‌کنید معادله $y'\times[Q(x)]^{2}=0$ اولا ـ حداقل دارای دوریشه مساوی است.

ثانیاً ـ اگرفرض کنیم شرط فوق لازم وکافی باشد. الف : مشتق تابع

$y=\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-x-6}$ را تعیین کنید .

دروجود ریشه‌های معادله زیر بحث کنید .

$$(1)\quad x^3+(2-m)x^2-(1-m)x-2(1-3m)=0$$

۲۷۰۵ـ اولا ـ منحنی‌نمایش‌تغییرات تابع $y=\frac{x^2-1}{x-3}$ را رسم کنید . (واحد برابر یك سانتی‌متر محور x ها را بفاصله ۳ سانتی‌متر از لبه پائین کاغذ ومحور yها بفاصله ۳ سانتی متر سمت راست لبه چپ کاغذ اختیار کنید . توصیه میشود که این دستور را اجراء نمائید .) ثانیاً ـ ثابت کنید نقاطی ازاین منحنی که مختصات آنها عدد های صحیح باشند رئوس یك چهار ضلعی ومساحت آنرا پیدا کنید .

دانشکده فنی تبریز ۱۳۳۹

۲۷۰۶ـ محور تقارن ونمایش هندسی معادلهٔ $(y-1)^2(x-1)=4$ را رسم کرده سطح محصور بین منحنی و دوخط $x=5$ و $x=2$ را محاسبه کنید .

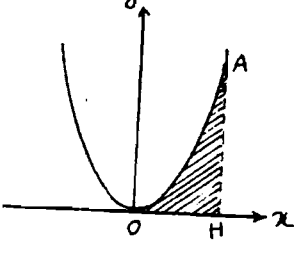
۲۷۰۷ـ اولا ـ مقادیر x و y را برحسب z از دستگاه دو معاله دو مجهولی زیر بدست آورید :

$$x\sin z+y\cos z=1 \quad \text{و} \quad x\cos z+y\sin z=\cos 2z+\sin 2z$$

ثانیاً ـ اگر $0<z<\pi$ باشد تعیین کنید بازاء چه مقدار از z عبارت $A=x+y+yx$ ماکزیمم وبازاء چه مقدار می‌نیمم خواهد بود .

هنرسرایعالی فنی ۱۳۳۹

۲۷۰۸ـ معادله مکان هندسی نقطه M بمختصات $M\left(\frac{1+\cos t}{\cos t} \text{ و } tg\,t\right)$ راوقتی‌که t تغییر میکند پیدا کنید .



۲۷۰۹ـ مساحت قسمت ماشور خورده شکل مقابل را با دانستن اینکه OA قوسی است از سهمی و $AH\perp OH$ و $OH=1^{Cm}$ و $AH=3^{Cm}$ بدست آورید .

۲۷۱۰ ـ شعاع کره‌ای یک متر است حجم بزرگترین استوانه‌ای را که میتوان از این برید حساب کنید .

دانشکده هنرهای زیبا (رشته معماری) ۱۳۳۹

۲۷۱۱ ـ در تابع $y=\frac{x^2-5x+a}{x-a}$ مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع در نقطه‌ای بطول ۳ ماکزیمم یا مینیمم باشد .

۲۷۱۲ ـ سطح محصور بین منحنی $y=\sin^2 x+2x$ ومحور x ها و عرض‌های نقاطی بطولهای $x=\frac{\pi}{4}$ و $x=\frac{\pi}{3}$ را بدست آورید .

۲۷۱۳ ـ مشتق تابع $y=\sin^2 3x\sqrt{x^2}$ را بدست آورید .

دانشسرای عالی تهران ۱۳۳۹

۲۷۱۴ ـ تابع $y=\frac{x+a}{mx^2-amx-a}$ مفروض است تحقیق کنید که منحنی ـ هائیکه بازاء مقادیر مختلف m بدست میآیند همگی از سه نقطه ثابت واقع بر یک خط راست میگذرند .

پلی تکنیک تهران ۱۳۴۰

۲۷۱۵ ـ تابع اولیه را تعیین کنید $f(x)=\sin^4 x+\frac{1}{2\cos^2 x\sqrt{\lg x}}+\cos^4 x$

۲۷۱۶ ـ معادله حل کنید : $(x+1)^4+(x+5)^4=82$

دانشکده علوم (رشته آمار گیری) ۱۳۴۰

۲۷۱۷ ـ اولا ـ منحنی (C) نمایش تابع $y=2x^3-3x^2-12x+8$ را رسم کنید .
ثانیاً ـ ریشه‌های معادلهٔ $2x^3-3x^2-12x+8=0$ را با تقریب کمتر از یک واحد بدست آورید.

دانشکده علوم (رشته ریاضی) ۱۳۴۰

۲۷۱۸ ـ مطلوبست تابع اولیه $y=-x^5+\sqrt{2x-3}+\frac{1}{\cos^2 x}$

۲۷۱۹ ـ نقطه عطف منحنی تابع $y=x^3-6x^2+5$ را بدست آورید وجهت تقعر آنرا تعیین کنید .

۲۷۲۰ ـ شماره ریشه‌های یک معادله درجه سوم را چگونه تعیین میکنید معادله درجه سوم $4x^3-27x+27=0$ چند ریشه دارد ؟ آن ریشه‌ها را بدست آورید .

۲۷۲۱ ـ تابع $y=x-\sqrt{x^2-2x+3}$ مفروض است .

الف ـ آیا این تابع در ازاء جمیع مقادیر x معین است ؟

ب ـ اگر قدر مطلق x بی‌اندازه بزرگ گردد اندازه تابع چقدر خواهد شد ؟

۴۷۲۲ ـ کسری معادل $\frac{1}{\sqrt{5}}$ بدست‌آورید که مخرجش منطق باشد .

۴۷۲۳ ـ ثابت‌کنید که معادله درجه دوم :

$$(1-x)(x-m)+m^2=0$$

بازاء جمیع مقادیر m همیشه دارای دو ریشه است .

۴۷۲۴ ـ تابع‌اولیه : $y=\frac{4x^3-1}{x^2}-\sqrt[5]{x^3}$ چیست ؟

دانشکده علوم (رشته زمین شناسی) ۱۳۴۰

۴۷۲۵ ـ تابع $y=\frac{x+1}{x+2}$ مفروض است نقاطی از منحنی نمایش این تابع را بدست آورید که مماس بر منحنی درآن نقاط با محور طولها زاویه $45°$ بسازد .

۴۷۲۶ ـ بیضی بمعادله $x^2+4y^2-2x-16y+1=0$ مفروض است. مختصات مرکز وکانونها وطول اقطارآنرا بدست آورید .

دانشکده علوم (رشته زیست شناسی) ۱۳۴۰

۴۷۲۷ ـ معادله خطی را بنویسید که‌ازنقطه (۲و۱) گذشته وبرخط $x+6y-12=0$ عمود باشد .

۴۷۲۸ ـ معادله خط مماس بر منحنی $y=x^2-3x$ را در نقطه‌ای که طول آن(۲) باشد بنویسید .

۴۷۲۹ ـ مختصات رأس و کانون ومعادله خط هادی سهمی زیر را بدست آورده وآنرا رسم نمائید .

$$y^2-4y+2x+1=0$$

دانشکده علوم(رشته شیمی) ۱۳۴۰

۴۷۳۰ ـ نقاط برخوردخطی‌که بردونقطه $A(1و-2)$ و $B(-3و4)$ میگذرد با محورهای مختصات وخطوط نیمساز بدست‌آورید .

۴۷۳۱ ـ تابع $y=\frac{x-1}{x^2-a}$ مفروض است a را طوری تعیین‌کنیدکه منحنی‌نمایش تغییرات تابع دارای مجانبهای $x=\pm 2$ وبازاء مقدار نامبرده a منحنی تغییرات تابع را رسم‌کنید .

۲۷۳۲ـ تابع اولیه $y=-\frac{2}{x^2}+\cos\frac{x}{2}+\sin^2 x$ را حساب کنید.

دانشکده علوم (رشته فیزیک) ۱۳۴۰

۲۷۳۳ـ مختصات نقاط تلاقی خط $3x-y=16$ و هذلولی $xy=12$ را حساب کنید.

۲۷۳۴ ـ عبارت $-2x^2+11x-12$ را بصورت حاصلضرب دو عامل درجه اول بنویسید.

۲۷۳۵ـ ضریب زاویه مماس بردایره $x^2+y^2-4x=0$ را در نقطه $(1 \text{ و } \sqrt{3})$ حساب کنید.

۲۷۳۶ـ بازاءچه‌مقادیری‌از x نا مساوی $\frac{2x-3}{2-x}<1$ برقراراست؟

۲۷۳۷ـ تحقق کنیدکه یکی از ریشه‌های معادله $x^3-6x^2+11x-6=0$ برابر یک استوسایرریشه‌های آنرا پیداکنید.

۲۷۳۸ـ کسر $\frac{1}{\sqrt{21}-\sqrt{11}}$ را اول تبدیل بکسری نمائید که مخرجش عدد منطق باشد وبعداندازه آنرا با تقریب کمتر از یکصدم حساب کنید.

دانشکده فنی (مرحله اول) ۱۳۴۰

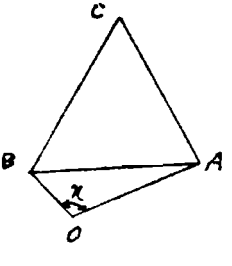
۲۷۳۹ معادلات زیررا حل کنید.

$$(1)\quad (9+5\sqrt{3})x^2+(15+7\sqrt{3})x+6=0$$

$$(2)\quad \log\sqrt{5x+8}+\frac{1}{2}\log(2x+3)=\log 15$$

۲۷۴۰ـ کسرزیررا بساده ترین صورت تبدیل کنید.

$$A=\frac{ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)}{ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)}$$



۲۷۴۱ ـ قطعه خط ثابت $OA=2a$ و قطعه خط متحرک $OB=a$ مفروض‌اند فرض می‌کنیم زاویه $\widehat{AOB}=x$ باشد $0\leqslant x\leqslant \pi$ دوروی AB وخارج در صفحه مثلث OAB مطابق (شکل مقابل) مثلث

متساوی‌الاضلاع ABC را میسازیم مطلوب است :

اولا ـ محاسبه S سطح چهارضلعی OACB برحسب a و x

ثانیاً ـ زاویه x را طوری تعیین کنید که مقدار سطح برابر $S=Ka^2$ شود برحسب مقادیر مثبت K بحث کنید و بازاء $K=\frac{8+5\sqrt{2}}{3}$ مقدار عددی x را تعیین کنید.

ثالثاً ـ تغییرات تابع $y=\frac{6}{a^2}$ و منحنی نمایش آنرا رسم کنید .

دانشکده فنی (مرحله دوم) ۱۳۴۰

۲۷۴۲ـ مشتق عبارت : $y=\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\times f\left(\frac{a+x}{b-x}\right)$ را حساب کنید .

۲۷۴۳ـ تساوی زیررا تحقیق نمائید :

$$\frac{\sqrt{\sqrt[3]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[3]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[3]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}=\sqrt{2}$$

۲۷۴۴ـ محورهای متعامد $x'Ox$ و $y'Oy$ ونقطه ثابت C بعرض R واقع برمحور Oy مفروض‌اند در زاویه xOy دایره‌ای رسم کنید که مرکزش C و شعاعش R باشد . و ازنقطه M بطول x واقع برمحور Ox مماس دیگری غیراز $x'x$ بردایره رسم کنید فرض می‌کنیم T نقطه تماس و P محل تلاقی مماس MT با محور yها باشد دوشکل رسم کنید یکی درحالت $x>R$ ودیگری در حالت $x<R$ ودرهر دوحالت :

اولا ـ تحقیق کنید که عرض نقطه P برابر است با $\frac{2Rx^2}{x^2-R^2}$

ثانیاً ـ سطح مثلث MOP و تغییرات آنرا وقتی نقطه M بر Ox تغییر کند تعیین نمائید .

هنرسرایعالی فنی ۱۳۴۰

۲۷۴۵ـ تابع $y=\frac{x^3+ax^2}{x^2-1}$ مفروض است : اولا ـ a را طوری تعیین کنید که

مشتق تابع بازاء $x=3$ صفرشود . ثانیاً ـ منحنی نمایش تابع فوق را رسم کنید .

۲۷۴۶ـ مقدار حقیقی کسر $\frac{x\sqrt{x^2-3}-2}{x^2-4}$ را بازاء $x=2$ حساب کنید .

۲۷۴۷ـ تابعی پیدا کنید که مشتقش برابر باشد با $y=3tg^2x+\frac{3}{\sin^2 x}$

دانشکده کشاورزی کرج ۱۳۴۰

۲۷۴۸ـ معادله $x^2-px+q=0$ بنا بفرض دارای دوریشه مخالف صفراست . یکی ازآن دو ریشه را u می‌گیریم .

اولا ـ ثابت کنید که عبارت $y=u^2+\frac{q^2}{u^2}+u+\frac{q}{u}$ از ریشه u مستقل است .

ثانیاً ـ فرض کنیم $q=1$ باشد تغییرات y را وقتی که p در حدودی تغییر می‌کند که سه جمله بالا دو ریشه دارد معلوم ومنحنی آنرا رسم کنید

دانشکده هنرهای زیبا (رشته معماری) ۱۳۴۰

۲۷۴۹ـ وضع عدد ۱/۵ را نسبت به ریشه‌های معادله :

$2x^2-7\sqrt{3}x+18=0$ بدون حل معادله تعیین کنید :

۲۷۵۰ ـ مقدار تابع اولیه تابع $3-\cos^2x+\sin 3x$ را بین $x=0$ و $x=\frac{\pi}{3}$ بدست آورید :

۲۷۵۱ـ منحنی نمایش تابع درجه سومی محور x ها را درنقاطی بطول ۲ـ و ۱ و ۲ قطع می‌کند . معادله تابع را بنویسید وقسمتی از سطح محصور بین منحنی ومحور x ها را که طرف راست محور yها است حساب کنید .

۲۷۵۲ـ مشتق تابع $y=\frac{5tg3x\sqrt{14x^2}}{4\cos^2\frac{x}{2}}$ را حساب کنید .

نیروی دریائی ۱۳۴۰

۲۷۵۳ـ تابع اولیه $\frac{x^3+3x^2+3x+5}{(x+1)^2}$ را بگیرید .

پلی تکنیك تهران ۱۳۴۱

۲۷۵۴ـ بازاء چه مقدار x تابع $y=2x-\sqrt{4x^2-4x+3}$ معین است . مجانبهای منحنی تغییرات این تابع را پیدا کنید .

۲۷۵۵ـ تابع اولیه تابع $\frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}+x^2$ را پیدا کنید .

دانشکده علوم (رشته ریاضی) ۱۳۴۱

۲۷۵۶ـ چنانچه x' و x'' ریشه‌های معادله درجه دوم $3x^2+5x-1=0$ باشند بدون محاسبه ریشه‌ها مقدار $x'^3+x''^3$ را بدست آورید .

۲۷۵۷ـ عبارت زیر را ساده کنید.

$$\frac{3x^3-5ax^2-2a^2x}{ax^2-4a^2x+3a^3}\cdot\left[\frac{12x^2-5ax-3a^2}{4x^2-7ax+3a^2}-\frac{x^2-6ax+9a^2}{x^2+2ax-15a^2}\right]$$

۲۷۵۸ـ اندازه عبارت‌های A و B را بدست‌آورید .

$$A=\frac{2^{-4}\div 4^{-2}}{16^{-\frac{1}{4}}\quad -4^{-\frac{3}{2}}}\quad \text{و}\quad B=\sqrt{7-\sqrt{13}}\times\sqrt{7+\sqrt{13}}$$

۲۷۵۹ـ مخرج کسرهای $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ و $\frac{2}{3\sqrt{5}-4}$ را منطق کنید :

۲۷۶۰ـ بازاء چه مقادیری از m سه جمله‌ای درجه دوم :

$(3m-5)x^2-2mx+m-6$ بزرگتر از صفر است ؟

۲۷۶۱ـ مطلوب است معادله مماس در نقطه تلاقی منحنی نمایش تابع $y=x^3-x-6$ با محور xها .

۲۷۶۲ـ تابعی بدست‌آورید که مشتقش برابر $\frac{1}{\cos^4 x}$ باشد .

دانشکده علوم (رشته زمین شناسی) ۱۳۴۱

۲۷۶۳ـ تابع $y=x^2+ax+b$ مفروض است .

اولا ـ ضرائب a و b را طوری تعیین کنید که منحنی از نقطه $A(2,0)$ بگذرد و بازاء $x=1$ تابع ماکزیمم یا مینیمم گردد .

ثانیاً ـ منحنی تغییرات تابع $y=x^3-3x-2$ را رسم کنید .

ثالثاً ـ معادله مماس در نقطه‌ای از منحنی بطول $x=-1$ را بنویسید .

۲۷۶۴ ـ تابع اولیه عبارت $x^3+\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}+2\sqrt[3]{x^2}$ را بدست‌آورید

دانشکده علوم (رشته زیست شناسی) ۱۳۴۱

۲۷۶۵ـ درجه فاصله‌ای تابع $y=x^3-12x$ صعودی ودرجه فاصله‌ای نزولی‌است .

۲۷۶۱ـ مختصات مرکز وکانونها وطول اقطار بیضی

$9x^2+4y^2-18x+16y=11$ را بدست‌آورید.

۲۷۶۶ـ مشتق تابع $y=\cos 2x+\cos tg^2 x$ را بدست‌آورید .

دانشکده علوم(رشته شیمی) ۱۳۴۱

۲۷۶۷ـ تابع $y=\frac{x+a}{x-1}$ مفروض است . اولا ـ a را چنان تعیین‌کنیدکه‌ضریب زاویه مماس در نقطه $x=0$ مساوی (-2) گردد . ثانیاً ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x+1}{x-1}$ را رسم نموده مماس درنقطه $y=-1$ آنرا پیداکنید .

۲۷۶۸ ـ مشتق تابع $y=\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}+\cos^2\frac{x}{2}$ را حساب‌کنید .

۲۷۶۹ ـ چه‌تابعی‌است که‌مشتق‌آن‌برابر $\frac{5}{\sin^2 x}-tg^2 x$ باشد.

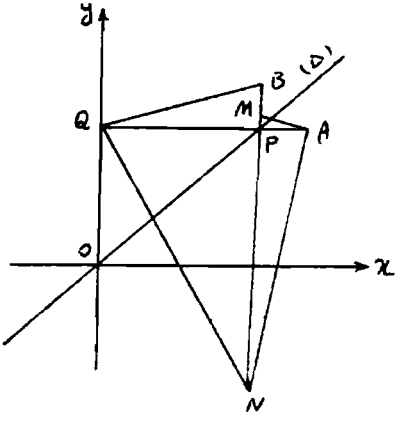
دانشکده فنی ۱۳۴۱

۲۷۷۰ ـ تحقیق‌کنیدکه بین y' و y'' مشتقات تابع

$$y=(x+\sqrt{x^2-1})^n$$

رابطهٔ زیر برقرار است .

$$(x^2-1)y''+xy'-n^2y=0$$



۲۷۷۱ـ دومحور متعامد $x'Ox$ و $y'Oy$ وخط Δ منصف الزاویه xOy مفروض‌اند نقطه P را بر Δ اختیار میکنیم و فرض می‌کنیم نقطه Q تصویر P بر Oy باشد طولهای PA وPB را بمقدار α و درجهت Ox و Oy نقل میکنیم از نقطه Q خط NQ را بر BQ عمود نموده امتداد میدهیم تا PB را در نقطه N قطع کند هم چنین عمود مرسوم ازنقطه A برخط NA بخط PB را در M قطع میکند.

اولا ـ y نقطه M را برحسب طول آن و عدد a حساب کنید . و منحنی تغییرات و تحقیق کنید که اگر جهت PB را عکس حالت اول اختیار کنیم تغییرات قرینه منحنی تغییرات‌قرینه منحنی‌اول نسبت بمبداء خواهدبود. ثانیاً ـ فرض‌کنیم خطی موازی Δ منحنی تغییرات y را درنقاط M_1 و M_2 قطع‌کند مطلوبست مکان‌وسط M_1M_2 .

ثالثا ـ مماس در نقطه غیرمشخص M بر منحنی محور yها در H و Δ را درنقطه K قطع میکند . مقدار OH را برحسب x حساب نموده ثابت کنید $\frac{MH}{MK}$ و $OH \times OK^2$ وقتی M تغییرکند ثابت‌اند.

دانشکده هنرهای زیبا (رشته معماری) ۱۳۴۱

۲۷۷۲ ـ مطلوبست تعیین a و b بقسمتی‌که منحنی نمایش تابع $y=\frac{ax^2+8}{x+b}$

درنقطه‌ای بطول (۲ـ) محورxها را قطع‌کند ودرنقطه‌ای بطول ۳ دارای‌ماکزیمم یا می‌نیمم باشد . تحقیق‌کنیدکه این نقطه ماکزیمم است یا می‌نیمم مقدار ماکزیمم یامی‌نیمم را بدست‌آورید .

۲۷۷۳ ـ مشتق این عبارت $y=\sqrt{\frac{x^2-5}{2(x-12)}}\cos^2 3x$ را حساب‌کنید.

دانشکده علوم(رشته ریاضی) ۱۳۴۲

۲۷۷۴ـ حساب کنید مشتق تابع : $y=(2x^2+\sqrt{1-x^2})^2$

۲۷۷۵ـ تابع اولیه تابع : $y=\sqrt[3]{4x-5}$ را بدست آورید .

۲۷۷۶ـ تابع $y=\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{2x-\sqrt{x^2+3}}$ مفروض است . اولا ـ درازاء چه مقادیرx میتوان y را حساب کرد . ثانیا ـ وقتیکه اندازه x بسمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل‌کند مقدارتابع چقدراست .

۲۷۷۷ ـ تابع $y=\frac{ax^2+1}{cx^3+dx}$ مفروض است . عدد a چگونه باید باشد تا تابع همواره دریك جهت تغییرکند ؟

۲۷۷۸ ـ معادله $x^3-x-5=0$ چندریشه دارد ؟ با استفاده از رسم منحنی اندازه ریشه (یا ریشه‌ها) را بادورقم اعشار بدست‌آورید .

۲۷۷۹ ـ بازاء چه مقادیری از m سه جمله‌ای درجه دوم :

$(m-2)x^2+2(2m-3)x+5m-6$ درازاء جمیع مقادیر x مثبت‌ویا منفی‌است ؟

دانشکده علوم (رشته زمین شناسی) ۱۳۴۲

۲۷۸۰ ـ دربیضی $9x^2+16y^2-54x+64y+1=0$ مختصات مرکز وکانونها را بدست آورید وبیضی را رسم‌کنید .

۲۷۸۱ ـ مطلوبست معادله مماس برمنحنی $y=\sin^2 x-\cos x$ درنقطه‌ای‌ازمنحنی بطول $x=\frac{\pi}{3}$

۲۷۸۲ ـ مشتق‌تابع $y=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\cot g^2 2x$ را بدست آورید .

دانشکده علوم (رشته زیست شناسی) ۱۳۴۲

۲۷۸۳ ـ معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$ گذشته وبرخط $2x-4y-3=0$ عمود باشد .

۲۷۸۴ ـ معادله دیره‌ای را بنویسیدکه از مبداء مختصات و نقاط $A\left|\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right.$ گذشته باشد .

۲۷۸۵ ـ مشتق تابع $y=\cos 2x+\frac{1}{\sin x}$ را حساب‌کنید :

دانشکده علوم (رشته شیمی) ۱۳۴۲

۲۷۸۶ ـ پارامتر a راطوری تعیین‌کنیدکه دو خط :

$(a^2-1)x-(a+1)y+a=0$ و $(a-1)x+(a+1)y-a=0$

اولاـ باهم موازی باشند . ثانیاً ـ برهم عمود باشند.

۲۷۵۳ ـ پارامترهای a و b راطوری‌تعیین‌کنیدکه خطوط $x=1$ و $y=-3$ مجانب منحنی $y=\frac{ax-3}{b-x}$ باشند. نمایش تغییرات تابع $y=\frac{2x-3}{1-x}$ رارسم‌کنید .

۲۷۸۷ ـ مشتق تابع $y=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2 x}}$ رامحاسبه ونتیجه رابیان‌کنید.

دانشکده فنی ۱۳۴۲

۲۷۸۸ ـ اگربین متغیر x وتابع y رابطه $y^2+2y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x$ بر قرارباشد.

ثابت کنید که مشتق‌های اول ودوم y نسبت به x درمعادله زیرصدق می‌نماید:

$$2(y+1)y'' + 2(y')^2 + 9y^2 + 18y = 0$$

(C_1 و C_2 مقادیر ثابتاند . y' و y'' بترتیب مشتق اول و دوم تابع y نسبت به x می‌باشند)

۲۷۸۹- سه جمله‌ای درجه دوم $y = ax^2 - 3x + \frac{1}{a}$ مفروض است:

اولاً- مطلوب است مختصات نقطه‌ای مانند P ازمنحنی که درآن نقطه ضریب زاویه خط مماس برمنحنی برابر m باشد مکان هندسی نقطه P راوقتی که a تغییر کند و m ثابت بماند تعیین کنید.

ثانیاً - مطلوب است تشکیل معادله مماس برمنحنی درنقطه P وتعیین مقادیر m به قسمی که مماس منظور ازمبدأ مختصات بگذرد درحالتی که مماسها ازمبداء بگذرندمختصات نقاط تماس راتعیین‌کنید اگر نقاط تماس A و B فرض شوند ضریب زاویه خط AB راتعیین وتحقیق کنید وقتی a جمیع مقادیر ممکنه راقبول کند این‌خط چگونه تغییر مینماید.

دانشکده هنرهای زیبا (رشته معماری) ۱۳۴۲

۲۷۹۰- درتابع $y = \frac{ax^2+3bx+6}{bx+2}$ مقادیر a و b راطوری تعیین کنید که‌منحنی درنقطه‌ی‌نهایت دوربر خط $y = 2x+1$ مماس شود آنگاه‌ضریب زاویه خط $y = mx+1$ رابقسمی تعیین کنید که خط برمنحنی نمایش تابع $y = \frac{2x^2+3x+4}{x+1}$ مماس‌شود .سپس منحنی نمایش تابع را رسم‌کنید .

دانشکده فنی تبریز ۱۳۴۳

۲۷۹۱- معادله $x^3 + 3x^2 + 4x + 1 - 320 = 0$ را حل‌کنید :

۲۷۹۲- منحنی نمایش تغییرات تابع $y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ رارسم‌کنید .

پلی‌تکنیک تهران ۱۳۴۴

۲۷۹۳- تابعی بصورت $y = f(x)$ تعیین‌کنید بقسمی‌که بین y' و y'' مشتقات مرتبه اول و دوم آن رابطه $y'y'' = \frac{x^2-1}{2x^5}$

برقرار باشدومنحنی نمایش‌تابع مزبوردرنقطه‌ای به طول واحد برمحور طولها مماس گردد.

۲۷۹۴- درمعادله درجه سوم پارامتری :

$$(\lambda-3)x^3 + (\lambda-2)x^2 + (\lambda-1)x + 1 = 0$$

پارامتر λ را چنان تعیین کنید که بین x_1 و x_2 و x_3 ریشه‌های معادله درجه سوم مزبور رابطه زیر برقرار باشد .

$$(x_1-\frac{1}{x_1})+(x_2-\frac{1}{x_2})+(x_3-\frac{1}{x_3})=1$$

۲۷۹۵ـ معادله یك مکان بصورت: $y=1+\cot g\,kt$ و $x=\frac{1}{\sin kt}$

مفروض است ، معادلات مجانبها ومختصات مرکز تقارن منحنی نمایش این مکان را تعیین کنید .

دانشکده علوم ۱۳۴۴

۲۷۹۶ـ درکره‌ای بشعاع R مخروط دواری محاط کنید که حجم آن ماکزیمم باشد .

۲۷۹۷ـ ثابت کنید منحنی نمایش تغییرات تابع : $y=-x^3-3x^2+9x+2$ دارای یك مرکز تقارن است . مختصات این نقطه را بیابید .

۲۷۹۸ـ توابع اولی تابع : $y=\frac{\sin x\cos x}{(1+\cos 2x)^5}$ را بدست آورید .

۲۷۹۹ـ بازای چه مقادیر m خط D بمعادله : $y=mx+1$ بر منحنی C بمعادله : $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ مماس است .

۲۸۰۰ـ مطلوبست معادله مکان هندسی نقاطی که مجموع فواصل آنها از دو نقطه $A(4,2)$ و $B(-2,2)$ مساوی ۸ می‌باشد .

۲۸۰۱ـ ثابت کنید تابع $y=\frac{x\sin^2\alpha-3}{x\cos\alpha+2}$

که در آن پارامتر α زاویه‌ای است میان صفر و $\frac{2\pi}{3}$ همواره صعودی میباشد .

دانشکده فنی ۱۳۴۴

۲۸۰۲ـ حاصل عبارت زیررا بدست آورید :

$$\frac{8-x}{2+\sqrt{x}}:\left(2+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}}\right)+\left(\sqrt{x}+\frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2}\right)\times\frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}}$$

۲۸۰۳ـ دستگاه دومعادله دومجهولی زیر را حل کنید :

$$\frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2}}=27 \quad \text{و} \quad \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3$$

دانشسرای عالی ۱۳۴۴

۸۰۴ ۴ـ تابعی بامعادلهٔ ذیل نمایش داده شده است :

$$y=x^3-x^2-4x+x^2\sqrt{(x-1)^2}$$

مطلوبست منحنی نمایش تغییرات این تابع وقتی x از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند وتعیین معادله مماسهای مرسوم برمنحنی از از نقطهٔ A(۱و۳−) ورسم آنها .

دانشکده علوم مشهد (رشته فیزیك وریاضی) ۱۳۴۴

۴۸۰۵ ـ اولا منحنی‌نمایش تغییرات تابع $y=\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-1}$ را رسم‌کنید .

ثانیاً ـحجم حاصل ازدوران‌منحنی راحول‌محور Ox در فاصله $x=2$ و $x=3$ بدست‌آورید:

۴۸۰۶ـ حدتابع $\frac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{5-x^2}}{x^2-\sqrt[5]{4x^5-3}}$ را به‌ازاء $x=1$ بدست آورید.

دانشکده علوم مشهد (رشته فیزیك وشیمی) ۱۳۴۴

۴۸۰۷ ـ تابع اولیه تابع زیررا بدست‌آورید :

$$y=\frac{x-1}{x^2}+\sin^2\frac{x}{4}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

۴۸۰۸ ـ خطوط به معادلات $x+2y-2=0$ و $x-2y+2=0$ مجانبهاونقطه $F\left(x=0 \text{ و } y=1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ کانون هذلولی می‌باشند معادله هذلولی را بدست‌آورید .

۴۸۰۹ـ دستگاه سه‌معادله‌سه مجهولی زیرراحل‌کنید :

$$\frac{x-a}{b+c}=\frac{y-b}{c+a}=\frac{z-c}{a+b} \text{ و } x+y+z=5(a+b+c)$$

پلی تکنیك تهران تیرماه ۱۳۴۵

۴۸۱۰ـ ازنقطه A(۱۰−) مماسهای AB و AC را برسهمی $y^2=x-2$ رسم میکنیم (B وC نقاط تماس میباشند) مطلوبست : محاسبه سطح محصور بین سهمی ومماسهای AB و AC همچنین محاسبه حجم حاصل ازدوران این سطح بدور خط BC .

دانشگاه صنعتی آریامهر ۱۳۴۵

۸۱۱ ۴ـ مطلوبست محاسبه حجم حاصل ازدوران سطح محصور بین

کمان منحنی نمایش تابع $y=\frac{x}{x^2+x+1}\sqrt{x^2+2x+3}$

وخطوط $x=-2$ و $x=+1$ ومحورطولها، حول محور طولها

دانشکده فنی ۱۳۴۵

۲۸۱۲- تابع $y=\frac{x}{(1+x)^3}$ مفروض است . خط $x_1=m$ با فرض مثبت بودن m منحنی نمایش تغییرات تابع مزبور در نقطه‌ای مانند M قطع می‌نماید . نقطه عطف منحنی را R وطول آنرا a می‌نامیم با فرض اینکه $m>a$ باشد .

اولاً ـ اندازه سطح محصور بین قوس MR ودوخط $x_1=m$ و $x_2=a$ و محور Cx را تعیین نمائید .

ثانیاً ـ چنانچه قوس MR درحول محور Ox دوران کند اندازه حجمی راکه ایجاد خواهد نمود چقدر است ؟

ثالثاً چنانچه m به سمت بی‌نهایت میل کند حداندازه سطح وحجم را پیدا نمائید .

دانشکده علوم (رشته فیزیك وریاضی) ۱۳۴۵

۲۸۱۳- توابع اولیه این تابع را بدست‌آورید .

$$y=\frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{(1+\cos^2 x)^5}}+\frac{x+5}{x^3+3x^2+3x+1}$$

۲۸۱۴- سطح محصور میان منحنی $y=5x^2+1$ و خط $y=10x+1$ را حول محور xها دوران می‌دهیم حجمی راکه بدست میآید حساب کنید .

دانشکده علوم (گروه چهارم) ۱۳۴۵

۲۸۱۵- مشتق تابع $y=\frac{1}{\cos\sqrt{x}}+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ راحساب کنید .

۲۸۱۶- مطلوبست محاسبه طول اقطار ومختصات مرکز بیضی :

$$4x^2+9y^2+16x-54y+61=0$$

۲۸۱۷- توابع اولیه تابع $y=\cos^2\frac{x}{2}+\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}$ رابدست آورید .

دانشسرایعالی (رشته‌ریاضی) ۱۳۴۵

۲۸۱۸- درمعادله درجه دوم : $ax^2+2bx+c=0$

ثابت‌کنید ، اولا ـ اگریك ریشه معادله $x=-1$ باشد a و b و c جمل متوالی یك‌تصاعد حسابی هستند .

ثانیاً ـ اگرمعادله دارای ریشه‌مضاعف‌باشد a و b و c جمل متوالی یك‌تصاعدهندسی هستند .

دانشکده علوم مشهد (رشته فیزیك ـ ریاضی) ۱۳۴۵

۳۸۱۹ـ اگر x' و x'' ریشه‌های معادله $x^2-10x+4=0$ باشد مطلوبست محاسبه عبارت :

$$A=x'^4-24x'x''^3-24x''x'^3+x''^4$$

۳۸۲۰ـ معادله مجانب منحنی تابع :

$$y=\sqrt[3]{x^3-x^2}$$

را بدست‌آورید .

۳۸۲۱ـ تابع اولیه تابع زیر را تعیین کنید :

$$y=\frac{1}{(1-x)^4}+2x(3x+1)^5+x\sqrt[3]{(1-3x^2)^2}+tg^4x$$

دانشکده علوم مشهد (رشته شیمی) ۱۳۴۵

۳۸۲۲ـ تابع اولیه تابع‌زیر را بدست‌آورید.

$$y=x^4-\frac{5}{x^3}+\sqrt[3]{1-2x}-3\cos^2 3x$$

۳۸۲۳ـ مختصات مرکز وطول اقطاریبضی :

$$3x^2+4y^2-6x+8y-5=0$$

را بدست‌آورده معادله‌مکان هندسی اوساط وترهائی‌ازآنراکه باخط $y=2x-1$ موازی است تعیین‌کنید .

دانشکده فنی تبریز ۱۳۴۵

۳۸۲۴ـ تابع اولیه عبارت $y=\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$ رامحاسبه‌کنید.

دانشکده علوم تبریز ۱۳۴۵

۳۸۲۵ـ تابع اولیه تابع $y=\frac{x-1}{(x+1)^3}$ رابدست آورید:

دانشکده کشاورزی تبریز ۱۳۴۵

۳۸۲۶ـ مطلوبست تعیین معادله مکان هندسی نقاطی‌که تفاضل فواصلشان از دو نقطه $F(3,6)$ و $F'(-4,3)$ برابر ۸ باشد (رسم مکان لازم نیست).

دانشکده کشاورزی رضائیه ۱۳۴۵

۳۸۲۷ـ تابع $y=3x-4x^3$ را داده‌اند. اولاـ تغییرات این تابع رامطالعه‌ومنحنی نمایش دهندهٔ (C) آنرا رسم‌کنید .

ثانیاـ خط D بموازات Ox و بعرض $(0\leqslant y\leqslant 1)$ منحنی C را در سه‌نقطه M و

M' و M'' قطع میکند طول دوتا از این سه‌نقطه مثلا M' و M'' عبارتند از x' و x'' به فرض $x'' > x'$ است رابطه‌ای مستقل از λ بین x' و x'' پیدا کنید.

۳ـ طول نقطه M را برحسب x' و x'' بدست بیاورید.

۴ـ بجای $x = \sin t$ قرار میدهیم $(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2})$ ثابت کنید $y = \sin 3t$ است.

۵ـ رابطه‌ای که بین مقادیر t' و t'' متغیر t مربوط به x' و x'' نقاط M' و M'' است بدست آورید.

۶ـ t' و t'' را طوری معین کنید که نقطه A محل تقاطع خط D و محور Oy مزدوج توافقی M'' نسبت به M و M' باشد مقدار y را در این حالت معلوم کنید.

پلی تکنیک تهران بهمن‌ماه ۱۳۴۵

۳۸۲۸ـ کره‌ای به‌شعاع R را در مخروط محاط کنید که:

اولاـ حجم مخروط می‌نیمم باشد. ثانیاً ـ سطح جانبی آن می‌نیمم باشد:

پلی تکنیک تهران تیرماه ۱۳۴۶

۳۸۲۹ـ سطح محصور بین سهمی $y = -x^2 + 4x - 3$ و محور xها و خط $y = -3$ را بدست آورید سپس حجم حاصل از دوران این سطح را بدور محور سهمی حساب کنید.

دانشگاه صنعتی آریامهر ۱۳۴۶

۳۸۳۰ـ تابع $y = \frac{1}{6}(x^3 + \frac{3}{x})$ مفروض است درصورتیکه مقدار تابع اولیه $+\sqrt{1+y'^2}$ از $x = 1$ تا $x = \sqrt{tg\alpha}$ برابر $\frac{1}{3}$ گردد مطلوبست محاسبه α.

۳۸۳۱ـ مطلوبست تعیین تابع $y = f(x)$ در صورتیکه اولاـ منحنی نمایش این تابع در نقطه‌ای بطول $\frac{1}{2}$ برمحور طولها مماس بوده ثانیاً ـ بین y' و y'' مشتقات مرتبه اول و دوم تابع مزبور رابطه $y''(y'-1) = 4x$ بر قرار باشد.

۳۸۳۲ـ معادله دایره‌ای را تعیین کنید که معادلات اقطار آن بصورت $(2p-1)x + (3p-1)y + (5p-1) = 0$ بوده واین دایره برمکان: $y = \frac{q}{12} + 11$ و $x = \frac{q}{5} - 8$ مماس گردد. (p و q پارامترهستند).

مدرسه عالی بازرگانی ۱۳۴۶

۳۸۳۳ـ معادلهٔ زیر را حل کنید (بدون استفاده ازجدول لگاریتم).

$$\frac{x-2}{\sqrt[4]{x+3}}=\frac{x+3}{\sqrt[2]{2x+2}}$$

۴۸۳۴ ـ معادله زیررا حل کنید .

$$\sqrt{x^2+2x-8}=28-2x-x^2$$

۴۸۳۵ ـ عبارت زیررا بساده‌ترین صورت ممکن درآورید :

$$\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)-\sqrt{b}(\sqrt{b}+1)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+1}$$

۴۸۳۶ـ معادله درجه دوم پارامتری زیر مفروض است:

$$x^2-2(1-m)x+m^2-1=0$$

مطلوبست تعیین مقادیر پارامتر m درحالتی که یکی‌ازریشه‌ها سه‌برابر ریشهٔ دیگر باشد.

۴۸۳۷ ـ معادله درجه دومی تشکیل دهید که بین ریشه‌های آن (x' و x'') روابط زیر بر قرار باشند .

$$x'+x''+x'x''=-5 \quad \text{و} \quad x'x''+4(x'+x'')=-2$$

۴۸۳۹ـ تابع $y=2ax^2+11x-3b$ مفروض است :

اولاـ a و b را چنان بدست آورید که تابع مفروض به ازاء $x=1$ برابر $(+1)$ بوده و به‌ازاء $x=\frac{11}{8}$ ماکزیمم باشد.

ثانیاً ـ جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع $y=-4x^2+11x-6$ رارسم‌نموده ومعادله مماس براین منحنی را درنقطه‌ای که منحنی محور yها راقطع میکند بدست‌آورید.

دانشگاه تبریز درسال ۱۳۴۷

۲۸۴۰- نقاط A و B ماکزیمم و می‌نیمم تابع $y=\frac{x^2+x+2a}{x+3b}$ در دستگاه مختصات xov میباشد. مثلث AOB را درنظر میگیریم، مطلوبست تعیین a و b درصورتی که مثلث مزبور در رأس o قائم‌الزاویه بوده و نقطه (a و b) روی وتر آن واقع باشد).

جواب $a=1$ و $b=3$

۲۸۴۱- تعداد وعلامت ریشه‌های معادله درجه سوم $x^3-11x-20=0$ را مشخص کرده وآنرا محاسبه کنید. جواب $x=4$

مدرسه عالی بازرگانی درسال ۱۳۴۰

۲۸۴۲- کسر $\frac{(x^2-1)(y^2-1)}{(xy+1)^2-(x+y)^2}$ را ساده کنید. جواب: ۱

۲۸۴۳- حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$\frac{2}{x-y}-\frac{2}{z-y}-\frac{2}{x-z}+\frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{(x-y)(y-z)(z-x)}$$

جواب $\frac{2(z-x)+2(y-z)+2(x-y)}{(x-y)(y-z)}=0$

مدرسه عالی بازرگانی درسال ۱۳۴۷

۲۸۴۴- معادله $\frac{(x^2-5x+6)(x-1)}{(x^2-4x+3)}=2$ را حل کنید. جواب ۱ و $\frac{1}{4}$

۲۸۴۵- معادله درجه دوم پارا متری $mx^2+(5m-1)x+3m+1=0$ مفروض است. اولاً m را چنان پیدا کنید که معادله بالا دارای ریشه مضاعف باشد.

ثانیاً- به ازاء $m=\frac{1}{13}$ ریشه معادله را بدست آورید.

جواب $m=1$ و $\frac{1}{13}$ و $x=4$

مدرسه عالی بازرگانی درسال ۱۳۴۷

۲۸۴۶- منحنی درجه دوم $y=x^2-3x+a$ وخط $y=-3x+2$ مفروضند اولاً- a را بطریقی تعیین کنید که منحنی فوق برخط مفروض مماس باشد. ثانیاً- به ازاء $a=2$ منحنی وخط را دریک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید. جواب $a=2$

دانشسرای عالی تهران ۱۳۴۷

۲۸۴۷- تحقیق کنید که تابع $f(x)=A\times 3^x+B(-2)^x$ را که درآن

A و B مقادیر ثابتی هستند می‌توان بصورت $f(x)=6f(x-2)+f(x-1)$ نوشت و بکمک این رابطه بفرض $f(2)=2$ و $f(1)=1$ مطلوبست محاسبه $f(4)$

جواب $f(4)=20$

۲۸۴۸ـ نامساوی $\frac{x-1}{2x-a}>0$ را حل و بحث کنید

۲۸۴۹ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x^2+|3x+2|$ را رسم کنید.

هنرسرا یعالی روزانه (دیپلمه هنرستان) ۱۳۴۷

۲۸۵۰ـ نقاط $C(0,2)$ و $A(4,0)$ و $O(0,0)$ سه رأس مستطیل OABC است اولاـ مطلوبست تعیین مختصات رأس B مقابل رأس نقطه O ثانیاـ مطلوبست تعیین معادله بیضی محاط در این مستطیل. ثالثاـ منحنی نمایش تغییرات $x^2-4y^2-4x+8y-4=0$ را در همان محورهای مختصات رسم کنید.

جواب. $B(4,2)$ و $\frac{x-2}{4}+\frac{y-1}{1}=1$

۲۸۵۱ـ طنابی است بطول ۲۰ متر دو سر آنرا بهم وصل میکنیم و آنرا روی زمین بشکل مستطیل قرار میدهیم ابعاد مستطیل را قسمی تعیین کنید که مساحتش ماکزیمم باشد.

جواب $x=5$ و $y=5$

۲۸۵۲ـ تابع اولیه تابع $y=(tg x+cotg x)^2$ را که به ازاء $x=\frac{\pi}{3}$ صفر می‌شود تعیین کنید. جواب. $Y=tg x-cotg x-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

هنرسرا یعالی روزانه (رشته طبیعی) ۱۳۴۷

۲۸۵۳ـ اولاً منحنی بمعادله $x^2-y^2+2x+4y+1=0$ را رسم کرده مختصات کانونها و معادله مجانبهای آنرا بنویسید. ثانیاـ زاویه منحنی فوق را با محور xها بدست آورید. ثالثاـ ازمبدأ مختصات مماس OT را بر منحنی رسم میکنیم تا مجانبها را در A و B قطع کند ثابت کنید T وسط AB است (T نقطه تماس است)

جواب. $F(-1,2\pm2\sqrt{2})$ و $F'(-1,2\pm2\sqrt{2})$ و $y=\pm(x+1)+2$ و زاویه منحنی با محور xها صفر است.

۲۸۵۴ـ تابع $y=x^3+8+m(x+2)$ مفروض است. اولاـ تعیین کنید به ازاء چه مقادیر m منحنی نمایش تغییرات تابع با محور xx' مماس است. ثانیاـ به ازاء $m=-3$ منحنی نمایش تغییرات تابع را رسم و سطح محصور بین منحنی و محور xها را حساب کنید.

جواب. ۱۲ − و ۳ − = m و $S = \frac{27}{3}$

هنرسرا یعالی روزانه (رشته ریاضی) ۱۳۴۷

۲۸۵۵- تابع $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ مفروض است. اولاً- جدول و منحنی نمایش تغییرات آنرا رسم کنید. ثانیاً- مساحت سطح محصور بین منحنی و محور yها را در فاصله $y = 1$ و $y = 2$ حساب کنید: جواب: $S = \frac{171 - 73\sqrt{6}}{48}$

۲۸۵۶- درصورتی که محل تلاقی منحنی $x^2 = -4(y-1)$ با محور xها را A و B دانسته و طول پلی باشد که با قوس ASB نگهداری شده باشد و پل بکمک ۳ میله متساوی الفاصله در دو ردیف با این قوس مهار شده باشد مطلوبست. اولاً- محاسبه طول این پل. ثانیاً- طول میله‌های مهار (S نقطه ماکزیمم قوس و پل بکمك دو قوس در دو طرف نگهداری شده).

جواب. $AB = 4$ و $RC = QD = \frac{3}{4}$

۲۸۵۷- معادله $\sqrt[x]{4} + 4\sqrt[x]{25} = 4\sqrt[x]{10}$ را حل کنید.

جواب. $x = \frac{2\log 2 - 1}{\log 2}$

دانشگاه آریامهر ۱۳۴۷

۲۸۵۸- حدود متغیر x را طوری تعیین کنید که قدر مطلق حاصل ضرب $(x+1)(x-2)$ کمتر از ۲ شود. جواب. $1 < x < \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ و $\frac{1-\sqrt{17}}{2} < x < 0$

۲۸۵۹- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که کثیر الجمله:

$$a(x^4 - x^2 + 1) + b(x-1)^2 x^2 + x^4$$

بر $x^2 - x - 2$ قابل قسمت باشد. جواب. $a = -\frac{5}{4}$ و $b = \frac{1}{16}$

۲۸۶۰- مربع مستطیل ABCD را ($AB = a$ و $AC = b$) در امتداد قطر AC تا می‌کنیم بطوری که زاویه بین وجوه ABC و ADC قائمه شود. الف- فاصله‌های نقاط D و B را پس از تا کردن حساب کنید. ب- درصورتی که طول قطر مستطیل ثابت باشد نسبت طول اضلاع را چنان انتخاب کنید که فاصله D و B در قسمت (الف) می‌نیمم شود.

۲۸۶۱- حد $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$ را برای موقعی که n بسمت بی‌نهایت

میل کند حساب کنید. (بیاد آورید که $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ و $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$)

جواب: $A = \frac{\sin x}{x}$

۳۸۶۲- عبارت $y = (Ax^2+Bx+C)\sin x + (Dx^2+Ex+F)\cos x$ مفروض است. الف- مقادیر A و B و C و D و E و F را طوری تعیین کنید که عبارت به ازاء جمیع مقادیر x برابر $\frac{dy}{dx} = x^2\cos x$ شود.

جواب: $A = 1$ و $D = 0$ و $F = 2$ و $E = -2$ و $C = 0$

ب- با در نظر گرفتن (الف) مقدار $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx$ را محاسبه کنید. جواب. $\frac{\pi^2}{4} - 2$

۳۸۶۳- بدنه داخلی چراغ و سایل نقلیه معمولا یک سطح پارابولوئید است که از دوران قوس سهمی $y^2 = 2px$ در حول محور آن بوجود می‌آید. اگر قطر دایره قاعده چراغ d و ارتفاع بدنه h باشد حجم پارابولوئید مزبور را بحسب d و h حساب کنید.

جواب. $v = \frac{\pi d^2 h}{8}$

۳۸۶۴- ضریب زاویه مماس بر منحنی $y = \frac{1+tg x}{1-tg x}$ را در نقطه $x = \frac{\pi}{12}$ حساب کنید

جواب. $m = 4$

۳۸۶۵- دایره‌ای بقطر ۲ مطابق شکل بر محور طول‌ها مماس است. نقطه دلخواه M را بر محیط این دایره اختیار میکنیم. نقطه Q را روی محور ox طوری انتخاب میکنیم که طول OQ مساوی طول قوس $OM = \theta$ شود. سپس قطعه خط QM را امتداد می‌دهیم تا محور oy را در نقطه P قطع کند. الف- فاصله OP را بحسب θ حساب کنید، ب- حد فاصله OP را وقتی θ بسمت صفر میل کند تعیین نمائید.

۳۸۶۶- مثلث متساوی‌الساقین ABC مفروض است ($AB = AC$ و $BC = 2m$) در روی ارتفاع AD نقطه O را اختیار می‌کنیم. فاصله OD را طوری تعیین کنید که مجموع فواصل نقطه O از روی مثلث کوچکترین مقدار را داشته باشد.

جواب. $OD = x = \frac{m\sqrt{3}}{3}$

۳۸۶۷- از نقطه ثابت P خطوط PB و PA را مطابق شکل بموازات محورهای مختصات رسم میکنیم هر یک از قطعات OA و AP را به n قسمت مساوی تقسیم نموده از مبدأ مختصات بنقطه

m درروی AP وصل میکنیم $(m<n)$ وسپس از نقطه m درروی OA خطی بموازات محور طولها میکشیم تا آنرا در نقطه C قطع کند ثابت کنید وقتی m تغییر کند نقاط C مربوط بروی یك سهمی قرار میگیرند ومعادله این سهمی را بنویسید. جواب. $y^2=\frac{b^2}{a}x$

دانشگاه تهران ۱۳۴۷

۲۸۶۸- نقطه A بطول صفر و نقطه B بطول یکه روی منحنی C بمعادله $y=\frac{1}{x+1}$ قرار دارند حجم حادث از دوران سطح محصور میان خط AB ومنحنی C حول محور ox را بدست آورید.

جواب. $v=\frac{\pi}{12}$

۲۸۶۹- نزدیکترین نقطه منحنی c بمعادله $y^2+6x-34=0$ را بمبدأ مختصات A می‌نامیم. مختصات نقطه A وفاصله آنرا ازمبدأ بدست آورید. جواب. $AO=h=5$

دانشگاه تهران رشته ریاضی ۱۳۴۷

۲۸۷۰- معادله $\sqrt[5]{\frac{8-x}{x^2}}-\sqrt[5]{\frac{8-x}{64}}=\sqrt[5]{\frac{x^2}{8+x}}$ را حل کنید

جواب. $x=\pm\frac{8\sqrt{33}}{33}$

۲۸۷۱- تابع $y=\frac{1}{x^2-2ax+4a-3}$ مفروض است. حدود تغییرات a را چنان تعیین کنید که این تابع همواره اتصالی باشد وسپس به ازاء $a=2$ جدول ومنحنی نمایش آنرا رسم کنید.

جواب. $a=2$

۲۸۷۲- معادله درجه سوم $x^3+px^2+qx+r=0$ سه ریشه حقیقی α و β و γ دارد.

ثابت کنید رابطه $Arctg\alpha+Arctg\beta+Arctg\gamma-Arctg\frac{p-3}{q-1}=k\pi$

(k عدد صحیح مثبت یا منفی) .

۲۸۷۳- تابع اولیه تابع $y=\frac{x^2-3x+2}{(x-2)^5}+\frac{(1-cotg^2x)\sqrt{tgx}}{sin^4x}$ را بدست آورید

دانشکده صنعتی پلی تکنیك ۱۳۴۷

۲۸۷۴- منحنی‌های (C) را چنان تعیین کنید که اگر P محل برخورد قائم بر منحنی آنها در نقطه M وبمختصات (x,y) بامحور xها باشد طول MP همواره برابر مقدار ثابت a گردد

نوع این منحنی‌ها را مشخص کنید.

جواب. $(x-b)^2+y^2=a^2$ منحنی فوق دوایری هستند که مراکز آنها P است و شعاع آنها a :

۲۸۷۵ـ حد کسر $\frac{1+2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}}{6(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})}$ را به ازاء $x=1$ حساب کنید.

جواب. $\frac{1}{12}$

۲۸۷۶ـ یک بیضی با قطر کانونی $AA'=2a$ و فاصله کانونی $FF'=2$ و نقطه اختیاری M بر محیط آن مفروض است. اگر در مثلث MFF' زوایای $\hat{F}$ و $\hat{F'}$ بترتیب با α و α' نمایش داده شوند ثابت کنید $tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\alpha'}{2}=\frac{a-c}{a+c}$

۲۸۷۷ـ دایره $x^2+y^2=4a^2$ و سهمی $2y^2=3a(x+a)$ مفروض‌اند (a عددی است مثبت) مطلوبست محاسبه الف. سطح محصور بین سهمی و دایره قسمتی که در داخل سهمی قرار دارند. ب. حجم حاصل از دوران سطح بالا بدور محور xها. ج. تانژانت زاویه بین سهمی و دایره در نقطه برخورد آنها واقع در ربع اول

جواب. $S=(\frac{5\sqrt{3}}{3}+\frac{4\pi}{3})a^2$ و $v=\frac{14\pi}{3}a^3$ و $tg\,v=\frac{7\sqrt{3}}{9}$

۲۸۷۸ـ مجموع n جمله اول تصاعد هندسی را حساب کنید و اگر قدر نسبت تصاعد کوچکتر از یک و $n\to\infty$ حد این مجموع را بدست آورید. جواب. $x=\frac{13\pi}{30}$

کنکور سراسری در سال ۱۳۴۸

۲۸۷۹ـ بافرض آنکه معادله $x^3-19x+m=0$ سه ریشه داشته باشد بقسمی که مجموع دو ریشه از ریشه‌هایش ۲ و حاصل ضرب همان دو ریشه ۱۵ − باشد حساب کنید m و هر سه ریشه را

جواب. $x_3=-2$ و $x_2=-3$ و $x_1=5$ و $m=30$ (۴ نمره)

مسائل کنکور دانشگاه صنعتی آریامهر

۲۸۸۰ـ در نقطه P واقع بر سهمی $y^2=2Px$ مماس بر آن رسم میکنیم از مبدأ مختصات خطی بموازات این مماس میکشیم تا عمودی که از نقطه P بر محور xها فرود آمده در نقطه Q قطع کند مکان هندسی Q را تعیین کنید. جواب. $y=\frac{px}{\sqrt{2px}}$

۲-۸۸۱ـ تابع $g(x)$ دارای خواص زیر است $g'(x)=g(x)$ و $g(0)=1$

نتیجه بگیرید که:

الف ـ $g(a-x)g(x)=g(a)$ وب $g(-x)=\frac{1}{g(x)}$

مسایل کنکور سراسری ۴۸

۲۸۸۲ ـ حدعبارت $y=x+3-\sqrt{x^2-x+4}$ را وقتیکه قدرمطلق x بی‌اندازه بزرگ میشود (یعنی در ازاء $x=\pm\infty$) حساب کنید. (۵ نمره)

جواب. $Y=3/5$

۲۸۸۳ ـ اولا منحنی (p) نمایش تابع $y=x^2-3x+2$ را رسم و نقاط تلاقی آن با محور های مختصات را نشان دهید. (۴ نمره)

ثانیاً ـ دو نقطه غیرمشخص M_1 و M_2 بطول‌های x_1 و x_2 ازمنحنی (p) را اختیار میکنیم پیدا کنید نقطه‌ای ازمنحنی را که در آنجا مماس برمنحنی موازی خط M_1M_2 باشد طول آن نقطه چقدر است (۵ نمره)

اگر M_1M_2 بموازات خودش تغییر کند مکان وسط وتر M_1M_2 ازمنحنی (P) چیست؟ (شکل را با فرض $x_1=1$ و $x_2=3$ رسم کنید) بدون محاسبه بگوئید مکان وسطهای وترهائی ازمنحنی (P) که همه باهم موازی باشند چه خواهد بود؟ (۷ نمره)

ثالثا ـ یك خط مانند $y=mx$ ماربر o (مبدا مختصات) را درنظر می گیریم که منحنی را دردو نقطه P_1 و P_2 تلاقی کند. اگر نقطه Q مزدوج توافقی O نسبت به P_1 و P_2 باشد یعنی اگر:

$$\frac{OP_1}{OP_2}=\frac{QP_1}{QP_2}$$ باشد.

الف ـ چه رابطه‌ای بین x های نقاط P_1 و P_2 و x نقطه Q وجود دارد؟ (۵ نمره)

ب. مکان Q را وقتیکه m تغییر میکند مشخص و رسم کنید. (۵ نمره)

ج ـ بدون محاسبه و نوشتن معادله نقاط تماس مماسهای مرسوم از O بر P را نشان دهید (با ذکر دلیل).

جواب. ثانیاً ـ $x=2$ وثالثاً ـ $y=-3x+4$

۲۸۸۴ ـ A و B و C سه نقطه ازمنحنی نمایش تابع $y=x-\sqrt{x}$ میباشند که طول‌های آنها به ترتیب $(\lambda-1)^2$ و λ^2 و $(\lambda+1)^2$ میباشد. مساحت سطح مثلث ABC چقدر است؟

(دو مجهول مختصات عمود بر یکدیگرند) (۷ نمره) جواب. $\boxed{S=1}$ $(x<-2)$

سوالات نمونه کنکور سراسری سال ۴۸

۲۸۸۵ ـ کدام تابع x است که در ازاء $x=\frac{\pi}{4}$ برابر ۲ میشود و مشتقش برابر ،

$\sin^2 3x \cos^2 3x$ است؟

۸۸۶ ۳- منحنی نمایش تغییرات تابع $Y = x\sqrt{16 - x^2}$ را رسم کنید .

۸۸۷ ۳- حد عبارت $\frac{\sqrt{x^2+2x-6} - \sqrt{x^2-2x+6}}{x^2-2x-3}$ را در ازاء $x = 3$ حساب کنید

مسائل امتحانات نهائی

خرداد ۱۳۰۸

۲۸۸۸ـ سه‌جمله‌ای درجهٔ‌دوم $y = ax^2 + bx + c$ مفروض‌است. مطلوبست اولا تعیین مقادیر ضرائب a و b و c بطوریکه بازاء $x = 2$ سه‌جمله‌ای مفروض می‌نیمم بوده مقدار این می‌نیمم ۱ — باشد وعلاوه براین بازاء $x = 1$ مقدار سه جمله‌ای مفروض مساوی ۱ باشد ثانیاـ فرض‌میکنیم که منحنی‌نمایش تغییرات سه‌جمله‌ای مفروض‌محور $y'y$ رادر نقطه A قطع نماید و B نقطه می‌نیمم منحنی باشد تعیین کنید نقطه D ازمنحنی‌راکه مماس‌برآن موازی AB باشدثالثاسطح‌محصورمابین‌منحنی‌ومحورطولاوعرضهای‌نقاط A و D راحساب کنید.

خرداد ۱۳۰۸ تهران

۲۸۸۹ـ نیمدایره‌ای‌بقطر $AB = 2R$ مفروض‌است‌درروی‌امتداد AB نقطه C بفاصله $AC = d$ اختیار مینمائیم حال نقطه‌ای مانند M درروی نیمدایره چنان تعیین کنید که CM واسطه هندسی مابین MA و MB باشد زاویه $\widehat{BAM} = x$ را مجهول مسئله انتخاب کرده ودرمعادله نسبت بپارامتر d بحث کنید.

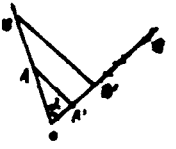
تیرماه ۱۳۰۹

۲۸۹۰ـ تابع $y = x^3 + px^2 + qx + r$ مفروض‌است مطلوبست اولا تعیین p و q و r بطریقی‌که بازاء $x = -1$ مقدار y صفر گشته وبازاء $x = -2$ دارای ماکزیمم یا یکه می‌نیمم مساوی یك باشد پس از تعیین مقادیر p و q و r معادله $y = 0$ را حل کرده وهمچنین تحقیق کنید که بازاء $x = -2$ تابع y ماکزیمم‌است یا می‌نیمم ثانیاـ منحنی نمایش تغییرات $y = (x+1)(x^2+3x+1)$ را رسم کرده و فرض می‌کنیم که نقاط A

و B جلول‌های ۲ — و ۱ — دو نقطه از منحنی مذکور باشند مطلوبست سطح محصور بین محور ox و عرض نقطه A و قوس AB منحنی ثالثاً مطلوبست تعیین معادله خط D که از نقطه B مرور کرده و ضریب زاویه‌اش مساوی m باشد مختصات نقاط تقاطع این خط را با منحنی فوق معین کنید.

مسابقه تیر ۱۳۰۹

۲۸۹۱ - سه نقطه O و A و B بر یك استقامت واقع می‌باشند بطریقی که OA مساوی AB و مساوی ۱ می‌باشد از نقطه O خطی مانند OC بطریقی رسم میکنیم که با OA تشکیل زاویه α را بدهد و بعد از نقاط A و B دو عمود AA' و BB' را بر OC فرود می‌آوریم وشکل را حول OC دوران میدهیم مطلوبست اولا سطح کل S وحجم V مخروط ناقص حادث از دوران ذوزنقه ABB'A' ثانیاً بفرض $S = \frac{۱۱۴}{۳}$



مقدار α را حساب کنید ثالثاً تغییرات V را وقتی α از صفر تا $\frac{\pi}{۲}$ تغییر کند تعیین نمائید.

مسابقه شهریور ۱۳۰۹

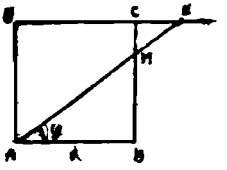
۲۸۹۲ - دو دایره مساوی c و c' بشعاع a و ببعد المرکزین $cc' = ۳a$ مفروض میباشد از نقطه o وسط cc' محوری چنان رسم میکنید که با cc' تشکیل زاویه مساوی α بدهد و بر روی این محور نقطه‌ای مانند M بفاصله $OM = x$ اختیار مینمائید اولا قوتهای نقطه M را نسبت بدایره c و c' برحسب a و x و α حساب کنید ثانیاً نسبت این دو قوت را تشکیل داده تغییرات آنرا درحالات مختلفه $\alpha = ۰$ و $\alpha = \frac{\pi}{۶}$ و $\alpha = \frac{\pi}{۳}$ وقتیکه متغیر x باشد تعیین نمائید.

مسابقه شهریور ۱۳۰۹

۲۸۹۳ - درمثلث قائم‌الزاویه ABC وتر را a وضلعین زاویه را b و c وارتفاع وارده ازراس زاویه قائمه بروتر را h می‌نامیم اولا بفرض معلوم بودن a مطلوبست محاسبه h و b و c درصورتیکه بدانیم $b + c = a + ۲mh$ باشد (m نمایش عددیست مثبت) برای حل مسئله یکی اززوایای حاده مثلث قائم‌الزاویه را مجهول قرار دهید ثانیاً حل مسئله منجر میشود بحل معادله $\sin x + \cos x = \frac{۱}{m} - ۱$ اگر $\log a$ و $\log m$ دردست باشد مطلوبست محاسبه h و c و b بوسیله فرمولهای قابل محاسبه بوسیله لگاریتم.

خرداد ۱۳۱۰ تهران

۲۸۹۴- مربعی مانند ABCD بضلع a مفروض است از راس A خطی مانند AMN رسم میکنیم که با AB زاویه برابر با φ ایجاد کند این خط ضلع AC یا امتدادش را در نقطه M و CD یا امتدادش را در نقطه N قطع میکند و زاویه φ از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ تغییر میکند اولا ثابت کنید که



$\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}$ مقداریست ثابت ثانیاً منحنی نمایش تغییرات $y=\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}$ را رسم کنید ثالثاً زاویه φ را بطریقی تعیین نمائید که $AM\times AN=K^2$ باشد (بحث)

خرداد ۱۳۱۰ طهران

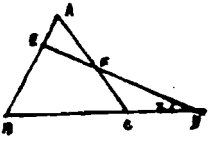
۲۸۹۵- در دوار بعة اضلاعی مانند ABCD ضلع $AB=a$ و $BC=b$ و $AD=d$ و زوایای $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ معلومند اولا ضلع چهارم $CD=c$ را معلوم کنید ثانیاً چه شرایطی بین اضلاع a و b و c و d باید موجود باشد تا آنکه جمیع مستطیلهائی که میتوان بمحیط بر ذوار بعة اضلاع نمود متشابه باشند.

مسابقه ۱۳۱۰

۲۸۹۶- اولا تغییرات تابع $y=\frac{2x-3a^2}{(x+2a)^2}$ و منحنی نمایش تغییرات آنرا تعیین کنید ثانیاً معادله خط مماس در یك نقطه از منحنی را بنویسید ثالثاً عده خطوط مماسی را که از یك نقطه معین میگذرند تعیین کنید رابعاً مکان هندسی نقاط P را بطریقی تعیین کنید که اگر از این نقاط دو خط مماس رسم کنیم بر یکدیگر منطبق شوند.

مسابقه ۱۳۱۰

۲۸۹۷- در مثلث متساوی الاضلاع ABC که بضلع مفروض a است ضلع BC را بطول $CD=a$ امتداد میدهند و از نقطه D خطی چنان مرور دهید که AB را در E بین B و A



و AC را در F تلاقی نماید وزاویه $\widehat{FDC}$ را x فرض کنید اولا طولهای FC و FA و EB و EA وسطح مثلث AEF را بحسب a و x معلوم کنید ثانیاً $tg\,x$ را بقسمی تعیین کنید که نسبت سطح مثلث AEF بسطح مثلث ABC مساوی عدد m باشد

شهریور ۱۳۱۰ طهران

۳۸۹۸- تابع $y = x^2 - 1 - m(x-1)$ مفروض است مقدار m را چنان تعیین کنید که منحنی‌های نمایش تغییرات مفروض برمحور xها مماس گردد پس از تعیین مقادیر m منحنی‌های نمایش تغییرات تابع حاصل را رسم نموده و مساحت محصور مابین منحنی‌ها ومحور xها را تا $\frac{1}{10}$ تقریب حساب کنید.

خرداد ۱۳۱۱ طهران

۳۸۹۹- تابع $y = \frac{ax^2+20x}{x^2+2x-3}$ که درآن x متغیر و a نمایش پارامتری میباشد مفروض است مطلوبست اولا محاسبه مقدار a بطریقی که تابع بازاء $x = -2$ ماکزیمم باشد ثانیاً پس از تعیین a جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع را رسم کنید ثالثاً خط $y = m$ مفروض است در وجود نقاط تقاطع آن با منحنی C برحسب مقادیر m بحث نمائید. اگر M' و M'' نقاط تقاطع خط فوق با منحنی C باشد ثابت کنید که بین طولهای این دو نقطه رابطه‌ای که بستگی بمقدار m ندارد موجود است رابعاً مکان هندسی نقطه P وسط قطعه M'M'' را تعیین نموده و منحنی c' نمایش تغییرات آنرا رسم کنید ومعلوم نمائید که دو منحنی c و c' دارای خط مجانب مشترکی بوده ودر نقاط مشخصه یکدیگر را تلاقی میکنند خامساً معادله

$$tg\left(\frac{\pi}{4} \times \frac{23x+4}{x-1}\right) \cdot tg\left(\frac{\pi}{4} \times \frac{7x+18}{x+3}\right) = 1$$

را حل نموده واز منحنی c نتیجه برای حل وبحث این معادله را بدست آورید.

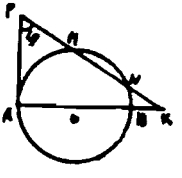
خرداد ۱۳۱۱ ولایات

۳۹۰۰- درسطح محورهای قائم Ox و Oy خط ثابتی مانند D عمود بر محور Ox وبفاصله Q از محور Oy فرض می‌نمائیم وبعد نقطه غیرمشخصی مانند O برروی D اختیار کرده مثلث قائم‌الزاویه POQ را که زاویه قائمه‌اش در O ووترش PQ موازی Ox باشد رسم مینمائیم مطلوبست اولا تعیین مکان هندسی نقطه Q وقتی که نقطه Q محلش را درروی خط D تغییر دهد ثانیاً دایره بمرکز Q ماربر P که خط غیرمحدود OQ را در دو نقطه A و B

قطع میکند رسم نموده ثابت کنید که PA و PB منصف زوایائی میباشند که از تقاطع خطوط OP و D تشکیل میشود و از آن استنباط کنید که نقاط A و B متعلق بسهمی می‌باشند که کانون آن نقطه O و خط هادی آن D است ثالثاً فرض میکنیم که نقطه P بایك حرکت متشابه و با سرعت V در روی خط D متحرك است ثابت کنید که حامل نمایش شتاب نقطه Q همیشه موازی Ox است مقدار آنرا هم در هر لحظه حساب کنید

خرداد ۱۳۱۱ ولایات

۳۹۰۱- دایره بقطر $AB=2R$ مفروض است در نقطه A مماس بر دایره رسم کرده و آنرا بطول $AP=a$ امتداد میدهیم بعد از نقطه P قاطعی چنان رسم میکنیم که با AP تشکیل زاویه‌ای مانند φ کرده و محیط دایره را در نقاط M و N و خط AB را در نقطه K قطع کند مطلوبست



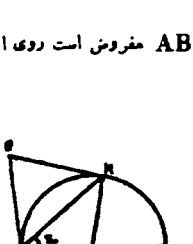
اولا محاسبه $y=\frac{PM+PN}{2}$ بر حسب R و φ و مطلوبست a ثانیاً تعیین φ بطریقی که $\frac{1}{PM}+\frac{1}{PN}+\frac{2}{h}$ باشد (بحث)

مسابقه ۱۳۱۱

۳۹۰۲- مطلوبست رسم منحنی تغییرات $y=ax^2+2bx+c$ اولا بچه شرط خط مار بر مبدأ با سر بیزاویه m منحنی فوقرا قطع میکند ثانیاً تعیین کنید ضرایب زاویه دو خطی را که از مبدأ بر منحنی مماس می‌شوند. ثالثاً زاویه φ حادث مابین این دو خط مماس را معلوم نموده و تعیین کنید درچه حالتی زاویه φ قائمه خواهد بود رابعاً مختصات نقاط تماس P و Q این دو خط مماس را معلوم کنید خامساً سه جمله $ax^2+2bx+c$ را بواسطه دو ریشه x' و x'' و ظل زاویه φ مشخص نموده بحث کنید.

مسابقه ۱۳۱۱

۳۹۰۳- نیمدایره‌ای بمرکز O و بقطر $AB=2R$ مفروض است روی این نیم‌دایره نقطه‌ای مانند M چنان اختیار میکنیم که زاویه $\widehat{OAM}=x$ باشد شعاع OM را وصل نموده و در روی ضلع AM و در خارج مثلث AOM مثلث متساوی الاضلاع AMC را میسازیم اولا مطلوبست محاسبه مساحت سطح ذوار بعة اضلاع AOMC بحسب R و x ثانیاً x را بطریقی تعیین کنید که مساحت این ذوار بعة اضلاع مساوی باشد با مقدار معلوم mR^2



(بحث برحسب مقادیر مختلفه m) ثالثاً مقدار x را در دو حالت مخصوص ذیل $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $m = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ حساب کنید.

شهریور ۱۳۱۱ طهران

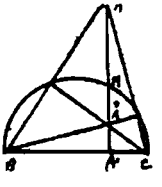
۳۹۰۴- تابع مثلثاتی $y = 8\cos^5 x - 10\cos^3 x + 5\cos x$ که در آن x نمایش قوس محصور مابین ۰ و π است مفروض است اولا تحقیق کنید که میتوان تابع مفروض را بصورت $y = A\cos x + B\cos 5x$ تبدیل نمود A و B نمایش ضرائب عددی میباشند که باید آنها را حساب نمائید ثانیاً جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع y را رسم کنید ثالثاً سطح محصور بین منحنی و محور طولها و محور عرضها را حساب کنید رابعاً جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع $y = 8x^5 - 10x^3 + 5x$ را رسم کنید. خامساً سطح محصور بین منحنی و خط مماس بر نقطه مبدأ آن قسمتی را که در زیر خط مماس و در فوق محور x'x است حساب کنید.

شهریور ۱۳۱۱ ولایات

۳۹۰۵- تابع $y = \frac{x^2 + px + p}{x(x-2)}$ مفروض است اولا مقادیر p و q را بطریقی حساب کنید که تابع بازاء $x = 3$ دارای ماکزیمم یا مینیمم مساوی ۲ باشد ثانیاً منحنی c نمایش تغییرات تابع $y = \frac{x^2 + 2x + 9}{x(x-2)}$ را رسم کنید ثالثاً منحنی فوق را با خطی موازی محور x'x بعرض m قطع میکنیم مطلوبست تشکیل معادله درجه دومی که ریشه‌های آن طول M و M' نقاط تقاطع باشد و مختصات نقطه P وسط MM' و معادله مکان آنرا تعیین نموده آنرا رسم کنید رابعاً مقدار m را بطریقی تعیین کنید که هرگاه ریشه‌های معادله درجه دوم فوق را $tg\alpha$ و $tg\beta$ فرض کنیم $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$ باشد و پس از تعیین m مقادیر α و β را حساب کنید

خرداد ۱۳۱۲ تهران

۳۹۰۶- نیمدایره‌ای بقطر BC مفروض است نقطه مانند A' بر روی قطر BC اختیار کرده وعمودی از این نقطه بر BC اخراج نموده و امتداد دهید تا محیط نیمدایره را در نقطه M قطع کند بر روی A'M نقطه مانند A بطریقی فرض میکنند که $\frac{A'A}{A'M} = m$ باشد (نقطه A در خارج



نیمدایره واقع بوده و m نمایش عددیست مثبت) مطلوبست اولا تعیین رابطه مابین B و C و در مثلث ABC و بفرض $A = ۴۵$ و $m = ۱ + \sqrt{۲}$ زوایای B و C را حساب کنید ثانیا بر روی A'M نقطه مانند A" بطریقی انتخاب می‌نمایند که $\frac{A'A''}{A'M} = \frac{۱}{m}$ باشد (نقطه A" درداخل دایره واقع میباشد) ثابت کنید که زوایای BAC و BA"C مکمل یکدیگر میباشند وبالعکس ـ اگر M محیط نیمدایره را طی کند مکان هندسی A'A چه خواهد بود ثالثا ثابت کنید درحالت مخصوص $m = ۲$ فاصله OH یعنی فاصله مرکز O دایره محیطیه مثلث ABC از نقطه H محل تقاطع سه ارتفاع همین مثلث بیاوی $\frac{BC}{۲}$ میباشد.

خرداد ۱۳۱۲ ولایات ومدرسه متوسطه نظام

۴۹۰۷ـ تابع $y = \frac{۲x^۲ + m^۲}{x - ۲m}$ (۱) مفروض است اولا فرض میکنیم که خط $y = b$ منحنی نمایش تغییرات تابع (۱) را وقتی در آن $m = ۱$ باشد دردو نقطه A و B و محور y'y را در نقطه c قطع کند مطلوبست محاسبهٔ طول نقطه D مزدوج توافقی C نسبت به A و B معادله مکان هندسی نقطه D را برحسب تغییر b تعیین نمائید ثانیا ثابت کنید که تابع (۱) بازاء مقادیر مختلفه m (باستثنای $m = ۰$) دارای ماکزیمم ومینیمم است واگر M' نقطه ماکزیمم و M" نقطه مینیمم باشد ثابت کنید که نقطه M وسط M'M" همواره برروی خط مستقیمی حرکت مینماید ومعادله این خط مستقیم را معین کنید ثالثا مطلوبست تشکیل معادله درجه دومی که ریشه‌های نمایش عرضهای نقاط M' و M" باشند رابعا ثابت کنید که منحنی نمایش تغییرات تابع (۱) بازاء جمیع مقادیر m (بغیر از $m = ۰$) همواره بردو خط ثابت مماس است و این دو خط ثابت را تعیین کنید.

مسابقه ۱۳۱۲

۴۹۰۸ـ روابط

$$x = a(۱ + \cos\alpha) - b\sin\alpha \qquad (۱)$$

$$y = a\sin\alpha + b(۱ + \cos\alpha) \qquad (۲)$$

مفروض است اولا فرض میکنیم $a = b = ۱$ باشد در اینصورت x و y را برحسب α حساب نموده جدول ومنحنی تغییرات تابع $z = xy$ را هرگاه α از ۰ تا ۲π تغییر کند رسم نمائید وسطح حادث مابین منحنی ومحور $O\alpha$ را دردو نقطه تقاطع متوالی منحنی بامحور $O\alpha$ حساب کنید ثانیا فرض میکنیم a و x معلوم باشد حال معادله (۱) را برحسب α حل وبحث کنید وهرگاه x مقداری ثابت و b مختصات نقطه ازسطح دومحور قائم باشد تغییر گرافیکی برای بحث فوق معلوم نمائید ثالثا فرض میکنیم a و b و x و y معلوم و α مجهول باشد مطلوبست رابطه مابین معلومات فوق برای آنکه دومعادله (۱) و (۲) برحسب α دارای ریشه

های مشترك باشند وتحقیق کنید که این شرط درحالت $x = 0$ و $y = 2b$ صدق می‌نماید و با این فرض هرگاه α_1 ریشه مشترك دومعادله باشد $\sin\alpha_1$ و $\cos\alpha_1$ و $tg\alpha_1$ رابر حسب a و b حساب کنید.

مسابقه ۱۳۱۲

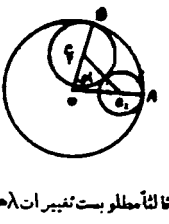
۳۹۰۹- برروی محور Sx سهمی برأس S وپارامتر p دونقطه متغیر A و A′ را بطریقی انتخاب می‌نمائید که $SA + SA' = 2p$ باشد ازنقاط A و A′ عمودهائی بر Sx واقع دریکطرف آن اخراج نموده امتدادمی‌دهند تا سهمی‌را درنقاط B و B′ قطع کنند بفرض $SA = x$ مطلوبست اولا تعیین تغییرات $Z = 2AB + A'B'$ ثانیا درحالتی که تابع Z دارای بزرگترین مقدار باشد مطلوبست محاسبه زوایای مثلثی که ازوتر BB′ و مماسهای نقاط B و B′ تشکیل میگردد ثالثا ثابت کنید که عمود منصف وتر BB′ محور Sx را در نقطه ثابتی تلاقی میکند واز این مطلب استنباط کنید که BB′ همیشه بریك سهمی که باید آنرا تعیین نمود مماس میباشد.

شهریور ۱۳۱۲ طهران

۳۹۱۰- درمثلثی $2tgA = tgB + tgC$ می‌باشد اولا صحت روابط ذیل‌را ثابت کنید $tgBtgC = 3$ و $\cos(B - C) = 2\cos A$ ثانیا بفرض معلوم بودن زاویه A سایرزوایای مثلث‌را حساب نموده بحث کنید ثالثا بفرض معلوم بودن ضلع a ومجموع دوضلع دیگر b اجزاء مثلث‌را حل وبحث نمایند رابعا عبارت $(\cos B + \cos C)^2$ را برحسب خطوط مثلثاتی زاویه A تعیین کنید خامسا جدول ومنحنی تغییرات : $y = 2\sin^2\frac{A}{2}(1 + 2\cos A)$ راهرگاه A از ۰ تا π تغییر کند رسم نموده وسطح محصور مابین منحنی محور x′x را حساب کنید .

شهریور ۱۳۱۲ ولایات

۳۹۱۱- دوشعاع OA و OB دردایره‌ای بشعاع R بایکدیگر زاویه α تشکیل می‌دهند و دودایره C_1 و C_2 مرکز یکی درروی OA ومرکز دیگری درروی OB قرارداشته وبر دایره O اولی درنقطه A ودومی درنقطه B مماس می‌باشند اولا مطلوبست رابطه مابین شعاع آنها R_1 و R_2 برای اینکه این دودایره نیز بریکدیگر مماس باشند ثانیا با وجود این شرط R_1 و R_2 را حساب کنید بطریقی که $c_1c_2 = b$ باشد



وازینرو طول λ می‌نیمم b را برحسب k و $x = \frac{\alpha}{2}$ حساب کنید. ثالثاً مطلوبست تغییرات λ هرگاه α از ۰ تا π تغییر کند .

خرداد ۱۳۱۳ طهران

۳۹۱۲- تابع $y=\frac{3x^2+ax+3}{3x^2+2x+b}$ مفروض است اولا مقادیر a و b را بقسمی تعیین کنید که تابع y بازاء $x=-1$ دارای می‌نیمم یا ماکزیمی مساوی ۱- باشد در تعیین مقادیر a و b معلوم میشود که مسئله دارای دوجواب است ثابت کنید که فقط یکی از این دوجواب قابل قبول می‌باشد ثانیا مطلوبست تعیین تغییرات تابع :

$y=\frac{3x^2+10x+3}{3x^2+2x+3}$ ورسم منحنی نمایش ثالثا خط مستقیمی باضریب زاویه m از نقطه A بطول $\frac{1}{3}$ - واقع برمنحنی C مرور نموده واین منحنی رادر دو نقطه دیگری قطع کرده است به ازاء مقادیر مختلفه m در وجود این دو نقطه بحث کنید و m را چنان تعیین کنید که این خط با منحنی مماس شود رابعا رابطه (۱) پس از رفع مخرج معادله درجه دومی برحسب مجهول x میشود اگر x' و x'' ریشه‌های این معادله برابر با $tg\,v$ و $tg\,u$ باشد مطلوبست تعیین مقدار y بقسمی که قوسهای v و u متمم یکدیگر باشند.

خرداد ۱۳۱۳ طهران

۳۹۱۳- خط D بمعادله $y-2mx-m=0$ مفروض است اولا ثابت کنید که خط D بازاء جمیع مقادیر m بر نقطه ثابتی مانند A که مختصات آنرا تعیین خواهید کرد مرور میکند ثانیا معادله ذیل مفروض است: $(1-4m)x^2+(1-4m)x-m=0$ شرط وجود ریشه‌های معادله را بحسب مقادیر مختلفه m تحقیق کنید ثالثا درحالتی که معادله (۱) دارای دو ریشه حقیقی x' و x'' می‌باشد بر خط D نقاط P و Q را بقسمی اختیار میکنیم که طولهای آنها بترتیب مساوی x' و x'' ریشه‌های معادله (۱) باشند ثابت کنید که نقاط P و Q بازاء جمیع مقادیر m نسبت بنقطه A قرینه یکدیگر میباشند و ثابت کنید که مکان هندسی این نقاط درمعادله $y=\frac{x^2+x}{2x+1}$ صدق نموده ومنحنی نمایش تغییرات این تابع را رسم کنید رابعا تحقیق کنید که بازاء چه مقداری از m زاویه POQ قائمه خواهد بود (O مبدأ مختصات فرض شده است).

خرداد ۱۳۱۳ ولایات

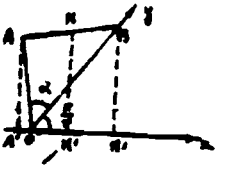
۳۹۱۴- دو تابع $y_1=\sin\varphi+\cos\varphi-1$ و $y_2=\sin\varphi+\cos\varphi+1$ مفروضند اولا جدول ومنحنی تغییرات آنها نسبت بیکدستگاه دومحور قائم هرگاه φ از ۰ تا 2π تغییر کند رسم نمائید ثانیا سطح حادث مابین دو منحنی ومحور $y'y$ وعرض منتهای منحنی را حساب

کنید ثالثا نسبت $z=\frac{y_1}{y_2}$ را بحسب $x=tg\frac{\varphi}{2}$ حساب کنید در اینصورت تابع :

$z=\frac{x(1-x)}{1+x}$ حاصل میشود که جدول‌ومنحنی تغییرات‌آنرا نیز رسم‌می‌نمائید رابطا معادله مماس برمنحنی فوق مرسوم‌ازمبدأO معلوم‌نموده‌آنرا رسم‌کنید ازتقاطع این‌مماس‌با خطوط مجانب منحنی‌مثلثی تشکیل‌میشود که‌اضلاع وزوایای آنرا حساب‌کنید.

خرداد ۱۳۱۳ بیرجند

۳۹۱۵- زاویه $xoy=\frac{\pi}{3}$ مفروض است در خارج این زاویه ودرسطح‌آن مثلث متساوی‌الساقین AOB راکه قاعده‌اش OB بر روی oy وضلع‌آن $OA=a$ می‌باشد بنا نموده و زاویهٔ قاعده آن را α فرض میکنیم اولا بحسب a و α مطلوبست محاسبه فاصله‌های AA' و BB' و MM' بنابرآنکه M وسط AB باشد ثانیا بفرض‌آنکه $a=2\sqrt{3}$ باشد طول $y=MM'$ رابحسب $x=tg\frac{\alpha}{2}$ حساب‌کنید



در اینصورت تابع $y=\frac{-3x^2+2x+3}{x^2+1}$ حاصل میشود که جدول ومنحنی تغییرات آنرا رسم میکنید ثالثا خط $y=\lambda$ را اختیارمیکنیم درعدهٔ نقاط تقاطع این خط بامنحنی فوق بحسب‌مقادیر λ ازروی منحنی ومعادله بحث‌نمائید .

خرداد ۱۳۱۳ خوزستان

۳۹۱۶- تابع $y=\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$ مفروض‌است اولا جدول‌ومنحنی‌تغییرات‌آنرارسم کنید ثانیا D بمعادله $y=mx+1$ منحنی‌را درنقطه بطول‌صفرقطع‌میکند m‌رامعلوم کنید بطریقی‌که خط منحنی را درنقطه بطول‌صفرقطع‌میکندm‌را معلوم‌کنید بطریقی‌که‌خط منحنی را دردونقطه‌دیگر P و P' قطع نماید ثالثا مکان نقطه M وسط PP' را بحسب تغییرm معلوم نموده آنرا رسم‌کنید رابطا طول‌نقطه PP' را بحسب α زاویه حادثه‌مابین D و محور $x'x$ معلوم‌نموده وتغییرات این‌طول را هرگاه α از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ تغییر کندمعلوم نموده منحنی‌آنرا رسم‌نمائید.

شهریور ۱۳۱۳ طهران

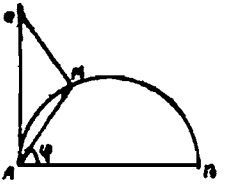
۳۹۱۷- اولا معادله $yx^2-(y+1)x+y+2=0$ را بازاء جمیع مقادیر y بحث کنید و y را پیدا نمائید بقسمی که ۱ − بین ریشه‌های آن واقع شود ثانیا بوسیله رسم منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x-2}{(x-1)^2}$ صحت بحث فوقرا تعیین کنید ثالثا خطی بعرض m بموازات محور طول منحنی تابع y را دردو نقطه A و B قطع می‌نماید m تابع چه شرایطی باشد تا خطوط OA و OB برهم عمود شوند وبازاء $m=-1$ ظل زوایای مثلث OAB را حساب نمائید.

شهریور ۱۳۱۳ مدرسه متوسطه نظام

۳۹۱۸- نیمدایره بقطر $AB=2R$ مفروض است ازنقطه A درروی مماس مرسوم از A قطعه AC را مساوی AB جدا نموده ونقطه غیرمشخص M واقعه برروی نیمدایره را بنقاط A و C وصل میکنیم اولا مطلوبست محاسبه قطعات AM و CM بحسب R و زاویه $\widehat{MAB}=\varphi'$ ثانیا تعیین φ بطریقی که:

$\overline{AM}^2+\overline{CM}^2=4R^2m$ باشد (بحث) ثالثا نسبت

$y=\frac{\overline{CM}^2}{\overline{AM}^2}$ را بحسب $tg\,p=x$ حساب نموده



جدول ومنحنی تغییرات منحنی آنرا رسم کنید را باسطح حادث مابین منحنی ومحور $x'x$ ومحور $y'y$ وعرض می‌نیم را حساب کنید.

شهریور ۱۳۱۳ ولایات

۳۹۱۹- درزاویه $xzy=60^\circ$ دایره c را بشعاع r محاط می‌کنیم وبمماس xy را بطریقی رسم میکنیم که زوایای مثلث xyz تشکیل یك تصاعد عددی داده وبعلاوه یکی از اضلاع آن مضاعف دیگری مثلا $y=2x$ باشد مطلوبست اولاً محاسبه زوایای x و y ثانیا اضلاع اضلاع x و y و z و نصف محیط p و $p-x$ و $p-y$ و $p-z$ را بحسب r شعاع دایره محاطیه حساب نموده وارروی آنها زوایای x و y و z را مجدداً حساب کنید ثالثا سطح S مثلث xyz را تعیین کنید رابعا شعاع R دایره محیطیه مثلث فوقرا درحالتی که $r=10cm$ باشد حساب کنید.

شهریور ۱۳۱۳ خوزستان

۳۹۲۰- مثلث متساوی‌الساقین ABC که درآن $AB=AC$ میباشد مفروض

است هرگاه محیط مثلث $2p$ وشعاع دایره محیطیه R وشعاع دایره محاطیه r فرض شود اولا مطلوبست محاسبه p بحسب R وزاویه $\hat{A}$ وتغییرات p هرگاه R ثابت و A تغییر کند ثانیا تحقیق کنید که $r = 2R\sin\frac{A}{2}(1-\sin\frac{A}{2})$ میباشد ثالثا A را تعیین کنید بفرض آنکه $r = mR$ باشد (بحث) وحالات خاصی را که A حاده یاقائمه یامنفرجه باشد تحقیق نمائید (تمرین عددی $m = \sqrt{2}-1$)

شهریور ۱۳۱۳ مسابقه بانک ملی ایران

۳۹۲۱- اولا مطلوبست محاسبه حاصلضرب $\alpha\beta$ بحسب مجموع آنها $\alpha+\beta=S$ ومجموع مربعین آنها $\alpha^2+\beta^2=m^2$ وبفرض معلوم بودن m مقادیر S را بطریقی تعیین کنید که $\alpha\beta$ موجود ومحصور مابین صفر و m باشند ثانیا حساب کنید محیط و ارتفاع مرسوم ازرأس قائمه مثلث قائم‌الزاویه را بحسب وتر آن a ویکی اززوایای حادهٔ آن φ وتعیین کنید مقدار φ را بطریقی که محیط مثلث مساوی k برابر ارتفاع فوق باشد (بحث) دراین بحث $S=\cos\varphi+\sin\varphi$ را مجهول معاون اختیار کنید) وحساب کنید اضلاع مثلث را هرگاه $\alpha=1$ و $k=5$ باشد ثالثا تغییرات محیط مثلث فوق را هرگاه φ از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ تغییر کند معلوم نموده منحنی آنرا رسم کنید.

خرداد ۱۳۱۶ طهران

۳۹۲۲- ارابهٔ A برخط افقی $z'z$ باسرعت ثابت $AD=a$ حرکت میکند از این ارابه جسمی را باسرعت اولیه $AB=b$ که با $z'z$ زاویه‌ای مساوی x تشکیل میدهد پرتاب میکنیم اولا تعیین کنید سرعت منتجهٔ V جسم مزبور وزاویهٔ y آنرا با خط $z'z$ هم بطریق هندسی وهم بامحاسبه وتغییرات زاویه y راوقتی که x ازصفر تا π تغییر کند معین ومنحنی نمایش آنرا رسم کنید ثانیا وقتی که x تغییر میکند مکان منتهای حامل V را بدست آورید وبفرض اینکه $b=a\sqrt{2}$ باشد معین کنید بازای چه مقدار از x زاویه y مساوی 45° میشود ثالثا بفرض وزین بودن جسم مفروض m اگر ارتفاع نقطه پرتاب ازسطح زمین h باشد مسیر M را بدست آورید و پارامتر آنرا حساب کنید.

خرداد ۱۳۱۸ طهران

۳۹۲۳- تابع $y=\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}$ مفروض است.

اولا- جدول ومنحنی C بمایش تغییرات آنرا رسم کنید.

ثانیاً- خط D که معادله آن $y=mx+1$ است منحنی C را دریك نقطه که طول آن

سفر است قطع میکند تعیین کنید بازای چه مقادیری از m خط مفروض منحنی C را در دو نقطه P و P' قطع میکند.

ثالثاً ـ ثابت کنید وقتی که مقدار m تغییر میکند نقطهٔ K وسط قطعه خط PP' بر روی خط مستقیم ثابتی تغییر مکان میدهد.

رابعاً ـ زاویهٔ خط D را بامحور xها به α نمایش میدهیم. طول قطعه خط P'P را بر حسب α حساب و تعیین کنید بازای چه مقدار α طول PP' مساوی $\sqrt{۳۲}$ میباشد.

نظام خرداد ۱۳۱۸ طهران

۲۹۲۴- $y = x^۲ + ۲px + q$ مفروض است مطلوبست :

اولا ـ محاسبهٔ مقادیر p و q بطوریکه نقطه $M\left|\begin{matrix}۱\\۱\end{matrix}\right.$ نقطه‌ی نیمم باشد

۲۹۲۵ـ اولا ـ رسم منحنی $y = x^۲ - ۲x + ۲$

ثانیاً ـ محاسبه سطح محصور بین این منحنی و محور yها و خط $y = x$

ثالثاً ـ بدست آوردن معادلهٔ مکان هندسی وسط قطعه خط واصل ما بین دو نقطه تقاطع این منحنی با خط $y = mx$ و رسم این مکان هندسی.

نظام خرداد ۱۳۱۸ شهرستانها

۲۹۲۶- تابع $y = x^۳ + px^۲ + qx + r$ مفروض است اولا ضرایب p و q و r را طوری حساب کنید که این منحنی از نقاط $A(۱و۰)$ و $B(۲و۱)$ بگذرد و نقطه B نقطه عطف منحنی نیز باشد ثانیا سطح محصور بین منحنی فوق و محور xها و خط $x = ۲$ را حساب کنید.

شهریور ۱۳۱۸

۲۹۲۷ـ معادله درجهٔ دوم $x^۲(-y+۱) + x(۳-y) - ۲y = ۰$ که در آن y پارامتر میباشد مفروض است اولا منحنی C نمایش تغییرات y را بحسب x رسم کنید و نقطه تلاقی منحنی را با خط مجانب خودش بدست آورید ثانیا از روی این منحنی در وجود و علامت و مقدار ریشه‌های معادله مفروض بحث کنید ثالثا می‌دانیم x با طول نقاط عطف هر منحنی (که معادله‌اش بصورت $y = f(x)$ باشد) بدین ترتیب بدست می‌آید که مشتق دوم y نسبت به x را مساوی صفر قرار دهیم. حساب کنید مختصات نقاط عطف منحنی C را و ثابت کنید که این نقاط روی یك خط مستقیم واقعند رابعا یکی از این نقاط عطف در مبدأ مختصات است. تعیین کنید نقاط تلاقی مماس در این نقطه را با منحنی C

نظام شهریور ۱۳۱۸ طهران و شهرستانها

۲۹۲۸- تابع $y = \frac{ax+۱}{x-۱}$ مفروض است. اولا مطلوبست تعیین مقدار a هرگاه مماس بر منحنی در نقطه طول ۲ موازی خط $y = ۱ - ۲x$ شود. ثانیا منحنی (C) نمایش

تغییرات تابع $y=\frac{x+1}{x-1}$ را رسم کنید. ثالثاً ازمبدأ خطی باضریب زاویه m رسم‌شده‌است بازای چه‌مقدار از m این‌خط منحنی (C) را قطع میکند.

خرداد ۱۳۱۹ نظام طهران

۲۹۲۹- تابع $y=a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}$ داده‌شده‌است. اولا مقدار a و c را طوری حساب کنید که منحنی نمایش تغییرات این تابع در نقطه بطول (۱) محور x را قطع کند ودر دو نقطه بطول $\frac{4}{3}$ دارای ماکزیمم یا می‌نیممی مساوی $(-\frac{1}{8})$ باشد.

۲۹۳۰- اولا منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x^2-3x+2}{x^2}$ را رسم کنید.

ثانیاً- اگر M و N دو نقطهٔ تلاقی خط $y=\lambda$ بامنحنی (C) و m و n ضریب‌زاویه‌های OM و ON فرض‌شوند معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل‌دهید که ریشه‌های آن m و n باشند تعیین کنیدشرطی‌راکه‌باید λ داشته‌باشد تاآنکه OM و ON برهم‌عمود باشند.

خرداد ۱۳۱۹ طهران

۲۹۳۱- منحنی (C) بمعادلهٔ $y=\frac{x^2+x+a}{2-x}$ داده میشود.

اولا - بفرض معلوم‌بودن a پیدا کنید معادله‌ای‌راکه‌ریشه‌هایش طولهای نقاط تلاقی این‌منحنی باخط $y=m$ باشند درچه‌صورت این‌خط برمنحنی (C) مماس‌می‌شود؟

ثانیاً- پارامتر a راقسمی‌بگیرید که‌تفاضل‌ماکزیمم‌ومی‌نیمم y مساوی ۸ شودوماکزیمم ومی‌نیمم‌را حساب‌کنید. دردوسئوال ۳ و ۴ مقدار a مساوی یا ۲- بگیرید.

ثالثاً- جدول تغییرات y ومنحنی (C) ومماس درنقطه‌ای ازمنحنی‌راکه‌طول آن یك است بکشید.

رابعاً- پیدا کنید مکان‌وسطهای‌وترهای (C) راکه‌موازی $x'x$ میباشند این‌مکان‌را هم روی‌شکل بکشید.

خامساً - ازروی‌نتایج پیش درمعادلهٔ:

$$\sin^2 x+(m+1)\sin x-2(1+m)=0$$

بحسب‌پارامتر m بحث کنیدوعدهٔ ریشه‌های‌این‌معادله‌راکه‌بین $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ واقع است تعیین کنید وبازای $m=-\frac{1}{2}$ ریشهٔ معادله‌را تابیکدقیقه تقریب‌حساب‌کنید (بمددجدول لگاریتم)

شهریور ۱۳۱۹ نظام - تهران

۴۹۳۲- تابع $y=\frac{x^2+px+q}{x(x-2)}$ مفروض است. اولا مطلوبست تعیین مقدار عددی ضرایب p و q هرگاه بازای $x=3$ تابع دارای ماکزیمم یا مینیمم برابر ۲ باشد. ثانیا جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x^2+2x-9}{x(x-2)}$ را رسم کنید. ثالثا خطی موازی محور $x'x$ بمعادلهٔ $y=m$ منحنی را تلاقی میکند بازای چه مقادیر m خط قاطع منحنی است و مطلوبست تعیین مکان هندسی وسط اوتاری از منحنی که بین نقاط تقاطع محصورند و رسم آن.

شهریور ۱۳۱۹ تهران

۴۹۳۳- روی نیم‌خط ox دو نقطهٔ P و Q بطولهای $OP=6$ سانتیمتر و $OQ=4$ سانتیمتر مفروضند و در بالای ox دو نقطهٔ A و B بقسمی داریم که:

$\widehat{xOA}=a<\frac{\pi}{2}$ و $\widehat{xOB}=\frac{2\pi}{3}$ و B و A از O بیک فاصله هستند.

$OA=OB=x$ اولا مطلوبست محاسبه نسبت $\frac{\overline{BQ}^2}{\overline{PA}^2}$ بحسب a و x و تعیین تغییرات آن وقتیکه x تغییر کند (بفرض ثابت بودن a) ثانیا این نسبت بازای یک مقدار $x=x$ ماکزیمم است. x یکی از ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ دومی است که می‌نویسید و می‌توان آن را بصورت $f(x)=\cos a$ نوشت که در آن $f(x)$ تابعی است کسری. ثالثا وقتی a تغییر میکند x نیز تغییر میکند. مطلوبست تغییرات x از روی تغییرات $f(x)$ و تعیین بزرگترین و کوچکترین مقدار x.

خرداد ۱۳۲۰ شش ساله متوسطه

۴۹۳۴- اولا تغییرات تابع $y=\frac{3(x^2-2)}{2x+1}$ را معین کنید و منحنی C این تغییرات را نسبت بدو محور عمود برهم ox و oy بکشید. ثانیا از روی منحنی C در وجود و شماره ریشه‌های معادلهٔ:

$$2\sin^2 z-2m\sin z-(m+6)=0$$

بحسب مقادیر مختلف پارامتر m بحث کنید.

ثالثا خط $y=m$ با منحنی C در دو نقطهٔ M_1 و M_2 برخورد میکند مکان هندسی وسط M_1M_2 را پیدا کرده آنرا هم بکشید. رابعا اگر بخواهیم OM_1 و OM_2 برهم عمود باشند m را چه اندازه باید گرفت.

خرداد ۱۳۲۰ نظام - تهران

۲۹۳۵- معادلهٔ مثلثاتی زیر مفروض است :

$$4\sin 2\varphi - 3\cos 2\varphi - 3 = 2m$$

اولا آنرا حل و بحث کنید. ثانیا هرگاه فرض کنیم $x = tg\varphi$ باشد تحقیق کنید که $m = \frac{4x-3}{1+x^2}$ میشود وجدول ومنحنی نمایش تغییرات m را هرگاه x از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند رسم کنید. ثالثا از نقطه A واقع بر محور yها بمرض ۳ بدو نقطه B و C از منحنی که طولهای آنها ۱+ و ۱- میباشد وصل کنید وضریب زاویه‌های دو خط AB و AC و $tg\widehat{BAC}$ و مساحت مثلث ABC را حساب کنید.

شهریور ۱۳۲۰ شهرستانها - سال ششم ریاضی ۱۳۲۱

۲۹۳۶- تابع $y = \frac{x^2 - \sin 2a}{x - \sin 3a}$ که در آن a کمانی است مابین صفر و ۹۰ درجه مفروض است . اولا تغییرات y را بازای $a = 60^\circ$ و $a = 45^\circ$ و $a = 30^\circ$ معین کنید منحنی‌های نمایش این تغییرات را بکشید. ثانیا در شکل‌های مختلف منحنی نمایش تغییرات y وقتی a بین ۰ و ۹۰° تغییر میکند بحث کنید.

شهریور ۱۳۲۰ طهران

۲۹۳۷- تابع $y = \frac{mx^2 + 2 - x}{x^2 + 2x - 3}$ که در آن x متغیر ومستقل و m پارامتر می‌باشد مفروض است

اولا - مقدار پارامتر m را طوری تعیین کنید که تابع y در نقطه $x = -2$ دارای ماکزیمم باشد.

ثانیاً - بازای $m = 7$ که باین ترتیب بدست می‌آید منحنی C نمایش تغییرات تابع را بکشید.

ثالثاً - خط D بمعادلهٔ $y = \lambda$ مفروض است مطلوبست بحث در وجود نقطه‌های برخورد این خط با منحنی C برحسب مقدارهای مختلف پارامتر λ

رابعاً - نقطه‌های برخورد خط D ومنحنی C را M' و M'' مینامیم مکان هندسی T وسط قطعه خط $M'M''$ را یافته این منحنی را نیز بکشید - ثابت کنید منحنی T با منحنی C یك مجانب مشترك دارد - منحنی T منحنی C را در دو نقطهٔ مهم قطع میکند دلیل این موضوع را بیان کنید.

شهریور ۱۳۲۱ سال ششم طبیعی

۲۹۳۸- تابع $y = \frac{x-1}{x^2 - x - 2}$ مفروض است.

اولا - جدول ومنحنی C نمایش تغییرات این تابع را رسم کنید .

ثانیاً - بازاء چه مقادیر m خط $y=m$ منحنی C را دردو نقطهٔ M و N قطع میکند .

ثالثاً- مقدار m را بقسمی تعیین کنید که فاصلهٔ نقاط M و N برابر طول مفروض d باشد. کوچکترین مقداری را که میتوان به d داد حساب کنید.

شهریور ۱۳۲۱ سال ششم ریاضی

۲۹۳۹- معادله $(y-3x+5)(y+3x-3)=4$ داده میشود.

اولا - اگر در این معادله x را مجهول و y را پارامتر بگیریم درریشه‌های آن بحسب مقادیر مختلف پارامتر y بحث کنید.

ثانیاً - ازروی این معادله y را برحسب x حساب وتغییرات y را وقتیکه x تغییر می‌کند معین کنید ومنحنی (C) نمایش تغییرات y را نسبت بدو محور عمود بر هم $x'ox$ و $y'oy$ بکشید .

ثالثاً - منحنی (C) دارای محور تقارنی است مانند Δ موازی $y'Oy$ که یکی از منصف‌الزاویه‌های دومجانب (C) میباشد- اگر خطی مانند $y=m$ منحنی (C) را در M و N و دومجانب آن Δ_1 و Δ_2 را بترتیب در P_1 و P_2 تلاقی کند ثابت کنید خط قائم بر (C) در M (یا در N) وخطی که در P_1 بر Δ_1 عمود میشود Δ را دریك نقطه تلاقی میکنند (بعبارت دیگر این خطها روی Δ بهم بر میخورند).

رابعاً- ازروی منحنی (C) درجوابهای معادله :

$$(5-3\sin x+\lambda)(3\sin x-3+\lambda)=4$$

بر حسب مقادیر پارامتر λ بحث کنید (اگر منحنی (C) را بدست نیاورده‌اید مستقیما بحث کنید) .

اردیبهشت ماه ۱۳۲۲ سال ششم ریاضی

۲۹۴۰- تابع $y=x^3+ax^2+9x+4$ مفروض است:

اولا - مقدار a را بقسمی تعیین کنید که تابع بازای $x=-1$ ماکزیمم یا مینیمم باشد.

ثانیاً- پس از تعیین a جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع را رسم کنید .

ثالثاً- این منحنی محور $x'x$ را درنقاط A و B تلاقی میکند مطلوبست محاسبهٔ سطح محصور بین منحنی ومحور $x'x$ وقوس $\widehat{AB}$ ازمنحنی

رابعاً - از نقطه $M(x=-1 \text{ و } y=0)$ خطی مرور میدهیم که باجهت مثبت محور $x'x$ زاویه $\frac{\pi}{4}$ بسازد- مطلوبست مختصات نقاط تلاقی این خط بامنحنی.

شهریور ۱۳۲۲ سال ششم ریاضی

۲۹۴۱- m نمایش یك عدد معلوم بزرگتر ازواحد ($m>1$ می‌باشد)

اولا ـ توابع درجه‌دوم $f(x)$ را تعیین کنید بطریقی که داشته‌باشیم:

$$f(+1)=m+1 \quad \text{و} \quad f(-1)=m-1$$

منحنی‌های نمایش این توابع تشکیل یکدسته‌سهمی می‌دهند

ثانیاً ـ مکان رأسهای این‌دسته سهمی‌را تعیین کنید.

ثالثاً ـ مکان کانونهای این سهمی‌هارا تعیین کنید.

رابعاً ـ مساحت سطح محصور بین‌یکی‌از این‌سهمی‌هاومحور xها وعرضهای نقاط بطول $x=\pm m$ را حساب کنید.

خامساً ـ بازای چه‌مقدارعددی m این‌مساحت مربوط بسهمی انتخاب‌شده‌نمی‌باشد.

خرداد ۱۳۲۳ سال ششم ریاضی

۲۹۴۲- تابع $y=1-\frac{1}{x^2}$ مفروض است. اولا تغییرات این تابع‌رامعین کنیدو منحنی نمایش‌آنرا بکشید. ثانیا مماس براین‌منحنی‌را درنقطهٔ $A(1,0)$ بکشید و معادلهٔ آنرا بنویسید ونقطه‌های برخوردآنرا بامنحنی پیدا کنید.

ثالثاً ـ سطح میان‌منحنی ومحور xها ودوخط $x=1$ و $x=2$ را حساب کنید.

خرداد ۱۳۲۳ سال‌ششم ریاضی

۲۹۴۳- تابع $y=\frac{x^2-2}{x^2+2x-a}$ مفروض است.

اولا ـ بازاء چه مقادیری از a تابع دارای ماکزیمم‌ومینیمم است. درصورتی‌که تابع بازاء x' ماکزیمم وبازاء x'' مینیمم باشدثابت کنیدکه حاصلضرب $x'x''$ مساوی با مقدارثابتی است.

ثانیاً ـ اگر x' یا x'' مساوی ۲ باشد مطلوبست تعیین مقدار a ورسم منحنی نمایش تغییرات تابع.

ثالثاً ـ معادلهٔ درجه‌دومی تشکیل‌دهید که‌ریشه‌های آن‌عرضهای نقاطماکزیمم‌ومینیمم تابع‌اصلی‌باشند ورابطه مستقلی از a بین‌دوریشهٔ این‌معادله‌بدست‌آورید.

شهریور ۱۳۲۳ سال‌ششم ریاضی

۲۹۴۴- اولا ـ معادله درجه‌دومی تشکیل‌دهید که‌ریشه‌هایش درروابط زیرصدق کند:

$$2x'x''-5(x'+x'')+2=0$$

$$(x'-1)(x''-1)=\frac{1}{1-m}$$

ثانیاً ـ ریشه‌های معادله درجه‌دوم نامبرده‌را بحسب مقادیر m با اعداد ۱ − و ۱ + مقایسه کنید .

۳۹۴۵ ـ جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع $y = \frac{x^2-2x+2}{x^2-1}$ را رسم کنید واز روی این منحنی نتایج قسمت دوم را بدست آورید.

ثانیاً ـ خطی موازی ox منحنی را در دو نقطه M و M′ قطع میکند مطلوبست تعیین معادله مکان هندسی نقطه P وسط MM′

شهریور ۱۳۳۴

۳۹۴۶ ـ تابع $y = \frac{2x^2+6x+p}{2x+q}$ مفروض است: p و q را بطریقی تعیین کنید که منحنی تابع فوق دارای مجانب $x = \frac{1}{2}$ بوده ومحور عرضها را در نقطه به عرض ۱ − قطع کند

۳۹۴۷ ـ اولا منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y = \frac{2x^2+6x+1}{2x-1}$ را رسم کنید.

ثانیاً ـ مختصات نقطه H محل تلاقی دو مجانب منحنی (C) را حساب کرده معادله خط D را که از نقطه H باضریب زاویه‌ای m مرور میکند بنویسید و برحسب مقادیر مختلفه m در عدد نقاط تلاقی خط D با منحنی (C) بحث کنید.

ثالثاً ـ فرض میکنیم که خط D منحنی (C) را در دو نقطه مانند A و B تلاقی می‌نماید. ثابت کنید که به ازای جمیع مقادیر ممکنه m، نقطه H وسط پاره‌خط AB می‌باشد.

شهریور ۱۳۳۴

۳۹۴۸ ـ تابع $y = \frac{ax^2+b}{x+c}$ مفروض است. اولا a، b و c را طوری تعیین کنید که منحنی دارای مجانب $x = \frac{9}{5}$ بوده وبعلاوه خط $y = x$ منحنی را در دو نقطه بطول $x = 1$ و $x = 2$ قطع کند.

۳۹۴۹ ـ اولا ـ جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع $y = \frac{2x^2-6}{5x-9}$ را رسم کنید.

ثانیاً ـ معادله خط مماس بر منحنی را در نقطه تقاطع منحنی با محور oy بنویسید.

خردادماه ۱۳۲۶

۳۹۵ـ اولاـ تعیین کنید تغییرات تابع $y = 1 - \frac{4}{x^2}$ را و منحنی (C) نمایش آنرا رسم کنید.

ثانیاً ـ از نقطه $A(0 - 2)$ خطی (D) باضریب زاویه‌ای m رسم میکنیم. معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش x های نقاط برخورد این خط با منحنی (C) باشد. ثابت کنید که با تبدیل x به $\frac{1}{x}$ این معادله بصورت (E) درمی‌آید.

$$(E) \qquad 4x^2 - 3x + m = 0$$

درازای چه مقادیر m خط (D) را درسه نقطه قطع می‌کند؟ یادریك نقطه؟ یا بر آن مماس می‌شود؟

ثالثاً ـ اگر x را $\sin\alpha$ بنامیم معادله (E) را می‌توان بصورت یك معادله خیلی ساده مثلثاتی نوشت. در این معادله مثلثاتی برحسب m بحث کنید و بخصوص معین کنید که به m چه مقادیری باید داد تا اینکه برای α دو جواب میان 15° و 60° یا یك جواب میان 15° و 60° بدست آورید.

رابعاً ـ بازای چه عددهای صحیح x اندازه y بصورت کسر اعشاری غیرمتناوب یا کسر اعشاری متناوب ساده یا کسر اعشاری متناوب مرکب درمی‌آید؟ بخصوص معین کنید نقطه‌هایی ازمنحنی (C) را که مختصات آنها عددهای صحیح می‌باشند.

خامساً ـ تعیین کنید مساحت سطح واقع مابین منحنی (C) ومجانب موازی محور xها و دوخط $x = 2$ و $x = \lambda$ را $(\lambda > 2)$ ثابت کنید که هرگاه λ بی‌اندازه بزرگ شود، اندازه این سطح دارای حدی است و آن حد را حساب کنید.

خردادماه ۱۳۲۷

۳۹۵۱ـ معادله $(y - 2x)(y + x) = 9$ (۱) مفروض است

اولاـ اگر x را مجهول بگیریم، در وجود وعلامت ریشه‌ها برحسب پارامتر y بحث کنید و همچنین اگر y را مجهول فرض کنیم بر حسب پارامتر x در وجود و علامت ریشه‌ها بحث کنید. ثانیاـ ازروی معادله (۱) دو تابع y ازمتغیر x بدست می‌آید. تغییرات این دو تابع را معین کنید ومنحنی نمایش هریك را هم جداگانه وهم نسبت به یك دستگاه رسم کنید. مجموعه‌ای این دو منحنی نمایش (۱) است که باید با بحث (اولا) تطبیق کند. ثالثاـ هر خط موازی محور yها منحنی نمایش (۱) را در دو نقطه M_1 و M_2 قطع می‌کند. مکان هندسی وسط M_1M_2 خطی است راست (Δ) که مطلوب است معادله ورسم آن. برمنحنی (۱) دو مماس موازی Δ می‌توان

رسم کرد. آنعدومماس‌را هم تعیین کنید. رابعاً ـ اگر z زاویه‌ای محصور بین ۰° و ۳۶۰° باشد، برحسب مقادیر مختلفه m درمعادله $3\sin^2 z + 2m\sin z - m^2 + 9 = 0$ بحث کنید (هم مستقیماً وهم بکمك منحنی نمایش ۱).

خردادماه ۱۳۲۸

۲۹۵۲ـ تابع $y = \frac{x^2 - 2mx + 10}{x^2 + 1}$ مفروض است ومنحنی نمایش آن‌را (c) مینامیم

اولاً ـ درازای همه مقادیر m منحنی (c) از نقطه ثابتی می‌گذرد که مختصات آن‌را حساب خواهید کرد. ثابت کنید که m هرچه باشد، A مرکز تقارن منحنی است. ثانیاً ـ معین کنید مقادیر x را که به‌ازای آنها y ماکزیمم یا می‌نیمم شود واندازه‌های ماکزیمم ومی‌نیمم‌را نیز حساب کنید وبه‌ازای مقادیر مختلف m ، مکان هندسی نقاطی‌را که درآنها تابع ماکزیمم یا می‌نیمم است تعیین کنید. ثالثاً ـ در ازای چه مقادیری از m منحنی (c) بمحور xها برنمی‌خورد ودرازای چه مقادیری با محور xها دونقطه تلاقی M' و M'' دارد؟ این دونوع مقادیر بادوعدد m_1 و m_2 که درازای آنها منحنی مرتبا درنقاط T_1 و T_2 برمحور $x'x$ مماس است ازهم جدا می‌شوند موقعی که دونقطه تلاقی M' و M'' وجوددارد. یك رابطه بین xهای این دونقطه می‌توان یافت که درآن m نیست. ازروی این رابطه بگویید M' و M'' نسبت به T_1T_2 چه وضعی دارند و دوایر به‌قطر $M'M''$ چگونه‌اند؟ رابعاً اگر درتابع مفروض x را α بگیریم، (به‌ازای $m = 1$) y تابعی از α می‌شود. جدول ومنحنی این تابع‌را وقتی که α از $-\frac{\pi}{2}$ تا $+\frac{\pi}{2}$ تغییر می‌کند رسم کنید وسطح حادث بین این منحنی و محورطولها و دوخط $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ و $\alpha = \frac{\pi}{2}$ را حساب کنید.

خردادماه ۱۳۳۱

۲۹۵۳ـ اولاً : تابع سه کسر $\frac{2}{x}$ ـ و $\frac{1}{x-1}$ و $\frac{1}{x+1}$ که درآن x عددی است مثبت وبزرگتر ازواحد مفروض است. الف ـ تحقیق کنید که به‌ازای جمیع مقادیر x مجموع سه کسر فوق مولد چه نوع کسر اعشاری خواهد بود ب ـ مقدار x را چنان تعیین کنید که مجموع سه کسر فوق بکسر متناوب ۰/۰۸۳۳۳۰۰۰ تبدیل شود.

ثانیاً ـ تابع $y = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x}$ را درنظر می‌گیریم

ثالثاً ـ بدون استفاده ازمشتق معادله‌ای تشکیل دهیدکه ریشه‌هایش عرضهای نقاط ماکزیمم ومی‌نیمم تابع فوق باشد.

رابعاً ـ جدول‌ومنحنی نمایش‌تغییرات تابع فوق‌را هنگامی‌که x از ∞ تا $+\infty$ تغییر کند رسم‌کنید وثابت‌کنیدکه مبدأ مختصات مرکز تقارن‌منحنی است.

خامساً ـ ازمبدأ مختصات‌خط غیرمشخصی‌رسم‌میکنیم‌تامنحنی‌راقطع‌کند. درتعدادنقاط تلاقی‌آن بامنحنی بحث‌کنید ووضع‌خطرا قسمی‌مشخص‌کنیدکه طول‌های نقاط تلاقی‌محصور باشد مابین دوعدد ۱ ـ و ۱.

سادساً ـ برای‌آنکه چهارنقطه بطول‌های a،b،c،d واقع برمنحنی بریك استقامت باشند، باید چه‌رابطه‌ای مابین اعداد برقرارباشد؟

۲۹۵۴ـ جدول‌ومنحنی تابع $y=\sin x+\cos x+\sin x\cos x$ راکه $2\pi>x>0$ است‌تعیین‌کرده ورسم‌کنید وحجم حادث‌ازدوران قسمتی‌از منحنی درحول محور ox واقع مابین خطوط $y=0$ و $x=\frac{\pi}{2}$ را حساب‌کنید

شهریورماه ۱۳۳۴

۲۹۵۵ـ اولاـ تابع $y=\frac{x^2+ax+b}{x}$ مفروض است. مقدار a و b راچنان تعیین‌کنیدکه‌عرضهای نقاط ماکزیمم‌ومی‌نیمم منحنی‌نمایش‌تابع فوق برابرصفر وچهار باشد

۲۹۵۶ـ اولا: جدول‌تغییرات‌ومنحنی(C) نمایش‌تابع $y=\frac{x^2+2x+1}{x}$ را رسم‌کنید وثابت کنیدکه نقطه $C\left|\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right.$ مرکز تقارن منحنی (C) است و معادله‌های نیمسازهای مجانبهای (C) را بدست‌آورید .

ثانیاـ ازنقطه $M\left|\begin{matrix}\alpha\\\beta\end{matrix}\right.$ چندمماس می‌توان برمنحنی (C) رسم‌کرد؟ وضع نقطه M را درسطح دومحور تعیین‌کنیدکه بتوان دومماس‌برمنحنی(C) رسم‌کرد . مطلوب است تعیین مکان‌هندسی نقطه M، درصورتی‌که دومماس مرسوم بریکدیگرعمودباشندواین‌مکان‌هندسی را رسم‌کنید .

۲۹۵۷ـ الف‌ـ تابع $y=\sin x+2+\frac{1}{\sin x}$ مفروض است. جدول ومنحنی‌نمایش تغییرات آن‌راوقتی‌که x از $-\pi$ تا $+\pi$ تغییرمیکندرسم کنید. بـ ـ درتعدادجوابهای معادله

$\lambda = \sin x + 2 + \frac{1}{\sin x}$ که میان $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ می‌باشد برحسب مقادیر مختلف λ بحث کنید و نتیجه‌را ازروی‌شکل تحقیق کنید.

شهریورماه ۱۳۳۱

۲۹۵۸- تابع $y = \frac{x^2 + ax + b}{x - 3}$ (C) مفروض‌است. اولا- بفرض آنکه $M\left|\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right.$ باشد، مکان‌نقطه M را بقسمی تعیین کنید که‌منحنی‌تابع y برمحور $x'x$ مماس‌شودواین‌مکان را رسم‌کنید. ثانیا مطلوب‌است تعیین مقادیر a و b بقسمی که‌منحنی(C) برمحورxها مماس بوده ونقطه $O_1\left|\begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}\right.$ مرکز تقارن آن‌باشد. به‌ازای $a = -2$ و $b = 1$ منحنی‌نمایش‌تابع y را رسم‌کنید. ثالثا ازمبدأ مختصات خطی غیرمشخص‌رسم‌میشود. درتمدادنقاط‌تلاقی‌وعلامت طولهای‌آنها بحث کنید اگراین‌خط‌منحنی‌را دردونقطه M_1 و M_2 قطع کند، مطلوب‌است مکان‌هندسی نقطه P مرکزمتوسط نقطه O (مبدأ مختصات) نسبت‌به‌دونقطه M_1 و M_2 رابیا مکان‌هندسی نقطه $N\left|\begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}\right.$ را پیداکنید که ازآن‌بتوان دومماس عمود برهم برمنحنی‌تابع (C) رسم کرد.

خردادماه ۱۳۳۲

۲۹۵۹- اولا- تابع $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x + 1}$ (۱) مفروض‌است: الف- جدول‌تغییرات ومنحنی (C) نمایش‌آن‌را رسم‌کنید. ب- خط $y = m$ را رسم‌میکنیم. معادله‌ای تشکیل‌دهید که‌ریشه‌هایش طول‌های نقاط تقاطع خط ومنحنی(C) باشدوطول‌های نقاط تقاطع‌را بااعداد ۱ — و ۱ + مقایسه کنید. ج- جدول‌ومنحنی‌نمایش تغییرات تابع

$$y = \pm\sqrt{-3m^2 - 12m}$$

را هنگامی‌که m تغییر میکند رسم‌کنید. د - ثابت‌کنیدکه خط منصف الزاویه اول و سوم محورهای مختصات، منحنی (C) تابع (۱) را فقط در یك‌نقطه قطع‌میکند. طول آن‌نقطه‌را حساب‌کنید (جواب اسم‌مرکب است). ثانیا- اگردرتابع (۱)، x رابه $tg\alpha$ تبدیل کنیم:

$$y = \frac{tg^2\alpha - 2tg\alpha + 1}{tg^2\alpha + tg\alpha + 1}$$

الف- صورت کسرفوقرا برحسب خطوط خطوط مثلثاتی α به‌عبارت قابل‌محاسبه‌بوسیله لگاریتم تبدیل کنید.

۳۹۶۰ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{1-2\sin\alpha\cos\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}$ را هنگامی که α از صفر تا π تغییر میکند رسم کنید.

خردادماه ۱۳۳۰

۳۹۶۱ـ تابع $y=\frac{2x^2+1}{x-2}$ مفروض است.

اولا ـ جدول تغییرات تابع فوق را نوشته منحنی نمایش تغییرات آنرا رسم کنید.

ثانیاً ـ فرض کنید که منحنی نمایش تغییرات فوق را با خط $y=k$ موازی محور x قطع کرده‌ایم. در وجود نقاط تقاطع این خط و منحنی بحث کرده ماکزیمم و مینیمم تابع فوق را به این طریق تعیین کنید.

ثالثاً ـ فرض میکنیم که خط $y=k$ موازی با محور x منحنی نمایش تابع فوق را در نقاط A و B قطع کند. مطلوب است معادله مکان هندسی نقطه M وسط قطعه خط AB وقتیکه خط $y=k$ بموازات محور طولها تغییر مکان دهد.

۳۹۶۲ـ تابع $y=\frac{2x^2+m^2}{x-2m}$ مفروض است ثابت کنید که این تابع به ازای جمیع مقادیر m (باستثنای $m=0$) دارای ماکزیمم و مینیمم است. و اگر M' نقطه ماکزیمم و M'' نقطه مینیمم باشد، ثابت کنید که نقطه M وسط M'M'' همواره بر خط مستقیمی حرکت میکند.

۳۹۶۳ـ تابع $y=\sin x+\cos x$ مفروض است:

اولاـ تابع y را قابل محاسبه با لگاریتم کنید:

ثانیاـ مطلوب است اندازه قوس x در تابع فوق بطریقی که مقدار تابع مساوی $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ شود (به جدول لگاریتم احتیاج ندارد).

ثالثاً ـ مطلوب است جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع فوق وقتی که x از صفر تا π تغییر کند.

رابعاً ـ مطلوبست سطح محصور بین منحنی فوق و محور x بین دو نقطه $x=\frac{\pi}{4}$ و $x=\frac{3\pi}{4}$ (در این محاسبه هم به جدول لگاریتم احتیاج نیست).

خردادماه ۱۳۳۰

۳۹۶۴- ماکزیمم و مینیمم تابع $\frac{x^2-3x+1}{x^2+3}$ را بدون بکار بردن مشتق حساب کنید و بعد درستی نتیجه‌را ازروی مشتق تحقیق کنید.

۳۹۶۵- اولاً- تغییرات دوتابع $y=x\pm\sqrt{x^2-3x+2}$ را معین کنید و منحنی (c) نمایش تغییرات آنهارا رسم کنید. ثانیاً- ازروی منحنی (c) درریشه‌های معادلهٔ $y^2-2xy+3x-2=0$ برحسب پارامتر x بحث کنید وهمچنین ریشه‌هارا باعدد ۲+ مقایسه کنید و نتیجه‌را درجدولی درج کنید. ثالثاً- چگونه تحقیق خواهید کرد که نقطه $x=y=\frac{3}{2}$ مرکز تقارن منحنی درجه‌دوم $y^2-2xy+3x-2=0$ است؟

۳۹۶۶- درشماره‌ریشه‌های معادله $x^2+ax+2=0$ برحسب مقادیر مختلف پارامتر a بحث کنید

شهریورماه ۱۳۳۰

۳۹۶۷- اگر M_1 و M_2 نقاط تلاقی خط $y=m$ بامنحنی (c) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{ax^2-2x+b}{x^2-ax+a}$ باشند، اولاً- b راطوری تعیین کنید برای آنکه حاصلضرب طول‌های M_1 و M_2 بستگی به m نداشته باشد ($b=a^2$).

در سئوالهای زیر b را برابر a^2 اختیار کنید.

ثانیاً- ازقسمت اولا نتیجه بگیرید که اگر تابع y دارای یك ماکزیمم ویك مینیمم باشد ریشه‌های مشتق y، دوعدد قرینه‌اند وهمین خاصیت‌را ازروی محاسبه هم تحقیق کنید.

ثالثاً- (c) را در ازای $a=1$ و $a=9$ رسم کنید. رابعاً- به کمك نمودار، ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2(\lambda-9)-x(9\lambda+2)+9(\lambda-9)=0$ رادر ازای مقادیر مختلف λ با اعداد ۳و۳- مقایسه کنید. خامساً- اگر P_1 و P_2 تصاویر M_1 و M_2 روی محور xها باشند (در ازای یکی از مقادیر a)، ثابت کنید وقتی که m تغییر کند، دایره به‌قطر P_1P_2 بردایره ثابتی عمود می‌ماند.

۳۹۶۸- درجوابهای نامعادله‌زیر برحسب مقادیر مختلف m بحث کنید:

$$1-m+\sqrt{x-x^2}>0$$

خرداد ماه ۱۳۳۴

۳۹۶۹- اولاً- درمعادله $y^2-4xy+3x^2+1=0$ به‌فرض اینکه y مجهول و x پارامتر باشد، به‌ازای مقادیر مختلف x ریشه‌های معادله‌را بااعداد ۱- و ۱+ مقایسه

کنید و نتیجه‌را درجدولی یادداشت کنید.

۳۹۷۰ـ اولا جدول ومنحنی (c) نمایش تغییرات تابع $y = 2x \pm \sqrt{x^2 - 1}$ رارسم کنید و ازروی منحنی (c) به‌ازای مقادیرمختلفه x مقادیر y را باعددهای ۱ و ۱ — مقایسه کنید.

ثانیاً ـ مکان‌هندسی اوساط وترهای موازی محور yها را درمنحنی (c) تعیین کنید ونقاطی‌ازمنحنی (c) را بدست‌آورید که قائم برآن‌نقاط ، باضریب‌زاویه‌ای m باشد حدود مقادیر m را چنان تعیین کنید که مسئله جواب داشته‌باشد .

۳۹۷۱ـ مقدار عبارت $y = \frac{\sqrt{3tg^2x - 1} - 2\sin x}{1 - 2\cos^2 x}$ را بازای $x = \frac{3\pi}{4}$ حساب کنید

شهریورماه ۱۳۳۴

۳۹۷۲ـ اولا منحنی نمایش تغییرات تابع زیررا رسم کنید : $y = x + \frac{4}{x^2}$

ثانیاً ـ اگر A نقطه‌ای ازمنحنی به‌طول ۲ باشد، مطلوب است مساحت سطح محصور بین منحنی ومجانب غیرموازی‌آن وعرض‌ثابت نظیر به‌طول ۲ وعرض‌متغیر $x > 2$ همچنین تعیین کنید حد این سطح‌را هرگاه x به‌سمت بینهایت میل کند .

ثالثاً ـ مماس برمنحنی‌در نقطه A منحنی‌رادر نقطه‌دیگری‌مانند B قطع‌می‌نماید. مطلوب است محاسبه مختصات نقطه B ومعادله مماس برمنحنی دراین نقطه.

۳۹۷۳ ـ منحنی نمایش تغییرات تابع‌زیررا رسم کنید:

$$y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

خردادماه ۱۳۳۹

۳۹۷۴ـ میخواهیم ازنقطه $M\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$ خطی‌برمنحنی $y = \frac{1 - x^2}{x^2}$ مماس کنیم. اولاـ معادله‌ای‌تشکیل‌دهید که ریشه‌هایش‌طول‌های‌نقاط تماس‌باشد. ثانیاً مکان‌نقطهٔ M را چنان‌تعیین کنید که معادله : $(b+1)x^3 - 3x + 2a = 0$

یك‌ریشه مضاعف‌داشته‌باشد. این مکان‌را رسم کنید. درآن‌ناحیه ازسطح دومحورمختصات که معادله دارای یك‌جواب‌می‌باشد هاشور بزنید.

۳۹۷۵ ـ اولاـ جدول ومنحنی نمایش تغییرات‌تابع $y = x \pm 2\sqrt{x^2 + 3}$ رارسم کنید. ثانیاً ـ مطلوبست تعیین معادله مکان‌هندسی‌وسط وترهایی‌ـ‌دراین‌منحنی که‌همه‌باضریب زاویه‌ای ۲ باشند

۳۹۷۶ـ اولاـ جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع $y = \cos 2x + 2\sin x$ رارسم کنید. ثانیاـ تابع اولیه $(\cos 2x + 2\sin x)^2$ را حساب کنید. ثالثاـ هرگاه سطح‌محصور

بین قوسی از این منحنی ودومحور مختصات وعرض نقطه‌ای از منحنی به طول $\frac{\pi}{2}$ درحول محور xها دوران کند، حجم حاصلشرا حساب کنید.

خرداد ماه ۱۳۳۵

۳۹۷۷ـ اولاً ـ درتابع $y = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x-1}$، مطلوبست تعیین مقادیر a، b و c بطریقی که تابع مزبور به‌ازای $x = 2$ دارای می‌نیممی برابرصفر بوده ومماس برمنحنی آن‌در نقطه به‌طول $\frac{1}{2}$ باخط $y = 12x$ موازی شود.

۳۹۷۸ـ مطلوبست رسم جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع: $y = \frac{(x-2)^2}{x(x-1)}$

وبحث‌درعدد نقاط تقاطع $y = m$ با این منحنی. درحالتی که خط مزبورمنحنی‌را دردونقطه M' و M'' قطع کند. مطلوب است تعیین‌رابطه‌ای بین‌طول‌های نقاط مزبور که ازm مستقل باشد ثالثاً ـ اگرنقاط H' و H'' بترتیب تصاویرنقاط M' و M'' روی محورطول‌ها باشند، مطلوب است تعیین نقطه‌ثابتی‌مانند P روی محور $x'x$ بطوری‌که $PH' \times PH''$ مساوی‌مقدار ثابتی شود. درصورتی که‌نقاط H' و H'' منعکس یکدیگر باشند، مرکزوقوت انعکاس‌راهم معین کنید. ضمناً ثابت کنید که :

الف ـ نقاط H' و H'' همیشه نسبت به دو نقطه ثابت و مشخصی مزدوج توافقی یکدیگرند .

ب ـ جمیع دوایری که به‌قطر $H'H''$ رسم‌شوند، دارای محور اصلی‌ثابتی‌بوده وهمیشه بردایرهٔ ثابتی که شعاع ومرکز ومعادله‌آن‌را تعیین‌خواهیدکرد عمودند.

مسابقه ۱۳۳۵

۳۹۷۹ـ مطلوب است رسم جدول ومنحنی (c) نمایش تغییرات تابع:

$$y = \frac{x^2+2}{x^2}$$

ثانیاً ـ خطی موازی محورxها وبه‌عرض a منحنی (c) را قطع نموده معادله‌ای تشکیل دهید که‌ریشه‌هایش‌طول‌های نقاط تقاطع باشد، دروجود این‌نقاط به‌ازای مقادیرمختلفهٔ a بحث کنید و a را چنان تعیین کنید که‌یکی ازریشه‌های این معادله ریشه مضاعف باشد. دراین‌حال ریشه‌های معادله را حساب کنید. ازروی شکل نیز دروجود این نقاط به‌ازای‌مقادیرa بحث کنید ودرستی بحث‌جبری‌راتحقیق کنید.

ثالثاً- مطلوب است محاسبه سطح محصور بین قوسی ازمنحنی(C) و خطوط $y=x$ و $x=1$ و $x=3$.

رابعاً- ازنقطه M بطول ۲واقع برمنحنی (C) خطی باضریب‌زاویه‌ای m رسم‌شده است. این‌خط بهازای‌مقادیر معینی از m منحنی(C)را دردونقطه دیگرقطع می‌کند معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل‌دهیدکه ریشه‌هایش‌طول‌های این نقاط باشد. هرگاه معادله مطلوب‌چنین باشد:

$$(1-m)x^2-x-2=0$$

بهازای چه مقادیر m نقطه M بین دونقطه تقاطع دیگر یا درخارج‌آن دو نقطه واقع میشود .

شهریورماه ۳۵

۳۹۸۰- تابع $y=\frac{9(1-x)}{x^2}$ مفروض است.اولا- بدون‌استفاده از مشتق‌مختصات نقطه ماکزیمم یا می‌نیمم تابع را حساب‌کنید. ثانیاً- جدول‌ومنحنی(C) نمایش تغییرات تابع‌را رسم‌کنید و قوسهای محدب‌و مقعروهمچنین مختصات نقطه عطف منحنی(C) رانتعیین کنید. ثالثاً- از مبدأ مختصات خطی برمنحنی (C) مماس‌کنید طول‌نقطه تماس وضریب زاویه‌ای خط مماس‌را حساب‌کنید.

رابعاً- مطلوب استمحاسبه‌سطح‌محصور بین‌منحنی(C)ومحور xها ازنقطه‌ای بطول ۱ تا نقطه‌ای بطول۳.

۳۹۸۱- اولا- بهازای مقادیر مختلفهٔ m ریشه‌های معادله :

$$(2m-1)x^2-2x+m=0$$

را با دوعدد ۱و۱- مقایسه‌کرده نتیجه‌را درجدولی نمایش‌دهید.

ثانیاً- بهازای $x=\sin\alpha$ و $m=y$ معادله فوق چنین میشود:

$$y=\frac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha}{2\sin^2\alpha+1}$$

جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع y را هرگاه α از صفر تا 2π تغییر کند رسم‌کنید .

خردادماه ۳۶

۳۹۸۲- معادله $y^2+xy-1=0$ مفروض‌است.

اولا- مطلوب است رسم جدول و منحنی (C) نمایش تغییرات تابع y از روی معادله مفروض.

ثانیاً- هرگاه x پارامترو y ریشه‌معادله فوق‌باشد، ریشه‌های‌معادله مفروض‌را بهازای

مقادیر پارامتر x بادوعدد ۱+و۱− مقایسه کنید ودرجدولی یادداشت کنید ونیز ازروی شکل منحنی (C) درستی مقایسه‌را تحقیق کنید.

ثالثاً ـ مطلوب است تعیین حدودضریب زاویه‌ای خطوطی که از مبدأ مختصات می‌گذرند ومنحنی (C) را قطع می‌کنند ونیز می‌توانید این‌حدودرا ازروی‌شکل‌منحنی (C) بدست‌آورید. درحالتی‌که یکی از این‌خطوط قائم برمنحنی(C) باشد. حساب کنیدمختصات موقع این‌قائم (محل‌برخوردآن بامنحنی)را.

۲۹۸۳ـ مطلوب است رسم‌جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع :

$$y = \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x}$$

هرگاه x از صفر تا 2π تغییر کند.

شهریورماه ۱۳۳۶

۲۹۸۴ـ اولاً ـ مطلوبست رسم جدول ومنحنی (C) نمایش تغییرات تابع:

$$y = \frac{3x}{x^2 - 2}$$

ثانیاً ـ ثابت کنید که خط $y = mx$ فقط در دو نقطه منحنی (C) را قطع می‌کند. طول‌های این دو نقطه‌را تعیین کنید. به‌ازای چه مقادیر m طولهای‌این‌دو نقطه بین ۱و۲− واقع‌است. بدون استفاده ازمشتق به‌ازای چه‌مقدار m این‌خط برمنحنی مماس‌می‌شود؟

ثالثاً ـ ثابت کنید که منحنی (C) فقط دارای یك نقطه عطف‌است‌مختصات این‌نقطه‌را حساب کنید. وتحقیق‌درچه‌فواصلی‌ازمتغیر xمنحنی(C) نسبت‌به‌جهت‌مثبت yهامحدب‌یامقعراست؟

۲۹۸۵ـ اولاً ـ مطلوب است رسم‌جدول ومنحنی (C′) نمایش تغییرات‌تابع:

$$y^2 = x^2 - x + 1$$

ثانیاً ـ از مبدأ مختصات‌خطی‌چنان مرورنموده که بر منحنی (C′) قائم‌است.مختصات نقطه برخوردآن‌را بامنحنی حساب‌کنید.

۲۹۸۶ـ مطلوب است تعیین تابع‌اولیه‌عبارت $y = \sin^2 x \cdot \sin 3x$ بقسمی‌که‌بازای $x = \frac{\pi}{3}$ صفر شود.

خردادماه ۱۳۳۷

۲۹۸۷ـ اولاً ـ بفرض اینکه $M \begin{cases} x = 1 - \sin\varphi\cos\varphi \\ y = \sin\varphi - \cos\varphi \end{cases}$ باشد ، مطلوب است معادله مکان‌هندسی‌نقطه M هرگاه φ مقادیر ممکن‌را اختیارکند .

تحقیق کنید که این مکان درچه فاصله‌ای ازمتغیر x واقع است.

۳۹۸۸ـ اولاً ـ مطلوب است رسم جدول ومنحنی (C) نمایش تغییرات تابع:
$y^2-2x+1=0$ ثانیاً براین منحنی قائمی باضریب زاویه‌ای m رسم شده است . مختصات موقع قائم را برحسب m حساب کنید.

ثالثاً ـ می‌خواهیم از نقطه $A\left|\begin{matrix}0\\a\end{matrix}\right.$ قائم D را برمنحنی (C) رسم کنیم . مطلوب است معادله‌ای برحسب a و m که درآن m ضریب زاویه‌ای قائم D باشد . ثابت کنید که ازهر نقطه محور yها فقط یك قائم برمنحنی (C) می ـ انرسم کرد. درحالت مخصوص نقطه A را چنان تعیین کنید که ضریب زاویه‌ای قائم برابر ۱ ـ باشد.

رابعاً ـ ازنقطه $A(0,2)$ خطی باضریب زاویه ۱ ـ رسم کنید تا منحنی (c) را قطع کند. حساب کنید مساحت سطح محصور بین قوسی ازمنحنی (c) وخط مرسوم ازA ومحور xها آن قسمت که دربالای محور xx' واقع است .

۳۹۸۹ـ اولا مطلوبست رسم جدول ومنحنی (c') نمایش تغییرات تابع :

$$y=\frac{(2x+1)^2}{3(x^2-x)}$$

ثانیاً ـ بفرض $y=m$ مطلوبست مقایسهٔ اعداد $\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2}$ با ریشه‌های معادله $3(m-1)x^2-3(m+1)x-1=0$ فقط ازروی رسم منحنی نمایش تغییرات m بر حسب متغیر x .

ششم ریاضی تهران شهریور ۱۳۳۷

۳۹۹۰ـ ۱ـ اولا درتابع $y=x^3+mx^2+1$ مقدار m را طوری تعیین کنید تا منحنی تابع برخط $y=5$ مماس باشد. مختصات نقطه تماس را پیدا کنید.

ثانیاً ـ منحنی (c) تابع $y=x^3+3x^2+1$ و خط $y=5$ را در یك دستگاه محورهای مختصات رسم نموده وسطح محصور بین آنهارا حساب کنید .

ثالثاً ـ توابع $y=x^3+mx^2+1$ دارای یك ماکزیمم ویك مینیمم میباشند که مختصات یکی ازآنها بستگی به m دارد، مکان هندسی این نقطه را وقتی m تغییر میکند تعیین نموده وآنرا رسم کنید.

رابعاً ـ تحقیق کنید که از مبداء مختصات چند مماس برمنحنی (c) میتوان رسم کرد. مختصات نقاط تماس و معادلات خطوط مماس را پیدا کنید ، نتیجه عملیات را با شکل مقایسه نمائید.

خامساً ـ از نقطه A بطول ۱ واقع بر منحنی خطی با ضریب زاویه a رسم می کنیم . این خط بازاء بعضی مقادیر a که تعیین خواهید کرد در دو نقطه دیگر منحنی را قطع خواهد کرد، معادله‌ای تشکیل دهید که ریشه‌هایش طول‌های این نقاط باشند و از روی این معادله تحقیق کنید که دو نقطه تقاطع چه وقت در یکطرف A و چه موقع در طرفین آن قرار خواهند گرفت.

۲ـ منحنی نمایش تغییرات تابع زیر را رسم کنید :

$$y=x+\sqrt{x+1}$$

ششم ریاضی متفرقه خرداد ۱۳۳۷

۲۹۹۱ ـ اولا ـ در تابع $y=ax^3+bx^2+cx+d$ ضرایب را طوری تعیین کنید تا $x=1$ ریشه مضاعف منحنی روی محور yها و بعرض ۲ باشد.

ثانیاً ـ منحنی (c) نمایش تغییرات تابع: $y=(x-1)^2(x+2)$ و خط (D) بمعادله $y=x+2$ را در یکدستگاه محورهای مختصات رسم نموده و سطح محصور بین منحنی و خط، آن قسمت را که در ناحیه اول قرار دارد حساب کنید .

ثالثاً ـ در وجود و علامت ریشه‌های معادله : $x^3-3x+2-m=0$ بحسب مقادیر m بحث کنید و نتیجه بحث را از روی منحنی (c) نیز تحقیق نمائید.

رابعاً ـ ثابت کنید که از نقطه $A\left|\begin{matrix}\alpha\\0\end{matrix}\right.$ بازاء بعضی مقادیر α که تعیین خواهید کرد سه مماس بر منحنی (c) میتوان رسم کرد که یکی از آنها بستگی بموضع نقطه A ندارد معادله‌ای تشکیل دهید که ریشه‌هایش طول‌های نقاط تماس دو مماس دیگر باشد و سپس موضع نقطه A را آنطور تعیین کنید که دو مماس اخیر برهم عمود باشند.

۲۹۹۲ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\pm\sqrt{x^2-2x}$ را رسم کنید و ثابت کنید که دو قائم با ضریب زاویه m بر منحنی میتوان رسم کرد اگر A و B موقع‌های دو قائم باشند ثابت کنید که نقطه M وسط خط AB همواره بر خط ثابتی حرکت میکند معادله این خط را پیدا کنید .

ششم ریاضی تهران خرداد ۱۳۳۸

۲۹۹۳ـ اولا ـ در وجود ریشه‌های معادله :

$$2x^2+3(m-1)x+m-1=0$$

بحسب مقادیر m بحث کنید و m را آنطور تعیین کنید که نقطه ماکزیمم منحنی سه جمله‌ای

طرف اول روی محور طول‌ها قرار گیرد.

۳۹۹۴ـ منحنی (c) نمایش تغییرات تابع $y=(x-1)(2x+1)^2$ را رسم کنید و جهت تحدب و تقعر آنرا نسبت به y های مثبت تعیین کنید.

ثالثاً ـ بر نقطه عطف منحنی خطی با ضریب زاویه K رسم کنید و در وجود نقاط تلاقی این خط با منحنی (c) بحث نمائید و بازاء $K=12$ مختصات نقاط تقاطع را بدست آورید.

رابعاً ـ خط $y=12x-1$ را در صفحه محورهای منحنی (c) رسم کنید و سطح محصور بین منحنی و خط مزبور آن قسمت را که بالای محور طول‌ها قرار دارد حساب کنید.

خامساً ـ نقاطی از منحنی (c) را پیدا کنید که قائمشان با جهت مثبت محور طول‌ها زاویه $\frac{3\pi}{4}$ تشکیل دهد.

ششم ریاضی تهران شهریور ۱۳۳۸

۳۹۹۵ ـ اولاً ـ در تابع $y=\frac{x(x-m)}{(x+m)^2}$ مقدار m را طوری تعیین کنید تا منحنی تابع در مبدأ مختصات بر نیمساز ناحیه دوم مماس گردد.

۳۹۹۶ ـ منحنی (c) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x(x-1)}{(x+1)^2}$ را رسم نموده و تحقیق کنید که نقطه $A\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ نقطه عطف منحنی است.

ثالثاً ـ از روی منحنی (c) ریشه‌های معادله:

$$(m-1)x^2+(2m+1)x+m=0$$

را با اعداد $+1$ و -1 مقایسه نموده و نتیجه را در جدولی بنویسید.

رابعاً ـ از هر نقطه $M\left|\begin{matrix}\alpha\\\beta\end{matrix}\right.$ عموماً سه مماس میتوان بر منحنی (c) رسم کرد. معادله‌ای تشکیل دهید که ریشه‌هایش طول‌های نقاط تماس باشند، اگر $\beta=-1$ باشد معادله مطلوب صورت:

$$2x^3+3(1+\alpha)x+1-\alpha=0$$

درمی‌آید، ثابت کنید که این معادله بازاء $\alpha=-3$ دارای ریشه مضاعف است مقدار ریشه مضاعف و ریشه دیگر را بدست آورده معادلات مماسها را تعیین و آنها را رسم کنید.

۳۹۹۷ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x-\sqrt{x}$ را رسم کنید و سطح محصور بین

منحنی ومجانب مایل ودوخط $x=1$ و $x=4$ را حساب کنید.

ششم ریاضی متفرقه خرداد ۱۳۳۸

۳۹۹۸ـ اولاـ دروجود ریشه‌های معادله :

$$(1)\quad x^2-2(2m+1)x+2m+1=0$$

ثانیاً برحسب مقادیر m بحث کنید وضمناً ثابت کنید که رابطه:

$$(2)\qquad x'+x''=2x'x''$$

که بستگی به m ندارد بین ریشه‌ها موجود است .

ثالثاـ منحنی (c) نمایش تغییرات تابع:

$$y=\frac{(x-1)^2}{2(2x-1)}$$

را رسم کنید وثابت کنید که محل تقاطع مجانبها مرکز تقارن منحنی است.

ثالثاـ خط $y=m$ عموماً منحنی (c) را دردونقطه M وN قطع میکند، اگر M′ و N′ تصاویر نقاط M و N روی محورطولها باشند بکمك رابطه (۲) تحقیق کنید که دونقطه ثابت که تعیین خواهید کرد برمحورطول یافت میشود که پاره خطهای M′N′ را همیشه بتوافق تقسیم میکند.

رابعاـ خط $y=Kx$ منحنی (c) را باراء بعضی مقادیر K در دونقطه قطع میکند مقدار K را آنطور تعیین کنید که نقاط تقاطع درطرفین محور yها قرار گیرند.

خامساـ ریشه‌های معادله (۱) بحسب m برابرند با:

$$x=2m+1\pm\sqrt{2m(2m+1)}$$

منحنی تابع $y=2x+1\pm\sqrt{2x(2x+1)}$ را رسم کنید.

ششم ریاضی متفرقه خرداد ۱۳۳۸

۳۹۹۹ـ مسئله اول ـ تابع $y=\frac{ax+1}{x^2-2}$ مفروض است:

۱ ـ ثابت کنید منحنی‌های تابع فوق بازاء جمیع مقادیر a از نقطه ثابت A مرور میکنند. مختصات این نقطه را پیدا کنید .

۲ـ اگر c_1 و c_2 دومنحنی نظیر دومقدار متمایز a_1 و a_2 باشند ثابت کنید:

الف ـ دومنحنی مزبور نقطهٔ مشترك دیگری غیر از A ندارند ونیز دومنحنی نمیتوانند بر هم مماس باشند.

ب ـ شرط آنکه دو منحنی مزبور در نقطهٔ A نسبت بهم قائم باشند اینست که : $a_1a_2=-4$ باشد .

۳ـ درحالتیکه تابع فوق دارای ماکزیمم و می‌نیمم است تحقیق کنید که مجموع این دومقدار بستگی به a ندارد ونیز تحقیق کنید کدام یك ازاین دومقدار بزرگتر ازدیگری است

۴ـ مقدار a را آنطور پیدا کنید تامنحنی نظیر آن محورطولها را درنقطه طول ۰/۲ قطع کند

۵ـ منحنی (c) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{-5x+1}{x^2-2}$ را رسم کنید.

۶ـ درمعادله: $mx^2+5x-(2m+1)=0$

حدود m را آنطور تعیین کنید تافقط یك ریشه آن بین اعداد ۱ − و ۳ + قرار گیرد وبعد ازروی منحنی (c) ریشه‌های معادله را بااعداد ۳ + و ۱ − مقایسه کنید.

۷ـ خط $y=mx$ منحنی (c) را عموما درسه نقطه قطع میکند مقدار m را آنطور بیابید تاخط مزبور درنقطه بطول $-\frac{1}{2}$ برمنحنی مماس گردد. مختصات نقطه تلاقی دیگر این خط را بامنحنی پیدا کنید.

۳۰۰۰ ـ توابع اولیه تابع

$$y=3^2+\frac{1}{x}\cdot\sqrt[3]{2x+3}$$

را بدست آورید و از میان آنها آنرا انتخاب کنید که منحنی نمایش تغییراتش از نقطه: $M\left|\begin{matrix}-1\\1\\3\end{matrix}\right.$ بگذرد.

ششم ریاضی تهران خرداد ۱۳۳۹

۳۰۰۱ـ اولا ـ معادله:

$(m+1)x^2-m^2(m-1)x+(m-1)^3=0$ (۱) راحل کنید.

خواهید دید که هر دو ریشه معادله بحسب m مقادیر منطقی هستند و یك ریشه همیشه علامت ثابتی دارد مقادیر m را آنطور تعیین کنید که ریشه دیگر منفی باشد.

ثانیا ـ اگر S مجموع دو ریشه معادله (۱) باشد داریم:

$\pm\sqrt{s}=\pm m\sqrt{\frac{m-1}{m+1}}$ منحنی نمایش تغییرات تابع:

$y=\pm x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ را رسم کنید.

ثالثاً. اگر P حاصلضرب دو ریشه معادله (۱) باشد داریم :

$$\frac{S}{P} = \left(\frac{m}{m-1}\right)$$

الف- منحنی(c) نمایش تغییرات تابع $y = \left(\frac{x}{x-1}\right)^2$ را رسم کنید .

ب- نقاطی ازمنحنی‌را پیدا کنید که مماس برآنها از مبدأ مختصات بگذرد- معادلات خطوط مماس وضریب زاویه قائم نقاط تماس‌را تعیین کنید .

ج- بدون هیچگونه محاسبهٔ جدید وفقط ازروی منحنی (c) ریشه‌های معادله:

$(K-1)x^2 - 2Kx + K = 0$ را با اعداد ۱+ و ۱- مقایسه نموده ونتیجه‌را درجدولی نشان دهید.

رابعاً- تحقیق کنید که اگر یک ریشه معادله (۱) برابر ۳ فرض شود مقادیر نظیر m ریشه‌های معادله $m^2 - 6m - 4 = 0$ هستند.

الف- معادله فوق‌را خواه مستقیما وخواه بکمک قسمت اول حل کنید.

ب- منحنی(c') نمایش تغییرات تابع $y = x^2 - 6x - 4$ را رسم نموده وجهت تحدب وتمقر آن‌را نسبت به جهت مثبت محور عرضها تعیین کنید.

خامساً- برنقطه عطف منحنی $A\Big|_{-4}^{0}$ خطی باضریب زاویه ۳ مرور دهید وسطح محصور بین این خط ومنحنی(c') آن قسمت‌را که سمت راست محور عرضها واقع است حساب کنید.

ششم ریاضی متفرقه خرداد ۱۳۳۹

۳۰۰۲ - اولا - منحنی نمایش تغییرات تابع $y = \frac{x-1}{x^2+1}$ را رسم کنید

ثانیاً- معادله $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$ (۱) را حل کنید وتحقیق کنید که ریشه‌های معادله (۱) طولهای نقاط عطف منحنی تابع فوق هستند.

ثالثاً- اگر ریشه‌های معادله (۱) را x_1 و x_2 و x_3 فرض نموده ودر تابع فوق قرار دهید سه مقدار y_1 و y_2 و y_3 بدست خواهند آمد ، ثابت کنید که سه نقطه : $A\Big|_{y_1}^{x_1}$ و $B\Big|_{y_2}^{x_2}$ و $C\Big|_{y_3}^{x_3}$ روی یک خط مستقیم قرار دارند .

۳۰۰۳ - درمعادله $(m-1)x^2 - 2mx + 4m - 3 = 0$ مقادیر m را آنطور تعیین کنید تا یک ریشه معادله بزرگتر از ۲- وکوچکتر از واحد باشد.

۳۰۰۴ـ توابع اولیه تابع زیر را حساب کنید:

$$y = \frac{2x^3+1}{x^2} + \sqrt[3]{x^2}$$

ششم ریاضی تهران شهریور ۱۳۳۹

۳۰۰۵ـ مسئله اول ـ تابع $y = \frac{x^2-x}{x^2-x-2}$ مفروض است:

۱ـ بدون استفاده از مشتق تحقیق کنید که تابع فوق فقط یک ماکزیمم یا یک مینیمم دارد و این مقدار را حساب کنید. (۲ نمره)

۲ـ منحنی (c) نمایش تغییرات تابع فوق را رسم کنید. (۵ نمره)

۳ـ ثابت کنید که دو نقطه بر منحنی میتوان یافت که مماس بر آنها محور عرضها را در نقطه‌ای بعرض یک قطع کند، طولهای این دو نقطه را پیدا کنید. (۳ نمره)

۴ـ از روی منحنی (c) ریشه‌های معادله زیر را با اعداد ۱+ و ۲− بدون هیچگونه محاسبه مقایسه کنید و نتیجه را در جدولی بنویسید (۲ نمره)

$$(m-1)x^2-(m-1)x-2m=0$$

۳۰۰۶ـ اولا ـ منحنی نمایش تغییرات $y=\pm x\sqrt{x-1}$ را رسم کنید (۴ نمره)

ثانیا ـ معادله قائم بر منحنی $y=x\sqrt{x-1}$ را در نقطه بطول ۴ بنویسید. و این قائم را رسم کنید (۲ نمره)

ثالثا ـ سطح محصور بین منحنی و محور طولها و قائم مزبور، آن قسمت را که در ربع اول قرار دارد حساب کنید. (۲ نمره)

ششم ریاضی تهران خرداد ۱۳۴۰

۳۰۰۷ـ اولا ـ در تابع $y=ax+3+\frac{2}{x-b}$ مقادیر a و b را آنطور تعیین کنید تا ماکزیمم تابع برابر یک و نقطه ماکزیمم منحنی روی محور عرضها باشد (۱ نمره)

۳۰۰۸ـ منحنی (c) نمایش تغییرات تابع: $y=2x+3+\frac{2}{x-1}$ را رسم کنید (۴ نمره) و ثابت کنید که این منحنی مرکز تقارن ندارد. مختصات این نقطه را پیدا کنید. (۱/۵ نمره)

ثالثا ـ در وجود و علامت طولهای نقاط تلاقی منحنی (c) با منحنی تابع $y=-2x^2+m$ بحسب مقادیر m بحث کنید و نتیجه را در جدولی نقل نمائید. (۲/۵ نمره)

رابعا ـ خط متحرک (D) حول مبدأ مختصات میچرخد ثابت کنید که:

الف ـ خط (D) در جمیع اوضاع خود، منحنی (c) را دو نقطه قطع میکند. (۱ نمره)

ب- بازاء جمیع مقادیر مثبت K فقط یکریشهٔ معادلهٔ زیر بین اعداد ۱+ و ۱- قرار دارد: $(K-2)x^2-(K+1)x+1=0$ (۱ نمره)

خامساً- منحنی نمایش تغییرات تابع: $y=5\pm\sqrt{-x^2+2x+15}$ را درصفحه محورهای منحنی (c) رسم کنید (۴ نمره) وتحقیق کنید که این منحنی بردو نقطه خاص ازمنحنی (c) مرور میکند (۱ نمره) وبدون استفاده ازمشتق ثابت کنید که دومنحنی درنقاط مزبور نمیتوانند برهم مماس باشند. (۱ نمره)

۳۰۰۹- توابع اولیه تابع $y=\sqrt{4x^2-4x+1}$ را بدست آورید (۱/۵ نمره) وبین آنها آنرا پیدا کنید که خط قائم در نقطه بطول صفر منحنی نظیر آن، نیمساز ناحیه اول را در دو نقطه بطول یك دهم قطع کند (۱/۵ نمره)

ششم ریاضی متفرقه خردادماه ۱۳۴۰

۳۰۱۰- مسئله اول- تابع $y=x^3+3mx+m(m-1)$ مفروض است:

۱- پارامتر m را آن طور تعیین کنید تا تابع و مشتق دارای یك ریشه مشترك باشند (۲ نمره)

۲- منحنی نمایش تغییرات تابع $y=(x-1)^2(x+2)$ را رسم کنید (۳/۵ نمره) و معادله مماس و قائم بر منحنی را در نقطه عطف آن بنویسید و آنها را رسم کنید. (۲ نمره)

۳- اگر I نقطه عطف منحنی و A محل تقاطع منحنی با محور طول باشد معادله خط AI را بنویسید (۱ نمره) وآنرا رسم کنید (۰/۵ نمره) وبعد سطح محصور بین این خط ومنحنی آن قسمت را که در ربع اول واقعست بدست آورید. (۲ نمره)

۳۰۱۱- حد هریك از عبارات زیر را بازاء $x=+\infty$ حساب کنید (۳ نمره).

$$(\sqrt{x^2-1}+x)-2x \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x} \quad \text{و} \quad \sqrt{x^2-1}+x$$

۳۰۱۲- حد کسر $\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}$ را در ازاء $x=\pm\infty$ بدست آورید (۱ نمره)

۳۰۱۳- منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\sqrt{x^2-1}+x$ را رسم کنید. (۵ نمره)

ششم ریاضی شهریور ۴۲

۳۰۱۴- مساله اول- در تعداد ریشه‌های معادله: $x^3 - 3mx^2 - 3x + m = 0$ بازاء مقادیر مختلف m بحث کنید (۳ نمره)

۲- تابع $y = \frac{x^2 - 3x}{3x^2 - 1}$ مفروض است.

الف- بدون استفاده از مشتق تحقیق کنید که منحنی تابع فوق ماکزیمم یا مینیمم ندارد (۱ نمره)

ب- منحنی نمایش تغییرات $y = \frac{x^2 - 3x}{3x^2 - 1}$ را رسم کنید (۴ نمره) تقعر و تحدب منحنی آن را نسبت بجهت مثبت محور yها پیدا کنید و مختصات نقطه عطف آن را حساب کنید (۲ نمره)

ج- از روی شکل منحنی بحث (۱) را تحقیق کنید (۱ نمره)

۳۰۱۵-

۱- علامت عبارت $2x\sqrt{x} - 1$ را بازاء مقادیر مختلف x پیدا کنید و در جدولی بنویسید. (۲ نمره)

۲- تابع $y = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$ مفروض است.

الف- منحنی نمایش تغییرات آنرا رسم کنید (۳ نمره)

ب- نقطه‌ای از منحنی فوق را پیدا کنید که خط مماس بر آن با خط مجانب مایل آن زاویه ۴۵ درجه یا ۱۳۵ درجه بسازد و در این صورت معادله خط مماس را بنویسید (۲ نمره)

ج- سطح محصور بین منحنی فوق و مجانب مایل آن و دو خط $x = 1$ و $x = 2$ را حساب کنید. (۲ نمره)

ششم ریاضی متفرقه آبان ۴۱

۳۰۱۶- تابع $y = \frac{(m-1)x^2 + 2mx - 1}{x^2 - (m-1)x + m^2 - 1}$ مفروض است.

۱- پارامتر m را آنطور تعیین کنید تا محور عرضها یکی از مجانبهای منحنی باشد.

۲- منحنی نمایش و تغییرات تابع $y = \frac{2x - 1}{x^2}$ را رسم کنید.

۳- در نقطه A بطول a واقع بر منحنی مماسی رسم کنید اگر M محل برخورد این

مماس بامحور عرضها باشد ثابت کنید که از این نقطه عموماً میتوان یك مماس دیگر MB بر منحنی رسم کرد. مختصات نقطه B را برحسب a پیدا کنید. و نشان دهید که بین طولهای دو نقطه A و B رابطه‌ای میتوان یافت که بستگی به a نداشته باشد.

۴ـ بازاء $a = 1$ مختصات دو نقطه تماس A و B را حساب کنید و بخصوص مماسها را رسم نمائید.

۵ـ ثابت کنید که روی منحنی فوق سه نقطه وجود دارند که طول و عرض هریك از آنها با هم مساویند معادله‌ای تشکیل دهید که ریشه‌هایش $x_1 < x_2 < x_3$ طولهای این نقاط باشد. و پس از محاسبه ریشه‌ها و یا قبل از آن نشان دهید که بین آنها رابطه $x_1x_2 + x_3 = 0$ وجود دارد.

۳۰۱۷ ـ ثابت کنید که معادله $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$ همواره دارای ریشه‌های حقیقی است وضمناً m را آنطور تعیین کنید تا فقط یك ریشه معادله بین ۱ و ۲ ـ باشد.

۳۰۱۸ ـ توابع اولیه تابع $y = \frac{2}{x^3} + 5\sqrt{(3x-5)^2} - \frac{3}{8}$

را بدست آورید و بین آنها آنرا انتخاب کنید که منحنی نمایش تغییراتش محور طول را در نقطه بطول ۲ قطع کند.

متفرقه اردیبهشت ۴۲

۳۰۱۹ـ تابع $y = \frac{x^2 - 2mx + 1}{x - 2m}$ مفروض است:

۱ـ پارامتر m را آنطور تعیین کنید تا فقط یکی از دو مقدار ماکزیمم و می‌نیمم تابع صفر شود و مقدار دیگری را حساب کنید. خواهید دید برای m دو مقدار بدست می‌آید تحقیق کنید به ازاء هر یك از این دو مقدار کدام یك از دو مقدار ماکزیمم و می‌نیمم صفر میشود.

۲ـ تابع $y = 2x^3 - 7x + 2$ مفروض است:

الف ـ بدون حل معادله $2x^3 - 7x + 2 = 0$ (۱)

ثابت کنید که این معادله سه ریشه دارد و تحقیق کنید که یك ریشه آن ۲ ـ میباشد علامت دو ریشه دیگر را بدست آورید.

ب ـ بدون رسم منحنی تابع فوق سطح محصور بین منحنی و محور طولها و دو خط $x = 0$ و $x = -2$ را حساب کنید.

۳ـ تحقیق کنید که طولهای نقاط تلاقی دو منحنی (c_1) و (c_2) نمایش تغییرات دو

تابع $y_1 = \frac{(x-1)^2}{x-2}$ و $y_2 = \frac{1-2x}{2x}$ ریشه‌های معادله(۱) هستند. وباتوجه بعلامت ریشه‌های این‌معادله دومنحنی‌را دریکدستگاه محورهای مختصات رسم‌کنید وعرضهای‌نظیر درنقطه تلاقی غیر ازنقطه بطول ۲ — را K_1وK_2 اختیار نمائید.

۴ـ خط $y = K$ منحنی (C_1) را در دونقطه M وN بطولهای x' و x'' عموماً قطع خواهدکرد معادله‌ای تشکیل‌دهیدکه‌ریشه‌هایش طولهای مزبور باشند ونیز همین خط منحنی (C_2) را در نقطه P بطول x_1 که‌پیداخواهیدکرد تلاقی‌می‌نماید. وضع این‌سه‌نقطه را نسبت بهم وقتی‌که K تغییر می‌کند از روی شکل بررسی کنید و نتیجه را در جدولی نقل نمائید.

۵ـ بازاء دو مقدار K که تعیین خواهیدنمود نقطه P وسط پاره‌خط MN قراردارد اگر P_1وP_2 دوموضع مذکور وO_1وO_2 بترتیب مراکزتقارن‌دومنحنی (C_1)و(C_2) باشند نشان دهیدکه این چهار نقطه بر امتداد یك خط مستقیم قرار دارند و معادله این خط را بدست آورید.

متفرقه‌اردیبهشت ۴۱

۳۰۲۰ـ تابع $y = \frac{x}{2x^2-1}$ مفروض است :

۱ـ منحنی (C) نمایش تغییرات‌تابع فوقرا رسم‌کنید و ثابت‌کنیدکه مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی است.

۲ـ ثابت‌کنیدکه خط (D) بمعادله $y = m$ منحنی (C) را عموماً دردونقطه مشخص قطع میکند تحقیق‌کنیدکه این‌دونقطه‌همواره درطرفین محورعرضها قراردارد وضمناً پارامتر m را آنطور تعیین‌کنید تا یکی ازدونقطه تقاطع دربینهایت قرارگیرد.

۳ـ اگر M وM′ نقاط تلاقی خط (D) بامنحنی (C) وP محل‌تلاقی‌خط(D) با محورعرضها باشند

الف‌ـ ثابت‌کنیدکه حاصلضرب $\overline{PM} \cdot \overline{PM'}$ همواره مقداریست ثابت‌واین‌مقداررا بدست‌آورید .

ب‌ـ دوایر بقطر MM′ محورعرضهارا دردونقطه A وB قطع‌مینمایند ثابت‌کنیدکه چون m تغییرکند طول پاره خطهای AB همیشه مقدار ثابتی دارد مطلوبست تعیین این‌مقدار.

۳۰۲۱ ـ توابع اولیه تابع $y = \frac{x^4-1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ را پیدا کنید وبین

آنها آنرا انتخاب کنید که منحنی نظیرش محور طول‌را در نقطه بطول ۱ = x قطع کند

امتحان جبر ششم ریاضی متفرقه کشور در اردیبهشت ۱۳۴۳

۳۰۲۲ـ تابع $y=\frac{x^2+ax+b}{x^2+cx+d}$ مفروض است.

الف ـ در تابع فوق ضرایب a و b و c و d را آنطور تعیین کنید که :

۱ـ منحنی نمایش تغییرات آن محور عرض‌ها را در نقطه بعرض ۳ ـ قطع کند.

۲ـ منحنی فقط دارای یک مجانب موازی محور عرض بمعادله $x=1$ باشد.

۳ـ منحنی خط $y=1$ را قطع ننماید.

ب ـ منحنی (C) نمایش تغییرات $y=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

را رسم کنید و ثابت کنید که مجانب موازی محور عرض‌ها محور تقارن منحنی است.

ج ـ ثابت کنید که فقط مماس بموازات نیمساز ناحیه دوم میتوان بر منحنی (C) رسم کرد مختصات نقطه تماس و معادله مماس‌را پیدا کنید

د ـ خط D بمعادله $y=(x-3)$ مفروض است.

۱ـ ثابت کنید که این خط بازاء جمیع مقادیر m از نقطه ثابت A واقع بر منحنی (C) عبور میکند. مختصات این نقطه‌را پیدا کنید.

۲ـ خط (D) با منحنی (C) عموماً در دو نقطه در دو نقطه دیگر غیر از A تلاقی میکند، مقادیر m را آنطور بیابید تا دو نقطه مزبور در طرفین نقطه A قرار گیرند.

۳ـ بازاء $m=3$ خط (D) را در صفحه محورهای منحنی (C) بدقت رسم کنید و مختصات نقاط تلاقی آنرا با منحنی بدست آورید: نقطه بطول بیشتر غیر از A را B بنامید.

هـ ـ تابع $y=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$ را میتوان بصورت:

$y=1-\frac{4}{(x-1)^2}$ نوشت .

۱ـ توابع اولیه تابع فوق‌را بدست آورید.

۲ـ سطح محصور بین منحنی و وتر AB را حساب کنید

امتحان جبر ششم ریاضی دبیرستانهای کشور در خردادماه ۴۳

مدت (۲٫۵ ساعت)

۳۰۲۳ ـ تابع $y=\frac{2x^2+m^2}{x-2m}$ مفروض است که در آن m

پارامتر است ($m \neq 0$).

۱ـ ثابت کنید که بازاء جمیع مقادیر m تابع دارای یك ماکزیمم و یك می‌نیمم است مکان‌هندسی این نقاط را وقتیکه پارامتر تغییر کند بدست آورید.

۲ـ معادلات مجانب‌های منحنی نمایش تغییرات این تابع را برحسب m نوشته مکان‌هندسی محل تلاقی آنها را نیز تعیین کنید این مکان‌هندسی را با مکان‌هندسی قبل مقایسه کرده و نتیجه استنباط خود را بنویسید.

۳ـ اگر پارامتر m تغییر کند منحنی نمایش تغییرات تابع بر دو خط ثابت مماس است معادلات این دو خط را پیدا کنید.

۴ـ بازاء ($m = 1$) جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع را رسم کنید.

۵ـ ثابت کنید اگر خط دلخواهی بموازات محور xها رسم شود و منحنی ترسیم شده را در دو نقطه تلاقی نماید تصاویر این دو نقطه و تصاویر ماکزیمم و می‌نیمم و بر روی محور xها تشکیل تقسیم توافقی میدهند.

۳۰۲۴ ـ تابع $y = \pm x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ مفروض است که در آن a پارامتر است.

۱ـ ثابت کنید که منحنی نمایش تغییرات این تابع بازاء مقادیر مختلفه a از یك نقطه ثابت O مرور مینماید معادلات مماس بر منحنی را در این نقطه بنویسید

۲ـ خط بمعادله $x = \frac{a}{2}$ منحنی نمایش تغییرات تابع را در دو نقطه A و B قطع میکند اگر $AB = \sqrt{3}$ باشد مقدار a و همچنین اضلاع و زوایای مثلث OAB را حساب کنید

۳ـ بازاء $a = 1$ جدول منحنی نمایش تغییرات تابع را رسم کنید.

۳۰۲۵ـ معادله درجه دوم $2x^2 - \lambda x + (2\lambda + 1) = 0$

مفروض است:

۱ـ بین ریشه‌های x' و x'' این معادله رابطه‌یی پیدا کنید که بستگی به پارامتر λ نداشته باشد و این رابطه را از لحاظ هندسی تعبیر کنید.

۲ـ λ را درچه حدود باید اختیار کرد که هر دو ریشه معادله مثبت باشد یعنی $0 < x' < x''$ (هریك از سئوالات دو نمره دارد).

امتحان جبر ششم ریاضی متفرقه آبانماه ۴۳ (مدت ۲ ساعت)

۳۰۲۶ـ مسئله اول ـ تابع $y = \frac{ax+b}{x^2}$ مفروض است.

۱ـ مقادیر a و b را چنان تعیین کنید تا منحنی نمایش تغییرات تابع مفروض بر نیمسا بردبع

اول در نقطه‌ای بطول واحد مماس شود (۲ نمره)

۲ـ منحنی (c) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{3x-2}{x^2}$ را رسم کنید (۴ نمره)

۳ـ در تعداد ریشه‌های معادله $mx^2-3x+2=0$ برحسب مقادیر مختلف m بحث کرده نتیجه را باجزئیات درجدولی ثبت نمائید ودرسنی نتیجه‌را ازروی منحنی (c) تحقیق کنید (۳ نمره)

۴ـ ازمبداء مختصات چندمماس میتوان برمنحنی (c) رسم کرد ؛ معادلات این مماسها را بنویسید (۲ نمره)

۳۰۲۷ ـ تابع $y=x\pm\sqrt{x^2+1}$ مفروض است.

۱ـ منحنی نمایش تغییرات تابع مفروض‌را رسم کنید. (۴ نمره)

۲ـ تابع اولیه تابع $y=(x+\sqrt{x^2+1})^2$ راچنان تعیین کنید که به‌ازاء $x=0$ برابر $\frac{2}{3}$ شود (۳ نمره)

۳ـ اگر $Z=\frac{2}{3}x^3+x+\frac{2}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$ یکی از توابع اولیه تابع $y=(x+\sqrt{x^2+1})^2$ باشد حجم حادث ازدوران سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات $y=x+\sqrt{x^2+1}$ و محور طولها و دو خط $x=1$ و $x=-1$ را حول محور طولها محاسبه کنید (۲ نمره)

۲ ـ تابع $y=x+\frac{1}{\sqrt{x}}$ مفروض است.

الف ـ منحنی نمایش تغییرات آن‌را رسم کنید.

ب ـ نقطه‌ای ازمنحنی فوق‌را پیدا کنید که خط‌مماس برآن باخط مجانب مایل آن، زاویه ۱۳۵ یا 45° بسازد. دراین‌صورت معادله خط‌مماس‌را بنویسید.

ج ـ سطح محصور بین منحنی فوق ومجانب مایل آن ودوخط $x=1$ و $x=2$ را حساب کنید.

امتحان جبر سال ششم ریاضی دبیرستانها وداوطلبان متفرقه کشور

در خردادماه ۱۳۴۴

(مدت ۲/۵ ساعت)

۳۰۲۸- تابع $y=\frac{x+2m}{x^2-mx-2}$ مفروض است.

۱ـ بدون استفاده از مشتق ثابت کنید که ماکزیمم و می‌نیمم این تابع به فرض آنکه موجود باشند متحدالعلامه‌اند. مقادیر m را آنطور بیابید که ماکزیمم تابع، ۹۰ برابر می‌نیمم آن باشد.

۲ـ منحنی (c) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x+2}{x^2-x-2}$ را رسم کنید. و به کمک آن، اعداد ۲ − و ۱ + را با ریشه‌های معادله:

$$(1)\quad mx^2-(m+1)x-2(m+1)=0$$

کاملا مقایسه نمایید.

۳ـ خط (D) به‌معادله $y=m$ منحنی (C) را عموماً در دو نقطه A و B قطع می‌نماید که طول‌های این نقاط ریشه‌های معادله (۱) هستند. اگر A' و B' تصاویر آنها برمحور طول باشند، ثابت کنید که نقطهٔ ثابتی مانند i برمحور طول آنطور می‌توان یافت که چون خط (D) بموازات خود حرکت کند، حاصل‌ضرب $iA' \quad iB'$ همواره مقدار ثابتی باشد. طول این نقطه ومقدار ثابت را تعیین کنید و از آن نتیجه بگیرید که دو نقطه روی منحنی وجود دارند که تصاویر آنها برمحور طول مزدوج توافقی نقاط $A'B'$ هستند. این دو نقطه را پیدا کنید.

۴ـ تابع $y=\frac{1}{3}x^3+2x^2-\frac{16}{3}$ مفروض است:

الف ـ جهت تحدب وتقعر منحنی (C') نمایش تغییرات این تابع را نسبت به محور عرضها بررسی نمایید و بعد منحنی (C') را در دستگاه محورهای منحنی (C) رسم کنید.

ب ـ مماس بر نقطه عطف منحنی ومماس بر نقطه ماکزیمم آنرا رسم کنید وسطح محصور بین منحنی واین دو مماس را که در ربع دوم قرار دارد حساب کنید.

۵ـ ثابت کنید که بر دو منحنی (C) و (C') نقاطی بطول‌های مشترک وجود دارند که در آن نقاط مماس برمنحنی (C') موازی قائم برمنحنی (C) است و بخصوص در یکی از نقاط تقاطع دو منحنی مماس بر منحنی (C') قائم بر منحنی (C) می‌باشد. مختصات این نقطه و طول‌های آن نقاط را بدست آورید.

یادآوری: قسمت‌های مختلف مسئله فوق بهم بستگی ندارند ومی‌توان هرقسمت را مستقلا حل کرد.

امتحان جبر سال ششم ریاضی دبیرستانها وداوطلبان متفرقه کشور

در شهریورماه ۱۳۴۴

(مدت ۲/۵ ساعت)

۳۰۲۹ـ تابع $y=\frac{x-2a}{x^2-a}$ مفروض است:

۱ـ ثابت کنید که منحنیهای نمایش تغییرات تابع فوق ازدو نقطه ثابت می گذرند واین دو نقطه روی خطی موازی محورطولها قراردارند. مختصات آن دو نقطه و معادله این خط را پیدا کنید.

۲ـ مقدار a را آنطور بیابید که طولهای نقاط ماکزیمم ومی نیمم منحنی تابع عکس یك دیگر باشند وضمناً تحقیق کنید که به ازای جمیع مقادیر a حاصل جمع مقادیر ماکزیمم ومی نیمم تابع مقدار ثابت است این مقدار ثابت را حساب کنید.

۳۰۳۰ـ منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x-2}{x^2-1}$ را رسم کنید. اگر A و B بترتیب نقاط تقاطع (C) با محورهای طول وعرض باشند ، معادله خط AB را بنویسید و وضع آن را با منحنی تحقیق کنید و این خط را در صفحه محورهای منحنی (C) بکشید

۳۰۳۱ـ منحنی (C') نمایش تغییرات تابع $y=1\pm\sqrt{-x^2-2+1}$ را درصفحه محورهای منحنی (C) رسم کنید مماس براین منحنی را درنقطهٔ B پیداورسم کنیدوتحقیق نمائید که این مماس قائم برمنحنی (C) درهمین نقطه است.

۳۹۹۴ـ مقدار حقیقی کسر $\frac{x^2-x-2}{(x-2)(x^3-3x^2+4)}$ را به ازای $x=-1$ و $x=2$ حساب کنید. وضمناً کسر فوق را به ساده ترین صورت خود تبدیل کنید.

توابع اولیه تابع $y=\frac{1}{(x-2)^2}$ را بدست آورید وسطح محصور بین منحنی و دو خط $x=1$ و $x=m>1$ را حساب کنید وحد این سطح را وقتی که m بسمت ۲ میل میکند پیدا کنید (رسم منحنی تابع لزومی ندارد)

امتحان جبر سال ششم ریاضی دبیرستانها وداوطلبان متفرقه کشور

در خردادماه ۴۵

(مدت ۲/۵ ساعت)

۳۰۳۲ـ الف ـ تابع $y=\frac{ax+b}{(x-2)^2}$ مفروض است. مقادیر a و b را حساب کنید بطریقی که خط $2y-2x=1$ در نقطه واقع درروی محور yy' بامنحنی نمایش تابع مماس باشد.

ب ـ بدون استفاده ازمشتق مقادیر ماکزیمم ومی نیمم تابع $y=\frac{2(x+1)}{(x-2)^2}$ را حساب کنید و بخصوص توضیح دهید که بچه دلیل یکی از این دو مقدار بسمت بینهایت میل میکند.

ج ـ مختصات نقطه عطف وجهت تحدب وتقعر منحنی نمایش تابع $y=\frac{2(x+1)}{(x-2)^2}$ را معین کنید.

د ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{2(x+1)}{(x-2)^2}$ و خط $2y-2x=1$ را در یك دستگاه محورهای مختصات را رسم کنید.

۲ـ در وجود و علامت ریشه‌های معادله درجه سوم $x^3+3x^2+m=0$ به ازای مقادیر مختلف m بحث کنید.

اگر (-2) یکی از ریشه‌های معادله درجه سوم بالا باشد مقدار m و دو ریشه دیگر معادله را حساب کنید.

۳ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x\pm2\sqrt{5-x^2}$ را رسم کنید.

۴ـ تابع $y=8(x-1)(x^2-2x+3)$ مفروض است. تابع اولیه این تابع را بقسمی حساب کنید که به ازای $(x=1)$ مقدار آن برابر (16) گردد.

امتحان جبر سال ششم ریاضی دبیرستان‌ها و داوطلبان متفرقه کشور

در شهریورماه ۱۳۴۵

(مدت ۲/۵ ساعت)

۴۰۳۳ ـ تابع $y=\frac{x^2+4ax+12}{x^2-ax-3}$ مفروض است.

۱ـ بدون استفاده از مشتق ثابت کنید که به ازای جمیع مقادیر a یکی از دو مقدار ماکزیمم یا می‌نیمم تابع مقداری است ثابت. سپس مقادیر a را حساب کنید بطریقی که مقدار دیگر ماکزیمم یا می‌نیمم تابع برابر $(-\frac{1}{3})$ باشد.

۲ـ جدول و منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x^2+8x+12}{x^2-2x-3}$ را رسم کنید.

۳ـ مقادیری از m را تعیین کنید که خط $y=m$ منحنی (C) را در دو نقطه قطع کند یا بر آن مماس گردد.

۴ـ خط $y=m$ اکثراً منحنی را در دو نقطه M و N قطع می‌کند. مطلوبست مکان هندسی نقطه P وسط پاره‌خط MN.

۵ـ مقادیر m را بطریقی تعیین کنید که یکی از طول‌های نقاط تقاطع خط $y=m$ با منحنی (C) بین دو عدد -2 و 1 باشد.

۴۰۳۴ـ اولا جدول و منحنی C' نمایش تغییرات تابع $y=x-\sqrt{x}$ را رسم کنید.

ثانیاـ معادلات مماسهایی را که از نقطه $A(0$ و $-2)$ بر منحنی C' رسم می‌شوند بنویسید و مختصات نقاط تماس را حساب کنید.

ثالثاـ سطح محصور بین منحنی C' و محور xها را حساب کنید.

چند مطلب خارج از برنامه

محاسبه مشتق n ام یك تابع

قرار داد : طبق قرار داد مشتق n ام y را به $y^{(n)}$ نشان میدهیم مثلا مشتق سوم را به $y^{(3)}$ ومشتق پنجم را به $y^{(5)}$ ومشتق دهم را به $y^{(10)}$ نشان میدهیم

۳۰۳۵- مشتق n ام $y = a\sin mx$ را حساب کنید . $y = a\sin mx$

حل :

$$y' = am\cos mx = am\sin\left(mx + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = am^2\cos\left(mx + \frac{\pi}{2}\right) = am^2\sin\left(mx + \frac{2\pi}{2}\right)$$

$$y^{(3)} = am^3\cos(mx + \pi) = am^3\sin\left(mx + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$y^{(4)} = am^4\cos\left(mx + \frac{3\pi}{2}\right) = am^4\sin\left(mx + \frac{4\pi}{2}\right)$$

ازشکل مشتق‌ها می‌توان نتیجه گرفت که مشتق n ام $a\sin mx$ بصورت زیر است:

$$y^{(n)} = am^n\sin\left(mx + \frac{n\pi}{2}\right)$$

۳۰۳۶- مشتق n ام $y = a\cos mx$ را بدست آورید .

حل : $y = a\cos mx$

$$y' = -am\sin mx = am\cos\left(mx + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = -am^2 \sin\left(mx+\frac{\pi}{2}\right) = am^2 \cos\left(mx+\frac{2\pi}{2}\right)$$

$$y^{(3)} = -am^3 \sin(mx+\pi) = am^3 \cos\left(mx+\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$y^{(4)} = -am^4 \sin\left(mx+\frac{3\pi}{2}\right) = am^4 \cos\left(mx+\frac{4\pi}{2}\right)$$

.....

.....

ازشکل مشتق‌ها میتوان نتیجه گرفت که مشتق nام $a\cos mx$ بصورت زیراست:

$$y^{(n)} = am^n \cos\left(mx+\frac{n\pi}{2}\right)$$

۳۰۳۷ـ مشتق nام $y = a\cos^2 mx$ را حساب کنید.

$$y = a\cos^2 mx$$

حل: میدانیم که $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ یا $\cos^2 mx = \frac{\cos 2mx + 1}{2}$

$$y = a\cos^2 mx = a\left(\frac{\cos 2mx + 1}{2}\right) = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos 2mx$$

$$y' = -am_1 \sin 2mx = (2)^{1-1} am \cos\left(2mx+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = -2am^2 \sin\left(2mx+\frac{\pi}{2}\right) = (2)^{2-1} am^2 \cos\left(2mx+\frac{2\pi}{2}\right)$$

$$y^{(3)} = -4am^3 \sin(2mx+\pi) = (2)^{3-1} am^3 \cos\left(2mx+\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$y^{(4)} = -(2)^{4-1} m^4 \sin\left(2mx+\frac{3\pi}{2}\right) =$$

$$= (2)^{4-1} m^4 \cos\left(2mx+\frac{4\pi}{2}\right)$$

ازشکل مشتق‌های بالامیتوان نتیجه گرفت که شکل مشتق nام $a\cos^2 mx$ بصورت زیر است:

$$y^{(n)} = (2)^{n-1} a\cos\left(2mx + \frac{n\pi}{2}\right)$$

۳۰۳۸- مشتق n ام $y = a\sin^2 mx$ را حساب کنید.

حل: میدانیم که:

$$\sin^2 mx = \frac{1-\cos 2mx}{2}$$

$$y = a\sin^2 mx = a\left(\frac{1-\cos 2mx}{2}\right) = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\cos 2mx$$

$$y' = am\sin 2mx$$

$$y'' = (2)^{2-1} am^2 \cos 2mx = (2)^{2-1} am^2 \sin\left(2mx + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y^{(3)} = +(2)^{3-1} am^3 \cos\left(2mx + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y^{(3)} = (2)^{3-1} am^3 \sin\left[2mx + \frac{(3-1)\pi}{2}\right]$$

$$y^{(4)} = (2)^{4-1} am^4 \cos\left(2mx + \frac{2\pi}{2}\right)$$

$$y^{(4)} = (2)^{4-1} am^4 \sin\left[2mx + \frac{(4-1)\pi}{2}\right]$$

ازشکل مشتق‌های بالا میتوان نتیجه گرفت که مشتق nام $a\sin^2 mx$ بصورت زیر است:

$$y^{(n)} = (2)^{n-1} am^n \sin\left[2mx + \frac{(n-1)\pi}{2}\right]$$

۳۰۳۹- مشتق nام $y = a\sin^3 mx$ را حساب کنید.

حل: میدانیم که:

$$\sin 3mx = 3\sin mx - 4\sin^3 mx \Longrightarrow \sin^3 mx = \frac{1}{4}(3\sin mx - \sin 3mx)$$

$$y = a\sin^3 mx = \frac{3a}{4}\sin mx - \frac{a}{4}\sin 3mx$$

$$y^{(n)} = \frac{3a}{4}(\sin mx)^{(n)} - \frac{a}{4}(\sin 3mx)^{(n)}$$

$$y^{(n)}=\frac{3a}{4}[m^n \sin(mx+\frac{n\pi}{2})]-\frac{a}{4}[(3m)^n \sin(3mx+\frac{n\pi}{2})]$$

۳۰۴۰- مشتق nام $y=a\cos^3 mx$ را حساب کنید.

حل: میدانیم که:

$$\cos 3mx=4\cos^3 mx-3\cos mx \Rightarrow \cos^3 mx=\frac{1}{4}(\cos 3mx+3\cos mx)$$

$$y=a\cos^3 mx=\frac{a}{4}\cos 3mx+\frac{3a}{4}\cos mx$$

$$y^{(n)}=\frac{a}{4}(\cos 3mx)^{(n)}+\frac{3a}{4}(\cos mx)^{(n)}$$

$$y^{(n)}=\frac{a}{4}[(3m)^n \cos(3mx+\frac{n\pi}{2})]+\frac{3a}{4}[m^n \cos(mx+\frac{n\pi}{2})]$$

تذکر: علامت ! راعلامت فاکتوریل مینامند بامثالهای زیر به مفهوم‌آن پی‌میبرید فاکتوریل ۲ را بصورت ۲! مینویسند وبرابر ۱×۲ میباشد.

فاکتوریل ۳ را بصورت ۳! مینویسندوبرابر ۱×۲×۳ میباشد.

$4!=4\times3\times2\times1$ و $5!=5\times4\times3\times2\times1$

$n!=n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots\times2\times1$

۳۰۴۱- مشتق n ام: $y=\frac{1}{ax\pm b}$

$$y=\frac{1}{ax\pm b} \qquad y'=\frac{-a}{(ax\pm b)^2}$$

$$y''=\frac{2a^2}{(ax\pm b)^3}=\frac{(-1)^2 2!a^2}{(ax\pm b)^{2+1}}$$

$$y^{(3)}=\frac{(-1)^3 3\times2a^3}{(ax\pm b)^{3+1}}=\frac{(-1)^3 3!a^3}{(ax\pm b)^{3+1}}$$

$$y^{(4)}=\frac{(-1)^4 4!2a^4}{(ax\pm b)^{4+1}} \quad و \quad y^{(5)}=\frac{(-1)^5 5!a^5}{(ax\pm b)^{5+1}}$$

پس‌مشتق nام برابر است با:

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!a^n}{(ax\pm b)^{n+1}}$$

دستور لایپ‌نیتس

اگر y حاصلضرب دوتابع u و v باشد برای محاسبه‌مشتق n ام y طبق فرمول‌زیر که به‌فرمول لایپ‌نیتس معروف است استفاده میشود .

$$y = uv$$

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = u^{(n)} v + \frac{n}{1!} u^{(n-1)} v' +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2!} u^{(n-2)} v'' + \dots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} u^{(n-p)} v^{(p)} + \dots + uv^{(n)}$$

معمولا برای‌اینکه محاسبه‌مشتق n ام یك‌تابع که‌بصورت $y = uv$ میباشد ساده شود یکی ازتوابع u یا v بقسمی انتخاب‌میشوند که‌مشتق‌دوم یاسوم‌یاچهارم آن صفرشود وشکل مشتق nام تابع‌دیگرقابل‌حدس‌زدن‌باشد یابه‌آسانی پیداشود .

۳۰۳۳ـ مطلوبست محاسبه‌مشتق n ام تابع زیر :

$$y = \frac{ax+b}{a'x+b'}$$

$$y = \frac{ax+b}{a'x+b'} = (ax+b)\left(\frac{1}{a'x+b'}\right)$$

اگر $ax+b=v$ و $\frac{1}{a'x+b'}=u$ فرض‌شود محاسبه مشتق n ام y ساده میشود زیرا :

$$v = ax+b \quad و \quad v' = a \quad و \quad v'' = 0$$

$$u = \frac{1}{a'x+b'} \qquad u^{(n)} = \frac{(-1)^n n!\, a'^n}{(a'x+b')^{n+1}}$$

$$\text{و}\ u^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\,a'^{n-1}}{(a'x+b')^n}$$

اگر مقادیر فوق‌را درفرمول لایپ‌نیتس قراردهیم مشتق nام بصورت‌زیر درمی‌آید :

$$y^{(n)} = \left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)^{(n)} = u^{(n)}v + \frac{n}{1!}u^{(n-1)}v' + \cdot$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!\,a'^n(ax+b)}{(a'x+b')^n}$$

$$+ n \times \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\,a'^{n-1}(a)}{(a'x+b')^n}$$

میدانیم‌که $n \times (n-1)! = n$ پس حاصل عبارت‌فوق‌بصورت زیردرمی‌آید

$$y^{(n)} = \left(\frac{ab'-a'b}{a'x+b'}\right)\left[\frac{(-1)^{n-1}n!\,a'^{n-1}}{(a'x+b')^n}\right]$$

۳۰۴۳ـ مطلوبست محاسبه‌مشتق nام تابع $y = x\sin x$

حل: $y = x\sin x \qquad x = v \text{ و } \sin x = u \text{ و } y = uv$

$$v' = 1 \text{ و } v'' = \cdot \text{ و } u^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\text{و}\ u^{(n-1)} = \cos\left[x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right]$$

اگرمقادیر فوق را درفرمول لایپ‌نیتس قراردهیم مشتق nام تابع فوق بصورت زیر در می‌آید :

$$y^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \cdot$$

$$y^{(n)} = x\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left[x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right]$$

۳۰۴۴ـ مطلوبست محاسبه‌مشتق n ام تابع $y = x^2\cos x$

حل: $x^2 = v$ و $\cos x = u$ و $y = uv$

$v' = 2x$ و $v'' = 2$ و $v''' = 0$ و $u^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$

$u^{(n-1)} = \cos[x + \frac{(n-1)\pi}{2}]$

و $u^{(n-2)} = \cos[x + \frac{(n-2)\pi}{2}]$

$$y^{(n)} = u^{(n)} v + n u^{(n-1)} v' + \frac{n(n-1)}{2!} u^{(n-2)} v'' + \cdot$$

مقادیرفوقرا در فرمول لایپ‌نیتس قرارمیدهیم مشتق nام بصورت زیردرمی‌آید:

$$y^{(n)} = x^2 \cos(x + \frac{n\pi}{2}) + 2xn\cos[x + \frac{(n-1)n}{2}] +$$

$$+ n(n-1)\cos[x + \frac{(n-2)\pi}{2}]$$

۳۰۴۵- مطلوبست محاسبه مشتق nام تابع $y = x\sin^2 x$ وبلاستفاده ازآن مقدارمشتق صدم را پیدا کنید.

حل: $x = v$ و $\sin^2 x = u$ و $y = uv$

$v' = 1$ و $v'' = \cdot$ $\quad u^{(n)} = (2)^{n-1} \sin[2x + \frac{(n-1)\pi}{2}]$

$u^{(n-1)} = (2)^{n-2} \sin[2x + \frac{(n-2)\pi}{2}]$

مقادیرفوقرا درفرمول لایپ‌نیتس قرار میدهیم.

$$y^{(n)} = u^{(n)} v + n u^{(n-1)} v' + \cdot$$

$$y^{(n)} = x(2)^{n-1} \sin[2x + \frac{(n-1)\pi}{2}] +$$

$$+ (2)^{n-2} \sin[2x + \frac{(n-2)\pi}{2}]$$

برای محاسبه‌مشتق‌صدم دررابطه‌بالابجای n مقدار صد را قرارمیدهیم:

$$y^{(100)} = x(2)^{99}\sin(2x+\frac{99\pi}{2})+(2)^{98}\sin(2x+49\pi)$$

اما میدانیم که :

$$\sin(\alpha+\frac{k\pi}{2})=\cos\alpha \Longrightarrow \sin(2x+\frac{99\pi}{2})=\cos 2x$$

$$\sin(\alpha+k\pi)=-\sin\alpha \Longrightarrow \sin(2x+49\pi)=-\sin 2x$$

این‌مقادیررا درراابطه‌بالا قرارمیدهیم :

$$y^{(100)}=x(2)^{99}\cos 2x+(2)^{98}(-\sin 2x)$$

$$y^{100}=2^{98}(2x\cos 2x-\sin 2x)$$

۳۰ـ مطلوبست محاسبه‌مشتق $(n+1)$ام تابع $y=(x-a)^n$

حل:

$$y'=n(x-a)^{n-1}$$

$$y''=n(n-1)(x-a)^{n-2}$$

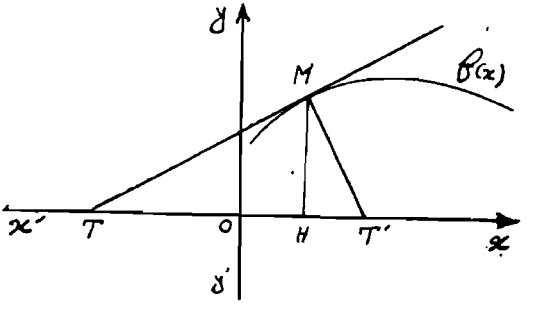
$$y'''=n(n-1)(n-2)(x-a)^{n-3}$$

از شکل مشتق‌ها میتوان نتیجه گرفت که شکل مشتق $(n+1)$ام تابع‌فوق بصورت زیراست :

$$y^{(n)}=n(n-1)(x-2)\ldots(n-n)(x-a)^0$$

اما مقدار فوق برابرصفر است یعنی $y^{(n)}=0$

تحت مماس و تحت قائم



تعریف : اگر منحنی $f(x)$ را در دستگاه کارتزین رسم کنیم و مماس بر آن را در نقطه M رسم کنیم و آنرا ادامه دهیم تا محور $x'ox$ را در نقطه T قطع کند و از نقطه M عمودی بر MT اخراج کنیم تا محور طولها را در نقطه T' قطع کند و از M عمود MH' را بر محور طولها فرود آوریم بنابتعریف طول TH را تحت مماس و H'T' را تحت قائم گویند. برای محاسبه مقادیر تحت مماس و تحت قائم بترتیب زیر عمل میکنیم :

میدانیم که ضریب زاویه مماس بر منحنی در یک نقطه برابر است بامشتق بازاء طول نقطه تماس بنابراین اگر $M(a$ و $b)$ فرض شود میتوانیم بنویسیم:

$$\text{ضریب زاویه خط } MT = f'(a) = \frac{MH}{TH} = \frac{b}{TH} \Longrightarrow TH = \left|\frac{b}{f'(a)}\right| = \left|\frac{b}{y'(a)}\right|$$

اما در مثلث قائم الزاویه TMT' میتوان نوشت:

$$MH^2 = TH \times HT' \Longrightarrow HT' = \frac{MH^2}{TH} =$$

$$= \frac{b^2}{\frac{b}{f'(a)}} \Longrightarrow HT' = |bf'(a)| = by'(a)|$$

$$\text{طول تحت مماس} = \left|\frac{\text{عرض نقطه تماس}}{\text{مشتق بازاء طول نقطه تماس}}\right|$$

$$\left|\text{مشتق بازاء طول نقطه‌تماس} \times \text{عرض نقطه تماس}\right| = \text{طول تحت قائم}$$

باید توجه‌داشت که مسائل تحت مماس وتحت‌قائم‌را بدون‌رسم‌منحنی میتوان‌حل‌کرد.

۳۰۴۷- مطلوبست محاسبه تحت مماس و تحت قائم بر منحنی $y=x^2+3$ در نقطه بطول‌واحد.

حل:

$$y=x^2+3 \text{ و } x=1 \Longrightarrow y=1+3=4 \Longrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases}$$

$$y'=2x \Longrightarrow y'(a)=y'(1)=2$$

$$\text{تحت‌مماس} = \frac{b}{y'(1)} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{و} \quad \text{تحت قائم} = by'(1) = 4 \times 2 = 8$$

۳۰۴۸- مطلوبست‌محاسبه تحت‌قائم و تحت مماس بر منحنی $y=x^3+x^2+x-4$ درنقطه‌ای بطول ۲ —

حل :

$$y=x^3+x^2+x-4 \text{ و } x=-2 \Longrightarrow$$

$$y=(-2)^3+(-2)^2+(-2)-4=-10 \Longrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-10 \end{cases}$$

$$y'=3x^2+2x+1 \Longrightarrow y'(a)= y'(-2)=3(-2)^2+2(-2)+1=9$$

$$TH = \left|\frac{b}{y'(-2)}\right| = \left|\frac{-10}{9}\right| = \frac{10}{9}$$

$$HT' = |by'(-2)| = |9(-10)| = |-90| = 90$$

۳۰۴۹- مطلوبست محاسبه تحت مماس وتحت‌قائم برمنحنی $y=\sqrt{x}$ درنقطه‌ای بطول۹ واقع درناحیه اول.

حل:

$$y=\sqrt{x} \text{ و } x=9 \Longrightarrow y=\sqrt{9}=+3 \Longrightarrow \begin{cases} a=9 \\ b=3 \end{cases}$$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Longrightarrow y'(a)=y'(9)=\frac{1}{2\sqrt{9}}=\frac{1}{6}$$

$$TH=\frac{b}{y'(۹)}=\frac{۳}{\frac{۱}{۶}}=۱۸ \text{ و } HT'=by'(۹)=۳\times\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

۳۰۵۰ـ مطلوبست محاسبه تحت قائم و تحت مماس بر منحنی $y=\sqrt{x^۳-۱}$ در نقطه‌ای بطول ۲ حل :

$$y=\sqrt{x^۳-۱} \text{ و } x=۲\Longrightarrow y=\sqrt{(۲)^۳-۱}=\sqrt{۷}\Longrightarrow\begin{cases}a=۲\\ b=\sqrt{۷}\end{cases}$$

$$y'=\frac{۳x^۲}{۲\sqrt{x^۳-۱}}$$

$$y'(۲)=\frac{۳(۲)^۲}{۲\sqrt{۲^۳-۱}}=\frac{۶}{\sqrt{۷}}=\frac{۶\sqrt{۷}}{۷}$$

$$TH=\frac{b}{y'(۲)}=\frac{\sqrt{۷}}{\frac{۶\sqrt{۷}}{۷}}=\frac{۷}{۶}$$

$$HT'=by'(۲)=\sqrt{۷}\times\frac{۶\sqrt{۷}}{۷}=۶$$

۳۰۵۱ـ مطلوبست محاسبه تحت قائم و تحت مماس بر منحنی $y=\sqrt{x^۲+۱}$ در نقطه‌ای بعرض ۲ واقع در ناحیه اول محورهای مختصات

حل :

$$y=\sqrt{x^۲+۱} \text{ و } y=۲\Longrightarrow ۲=\sqrt{x^۲+۱}\Longrightarrow x^۲+۱=۴\Longrightarrow x^۲=۳.$$

$$x=\sqrt{۳}$$

$$\begin{cases}a=\sqrt{۳}\\ b=۲\end{cases} \text{ و } y=\sqrt{x^۲+۱}\Longrightarrow y'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}} \quad y'(\sqrt{۳})=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$TH=\frac{b}{y'(\sqrt{۳})}=\frac{۲}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۳}}=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

$$HT'=by'(\sqrt{۳})=۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}$$

۳۰۵۲- مطلوبست محاسبه تحتمماس وتحت قائم بر منحنی $y=x^5+6$ در نقطه‌ای بطول‌واحد.

حل :

$$y=x^5+6 \text{ و } x=1 \Longrightarrow y=(1)^5+6=7 \Longrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=7 \end{cases}$$

$$y=x^5+6 \Longrightarrow y'=5x^4 \Longrightarrow y'(1)=5(1)^4=5$$

$$TH=\frac{b}{y'(1)}=\frac{7}{5} \text{ و } HT'=by'(1)=7\times 5=35$$

۳۰۵۳- مطلوبست محاسبه تحتقائم و تحتمماس بر منحنی $y=x^3+28$ در نقطه‌ای بعرض واحد .

حل :

$$y=x^3+28 \text{ و } y=1 \Longrightarrow 1=x^3+28 \Longrightarrow x^3=-27 \Longrightarrow x=-3$$

$$\begin{cases} a=-3 \\ b=1 \end{cases}$$

$$y'=3x^2 \Longrightarrow y'(-3)=3(-3)^2=27$$

$$TH=\frac{b}{y'(-3)}=\frac{1}{27} \text{ و } HT'=by'(-3)=1\times 27=27$$

۳۰۵۴- مطلوبستمحاسبه تحتقائم و تحتمماس بر منحنی $y=\sqrt[3]{x^2-1}$ در نقطه‌ای بطول ۳ .

حل:

$$y=\sqrt[3]{x^2-1} \text{ و } x=3 \Longrightarrow y=\sqrt[3]{(3)^2-1}=\sqrt[3]{8}=2 \Longrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$$

$$y'=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} \qquad y'(3)=\frac{2\times 3}{3\sqrt[3]{(9-1)^2}}=\frac{1}{2}$$

$$TH=\frac{b}{y'(3)}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4 \text{ و } HT'=by'(3)=2\times\frac{1}{2}=1$$

۳۰۵۵- a و b را چنان تعیین کنید که تحت قائم بر منحنی $y=ax^2+bx$ درنقطه $M(1 \text{ و } 2)$ برابر ۶باشد .

حل: $M(۱ \text{ و } ۲)$ و $y=ax^۲+bx \Longrightarrow ۲=a+b$

$y'=۲ax+b \qquad y'(۱)=۲a+b$

تحتقائم $=HT'=|۲(۲a+b)|=۶ \Longrightarrow ۲a+b=\pm ۳$

$$\begin{cases} ۲a+b=\pm ۳ \\ a+b=۲ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=۱ \text{ و } -۵ \\ b=۱ \text{ و } ۷ \end{cases}$$

۳۰۵۶- a و b را چنان تعیین کنید که تحتمماس برمنحنی $y=ax^۳+bx^۲$ در نقطه $M(۱ \text{ و } -۱)$ برابر $\frac{۱}{۳}$ باشد.

حل: $M(۱ \text{ و } -۱)$ و $y=ax^۳+bx^۲ \Longrightarrow -۱=a+b$

$y'=۳ax^۲+۲bx \qquad y'(۱)=۳a+۲b$

تحتمماس $=\left|\frac{-۱}{۳a+۲b}\right|=\frac{۱}{۳} \Longrightarrow \frac{-۱}{۳a+۲b}=\pm\frac{۱}{۳}$

$\frac{۱}{۳a+۲b}=\mp\frac{۱}{۳} \Longrightarrow ۳a+۲b=\pm ۳$

$$\begin{cases} a+b=-۱ \\ ۳a+۲b=\pm ۳ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=۶ \text{ و } -۲ \\ b=-۷ \text{ و } ۱ \end{cases}$$

قاعده

برای بدست‌آوردن طول نقطه عطف منحنی بدون استفاده ازمشتق راه‌حل اینست که معادله منحنی‌را باخط $y=ax+b$ حل می‌نمائیم‌معادله درجه سومی‌بدست‌میآید که درآن V و P و S یعنی $x_۱+x_۲+x_۳$ و $x_۱x_۲+x_۲x_۳+x_۱x_۳$ و $x_۱x_۲x_۳$ را تشکیل داده و بین این سه رابطه a و b را حذف می‌نمائیم یعنی رابطه‌ای‌بدست میآوریم که مستقل از a و b باشد و در این رابطه بجای $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ مقدار x را قرار میدهیم و x را حساب میکنیم.

۳۰۵۷- مختصات نقطه عطف‌منحنی نمایش تابع $y=\frac{x^۲-۱}{(x+۲)^۲}$ را بدو مشتق بدست‌آورید.

حل: $y=\frac{x^2-1}{x^2+4x+4}$ و $y=ax+b \Longrightarrow \frac{x^2-1}{x^2+4x+4}=ax+b$

$$ax^3+4ax^2+4ax+bx^2+4bx+4b=x^2-1$$

$$ax^3+(4a+b-1)x^2+4(a+b)x+4b+1=0$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=\frac{-4-b+1}{a} \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{4a+4b}{a} \\ x_1x_2x_3=\frac{-4b-1}{a} \end{cases} \qquad \begin{cases} 4(x_1+x_2+x_3)=\frac{-16a-4b+4}{a} \\ 5(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=\frac{20a+20b}{a} \\ 4x_1x_2x_3=\frac{-16b-4}{a} \end{cases}$$

ازجمع سه رابطه نتیجه میشود .

$$4x_1x_2x_3+5(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+4(x_1+x_2+x_3)=4$$

حال بجای x_1 و x_2 و x_3 مقدار x را قرار میدهیم نتیجه میشود .

$$4x^3+15x^2+12x-4=0 \Longrightarrow x=\frac{1}{4} \text{ و } y=\frac{-5}{27}$$

قاعده

قرینهٔ یك نقطه نسبت به یك خط: برای پیدا کردن مختصات قرینه نقطه $A(\alpha و \beta)$ نسبت به خط $ax+by+c=0$ راه حل اینست که ابتداء مقدار λ وازرابطه $\lambda=\frac{a\alpha+b\beta+c}{a^2+b^2}$ پیدا کرده و سپس مختصات نقطه A' قرینه نقطه A نسبت به خط فوق را از فرمول زیر بدست میآوریم .

$$A' \left| \begin{array}{l} X=\alpha-2a\lambda \\ Y=\beta-2b\lambda \end{array} \right.$$

۳۰۵۸ـ مختصات قرینه نقطه $A(5و3)$ را نسبت به خط $3x-4y+61=0$ را بدست آورید .

حل :

$$\lambda = \frac{۳\times۳-۴\times۵+۶۱}{۹+۱۶}=\frac{۵۰}{۲۵}=۲$$

$$A\left|\begin{matrix}\alpha=۳\\ \beta=۵\end{matrix}\right. \text{ و } A'\left|\begin{matrix}\alpha-۲a\lambda=۳-۲\times۳\times۲=-۹\\ \beta-۲b\lambda=۵-۲\times-۴\times۲=۲۱\end{matrix}\right. \quad A'\left|\begin{matrix}-۹\\ ۲۱\end{matrix}\right.$$

۳۰۵۹ـ قرینه نقطه $A(-۴و۷)$ را نسبت‌به خط $۳y-۲x-۴۲=۰$ رابدست آورید

حل :

$$\lambda = \frac{-۲\times-۴+۳\times۷-۴۲}{۴+۹}=-۱$$

$$A\left|\begin{matrix}\alpha=-۴\\ \beta=۷\end{matrix}\right. \text{ و } A'\left|\begin{matrix}\alpha-۲a\lambda=-۴-۲(-۲)(-۱)=-۸\\ \beta-۲b\lambda=۷-۲(۳)(-۱)=۱۳\end{matrix}\right. \quad A'\left|\begin{matrix}-۸\\ ۱۳\end{matrix}\right.$$

محور تقارن مایل : اگر منحنی دارای محور تقارن مایلی باشدبرای پیداکردن معادله‌آن‌راه حل‌این‌است‌که معادله منحنی‌را بامعادله‌خط $y=ax+b$ حل نموده‌معادله درجه دومی بدست‌میآیدکه آنرا ساده‌ومرتب می‌نمائیم‌اگر x'وx'' ریشه‌های معادله جدید و نقاط MوN نقاط برخورد خط و منحنی باشد مختصات نقاط MوNوP وسط MN به قرار زیر است .

قاعده

$$M\left|\begin{matrix}x'\\ ax'+b\end{matrix}\right. \text{ و } N\left|\begin{matrix}x''\\ ax''+b\end{matrix}\right. \text{ و}$$

$$P\left|\begin{matrix}\frac{x'+x''}{۲}=\frac{۲a+b-۱}{۲a}=x\\ \frac{a(x'+x'')}{۲}+b=\frac{۲a+b-۱}{۲}+b=y\end{matrix}\right.$$

بین مختصات نقطه P پارامتر b راحذف می‌کنیم معادله خطی بدست میآید برای‌اینکه این‌خط محورتقارن باشد باید بر خط $y=ax+b$ عمود باشد شرط عمود بودن این دوخط را عمل می‌نمائیم و مقدار α را حساب می‌کنیم‌ودرمعادله خط‌بدست آمده قرار میدهیم تامعادله محور تقارن بدست‌آید .

۳۰۶- معادله محور تقارن مایل‌منحنی نمایش تابع $y=\frac{2x-1}{x+1}$ را بدست آورید .

حل : معادله منحنی را با معادلهٔ خط $y=ax+b$ حل می‌نمائیم .

$$\frac{2x-1}{x+1}=ax+b \Longrightarrow ax^2+(a+b-2)x+b+1=0$$

اگر x' و x'' ریشه‌های معادله فوق باشد پس نقاط :

$M\left|\begin{matrix}x'\\ ax'+b\end{matrix}\right.$ و $N\left|\begin{matrix}x''\\ ax''+b\end{matrix}\right.$ نقاط خط و منحنی میشوند.

$$P\left|\begin{matrix}\frac{x'+x''}{2}=\frac{-a-b+2}{2a}=x\\ \frac{ax'+b+ax''+b}{2}=\frac{a(x'+x'')}{2}+b=\end{matrix}\right. \text{وسط } MN$$

$$\frac{-a-b+2}{2}+b=y$$

$$\begin{cases}-a-b+2=2ax\\ -a-b+2+2b=2y\end{cases} \qquad \begin{cases}-a-b+2=2ax\\ -a+b+2=2y\end{cases}$$

از جمع دو رابطه $\Longrightarrow -2a+4=2ax+2y \Longrightarrow y+ax=2-a$

$m=a$ و $m'=-a \Longrightarrow mm'=-1 \Longrightarrow -a^2=-1 \Longrightarrow a=\pm 1$

$y+ax=2-a$ $\begin{cases}a=1 \Longrightarrow y+x=1\\ a=-1 \Longrightarrow y=-x+3\end{cases}$ معادلات محور تقارن

تذکر ۱ـ لطفاً قواعد ومسائل صفحات ۱۹ و ۲۰ و ۲۱ را مطالعه کنید.

تذکر ۲ـ « « « « ۱۱۰ تا ۱۱۹ « « «

تذکر ۳ـ « « « صفحه ۲۰۶ « « «

تذکر ۴ـ « « « « ۳۹۶ « « «

تذکر ۵ـ « « « صفحات ۴۳۸ تا ۴۴۴ « « «

معادله مکان هندسی هر یک از نقاط زیر را بدست آورید:

۳۰۶۱ـ $A\left(x=\frac{\sin\alpha(1-\sin\alpha)}{1+\sin\alpha} \text{ و } y=\frac{1+\sin^2\alpha}{\sin\alpha+1}\right)$

جواب: $x+y=1$

۳۰۶۲ـ $B\left(x=\frac{(t+1)^2}{1+t^2} \text{ و } y=\frac{2(t^2+2)}{1+t^2}\right)$

جواب: $(x-1)^2+(y-3)^2=1$

۳۰۶۳ـ معادله مکان هندسی نقاطی را پیدا کنید که از آنها قطعه خط AB [A(۱ و ۰) و B(۰ و ۱)] بزاویه ۴۵° رؤیت شود.

جواب: $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2-2x-2y=1$

۳۰۶۴ـ قسمتی از مکان را که مربوط بنقطه $A(2 \text{ و } t^2-1)$ میباشد رسم کنید.

۳۰۶۵ـ قسمتی از مکان را که مربوط به نقطه $B(2\sin\alpha+1 \text{ و } 3)$ میباشد رسم کنید.

۳۰۶۶ـ مقدار a را چنان تعیین کنید که حاصل عبارت $y=\frac{a\,tg(x+\frac{\pi}{6})}{2\,cotg(x-\frac{\pi}{3})}$ بازاء $x=\frac{\pi}{3}$ برابر ۴ـ شود.

جواب: $a=8$

۳۰۶۷ـ مقدار a را چنان تعیین کنید که حاصل عبارت:

$y=a\sin(2x+\pi)cotg(3x+\frac{\pi}{2})$ بازاء $x=\frac{\pi}{2}$ برابر $-\frac{3}{2}$ شود.

جواب: $a=-9 \div 4$

حل مسائل امتحانات نهائی

از سال ۱۳۴۵ به‌بعد

با ریز نمره

۴

۴۰۰ تست چهارجوابی و تستهای کنکور سراسری و مدارس عالی
کشور ودانشگاههای شبانه تهران وتبریز ازسال ۱۳۴۸ به‌بعد

خردادماه ۱۳۴۵

مسأله اولـ تابع $y=\frac{ax+b}{(x-2)^2}$ مفروض است:

اولاً: مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که خط $2y-2x=1$ در نقطه‌ای واقع درروی محور $y'y$ بامنحنی نمایش تغییرات مماس باشد. (۲ نمره)

ثانیاً: بدون استفاده از مشتق مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم تابع: $y=\frac{2(x+1)}{(x-2)^2}$ را حساب کنید و بخصوص توضیح دهید که بچه دلیل یکی از این دو مقدار بسمت بی‌نهایت میل میکند. (۲ نمره)

ثالثاً: مختصات نقطه عطف وجهت تحدب و تقعر منحنی نمایش تابع $y=\frac{2(x+1)}{(x-2)^2}$ را معین کنید. (۲ نمره)

رابعاً: جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{2(x+1)}{(x-2)^2}$ وخط $2y-2x=1$ را دریکدستگاه محورهای مختصات رسم کنید. (۴ نمره)

حل اولاً: $K(0,\frac{1}{2})$ نقطه تماس $\Rightarrow y=\frac{1}{2}\Rightarrow 2y-0=1\Rightarrow x=0$

$y'=\frac{-ax-2a-2b}{(x-2)^3}$ (۰/۵ نمره) ، $m=1$ (۰/۵ نمره) مماس

$$1 = \frac{0-2a-2b}{(0-2)^2} \Longrightarrow \boxed{a+b=4}$$ (۰/۵ نمره)

$$\frac{1}{2} = \frac{0+b}{(0-2)^2} \Longrightarrow \boxed{b=2}$$ مختصات K در تابع (۰/۲۵ نمره)

$$a+b=4 \Longrightarrow a+2=4 \Longrightarrow a=2$$ (۰/۲۵ نمره)

حل ثانیاً: $y = \frac{2x+2}{x^2+4-4x} \Longrightarrow yx^2+4y-4xy-2x-2=0$

$$yx^2-2(2y+1)x+4y-2=0$$ (۰/۵ نمره)

$$\Delta' = 0 \Longrightarrow (2y+1)^2-y(4y-2)=0$$ (۰/۵ نمره)

$$0 \times y^2+6y+1=0 \Longrightarrow y=\infty \text{ و } y=\frac{-1}{6}$$ (۰/۵ نمره)

چون ضریب درجه ممادله‌ای که از $\Delta = 0$ بدست آمده است صفر است پس مجموع مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم و نیز حاصلضرب آنها برابر ∞ است پس یکی از این مقادیر برابر ∞ است.

(۰/۵ نمره)

حل ثالثاً:

$$y' = \frac{-2x-8}{(x-2)^3}$$ (۰/۲۵ نمره) و $$y'' = \frac{4x+28}{(x-2)^4}$$ (۰/۲۵ نمره)

$$\begin{cases} y''=0 \Longrightarrow 4x+28=0 \Longrightarrow x=-7 \\ y = \frac{2(-7+1)}{(-7-2)^2} = \frac{-12}{81} = \frac{-4}{27} \\ \text{نقطه عطف } I(-7 \text{ و } \frac{-4}{27}) \end{cases}$$ (۰/۵ نمره)

(بحث در جدول ۱ نمره)

x	$-\infty$	-7	$+\infty$
y''	$-$	0	$+$
تقعر منحنی	بسمت پائین	نقطه عطف	بسمت بالا

حل رابعاً:

$$y' = \frac{-2x-8}{(x-2)^2}$$

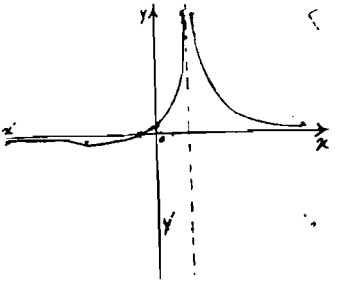
$$\begin{cases} y' = 0 \Longrightarrow x = -4 \\ y = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$x = 0 \Longrightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm\infty \Longrightarrow y = 0$$

$$y = 0 \Longrightarrow x = -1$$

$$y = \infty \Longrightarrow x = 2$$



(هرعمل ۰/۲۵ نمره ، رسم جدول ۰/۷۵ نمره ، رسم منحنی ۱ نمره ، رسم خط ۰/۷۵ نمره دارد).

x	$-\infty$		-4		-1		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0		$+$		$+$		∞	$-$	
y	0	↘	$-1\div 6$	↗	0	↗	$1\div 2$	↗	$+\infty$	↘	0
			min								

برای رسم خط $2y-2x=1 \Longrightarrow A(0,0/5)$ و $B(1,1/5)$

مسأله دوم: درو جود و علامت ریشه‌های معادله درجه سوم $x^3+3x^2+m=0$ بازای مقادیر مختلف m بحث کنید (۳ نمره)

اگر ۲ — یکی از ریشه‌های معادله درجه سوم باشد مقدار m و دو ریشه دیگر معادله را حساب کنید. (۱ نمره)

حل: (۰/۵ نمره) $x = \frac{1}{X} \Longrightarrow \frac{1}{X^3}+\frac{3}{X^2}+m=0$

(۰/۲۵ نمره) $mX^3+3X+1=0$

(۰/۲۵ نمره) $X^2+\frac{3}{m}X+\frac{1}{m}=0 \Longrightarrow P=\frac{3}{m}$ و $q=\frac{1}{m}$

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2 = \frac{27(4+m)}{m^3} \begin{array}{l} \Longrightarrow m = -4 \\ \Longrightarrow m = 0 \end{array}$$ (۰/۵ نمره)

(جدول و بحث آن ۱/۵ نمره دارد).

m	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
Δ		$+$	0	$-$	∞	$+$	
q		$-$		$-$	∞	$+$	
بحث		یك ریشه مثبت دارد		یك ریشه مثبت و دو ریشه منفی دارد		یك ریشه منفی دارد	
			یك ریشه ساده مثبت و یك ریشه مضاعف منفی دارد		$x_1 = x_2 = 0$ و $x_3 = -3$		

$x = -2 \Longrightarrow -8 + 12 + m = 0 \Longrightarrow m = -4$ (۰/۵ نمره)

$x^3 + 3x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow (x+2)(x^2 + x - 2) = 0$

$x = -2$ و 1 (۰/۵ نمره)

مسأله سوم ـ جدول و منحنی تغییرات تابع: $y = x \pm 2\sqrt{5 - x^2}$

را رسم کنید. (۴/۵ نمره)

حل: $y = x + 2\sqrt{5 - x^2}$

$5 - x^2 > 0 \Longrightarrow \sqrt{5} > x > -\sqrt{5}$ معین است (۰/۵ نمره)

$$y' = 1 - \frac{2x}{\sqrt{5 - x^2}} = \frac{\sqrt{5 - x^2} - 2x}{\sqrt{5 - x^2}}$$ (۰/۵ نمره)

$y' = 0 \Longrightarrow \sqrt{5 - x^2} - 2x = 0$

$\sqrt{5 - x^2} = 2x$

$5 - x^2 = 4x^2$

$5 = 5x^2 \Longrightarrow x = \pm 1$

$x=-1$ ریشه خارجی است

$x=1 \Longrightarrow y=1+4=5$

$x=0 \Longrightarrow y=\sqrt[2]{5}$

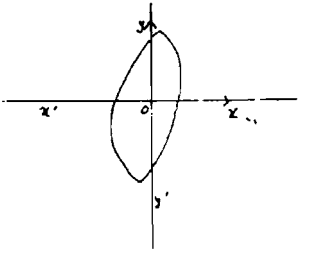
$y=0 \Longrightarrow x=-2$

$x=\pm\sqrt{5} \Longrightarrow y=\pm\sqrt{5}$

عملیات بالا دوهم ۱ نمره دارد

(رسم جدول هر کدام ۰/۵ نمره دارد)

رسم دو منحنی (۱ نمره)



x	$-\sqrt{5}$		-2		0		1		$+\sqrt{5}$
y'	∞	+		+		+	0	−	∞
y	$-\sqrt{5}$	↗		↗	$2\sqrt{5}$	↗	5 max	↘	$\sqrt{5}$

$$y=x-2\sqrt{5-x^2} \Longrightarrow y'=\frac{\sqrt{5-x^2}+2x}{\sqrt{5-x^2}}$$

$$y'=0 \Longrightarrow \sqrt{5-x^2}+2x=0 \Longrightarrow x=-1 \Longrightarrow y=-5$$

x	$-\sqrt{5}$		-1		0		2		$\sqrt{5}$
y'	∞	−		+		+		+	∞
y	$-\sqrt{5}$	↘	-5 min	↗	$-2\sqrt{5}$	↗	0	↗	$\sqrt{5}$

مسأله چهارم ـ تابع $y=8(x-1)(x^2-2x+3)^2$ مفروض است تابع اولیه این تابع را بقسمی تعیین کنید که بازای $x=1$ مقدار آن برابر ۱۶ باشد. (۲/۵ نمره)

حل:

$y=8(x-1)(x^2-2x+3)^3$

$y=4(2x-2)(x^2-2x+3)^3$ (۰/۵ نمره)

$Y=(x^2-2x+3)^4+C$ (۰/۵ نمره)

$x=1$ و $Y=16 \Longrightarrow 16=(1-2+3)^4+C$ (۰/۲۵ نمره)

$16=16+C \Longrightarrow C=0 \Longrightarrow Y=(x^2-2x+3)^4$ (۰/۲۵ نمره)

امتحان جبر سال ششم ریاضی دبیرستان‌ها و داوطلبان متفرقه کشور

در خرداد ماه ۱۳۴۶

(مدت ۲/۵ ساعت)

۳۰۶۶- تابع $y=\frac{27x+a}{(2x+b)^3}$ مفروض است:

الف- a و b را چنان پیدا کنید که منحنی نمایش تغییرات تابع فوق محور طولها را در نقطه‌ای به طول $x=1$ قطع کرده و ضریب زاویه‌ای خط مماس بر منحنی در این نقطه، $m=-27$ باشد. (۱/۵ نمره)

ب- جدول و منحنی C نمایش تغییرات تابع $y=\frac{27(x-1)}{(2x-3)^3}$ را رسم کنید. (۳/۵ نمره)

ج- جهت تقعر و تحدب منحنی C را نسبت به yهای مثبت پیدا کرده و مختصات نقطه عطف منحنی C را پیدا کنید. (۱/۵ نمره)

د- سطح محصور بین منحنی c و محورهای مختصات را در ناحیهٔ اول پیدا کنید. (۱/۵ نمره)

ه - در تعداد ریشه‌های معادلهٔ: (۱/۵ نمره)

$$k(2x-3)^2=27(x-1)$$

بر حسب مقادیر مختلف k بدون استفاده از منحنی C بحث کنید. (۱/۵ نمره)

حل: $m=-27=y'$ مماس در A و $A(1,0)$ (۰/۲۵ نمره)

در تابع $A \Longrightarrow 27(1)+a=0 \Longrightarrow a=-27$ (۰/۵ نمره)

$$y'=\frac{-108x+27b-6a}{(2x+b)^4}$$ (۰/۵ نمره)

$$-27=\frac{-108(1)+27b-6(-27)}{(2+b)^4} \Longrightarrow b=-2 \text{ و } -4$$ (۰/۲۵ نمره)

$x=-2$ قابل قبول نیست

ب- $y=\frac{27(x-1)}{(2x-3)^3}$ و $y'=\frac{27(-2x+3)}{(2x-3)^4}$ (۰/۷۵ نمره)

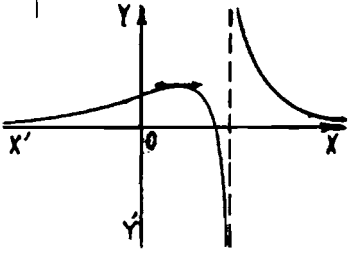
$y'=0 \Longrightarrow x=0/75 \Longrightarrow y=2$ (۰/۲۵ نمره)

$x=\pm\infty \Longrightarrow y=0$ (۰/۲۵ نمره)

$y=\pm\infty \Longrightarrow x=1/5$ (۰/۲۵ نمره)

$y=0 \Longrightarrow x=1$ ۰/۲۵ نمره $x=0 \Longrightarrow y=1$ (۰/۲۵ نمره)

x	$-\infty$		۰		۰/۷۵		۱		۱/۵		$+\infty$
y'		+		+	۰	−		−	∞	−	
y	۰	↗	۱	↗	۲	↘	۰	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	۰



(۰/۷۵ نمره) رسم جدول

(۰/۷۵ نمره) رسم منحنی

ج. $y'' = \frac{۲۷ \times ۱۲(۲x-۱)}{(۲x-۳)^۵}$

(۰/۵ نمره)

$y'' = ۰ \Longrightarrow x = ۰/۵$ و $y = ۲۷ \div ۱۶$ (۰/۵ نمره)

x	$-\infty$		۰/۵		۱/۵		$+\infty$
y''		+	۰	−	∞	+	
	انحنای منحنی	تقعر بسوی yهای مثبت		تقعر بسوی yهای منفی		تقعر بسوی yهای مثبت	

(۰/۵ نمره)

د: $y = \frac{۲۷}{۲} \frac{(۲x-۳+۱)}{(۲x-۳)^۳} = \frac{۲۷}{۲}[\frac{۱}{(۲x-۳)^۲} + \frac{۱}{(۲x-۳)^۳}]$

$y = ۱۳/۵[(۲x-۳)^{-۲} + (۲x-۳)^{-۳}]$ (۰/۷۵ نمره)

$Y = \frac{۲۷}{۲}[-\frac{۱}{۲}(۲x-۳)^{-۱} - \frac{۱}{۴}(۲x-۳)^{-۲}] = -\frac{۲۷}{۴}[\frac{۱}{۲x-۳} + \frac{۱}{۲(۲x-۳)^۲}]$

(۰/۵ نمره)

واحد مربع $S = F(۱) - F(۰) = \frac{۳}{۲}$ و $F(۰) = \frac{۱۵}{۸}$ و $F(۱) = \frac{۲۷}{۸}$

(۰/۲۵ نمره) (۰/۲۵ نمره) (۰/۲۵ نمره)

حل: ه - ۰/۲۵ نمره $۲x - ۳ = X \Longrightarrow x = \frac{X+۳}{۲}$

$KX^۳ = ۲۷(\frac{X+۳}{۲} - ۱) \Longrightarrow X^۳ - \frac{۲۷}{۲K}X - \frac{۲۷}{۲K} = ۰$

(۰/۲۵ نمره)

$$4p^2+27q^2=4\left(\frac{-27}{2K}\right)^3+27\left(\frac{-27}{2K}\right)^2=\frac{27^2(2K-4)}{8K^3}$$

$2K-4=0 \Longrightarrow K=2$ و $8K^3=0 \Longrightarrow K=0$ ۰/۵ نمره

K	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$4p^2+27q^2$		$+$	∞	$-$	0	$+$	
بحث		یک ریشه حقیقی دارد		سه ریشه حقیقی دارد		یک ریشه حقیقی دارد	

یک ریشه ساده و یک ریشه مضاعف دارد | $x_1=x_2=\infty$ و $x_3=1$ | ۱۵ ۰ نمره)

۳۰۶۷ـ تابع $y^2-2y(x+2)-(a-1)x^2+4x=0$ مفروض است:

اولاـ a را چنان پیدا کنید که عرض نقطه ماکزیمم منحنی تابع فوق، $2\sqrt{2}+2$ باشد. (۱/۵ نمره)

ثانیاـ ثابت کنید که نقطه $O'\left|\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right.$ مرکز تقارن منحنی C_1 بمعادله:

$y^2-2y(x+2)+2x^2+4x=0$ می‌باشد. (۱ نمره)

ثالثاـ جدول و منحنی C_1 نمایش تغییرات تابع $y=x+2\pm\sqrt{4-x^2}$ را رسم کنید. (۳/۵ نمره)

رابعاـ از مبدأ مختصات، خطی با ضریب زاویه‌ای m مرور می‌دهیم تا منحنی C_1 را بغیر از مبدأ، در نقطه A قطع کند، مطلوب است تعیین m برای آنکه $OA=2$ باشد:

خامساـ نقطه‌ای مانند M بر منحنی C_1 یافت می‌شود که چون به نقطه O (مبدأ مختصات) وصل کنیم، OM ماکزیمم باشد، مطلوب است تعیین معادله‌ای که طول نقطه M را بدهد. (۲ نمره)

حل: ۰/۲۵ نمره $(a-1)x^2+2(y-2)x-y^2+4y=0$

$\Delta'=(y-2)^2-(a-1)(4y-y^2)=(y-2)^2+(a-1)[(y-2)^2-4]=0$ ۰/۷۵ نمره

$y=2\sqrt{2}+2 \Longrightarrow (2\sqrt{2})^2+(a-1)(8-4)=0 \Longrightarrow a=-1$ ۰/۵ نمره

ثانیاـ ۰/۲۵ نمره $x=X$ و $y=Y+2$

$(Y+2)^2-2(Y+2)(X+2)+2X^2+4X=0$

$Y^2-2XY+2X^2-4=0$ ۰/۵ نمره

چون دراین معادله باتبدیل X به $-X$ و Y به $-Y$ معادله منحنی تغییر نمیکند پس نقطه $O'(0,2)$ مرکز تقارن منحنی است ۰/۲۵ نمره

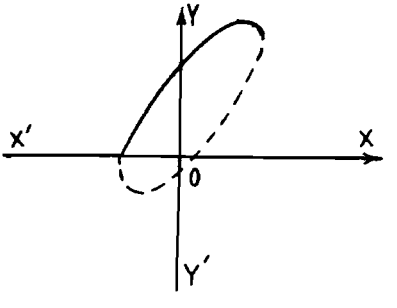
ثالثاً- ۰/۲۵ نمره معین است $4-x^2>0 \Longrightarrow 2>x>-2$

$$y'=\frac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}=$$ ۰/۵ نمره $$\begin{cases} y'=0 \\ x=\sqrt{2} \end{cases}$$ ۰/۲۵ نمره

$x=\sqrt{2} \Longrightarrow y=2\sqrt{2}+2$ ۰/۲۵ نمره و $x=0 \Longrightarrow y=4$ ۰/۲۵ نمره

x	-2		0		$\sqrt{2}$		2
y'		$+$		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$2+2\sqrt{2}$	$\searrow$	4

جدول ۰/۵ نمره رسم دوشاخه منحنی ۱/۵ نمره



رابعاً- $y^2-2y(x+2)+2x^2+4x=0$ و $y=mx$

$m^2x^2-2mx^2-4mx+2x^2+4x=0$

$(m^2-2m+2)x^2-4(m-1)x=0$ ۰/۲۵ نمره

$x=0$ و $\frac{4(m-1)}{m^2-2m+2} \Longrightarrow O \mid$ و $A\left[\frac{4(m-1)}{m^2-2m+2}, \frac{4m(m-1)}{m^2-2m+2}\right]$

$OA=2 \Longrightarrow OA^2=4 \Longrightarrow X_A^2+Y_A^2=4$ ۰/۵ نمره

$$\frac{16(m-1)^2}{(m^2-2m+2)^2}+\frac{16m^2(m-1)^2}{(m^2-2m+2)^2}=4 \Longrightarrow \frac{16(m-1)^2(m^2+1)}{(m^2-2m+2)^2}=4$$

$3m^2-4m^2=0 \Longrightarrow m=0$ و $\frac{4}{3}$ ۱ نمره

خامساً- ۰/۲۵ نمره $M(x$ و $x+2\pm\sqrt{4-x^2})$

$$Z=OM^2=x^2+(x+2\pm\sqrt{4-x^2})^2$$

$$Z=x^2+4x+8\pm2(x+2)\sqrt{4-x^2}$$ ۰/۵ نمره

$$Z'=2x+4\pm2\sqrt{4-x^2}\pm\frac{-2x(x+2)}{\sqrt{4-x^2}}=0$$ ۰/۷۵ نمره

$$Z'=0\Longrightarrow2(x+2)\left[\sqrt{4-x^2}\pm2(1-x)\right]=0$$ ۰/۲۵ نمره

$$\sqrt{4-x^2}\pm2(1-x)=0\Longrightarrow5x^2-8x=0$$ ۰/۲۵ نمره

امتحان جبر سال ششم ریاضی دبیرستانها و داوطلبان متفرقه کشور

در شهریورماه ۱۳۴۶

(مدت ۲/۵ ساعت)

۳۰۶۸ـ تابع $y=\dfrac{x^2+ax+2a}{x^2+ax-2a}$ ، $(a\neq0)$ مفروض است.

۱ـ جهت تغییرات و ماکزیمم یا مینیمم این تابع را به‌ازای مقادیر مختلف a تعیین کنید. (۲ نمره)

۲ـ a را طوری تعیین نمائید که خط $x=-\frac{1}{2}$ محور تقارن منحنی تابع باشد. (۱ نمره)

۳ـ جدول و منحنی (C) نمایش تغییرات تابع:

$$y=\frac{x^2+x+2}{x^2+x-2}$$

یدکه ریشه‌هایش طول‌های نقاط تقاطع خط $y=mx$ با منحنی (C) باشد. ثابت کنید به‌ازای $m=1$ این خط در نقطه‌ای مانند A بر منحنی مماس و در نقطه B با آن متقاطع است؛ مختصات نقاط A و B را بدست آورید. (۲ نمره)

حل: ۰/۵ نمره

$$y'=\frac{-4a(2x+a)}{y^2}$$

$$y'=0\Longrightarrow x=\frac{-a}{2}\ \text{و}\ y=\frac{a-8}{a+8}$$ ۰/۵ نمره

$a<0$ ۰/۵ نمره

x	$-\infty$		$-0/5a$		$+\infty$
y'		−	0	+	
y	1	↘	min	↗	1

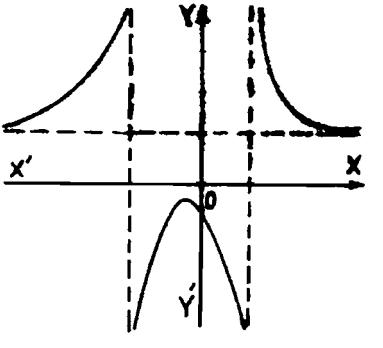
$a>0$ ۰/۵ نمره

x	$-\infty$		$-0/5a$		$+\infty$
y'		+	0	−	
y	1	↗	max	↘	1

$x = X - \frac{1}{2}$ و $y = Y$ ۰/۲۵ نمره

$$Y = \frac{2X^2 + 2(a-1)X + 6a + 1}{2X^2 + 2(a-1)X - 10a + 1}$$ ۰/۲۵ نمره

برای اینکه با تبدیل X به X − معادله منحنی تغییر نکند باید $a - 1 = 0$ یا $a = 1$ باشد. ۰/۵ نمره



ثانیاً

$y' = \frac{-4(2x+1)}{9^2}$ ۰/۵ نمره

$y' = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$ و $y = \frac{-7}{9}$

۰/۲۵ نمره

$x = \pm\infty \Rightarrow y = 1$ ۰/۲۵ نمره

$y = \pm\infty \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$

$x = 1$ و -2 ۰/۵ نمره

$x = 0 \Rightarrow y = -1$ ۰/۲۵ نمره

شکل ۱ نمره دارد

x	$-\infty$		-2		$-0/5$		0		1		$+\infty$
y'		+		+	0		−		−		
y	1	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	$\frac{-7}{9}$	↘	-1	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	1

۴- ۰/۲۵ نمره $y = mx \Rightarrow mx = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 + x - 2}$

$mx^2 + (m-1)x^2 - (2m+1)x - 2 = 0$ ۰/۲۵ نمره

$m = 1 \Rightarrow x^2 - 3x - 2 = 0$ ۰/۲۵ نمره

$4p^3 + 27q^2 = 4(-3)^3 + 27(-2)^2 = 0$ ریشه مضاعف دارد ۰/۲۵ نمره

$x_1 = x_2 = \frac{-3q}{2p} = \frac{-3(-2)}{2(-3)} = -1 \Rightarrow A(-1 \text{ و } -1)$ ۰/۷۵ نمره

$x_2 = -2x_1 = -2(-1) = +2 \Rightarrow B(2 \text{ و } 2)$ ۰/۵ نمره

۳۰۶۹- تابع $y=x^4+ax^2+b$ مفروض است :

۱- ضرایب a و b را آنطور بیابید که قائم بر منحنی در نقطه N از آن، خط (D) به معادله $24y=-x+2$ باشد، (طول نقطه N برابر ۲ است). (۱/۵ نمره)

۲- جهت تقعر یا تحدب و نقاط عطف منحنی (C_1) به معادله: $y=x^4-2x^2-8$ را مشخص و تعیین نمایید (۳ نمره)

۳- منحنی (C_1) نمایش تغییرات تابع دومجهولی: $y=(x^2-4)(x^2+2)$ را رسم کنید.

پای قائم $x=2 \Longrightarrow y=0 \Longrightarrow A(2,0)$ ۰/۲۵ نمره

قائم $m=\frac{-1}{24}=\frac{-1}{y'} \Longrightarrow y'=24$ ۰/۲۵ نمره

$y'=4x^3+2ax \Longrightarrow 24=32+4a \Longrightarrow a=-2$ ۰/۵ نمره

در تابع $A \Longrightarrow 0=16+4a+b \Longrightarrow 0=16-8+b \Longrightarrow b=-8$ ۰/۵ نمره

۲- $y'=4x^3-4x$ و $y''=12x^2-4$ ۰/۲۵ نمره

$y''=0 \Longrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow y=\frac{-77}{9}$ ۰/۵ نمره

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
y''		+	0	−	0	+	
انحنای منحنی		تقعر بسوی yهای مثبت	$\frac{-77}{9}$ عطف	تقعر بسوی yهای منفی	$\frac{-77}{9}$ عطف	تقعر بسوی yهای مثبت	

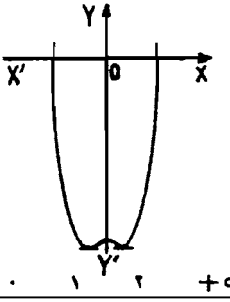
$y'=4x^3-4x$

$y'=0 \Longrightarrow x=0 \text{ و } \pm 1$ ۰/۵ نمره

$x=0 \Longrightarrow y=-8$
$x=\pm 1 \Longrightarrow y=-9$ } ۰/۲۵ نمره

$y=0 \Longrightarrow x=\pm 2$ ۰/۲۵ نمره

$x=\pm\infty \Longrightarrow y=\infty$ ۰/۲۵ نمره



x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		−		−	0	+	0	−	0	+			
y	$+\infty$	↘	0	↘	-9	↗	-8	↘	-9	↗	0	↗	$+\infty$

جدول ۵/۰ نمره و شکل ۷۵/۰ نمره دارد

۳۰۷۰ اولاً ـ منحنی (H) بمعادله $y=x+\sqrt{x^2+4x}$ را رسم نمایید.

ثانیاً ـ هرگاه M نقطه‌ای ازمنحنی (H) بطول α باشد، مطلوب است تعیین معادله مکان هندسی نقطه M' قرینه M نسبت به نقطه $\omega(-2,-2)$ وقتی α تغییر کند.

پس از آن، بدون هیچگونه محاسبه‌ای، منحنی $y=x-\sqrt{x^2+4x}$ را در همان دستگاه محورهای مختصات که منحنی (H) را رسم کرده‌اید، رسم نمایید.

حل: (۰/۲۵ نمره) معین است $x^2+4x\geq 0 \Longrightarrow x\geq 0$ و $x\leq -4$

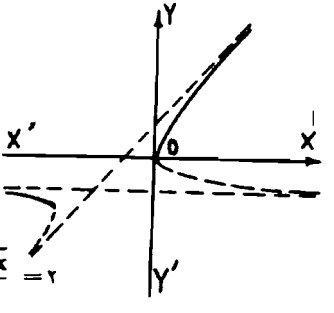
$$y'=\frac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{\sqrt{x^2+4x}}$$

۰/۲۵ نمره

$$\begin{cases} x=-\infty \Longrightarrow y=-\infty+\infty \\ y=-2 \end{cases}$$

۰/۵ نمره

$x=+\infty \longrightarrow y=\infty$ ۰/۲۵ نمره



$$m=\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\frac{x+\sqrt{x^2+4x}}{x}=2$$

$$n=\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\left[-x+\sqrt{x^2+4x}\right]=2 \Longrightarrow y=2x+2$$ معادله مجانب

بدست آوردن m و n هرکدام ۰/۲۵ نمره دارد.

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
y'		$-$	∞	$\infty+$	$+$
y	-2	↘	-4	0 ↗	$+\infty$

حل: ثانیاً ـ ۰/۲۵ نمره $M(\alpha,\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\alpha})$

$$X_\omega=\frac{X_{M'}+X_M}{2}\Longrightarrow -2=\frac{X_{M'}+\alpha}{2}$$ ۰/۲۵ نمره

$$Y_\omega=\frac{Y_{M'}+Y_M}{2}\Longrightarrow -2=\frac{Y_{M'}+\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\alpha}}{2}$$

$$M'\begin{cases} X=-4-\alpha \Longrightarrow \alpha=-4-X \\ Y=-4-\alpha-\sqrt{\alpha^2+4\alpha} \end{cases}$$ (۰/۲۵ نمره)

$$Y=-۲+۲+X-\sqrt{X^۲+۱۶+۸X-۱۶-۴X}$$

$$Y=X-\sqrt{X^۲+۴X}$$ ۰/۵ نمره

امتحان جبر سال ششم ریاضی دبیرستانها و داوطلبان متفرقه کشور

در خردادماه ۱۳۴۷

(مدت ۲/۵ ساعت)

۳۰۷۱ـ اولاـ جدول و منحنی (C) نمایش تغییرات تابع :

$$y=\frac{x^۲-۲x}{(x-۱)^۲}$$

را رسم کنید .

ثانیاـ به‌کمك منحنی (C) ریشه‌های معادله :

$$(m-۱)x^۲-۲(m-۱)x+m=۰$$

را با دوعدد ۱ و ۲ مقایسه کرده ونتیجه‌را درجدولی مرتباً بنویسید.

ثالثاً ـ ثابت‌کنید خط $x=۱$ محور تقارن منحنی (C) است.

رابعاً ـ مساحت‌سطح‌محصور بین‌منحنی (C) ومحور xها ودوخط $x=۰$ و $x=-۲$ همچنین حجم‌حادث ازدوران این‌سطح‌را حول‌محور xها حساب‌کنید.

خامساً ـ ازنقطه $M\left|\begin{matrix}۱\\ \frac{۱}{۲}\end{matrix}\right.$ واقع درصفحه محورهای مختصات خط MN را بر منحنی (C) عمود می‌کنیم (N پای عمود است)، ثابت‌کنید طول‌نقطه N از معادله:

$$(x-۱)^۶+(x-۱)^۲=۲$$

بدست می‌آید واین‌معادله‌را حل‌کرده طول‌های نقطه Nرا بدست‌آورید.

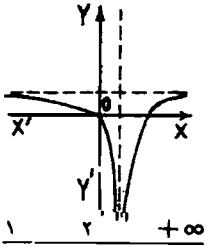
$y'=\frac{۲}{(x-۱)^۳}$ ۱ نمره

$y'=\infty \Longrightarrow x=۱$ ۰/۲۵ نمره

$x=\pm\infty \Longrightarrow y=۱$ ۰/۵ نمره

$x=۱ \Longrightarrow y=-\infty$ ۰/۵ نمره

$y=۰ \Longrightarrow x=۰$ و ۲ ۰/۲۵ نمره



x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
y'		−		−	∞	+		+	
y	۱	↘	۰	↘	$-\infty$ | $-\infty$	↗	۰	↗	۱

جدول ۲۵ / ۰ نمره وشکل ۰/۷۵ نمره دارد

حل: ثانیاً ـ ابتداء دوخط $x=2$ و $x=0$ رارسم میکنیم ۰/۵ نمره

۰/۵ نمره $A(2,0)$ و $x=2 \Longrightarrow y=0$ $A(1,\infty)$ و $x=1 \Longrightarrow y=\infty$

m	$-\infty$		0		1		$+\infty$
بحث	$x''<1<x'<2$			$x''<1<2<x'$		ریشه ندارد	
		$x''=0$ و $x'=2$			$x'=x''=\infty$		

(۱/۵ نمره)

حل: ثالثاً ـ $x=X+1$ و $y=Y$

$$y=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}=1-\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$Y=1-\frac{1}{(X+1-1)^2}=1-\frac{1}{X^2}=\frac{X^2-1}{X^2}$$ ۰/۲۵ نمره

چون باتبدیل X به X ـ معادله منحنی تغییر نمیکند پس خط $x=1$ محور تقارن منحنی است ۰/۵ نمره

رابعاً ـ

$$y=1-\frac{1}{(x-1)^2}=1-(x-1)^{-2}$$

$$Y=x+(x-1)^{-1}+c=x+\frac{1}{x-1}+c$$ (۱ نمره)

$$F(0)=-1+c \text{ و } F(-2)=-\frac{7}{3}+c$$

$$S=\left|F(0)-F(-2)\right|=\frac{4}{3}$$ واحد مربع ۰/۵ نمره

$$y^2=1+\frac{1}{(x-1)^4}-\frac{2}{(x-1)^2}$$

$$g(x)=\pi y^2=\pi\left[1+\frac{1}{(x-1)^4}-\frac{2}{(x-1)^2}\right]$$

$$g(x)=\pi\left[1+(x-1)^{-4}-2(x-1)^{-2}\right]$$

$$G(x)=\pi\left[x-\frac{1}{3(x-1)^3}+\frac{2}{x-1}\right]+c$$ ۰/۵ نمره

$$G(0)=-\frac{5}{3}\pi+C \text{ و } G(-2)=\frac{-215}{81}\pi+c$$

$V = G(0) - G(-2) = \frac{80\pi}{81}$ واحد مکعب ۰/۵ نمره

حل: خاصاً ـ اگر طول نقطه N پای عمود α فرض شود نتیجه میشود.

$N(\alpha, \frac{\alpha^2 - 2\alpha}{(\alpha-1)^2})$ و $m = \frac{-1}{y'} = -\frac{(\alpha-1)^3}{2}$ قائم

$$y - \frac{\alpha^2 - 2\alpha}{(\alpha-1)^2} = \frac{-(\alpha-1)^3}{2}(x - \alpha)$$

$$M(1, -\frac{1}{2}) \Longrightarrow \frac{1}{2} - \frac{(\alpha-1)^3 - 1}{(\alpha-1)^2} = \frac{-(\alpha-1)^3(1-\alpha)}{2}$$ ۱ نمره

پس از طرفین وسطین کردن نتیجه میشود

$(\alpha-1)^6 + (\alpha-1)^2 = 2$ ۰/۵ نمره

۳۰۷۷ـ مطلوب است رسم جدول و منحنی (c') نمایش تغییرات تابع:

$$y = \pm\frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x-1}$$

حل: ۰/۵ نمره $x^2 - 2x \geq 0 \Longrightarrow x \geq 2$ و $x \leq 0$

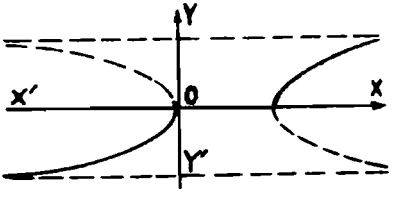
منحنی تابع $y = \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-1}$ قرینه منحنی تابع $y = -\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-1}$ نسبت بمحور طولها میباشد و مشتق تابع اول بصورت $y' = \frac{1}{(x-1)^2\sqrt{x^2-2x}} > 0$ می باشد

۱ نمره

۰/۲۵ نمره $y = 0 \Longrightarrow x = 0$ و 2 ۰/۷۵ نمره $x = \pm\infty \Longrightarrow y = \pm 1$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	∞		∞	+	
y	-1	↗	0		0	↗	1

شکل منحنی ۰/۷۵ نمره



۳۰۷۳ـ اولاـ برحسب مقادیر مختلف m درو‌جود ریشه‌های معادله :

$$x^{۳}+mx^{۲}+۲=۰$$

بحث کنید.

ثانیاـ اگر x' و x'' و x''' ریشه‌های معادله‌فوق فرض‌شوند، مطلوب‌است محاسبه عبارت زیر به‌کمك روابط بین ضرایب وریشه‌های‌معادله درجه‌سوم.

$$(x'x'')^{۳}+(x'x''')^{۳}+(x''x''')^{۳}$$

حل: ۱ نمره $x=\frac{۱}{X} \Longrightarrow \frac{۱}{X^{۳}}+\frac{m}{X^{۲}}+۲=۰ \Longrightarrow X^{۳}+\frac{m}{۲}X+\frac{۱}{۲}=۰$

۲ نمره $۴P^{۳}+۲۷q^{۲}=\frac{۲m^{۳}+۲۷}{۴}=۰ \Longrightarrow m=-\frac{۳\sqrt[۳]{۴}}{۲}$

m	$-\infty$	$-\frac{۳\sqrt[۳]{۴}}{۲}$	$+\infty$
$۴p^{۳}+۲۷q^{۲}$	$-$	۰	$+$
بحث	سه‌ریشه‌دارد	ریشه‌مضاعف‌دارد	یك‌ریشه‌دارد

ثانیاـ اگر $a+b+c=۰$ باشد داریم ۱ نمره $a^{۳}+b^{۳}+c^{۳}=۳abc$

$$(x'x'')^{۳}+(x'x''')^{۳}+(x''x''')^{۳}=۳x'^{۲}x''^{۲}x'''^{۲}=\frac{۳d^{۲}}{a^{۲}}$$

$$=\frac{۳\times ۴}{۱}=۱۲$$ ۱ نمره

امتحان جبر سال ششم ریاضی دبیرستانها و داوطلبان متفرقه کشور

در شهریور ۱۳۴۷

(مدت ۲/۵ ساعت)

۳۰۷۴ـ تابع $y=x^{۳}+ax+b$ مفروض‌است:

الفـ دوپارامتر a و b را طریقی تعیین‌کنید تا نقطه می‌نیمم منحنی (C) نمودار تابع فوق روی محور طولها درنقطه‌ای بطول $x=۱$ واقع‌شود. (۱/۵ نمره)

بـ جدول ومنحنی (C) نمایش تغییرات‌تابع $y=x^{۳}-۳x+۲$ را رسم‌کنید. (۳/۵ نمره)

جـ مختصات نقطه عطف‌منحنی (C) را پیداکرده و ثابت‌کنید این‌نقطه مرکز تقارن

منحنی (C است . (۱/۵ نمره)

د ـ در تعداد وعلامت ریشه‌های معادله درجه سوم.

$x^3-3x+2-m=0$

برحسب مقادیر مختلف m بحث کنید (هم مستقیما و هم بکمك منحنی C) .

(۲/۵ نمره)

ه ـ سطح محصور بین منحنی C و محورxها را حساب کنید. (۱/۵ نمره)

حل: الف. $y'=3x^2+a$ و نقطه $A(1,0)$ $\min$

$0=1+a+b$ و (۱ نمره) $0=3(1)+a \Longrightarrow a=-3$

(۰/۵ نمره) $0=1-3+b \Longrightarrow b=2$

حل: ب: $y'=3x^2-3$

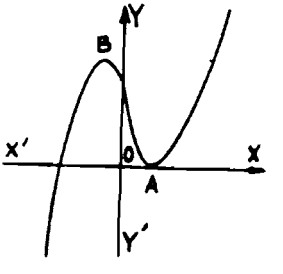
$y'=0 \Longrightarrow x=\pm 1$ و $y=0$ ۱ نمره

$x=0 \Longrightarrow y=2$ ۰/۲۵ نمره

$y=0 \Longrightarrow x=1$ و -2 ۰/۷۵ نمره

$x=\pm\infty \Longrightarrow y=\pm\infty$ ۰/۲۵ نمره

رسم شکل ۰/۵ نمره



x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
y'			$+$		0		$-$		0		$+$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
					max				min		

حل: ج. ۰/۵ نمره $y'=3x^2-3$ و $y''=6x \Longrightarrow$ نقطه عطف $I(0$ و $2)$

$x=X$ و $y=Y+2 \Longrightarrow Y+2=X^3-3X+2$

$Y=X^3-3X$ ۰/۵ نمره

چون با تبدیل $-X$ به X و $-Y$ به Y معادله منحنی تغییر نمیکند پس مبدأ جدید یعنی

نقطه $I(0$ و $2)$ مرکز تقارن منحنی است ۰/۵ نمره

حل: د - ۰/۵ نمره $4p^3+27q^2=27(m^2-4m)=0 \Longrightarrow m=0$ و 4

$q=2-m=0 \Longrightarrow m=2$ ۰/۵ نمره

m	$-\infty$			۲		۴		$+\infty$
$4p^3+27q^2$		+	۰	−	۱	−		+
q		+	۱	+	۰	−	۱	−
بحث		یک ریشه منفی دارد		دو ریشه مثبت و یک ریشه منفی		دو ریشه منفی و یک ریشه مثبت		یک ریشه مثبت دارد

$x_1 = x_2 > 0$ و $x_3 < 0$ | $x_1 = x_2 < 0$ و $x_3 > 0$

$x_1 = 0$ و $x_2 = x_3 = \pm\sqrt{3}$

بحث و جدول ۱ نمره دارد

از روی شکل همان بحث فوق نتیجه میشود (۰/۵ نمره)

حل: ه ـ ۰/۵ نمره $Y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + c$

$S = F(1) - F(-2) = \frac{27}{3}$ و $F(-2) = -6 + c$ و $F(1) = \frac{3}{3} + e$

(۱ نمره)

۳۰۷۵ـ تابع ـ $y = \frac{ax^2 - 5x + a}{3x^2 - 5ax + 3}$ مفروض است: $a \neq \pm\sqrt{3}$

۲ـ مختصات نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع فوق را پیدا کنید (۱ نمره) خواهید دید که طول این نقاط بستگی به a ندارد سپس پارامتر a را بطریقی تعیین کنید که مقدار ماکزیمم یا مینیمم تابع فوق برابر $\frac{1}{3}$ شود. (۱ نمره)

۲ـ جدول و منحنی (C_1) نمایش تغییرات تابع: $y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{3x^2 - 10x + 3}$ را رسم کنید. (۳/۵ نمره)

حل: ۱ـ (۰/۷۵ نمره) $y' = \frac{5(a^2-3)(1-x^2)}{v^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

۰/۵ نمره $x = 1 \Rightarrow y = \frac{2a-5}{6-5a}$ و $x = -1 \Rightarrow y = \frac{2a-5}{6+5a}$

۰/۵ نمره $y = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2a-5}{6-5a} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 2$

$y = \frac{1}{4} \Longrightarrow \frac{2a-5}{6+5a} = \frac{1}{4} \Longrightarrow a = \frac{-14}{3}$ (۰/۵ نمره)

حل: ۲ـ (۰/۷۵ نمره)

$y' = \frac{5(1-x^2)}{v^2}$ $\quad y' = 0$ $\quad x = \pm 1$

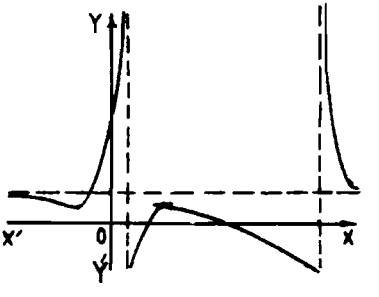
$x = 1 \Longrightarrow y = \frac{1}{4}$ ۰/۲۵ نمره

$x = -1 \Longrightarrow y = \frac{9}{16}$ ۰/۲۵ نمره

$y = 0 \Longrightarrow x = 2$ و ۰/۵ نمره

$x = \pm\infty \Longrightarrow y = \frac{2}{3}$ ۰/۲۵ نمره

$y = \pm\infty \Longrightarrow x = 3$ و $\frac{1}{3}$ ۰/۲۵ نمره



و شکل ۰/۷۵ نمره

جدول ۱ نمره

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		1		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0			$+$				$+$	0				0	$-$	
y	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	$\frac{9}{16}$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$ $\searrow$ $\frac{2}{3}$

۳۰۷۶ـ تابع $x^2 - 2x - y^2 = 0$ که منحنی تغییرات آنرا (C_4) می‌نامیم مفروض است

اولاـ بدون استفاده ازمشتق ثابت‌کنید که‌منحنی (C_4) دارای‌نقطه ماکزیمم‌یامی‌نیمم نیست (۰/۵ نمره)

ثانیاـ منحنی C نمایش تغییرات‌تابع $y = \pm\sqrt{x^2 - 2x}$ را رسم‌کنید. (۲/۵ نمره)

ثالثاـ معادلات خطوط مماس وقائم برمنحنی (C_4) را در نقطه‌ای بطول $x = 3$ که دارای عرض‌مثبت میباشد بنویسید (۱ نمره)

حل: اولاـ $x^2 - 2x - y^2 = 0$ و $\Delta' = 1 + y^2 > 0$

بنابراین Δ' هیچگاه‌صفر نمیشود پس $\max$ و $\min$ ندارد (۰/۵ نمره)

تابع معین $x^2-2x>0$

است $x>2$ و $x<0$

$$y'=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$$

$$\begin{cases} x=\pm\infty \\ y=+\infty \end{cases}$$ (۰/۲۵ نمره)

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$ (۰/۲۵ نمره)

$$\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\pm(x-1) \\ \text{معادلات مجانبها} \end{cases}$$ (۰/۵ نمره)

جدول ۴/۵ نمره شکل ۰/۷۵ نمره

$x=3 \Longrightarrow y=\sqrt{3}$ و $y'=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} \Longrightarrow$ مماس $m=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۰/۵ نمره)

$y-\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}(x-3) \Longrightarrow \sqrt{3}y-2x+3=0$ ۰/۵ نمره

امتحان جبر کلاسهای ششم ریاضی و متفرقه کشور
در خرداد ماه ۱۳۴۸
(مدت ۲/۵ ساعت)

۳۰۷۷- تابع $y=\frac{ax^2+bx+c}{x}$ مفروض است:

الف- پارامترهای a و b و c را طوری معین کنید که خط $y=x$ مجانب نمودار تابع فوق بوده و عرض‌ها نیم منحنی نمایش آن $y=2$ باشد (۱/۵)

ب- جدول و منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x^2+1}{x}$ را رسم کنید (۳)

ج- از مبدأ مختصات دو خط بر منحنی (C) عمود می‌کنیم مطلوبست محاسبهٔ مختصات پای این عمودها (۱/۵)

د ـ دو نقطه روی محور xها یافت میشود که چون از آن نقاط دو مماس بر منحنی (C) رسم کنید دو مماس برهم عمود باشند مطلوبست تعیین مختصات این نقاط (۲ نمره)

ه ـ بکمك منحنی (C) معلوم کنید معادله $m = \frac{(2\sin\alpha+1)^2+1}{2\sin\alpha+1}$ به ازاء چه مقادیری از m دارای جواب است (۲ نمره)

حل: الف ـ (۰/۲۵ نمره) $y = \frac{ax^2+bx+c}{x} = ax+b+\frac{c}{x}$

پس $y = ax+b$ معادله خط مجانب است

$ax+b \equiv x \Longrightarrow a=1 \text{ و } b=0$ (۰/۵ نمره)

$y = \frac{x^2+c}{x} \Longrightarrow x^2-yx+c=0 \Longrightarrow \Delta = y^2-4c=0$ (۰/۵ نمره)

$y=2 \Longrightarrow 4-4c=0 \Longrightarrow c=1$ (۰/۲۵ نمره)

حل: ب ـ (۰/۵ نمره) $y' = \frac{x^2-1}{x^2}$ و $y'=0 \Longrightarrow x=\pm 1$

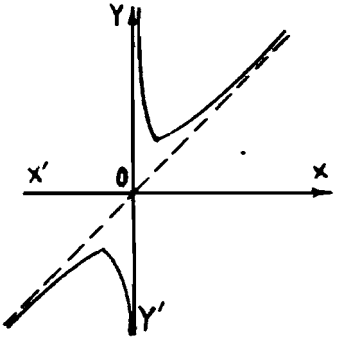
$\begin{cases} x=+1 \\ y=2 \end{cases}$ (۰/۲۵ نمره)

$\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$ (۰/۲۵ نمره)

$\begin{cases} x=\pm\infty \\ y=\pm\infty \end{cases}$ (۰/۲۵ نمره)

$\begin{cases} y=\pm\infty \\ x=0 \end{cases}$ (۰/۲۵ نمره)

$\{y=x$ (۰/۲۵ نمره) مجانب مایل



رسم منحنی و مجانب ۰/۷۵ نمره رسم جدول ۰/۵ نمره

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	0	−		−	0	+	
y	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

حل: ج- ۰/۵ نمره $m_{\text{قائم}} = \frac{-1}{y'} = \frac{-\alpha^2}{\alpha^2-1}$ و $N(\alpha, \frac{\alpha^2+1}{\alpha})$ پای قائم

۰/۲۵ نمره معادله خط قائم $y - \frac{\alpha^2+1}{\alpha} = \frac{-\alpha^2}{\alpha^2-1}(x-\alpha)$

۰/۲۵ نمره مختصات در معادله خط $\Longrightarrow -2\alpha^4+1=0$

۰/۵ نمره $\alpha = \pm\frac{\sqrt[4]{8}}{2} \Longrightarrow N, N'(\pm\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$ و $\pm\frac{\sqrt[4]{2}(\sqrt{2}+2)}{2})$

حل: د- ۰/۲۵ نمره $m =$ ضریب زاویه خط و $A(\alpha, 0)$

۰/۵ نمره $y = m(x-\alpha) \Longrightarrow \frac{x^2+1}{x} = mx - m\alpha$

$(m-1)x^2 - m\alpha x - 1 = 0$

۰/۵ نمره $\Delta = 0 \Longrightarrow m^2\alpha^2 + 4m - 4 = 0$

۰/۵ نمره $mm' = -1 \Longrightarrow \frac{c}{a} = -1 \Longrightarrow \frac{-4}{\alpha^2} = -1 \Longrightarrow \alpha = \pm 2$

۰/۲۵ نمره $A'(-2, 0)$ و $A(2, 0)$

حل: هـ- اگر فرض کنیم $(x = 2\sin\alpha + 1)$، چون $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$ میباشد پس: $-2+1 \leq x \leq 2+1$ یعنی $-1 \leq x \leq 3$ می‌شود بنابراین اگر روی همان صفحهٔ مختصات که منحنی را رسم کرده‌ایم خطوط $x = -1$ و $x = 3$ را رسم کنیم و فرض نقاط تلاقی آنها را با منحنی بدست آوریم نتیجه میشود. $P(-1, -2)$ و $Q(3, \frac{10}{3})$

واگر خط $y = m$ را درمکانهای مختلف همان صفحه مختصات رسم کنیم بحث زیر نتیجه میشود.

m	$-\infty$	-2	2	$\frac{10}{3}$	$+\infty$
بحث	یك جواب دارد	ریشه ندارد	دوجواب دارد	یك جواب دارد	
	جواب مضاعف دارد			دوجواب دارد	

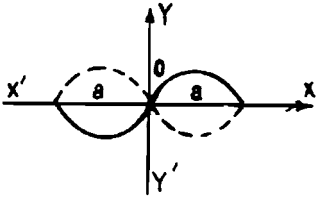
۳۰۷۸- تابع $y = \pm x\sqrt{a^2 - x^2}$ مفروض است (a مقدار معلوم و مثبتی در نظر گرفته شده است) اولا جدول و منحنی (C_1) نمایش تغییرات تابع فوق را رسم کنید (۳ نمره)

ثانیا- a را طوری تعیین کنید که نسبت حجم حادث از دوران سطح منحنی (C_1) حول

محور xها درفاصله $x=0$ و $x=a$ بسطح محصور بین منحنی ومحور xها درهمین فاصله برابر $\frac{8\pi}{5}$ باشد (۳ نمره) (منظورنسبت دوعددحجم وسطح‌میباشد).

حل: اولا ـ منحنی‌نمایش تابع $y=-x\sqrt{a^2-x^2}$ قرینه منحنی‌نمایش تابع $y=x\sqrt{a^2-x^2}$ نسبت‌به‌محور $x'x$ میباشد وچون $a>0$ است پس تابع زمانی‌معین‌است که $-x^2+a^2>0$ یعنی $a>x>-a$ باشد.

$$y'=\frac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} \text{ و } y'=0 \Longrightarrow x=\frac{\pm a\sqrt{2}}{2} \text{ و } y=\pm\frac{a^2}{2}$$ ۰/۵ نمره



$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$ ۰/۲۵ نمره

$$\begin{cases} y=0 \\ x=\pm a \\ x=0 \end{cases}$$ ۰/۲۵ نمره

x	$-a$		$\frac{-a\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{a\sqrt{2}}{2}$		a
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$\frac{-a^2}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{a^2}{2}$	$\searrow$	

جدول ۰/۷۵ نمره ورسم‌شکل ۰/۷۵ ورسم‌قرینه آن ۰/۵ دارد.

حل: ثانیاـ $g(x)=\pi y^2=\pi x^2(a^2-x^2)=\pi(a^2x^2-x^4)$

$$G(x)=\pi\left(\frac{a^2}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5\right)+c$$

$$G(a)=\pi\left(\frac{a^5}{3}-\frac{a^5}{5}\right)+c=\frac{2\pi a^5}{15}+c$$

$$G(0)=0 \text{ و } V=G(a)-G(0)=\frac{2\pi a^5}{15}$$

برای‌محاسبه‌سطح بایدازتابع اولیه $y=x\sqrt{a^2-x^2}$ گرفت

$$y=x(a^2-x^2)^{0/5}=-0/5(-2x)(a^2-x^2)^{0/5}$$

$$Y=\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{1/5}+c$$

$$F(a)=c \text{ و } F(0)=\frac{1}{3}a^3+c \text{ و } S=\frac{a^2}{3}$$

$$\frac{V}{S}=\frac{8\pi}{5} \Longrightarrow \frac{2\pi a^5}{15}\div\frac{a^2}{3}=\frac{8\pi}{5} \Longrightarrow a=2$$

۳۰۷۹ـ معادله درجه‌سوم $x^3+Kx^2+4=0$ مفروض است.

اولاـ در تعداد وعلامت‌ریشه‌های این معادله در ازاء مقادیر مختلف K بحث کنید.

(۲ نمره)

ثانیاـ هرگاه αوβوγ ریشه‌های معادله درجه‌سوم‌فوق فرض‌شوند K را طوری‌معلوم کنیدکه داشته باشیم $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\gamma$ (۲ نمره)

حل: اولاـ ۰/۲۵ نمره $x=\frac{1}{X} \Longrightarrow \frac{1}{X^3}+\frac{K}{X^2}+4=0$

۰/۲۵ نمره $4X^3+KX+1=0 \Longrightarrow X^3+\frac{K}{4}X+\frac{1}{4}=0$

۰/۵ نمره $\Delta=4p^3+27q^2=\frac{K^3+27}{16}=0 \Longrightarrow K=-3$ و $q=\frac{1}{4}>0$

K	$-\infty$	-3	$+\infty$
Δ	$-$	0	$+$
بحث	دوریشه‌مثبت و یک ریشه منفی‌دارد		یک‌ریشه منفی‌دارد

$$\boxed{x_1=x_2=2>0 \text{ و } x_3=-1<0}$$

حل: ثانیاـ ۰/۵ نمره $\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=-\gamma \Longrightarrow \alpha+\beta=-\alpha\beta\gamma$

(۰/۷۵ نمره) $(\alpha+\beta+\gamma)-\gamma=-\alpha\beta\gamma \Longrightarrow -K-\gamma=4 \Longrightarrow \gamma=-K-4$

این‌ریشه باید درمعادله‌منحنی‌صدق کنند ۰/۲۵ نمره

۰/۵ نمره $(-K-4)^3+K(-K-4)^2+4=0 \Longrightarrow K=-3$ و -5

۳۰۸۰- معادلات مجانبهای منحنی (C_2) بمعادله :

$$y = 2 \pm x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

را پیدا کنید و ثابت کنید خط $y = 2$ محور تقارن (C_2) میباشد (۱/۵ نمره) مجانبها و محور تقارن (۱ نمره)

جواب: $y = -x + 1$

۳۰۸۱- تابع $y = \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ که نمودار آنرا (C_2) می‌نامیم و خط $y = m$ مفروضند $(\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'})$ ثابت کنید معادله مکان هندسی نقطه P وسط MN (N و M نقاط تلاقی خط $y = m$ با منحنی (C_2) میباشد) عبارت است از :

$$y = \frac{2ax+b}{2a'x+b'} \quad (1/5 \text{ نمره})$$

بین مسئله سوم و (چهارم و پنجم) که مجموعشان ۴ میباشد بدلخواه یکی را انتخاب کنید مسئله اول و دوم اجباری است .

حل: طریقه اول- معادله منحنی را با خط $y = m$ حل می‌نمائیم.

$$m = \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} \Rightarrow (a-a'm)x^2+(b-b'm)x+c-c'm = 0$$

$$\text{وسط } MN \quad X_p = \frac{x'+x''}{2} = \frac{-b}{2a} = \frac{-(b-b'm)}{2(a-a'm)} \text{ و } Y_p = m$$

اگر m را بین طول و عرض نقطه p حذف کنیم نتیجه میشود :

$$y = \frac{2ax+b}{2a'x+b'}$$

طریقه دوم- میدانیم اگر در تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ طول نقاط ماکزیمم و مینیمم را در تابع $y_1 = \frac{f'(x)}{g'(x)}$ قرار دهیم عرض نقاط ماکزیمم و مینیمم بدست می‌آید.

$$y = y_1 = \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2ax+b}{2a'x+b'}$$

امتحان جبر کلاسهای ششم ریاضی و متفرقه کشور شهریور ۴۸

مدت ۲/۵ ساعت

۳۰۸۲ـ تابع $y=\frac{x-2}{(x-1)^2}$ مفروض است.

اولاـ جدول ومنحنی (C) نمایش تغییرات تابع فوق را رسم کنید (۳ نمره)

ثانیاـ تغیر و تحدب منحنی (C) را معلوم کرده ومختصات نقطه عطف این منحنی را پیدا کنید. (۱/۵ نمره)

ثالثاـ ریشه‌های معادله $K(x-1)^2=x-2$ را با دو عدد صفر و ۲ـ مستقیماً یا بکمك منحنی (C) مقایسه کنید (۲ نمره)

رابعاـ هرگاه $y=K$ منحنی (C) را در دو نقطه A و B قطع کند بازای چه مقدار K زاویه $\widehat{AOB}$ قائمه میشود (O مبدأ مختصات است) (۱/۵ نمره)

حل: اولاـ $y'=0$ و $y'=\frac{-x+3}{(x-1)^2}$

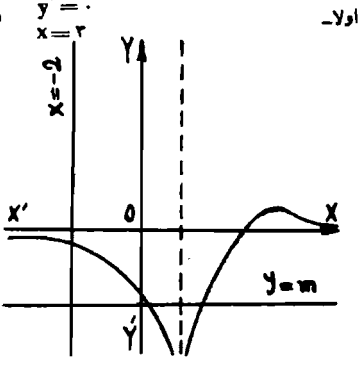
$x=3$

$\begin{cases} x=\pm\infty \\ y=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y=\pm\infty \\ x=1 \end{cases}$

$\begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$

$\begin{cases} y=0 \\ x=2 \end{cases}$



x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
y'		−		−	∞		+	+	0	−	
y	0	↘	−2	↘	$-\infty$ | $-\infty$	↗	0	↗	0/25 max	↘	0

حل: ثانیاـ $y=\frac{2}{x}$ و $y''=0$ و $y''=\frac{2x-8}{(x-1)^4}$

$x=4$

x	$-\infty$		۳		$+\infty$
y''		−	۰	+	
	تقعر بطرف y های مثبت		۹/۲−	تقعر بطرف y های منفی	تقعر

حل: ثالثاً- خطوط $x=0$ و $x=-2$ منحنی را در نقاطی بعرضهای -2 و $\frac{-3}{9}$ قطع میکنند و اگر خط $y=m$ را درمکانهای مختلف صفحه مختصات که منحنی را رسم کرده‌ایم بکشیم نتیجه میشود.

K	$-\infty$	-2	$-\frac{4}{9}$	۰	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
	$-2<0<x''<x'$	$-2<x''<0<x'$		$-2<0<x''<x'$	ریشه ندارد	
			$x''<-2<0<x'$			
	$2<x''=0<x'$	$-2=x''<0<x'$	$x'=\infty$ و $x''=2$		$-2<0<x''=x'$	

حل: رابعاً-

$$y=K \Longrightarrow K=\frac{x-2}{x^2-2x+1}$$

$$Kx^2-(2K+1)x+K+2=0$$

x' و x'' ریشه‌های معادله فوق طولهای نقاط A و B میباشند پس $A(x'\text{و}K)$ و $B(x''\text{و}K)$ میشود.

$$m=\frac{K}{x'} \text{ خط } OA \quad \text{و} \quad m=\frac{K}{x''} \text{ خط } OB \Longrightarrow \frac{K}{x'}\times\frac{K}{x''}=-1$$

$$K^2=-x'x'' \Longrightarrow K^2=-\frac{c}{a} \Longrightarrow K^2=\frac{-(K+2)}{K}$$

$$K^3+K+2=0 \Longrightarrow K^3+1+K+1=0$$

$$(K+1)(K^2-K+2)=0 \Longrightarrow K=-1$$

۳۰۸۳- تابع $ax^2+by^2-2xy-3y=0$ مفروض است.

الف- دوپارامتر a و b را بقسمی تعیین کنید که نقطه $M(3\text{و}3)$ نقطه ماکزیمم تابع فوق باشد. ۱/۵ نمره.

ب- ثابت کنید نقطه $O'(2\text{و}2)$ مرکز تقارن منحنی (C_1) نمایش تغییرات تابع $x^2-2xy+2y^2-3y=0$ میباشد و از این مطالب بعداً در رسم منحنی (C_1) استفاده کنید (۱ نمره)

ج- معادله خط قائم بر منحنی (C_1) را در نقطه $A\Big|_{2}^{0}$ بنویسید (نقطه A روی منحنی C_1 میباشد) (۱/۵ نمره)

د- ثابت کنید خط (D) بمعادله $x+y=2$ بر منحنی (C_2) نمایش تابع: $y_2=x^2-4x$ مماس میباشد ومختصات نقطه تماس را پیدا کنید. (۱ نمره)

ه- منحنی‌های C_1 و C_2 نمایش تغییرات تابع:

$$y_2=x^2-4x \quad \text{و} \quad y_1=\frac{1}{2}\left(x+2\pm\sqrt{-x^2+4x+4}\right)$$

را رسم کنید (هر کدام ۳ جمعاً ۶ نمره)

حل: الف- $M \Longrightarrow 16a+16b-32-16=0 \Longrightarrow a+b=3$ در تابع

$\Delta'=y^2-a(by^2-4y)=0 \Longrightarrow 16-a(1>b-16)=0$

$a(b-1)=1$ و $a+b=3 \Longrightarrow a=1$ و 2

حل: ب- $y=Y+2$ و $x=X+2$

$(X+2)^2-2(X+2)(Y+2)+2(Y+2)^2-4(Y+2)=0$

$X^2+2Y^2-2XY-3=0$

چون این معادله با تبدیل X به $-X$ و Y به $-Y$ تغییر نمیکند پس مبدأ مختصات جدید یعنی $O'(2,2)$ مرکز تقارن منحنی است.

$2x-2y-2y'x+4y'y-4y'=0$

حل: ج- $2y'(2y-x-2)=2y-2x$

$y'=\frac{y-x}{2y-x-2}$ و $m_{\text{قائم}}=\frac{-1}{y'}=\frac{-(2y-x-2)}{y-x}=\frac{-(4-2)}{2-0}$

معادله قائم $y-2=-1(x-0) \Longrightarrow y=-x+2$ و $m_{\text{قائم}}=-1$

حل: د- $y=-x+2$ و $y=x^2-4x$

$-x+2=x^2-4x \Longrightarrow x^2-3x-2=0$

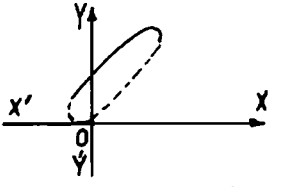
$4p^3+27q^2=4(-27)+27(4)=0$

چون $\Delta=0$ است پس دارای ریشه مضاعف است یعنی خط بر منحنی مماس است.

$x_1=x_2=\frac{-3q}{2p}=\frac{-3(-2)}{2(-3)}=-1$ و $y=3 \Longrightarrow M(-1,3)$

حل: ه- چون نقطه $O'(2,2)$ (طبق حل ب) مرکز تقارن منحنی است پس کافیست ابتدا منحنی نمایش تابع $y=\frac{1}{2}x+2+\sqrt{-x^2+4x+4}$ را رسم میکنیم وسپس قرینه

آنرا نسبت به نقطه $O'(2,2)$ بدست می‌آوریم.



$$-x^2+4x+4>0$$

$$2+2\sqrt{2}>x>2-2\sqrt{2}$$

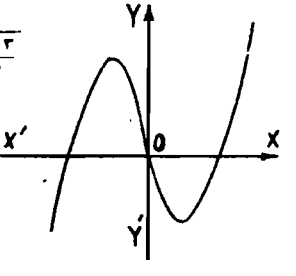
$$y'=\frac{2-x+\sqrt{-x^2+4x+4}}{\sqrt{-x^2+4x+4}}$$

$$y'=0 \Longrightarrow x=4 \text{ و } y=4$$

x	$2-2\sqrt{2}$		0		4		$2+2\sqrt{2}$
y'	∞		$+$		0		∞
y	$2-\sqrt{2}$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	$2+\sqrt{2}$

$$y'=3x^2-4$$

$$\begin{cases} y'=0 \Longrightarrow x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y=\pm\frac{16\sqrt{3}}{9} \end{cases}$$



$$y=0 \Longrightarrow x=0 \text{ و } 3 \text{ و } -2$$

$$\begin{cases} x=\pm\infty \\ y=\pm\infty \end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{3\sqrt{3}}{3}$		2		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{16\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\frac{-16\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

۳۰۸۴- توابع اولیهٔ تابع $y=\frac{x}{(x+1)^3}+tg^2x(1+tg^2x)$ را پیدا کنید (۱ نمره)

حل: میتوان نوشت

$$y=\frac{x+1-1}{(x+1)^3}+tg^2x\,(1+tg^2x)$$

$$y=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}+tg^2x\,(1+tg^2x)$$

$$y=(x+1)^{-2}-(x+1)^{-3}+tg^{2}x(1+tg^{2}x)$$

$$Y=-(x+1)^{-1}+\frac{1}{2}(x+1)^{-2}+\frac{1}{3}tg^{3}x$$

$$Y=\frac{-1}{x+1}+\frac{1}{2(x+1)^{2}}+\frac{1}{3}tg^{3}x$$

خرداد ماه ۴۹ (مدت ۳ ساعت)

۳۰۸۵-

تابع $y=\frac{ax^{2}+2ax+3a+2}{2x-1}$ مفروض است. $(a\neq 0)$

الف. معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش عرضهای نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع فوق باشند (۱ نمره)

ب- پارامتر a را قسمی انتخاب کنید که این عرضهای نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع فوق داشته باشیم $y_1+4y_2=0$ (y_1 و y_2 عرضهای نقاط ماکزیمم و می‌نیمم هستند.)

(۱/۵ نمره)

ج- جدول و منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x^{2}+2x+5}{2x-1}$ را رسم کنید.

(۳ نمره)

د - نشان دهید که ریشه‌های معادله درجه دوم $x^{2}+2(1-m)x+m+5=0$ طول‌های نقاط تقاطع خط $y=m$ با منحنی (C) هستند و ریشه‌های این معادله درجه دوم را با دو عدد صفر و ۱ مستقیما و یا بکمک منحنی (C) مقایسه کرده و نتیجه را در جدولی بنویسید.

(۲ نمره)

ه - خط $y=m$ مذکور در قسمت (د) منحنی (C) را در نقاط A و B و خط $x=1$ را در نقطه M قطع میکند مطلوبست اولا معادله مکان هندسی نقطه D وسط پاره خط AB و ثانیا معادله مکان هندسی نقطه N مزدوج توافقی نقطه M نسبت بدو نقطه B و A.

(۱/۲۵ و ۱/۲۵)

و - بدون رسم شکل ثابت کنید منحنی (C_1) بمعادله $y_1=x^{2}+1$ منحنی (C) را در یك نقطه سمت راست محور y ها قطع میکند. (۱/۵ نمره)

ز - تابع $y_2=\frac{25}{4(2x-1)}$ را در نظر میگیریم. اولا $y-y_1-$ را بصورت:

$\alpha x+\beta$ درآورده (α و β ضرائبی هستند که شما معلوم میکنید.) و بکمک آن سطح محصور بین دو منحنی (C) و (C_1) و دو خط $x=1$ و $x=2$ را حساب کنید. (رسم منحنی C_1 لازم نیست) (۲ نمره)

ج- نقطه‌ای بر منحنی (C) تعیین کنید که ضریب زاویه‌ای خط مماس در آن نقطه ۲/۴ برابر عرض همان نقطه باشد. (۱/۵ نمره)

حل: الف ۰/۲۵ نمره $ax^2+2(a-y)x+y+3a+2=0$

۰/۵ نمره $\Delta'=0 \Rightarrow (a-y)^2-a(y+3a+2)=0$

۰/۲۵ نمره $y^2-3ay-2a^2-2a=0$

حل: ب- ۰/۵ نمره $\begin{cases} y_1+4y_2=0 \\ y_1+y_2=3a \\ y_1y_2=-2a^2-2a \end{cases}$ ۰/۵ نمره $\begin{cases} y_2=-a \\ y_1=4a \end{cases}$

$\begin{cases} -a\times 4a=-a^2-2a \end{cases}$ (۰/۲۵ نمره) $\begin{cases} a=1 \\ a=0 \end{cases}$ (۰/۲۵) غیرقابل قبول

حل: ج- ۰/۵ نمره $y'=\dfrac{2(x^2-x-6)}{(2x-1)^2}=0$

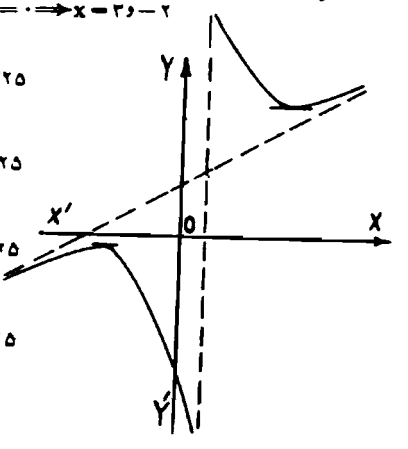
$y'=0 \Rightarrow x^2-x-6=0 \Rightarrow x=3$ و -2

$\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ ۰/۲۵ نمره

$\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ ۰/۲۵ نمره

$\begin{cases} x=\pm\infty \\ y=\pm\infty \end{cases}$ ۰/۲۵ نمره

$\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\pm\infty \end{cases}$ ۰/۲۵ نمره



$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -5 \end{cases}$$ ۰/۲۵ نمره

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$ مجانبها

رسم جدول ومنحنی هر کدام (۰/۵ نمره) ومعادلات مجانبها ۰/۵ نمره

x	$-\infty$		-2		0		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
y'		$+$		0		$-$			0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

max min

حل: د ـ

m	$-\infty$		-5		-1		3		8		$+\infty$
	$x'<x''<0<1$		$0<1<x'<x''$		مقایسه ندارد		$0<x'<1<x''$				بحث
	$x'<0<x''<1$		$x'=x''<0<1$		$0<1<x'=x''$		$0<x'=1<x''$				
	$x'<x''=0<1$										

رسم خطوط $x=0$ و $x=1$ وتعیین عرض تقاطع ۰/۵ وجدول ۱/۵

حل: ه ـ

$$\begin{cases} x_D = \frac{-b}{2a} = m-1 \\ y_D = m \end{cases}$$ ۰/۷۵ نمره

$$\Longrightarrow \quad y = x+1$$ ۰/۵ نمره

تبصره ـ اگر دانش آموزی مستقیماً معادله مکان را بنویسد (مشتق عبارت صورت بمشتق عبارت مخرج) نمره داده میشود.

$$(X_A+X_B)(X_M+X_N) = 2(X_AX_B+X_MX_N)$$ ۰/۵ نمره

$$2(m-1)(1+x_N) = 2(m+5+x_N) \text{ و } y_N = m$$ ۰/۲۵ نمره

$$(y-1)(1+x) = (y+5+x) \Longrightarrow y = \frac{2(x+3)}{x}$$ ۰/۵ نمره

حل: و ـ $\frac{x^2+2x+5}{2x-1}=x^2+1 \Rightarrow 2x^3-2x^2-6=0$ نمره ۰/۲۵

$x=\frac{1}{X}$ ۰/۵ نمره $\Rightarrow \frac{1}{X^3}-\frac{1}{X^2}-3=0$

$X^3+\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}=0$ ۰/۲۵ نمره

$p=\frac{1}{3}>0 \quad q=-\frac{1}{3}<$ ۰/۵ نمره یکریشه مثبت‌دارد

حل: ز ـ $y-y_1=\frac{(x^2+2x+5)3}{3(2x-1)}-\frac{25}{3(2x-1)}=$

$\frac{3x^2+8x-5}{3(2x-1)}$

$=\frac{1}{2}x+\frac{5}{3}$ ۰/۵ نمره $F(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{5}{3}x+C$ (۱ نمره)

$S'_1=F(2)-F(1)=\frac{7}{2}-\frac{3}{2}=2$ واحدمطح ۰/۵ نمره

حل: ح ـ $y'=2/3y$ ۰/۵ نمره

$\frac{2(x^2-x-6)}{(2x-1)^2}=\frac{12(x^2+2x+5)}{5(2x-1)}$ ۰/۵ نمره

$12x^3+13x^2+53x=0 \quad x=0 \quad y=-5$ ۰/۵ نمره

۳۰۸۶ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع :

$y=1+0/75x^2\pm\sqrt{1-0/75x^2}$ را رسم کنید. «توجه‌داشته‌باشید هردوتابع‌رارسم کنید.» (۵نمره)

$1-0/75x^2=0 \Rightarrow x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$-\frac{2\sqrt{3}}{3}<x<\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ۰/۵ نمره

$y'=1/5x-\frac{1/5\,x}{2\sqrt{1-0/75x^2}}$

$y' = ۰ \Longrightarrow x = ۰ و \pm ۱$

$y = ۲ و ۵/۲۵$ ۱/۲۵ نمره

جدول ۰/۷۵ نمره رسم شکل ۰/۵ نمره

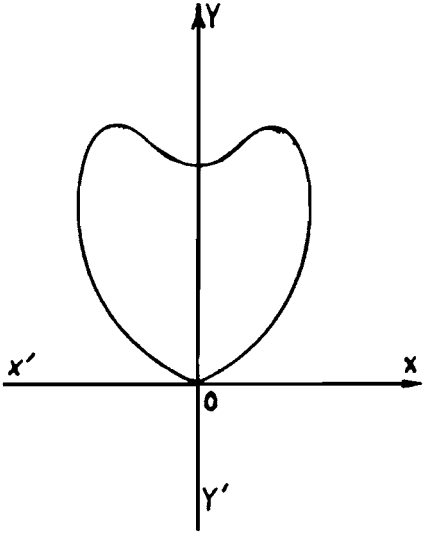
x	$-\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$		-۱		۰		۱		$\frac{۲}{۳}\sqrt{۳}$
y'	∞	+	۰	−	۰	+	۰	−	∞
y	۲	↗	۲/۲۵	↘	۲	↗	۲/۲۵	↘	۲

۰/۷۵ نمره جدول علامت مثبت

x	$-\frac{۲}{۳}\sqrt{۳}$		۰		$\frac{۲}{۳}\sqrt{۳}$
y'	∞	−	۰	+	∞
y	۲	↘	۰	↗	۲

۰/۵ نمره جدول علامت منفی

رسم منحنی با علامت منفی تعیین ریشه مشتق یک نمره ۰/۵ نمره جدول ۰/۵ نمره رسم شکل



موضوع امتحان جبر کلاسهای ششم‌ریاضی ومتفرقه کشور دشهریورماه۴۹

۳۰۸۷- تابع $y=\frac{-2ax+1}{3ax^2-4ax+2}$ مفروض‌است $(a\neq 0)$

الف: ثابت‌کنید بازاء جمیع‌مقادیر a نمودارتابع فوق از یك نقطه ثابت‌که مختصات آنرا تعیین میکنیدمیگذرد. (۱)

ب: پارامترa راقسمی انتخاب‌کنیدکه نقطه‌می‌نیمم منحنی نمایش تغییرات تابع فوق روی‌خط $y=-1$ قرارگیرد(برخط $y=-1$ مماس‌شود). (۱/۵)

ج: جدول‌ومنحنی (c) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{-2x+1}{3x^2-4x+2}$ را رسم کنید. (۲/۵)

ح: ثابت‌کنید ریشه‌های‌معادله درجه‌سوم $6x^3-9x^2+2=0$ طول‌های‌نقاط عطف منحنی(c) هستند وتعدادوعلامت ریشه‌های این‌معادله درجه سومرامشخص‌کنید (۱و۲جمعاً۳)

د: ازنقطه A بطول $x=2$ واقع برمنحنی(C) خطD راباضریب زاویه‌ای m رسم میکنیم تامنحنی(C) را بغیراز نقطه A دردونقطه B وC قطع‌کندثابت‌کنید معادله درجه‌دومی، که ریشه‌هایش‌طول‌های نقاط B وC باشندعبارتست از :

$6mx^2-(8m+3)x+2(2m+1)=0$ وپارامترm چه‌حدودی داشته باشد تا نقطه A بین‌نقاط B وC واقع‌شود (۱/۵و۱/۵جمعاً۳)

حل: الف:

$3ayx^2-4ayx+2y+2ax-1=0$

$ax(3yx-4y+2)+2y-1=0$ (۰/۵ نمره)

$\begin{cases}2y-1=0 \Longrightarrow y=\frac{1}{2} \\ x(3yx-4y+2)=0 \Longrightarrow x=0\end{cases}$ (۰/۲۵ نمره) $\Longrightarrow C\left|\begin{matrix}0\\ \frac{1}{2}\end{matrix}\right.$ (۰/۲۵ نمره)

حل: ب:

$\frac{-2ax+1}{3ax^2-4ax+2}=-1$ (۰/۲۵ نمره)

$3ax^2-4ax+2=2ax-1 \Longrightarrow 3ax^2-6ax+3=0$ (۰/۲۵ نمره)

$\Delta=0 \Longrightarrow 9a^2-9a=0$ (۰/۲۵ نمره) $\Longrightarrow a=0$ قابل‌قبول نیست

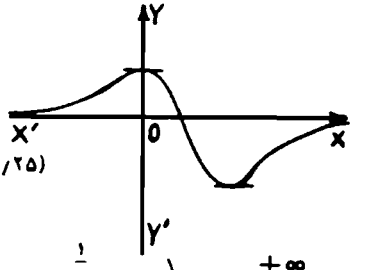
$a=1$ (۰/۲۵ نمره)

حل: ج: (۰/۵ نمره) $y'=\frac{6x(x-1)}{v^2}$ و $y=\frac{-2x+1}{3x^2-4x+2}$

$$\begin{cases} y' = 0 \Rightarrow 6x(x-1) = 0 & (0/5 \text{ نمره}) \\ x = 0 \text{ و } 1 \\ x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} & (0/25 \text{ نمره}) \\ x = 1 \Rightarrow y = -1 & (0/25 \text{ نمره}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm\infty & 0/25 \\ y = 0 & \text{نمره} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \pm\infty \\ 3x^2 - 4x + 2 = 0 & (0/25 \text{ نمره}) \\ \text{ریشه ندارد} \end{cases}$$



x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0 ↗		$0/5$ ↘		0 ↘	-1 ↗	0
			max			min	

حل: ج :

$$y' = \frac{6x^2 - 6}{(3x^2 - 4x + 2)^2} \text{ و } y'' = \frac{6(6x^2 - 9x^2 + 2)}{v^2} \quad (0/5 \text{ نمره})$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 6x^2 - 9x^2 + 2 = 0 \quad (0/5 \text{ نمره})$$

$$x = \frac{1}{X} \Rightarrow \frac{6}{X^2} - \frac{9}{X^2} + 2 = 0 \Rightarrow X^2 - \frac{9}{2}X + 3 = 0 \quad (0/75 \text{ نمره})$$

$$4p^2 + 27q^2 = 4(\frac{-9}{2})^2 + 27(3)^2 < 0 \quad (0/75 \text{ نمره})$$

چون $4p^2 + 27q^2$ و $q = 3 > 0$ است پس معادله یك ریشه منفی ودوریشه مثبت دارد (۰/۵ نمره)

حل : د: (۰/۲۵ نمره)

$$x = 2 \Rightarrow y = \frac{-4+1}{12-8+2} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2} = A\left|\begin{matrix} 2 \\ \frac{-1}{2} \end{matrix}\right.$$

$$y+\frac{1}{2}=m(x-2)\Longrightarrow\frac{-2x+1}{3x^2-4x+2}+\frac{1}{2}=m(x-2)$$

$$\frac{3x^2-8x+4}{2(3x^2-4x+2)}=m(x-2)\Longrightarrow\frac{(x-2)(3x-2)}{2(3x^2-4x+2)}=m(x-2)$$

پس از حذف $x-2$ نتیجه می‌شود. $6mx^2-(8m+3)x+2(2m+1)=0$

۰/۵ نمره و ۰/۵ نمره

$$af(2)<0\Longrightarrow 6m(24m-16m-6+4m+2)<0$$

$$6m(12m-4)<0 \quad (1\text{ نمره})\quad \Longrightarrow \frac{1}{3}>m> \quad (0/5\text{ نمره})$$

۳۰۸۸- تابع $y=x-1\pm\sqrt{x^2-2x-3}$ مفروض است.

۱- ثابت کنید نقطه $O'\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$ مرکز تقارن منحنی (C_1) نمایش تغییرات تابع فوق می‌باشد و باتوجه باین موضوع منحنی (C_1) را رسم کنید (۱و۴ جمعاً ۵ و یکی از دو تابع اصم ۳/۵)

۲- توابع اولیه تابع $z=y^2=2x^2-4x-2+(2x-2)\sqrt{x^2-2x-3}$ را حساب کنید و بکمک آن حجم حادث از دوران سطح محصور بین قوسی از منحنی: $y=x-1+\sqrt{x^2-2x-3}$ و محور xها و دو خط $x=-\frac{3}{2}$ و $x=-1$ را حول محور xها حساب کنید. (۱/۵ و ۱/۵ جمعاً ۳).

(دانش‌آموزان عزیز توجه داشته باشید هر فرض را می‌توانید مستقلا حل کنید)

حل: ۱- $O'\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right. \Longrightarrow\begin{cases}x=X+1\\y=Y+0\end{cases}$ (۰/۲۵ نمره) $\Longrightarrow$

$$Y=X\pm\sqrt{X^2-4} \qquad (0/5\text{ نمره})$$

چون با تبدیل X به $-X$ و Y به $-Y$ معادله منحنی تغییر نمیکند پس مبدأ جدید یعنی $O'(1,0)$ مرکز تقارن منحنی است (۰/۲۵ نمره)

$x^2-2x-3\geq 0\Longrightarrow x\geq 3$ و $x\leq 1$ (۰/۲۵ نمره) معین است

معادلات $\begin{cases}y=2x-2\\y=0\end{cases}$ مجانبها پیدا کردن معادلات مجانبها بهر طریق (۱ نمره) دارد

$$y'=1\pm\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2-2x-3}}=\frac{\sqrt{x^2-2x-3}\pm(x-1)}{\sqrt{x^2-2x-3}}\neq 0 \quad (0/5\text{ نمره})$$

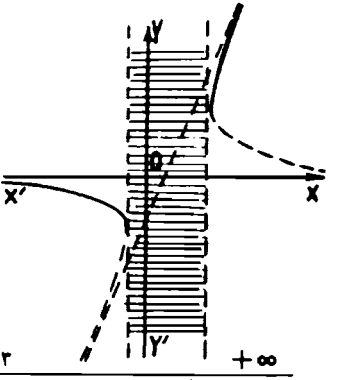
$$\begin{cases} x=+\infty \\ y=+\infty \end{cases} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$\begin{cases} x=-\infty \\ y=۰ \end{cases} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

(جدول ۰/۷۵ نمره)

رسم هرشاخه منحنی

(۰/۵ نمره)



x	$-\infty$		-۱		۳		$+\infty$
y'		$-$	∞	|||	∞	$+$	
y	۰	↘	-۲		۲	↗	$+\infty$

$$z=\frac{۲}{۳}x^۳-۲x^۲-۲x+\frac{۲}{۳}(x^۲-۲x-۳)^{\frac{۳}{۲}}+c \qquad (\text{نمره } ۰/۷۵)$$

$$V_{-\frac{۳}{۲}}^{-۱}=r\int_{-\frac{۳}{۲}}^{-۲} y^۲dx=\frac{۵r}{۶} \quad \text{واحدحجم} \qquad (\text{نمره } ۰/۷۵)$$

خردادماه ۵۰

۳۰۸۹- درتابع $y=ax^۳+bx^۲+cx+d$ مقادیر a و b و c و d را قسمی تعیین کنید که نقطه $M(۰ \text{ و } ۲)$ نقطه‌ماکزیمم ونقطه $F(۱ \text{ و } ۰)$ نقطه‌عطف‌منحنی‌تابع‌فوق‌باشد (۲ نمره) وسپس منحنی‌نمایش تغییرات تابع $y=x^۳-۳x^۲+۲$ را رسم کنید.

($۲\frac{۱}{۲}$ نمره)

حل: (۰/۲۵ نمره) $y'=3ax^2+2b+c$ و $y''=6ax+2b$

عطف $F(1\ \text{و}\ 0)$ و ماکزیمم $M(0\ \text{و}\ 2)$

$$\begin{cases} 0=6a+2b\Longrightarrow 3a+b=0 & \text{طول عطف در } y'' \quad (0/25\ \text{نمره}) \\ 0=0+0+c\Longrightarrow c=0 & \text{طول ماکزیمم در } y' \quad (0/25\ \text{نمره}) \\ 0=a+b+c+d & \text{نقطه عطف در تابع} \quad (0/25\ \text{نمره}) \\ 2=0+0+0+d\Longrightarrow d=2 & \text{نقطه ماکزیمم در تابع} \quad (0/25\ \text{نمره}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a+b=0 \\ a+b+0+2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3a+b=0 \\ -a-b-2=0 \end{cases} \qquad \text{از جمع} \begin{cases} 2a=2 \\ a=1 \end{cases} \quad \text{دو رابطه}$$

(۰/۵ نمره)

$3a+b=0\Longrightarrow 3+b=0\Longrightarrow b=-3$ (۰/۲۵ نمره)

$y=x^3-3x^2+2$

$$\begin{cases} y'=3x^2-6x \\ y'=0\Longrightarrow 3x^2-6x=0 \\ x=0\ \text{و}\ 2 \quad (0/5\ \text{نمره}) \\ x=0\Longrightarrow y=2 \quad (0/25\ \text{نمره}) \\ x=2\Longrightarrow y=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0\Longrightarrow x^3-3x^2+2=0 \quad (0/5\ \text{نمره}) \\ x^3-x^2-2x^2+2=0 \quad (0/5\ \text{نمره}) \\ x^2(x-1)-2(x^2-1)=0 \\ (x-1)(x^2-2x-2)=0\Longrightarrow x=1\ \text{و}\ 1\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		0		1		2		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

هر ستون افقی جدول ۰/۲۵ نمره دارد و رسم منحنی ۰/۷۵ نمره دارد .

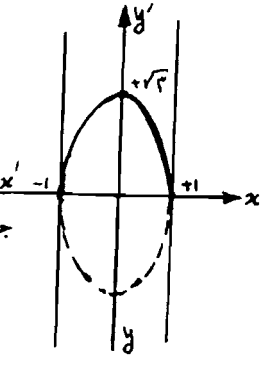
۳۰۹۰- جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع $y=\pm\sqrt{3(1-x^2)}$ را رسم کنید (جدول تغییرات یکی از دو تابع کافی است). (۳/۵ نمره) وسپس حجم حادث ازدوران سطح محصور بین منحنی تابع فوق ومحور xها را از $x=-1$ تا $x=+1$ حول محور xها حساب کنید. (۲ نمره)

حل: (۱ نمره) تابع معین است $3(1-x^2)\geq 0 \Longrightarrow 1\geq x\geq -1$

$$y'=\frac{-3x}{\sqrt{3(1-x^2)}}$$ (۰/۲۵ نمره)

$$\begin{cases} y'=0 \Longrightarrow x=0 & \text{(۰/۲۵ نمره)} \\ y=\sqrt{3} & \text{(۰/۲۵ نمره)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0 \Longrightarrow x^2-1=0 \\ x=\pm 1 & \text{(۰/۲۵ نمره)} \end{cases}$$



جدول ۰/۷۵ نمره و رسم منحنی هم ۰/۷۵ نمره دارد

x	-1		0		
y'		+	0	-	
y	0	↗	$\sqrt{3}$	↘	0

$g(x)=\pi y^2=3\pi(1-x^2)$ (۰/۵ نمره)

$G(x)=\pi(3x-x^3)$ (۰/۷۵ نمره)

$G(1)=2\pi$ (۰/۲۵ نمره) $G(-1)=-2\pi$ (۰/۲۵ نمره)

$V=G(1)-G(-1)=2\pi+2\pi=4\pi$ (۰/۲۵ نمره)

۳۰۹۱- مختصات نقطهٔ تلاقی خط (D) بمعادله $y=3x-2$ ومنحنی (C) بمعادلهٔ $x^2+y^2-2x-2y-8=0$ را پیدا کنید وثابت کنید خط (D) قائم برمنحنی (C) میباشد. (۱ نمره و ۱ نمره)

حل: $y=3x-2$ و $x^2+y^2-2x-2y-8=0$

$x^2+(3x-2)^2-2x-2(3x-2)-8=0 \Longrightarrow 10x^2-20x=0$ (۰/۵ نمره)

$10x(x-2)=0 \Longrightarrow x=0$ و 2 (۰/۵ نمره)

$x=0 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow A(0 \text{ و } -2)$ و $x=2 \Rightarrow y=4 \Rightarrow B(2 \text{ و } 4)$

$y' = \frac{1-x}{y-1}$ (۰/۵ نمره) $\qquad m_{\text{مماس در } A} = \frac{1-0}{-2-1} = \frac{-1}{3}$

خط $m' = 3$ و $mm' = 3 \times \frac{-1}{3} = -1$ (۰/۵ نمره)

چون $mm' = -1$ میباشند پس خط برمنحنی عمود است.

۳۰۹۲ـ ـ ثابت کنید بازاء هیچ مقدار m عدد $\alpha = 1$ داخل دو ریشهٔ معادلهٔ : $(m-1)x^2 + 2mx + m - 3 = 0$ واقع نمیشود (۱ نمره) وسپس حدود پارامتر m را قسمی انتخاب کنید که یکی از دو ریشهٔ معادلهٔ فوق بین اعداد ۱ و ۳ واقع شود.

(۱ نمره)

حل: $af(1) = (m-1)[(m-1)+3m-3](m-1)(4m-4)$

پس یک‌همواره خارج‌دوریشه است $\qquad af(1) = 4(m-1)^2 > 0$

$f(1)f(3) < 0 \Rightarrow (4m-4)(16m-12) < 0$ (۰/۵ نمره)

$1 > m > 0/75$ (۰/۵ نمره)

ـ **اولا** برحسب مقادیرمختلف k در وجود ریشه‌های معادله درجه سوم زیر بحث کنید. (۲ نمره)

$x^3 - 3x + 2k = 0$

ثانیاً: اگر α و β و γ ریشه‌های معادله درجه‌سوم‌فوق فرض شوندمعادله درجه‌سومی بر حسب y بنویسید که ریشه‌هایش α^3 و β^3 و γ^3 باشد وسپس k را قسمی انتخاب کنید که داشته باشیم : (۱ نمره و۱ نمره)

$\alpha(\alpha^2+1)+\beta(\beta^2+1)+\gamma(\gamma^2+1) = -6$

حل: اولا: $\Delta = 4p^3 + 27q^2 = -108 + 108k^2$

$-108k^2 = 0 \Rightarrow k = \pm 1$ (۰/۵ نمره)

k	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y		$+$	0	$-$	0	$+$	
بحث		یك ریشه دارد		سه ریشه دارد		یك ریشه دارد	
			ریشه مضاعف دارد				

(۱ نمره)

حل- ثانیاً: اگر معادله مطلوب را بصورت $f(y)=0$ بنویسید. ازفرض مسأله نتیجه که ریشه‌های این معادله برابر مکعب ریشه‌های معادله $x^3-3x+2k=0$ میباشد یعنی $y=x^3$ پس $x=\sqrt[3]{y}$ میشود که این جواب باید درمعادله $x^3-3x+2k=0$ صدق کند.

(۰/۵ نمره)

$$(\sqrt[3]{y})^3-3(\sqrt[3]{y})+2k=0 \Longrightarrow y+2k=3\sqrt[3]{y}$$

$$(y+2k)^3=27y \Longrightarrow y^3+6ky^2+3(4k^2-9)y+8k^3=0$$

(۰/۵ نمره)

$$\alpha(\alpha^2+1)+\beta(\beta^2+1)+\gamma(\gamma^2+1)=-6$$

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\alpha+\beta+\gamma=-6$$

چون $\alpha+\beta+\gamma=\frac{-b}{a}=0$ میباشد (۰/۲۵ نمره)

پس $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$ میشود. (۰/۲۵ نمره) و رابطه فوق بصورت:

$3\alpha\beta\gamma=-6$ درمی‌آید. (۰/۲۵ نمره)

پس: (۰/۲۵ نمره)

$$\frac{-3d}{a}=-6 \Longrightarrow \frac{-6k}{1}=-6 \Longrightarrow k=1$$

۱۰ - حدتابع $y=\sqrt{x^2+2x}-\sin(x+1)$ را وقتی که $x\Longrightarrow+\infty$ پیدا کنید. (۲ نمره)

حل:

$$\sin\sqrt{x^2+2x}-\sin(x+1)=2\sin\frac{\sqrt{x^2+2x}-(x+1)}{2}\cos\frac{\sqrt{x^2+2x}+x+1}{2}$$

چون $\lim\limits_{x\Longrightarrow\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x-1)$ برابرصفراست پس عبارت فوق برابر است با:

$$2\sin 0^\circ\cos\frac{\sqrt{x^2+2x}+x+1}{2}=0$$

شهریورماه ۱۳۵۰

۳۰۹۳- اندازه حقیقی هریك ازدوتابع زیررا بازاء مقدارمخصوصی که مقابل آن نوشته‌شده معین کنید. بارهر کدام ۱ نمره

$$y=\frac{\cot g x}{\cot g 3x}\quad x\longrightarrow 0 \quad و \quad y=2x+1+\sqrt{4x^2-4x}\quad x\longrightarrow -\infty$$

حل:

$$y=\frac{tg\,0^\circ}{tg\,0^\circ}=\div$$ مبهم است

$$y\equiv y_1=\lim_{x\Rightarrow 0}\frac{3(1+tg^2 3x)}{1+tg^2 x}\qquad y=\frac{3(1+0)}{1+0}=3$$

$$\lim y=y_1=\lim_{x\Rightarrow 0}\frac{3(1+tg^2 3x)}{1+tg^2 x}=\frac{3(1+tg^2 0^\circ)}{(1+tg^2 0^\circ)}=3$$

عملیات بترتیب ۰/۲۵ و ۰/۵ و ۰/۲۵ نمره دارد.

$$y=-\infty+\infty$$ مبهم است

$$\lim y=\lim_{x\Rightarrow -\infty}\left(1+\frac{4x}{2x-\sqrt{4x^2-4x}}\right)$$

$$=\lim_{x\Rightarrow -\infty}\left[1+\frac{4x}{x(2+\sqrt{4-\frac{4}{x}})}\right]$$

$$\lim y=1+1=2$$ (۰/۵ نمره و ۰/۵ نمره)

۳۰۹۴- صورت کلی توابع اولیه هریك از دو تابع زیر را معین کنید:

بارهر کدام ۱/۵ نمره.

$$y=18(3x-2)^5+\frac{3}{x^4}\quad و \quad y=\frac{4}{3}\cdot\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

حل:

$$y=18(3x-2)^5+3x^{-4}$$

$$Y=(3x-2)^6+\frac{3}{-3}x^{-3}+C=(3x-2)^6-\frac{1}{x^3}+C$$

تابع اولیه پرانتز (۰/۵ نمره) وتابع‌اولیه کسر (۰/۷۵ نمره) دارد.

$$y=\frac{۳}{۳}(۲x-۱)(x^۲-x+۱)^{\frac{-۱}{۳}} \qquad (۰/۵ \text{ نمره})$$

$$Y=\frac{۳}{۳}\div\frac{۲}{۳}(x^۲-x+۱)^{\frac{۲}{۳}}+C \qquad (۱ \text{ نمره})$$

۳۰۹۵ـ معلوم‌کنید بازاء چه‌مقادیر m معادلهٔ زیر دارای‌سه‌ریشه‌حقیقی‌میباشد.

$x^۳+۶x^۲+۹x-m=۰$ بارم ۳ نمره .

حل: $x=X-۲$ (۰/۷۵ نمره)

$(X-۲)^۳+۶(X-۲)^۲+۹(X-۲)-m=۰$ (۰/۲۵ نمره)

$X^۳-۳X-(m+۲)=۰$ (۰/۵ نمره)

$۴p^۳+۲۷q^۲<۰$ (۰/۲۵ نمره)

$-۱۰۸+۲۷(m+۲)^۲<۰ \Longrightarrow m=۰$ و -۴ (۰/۷۵ نمره)

$-۴<m<۰$ (۰/۵ نمره)

۳۰۹۶ـ ثابت‌کنید خط $y=۱$ محور تقارن دایره (c) بمعادله $y=۱\pm\sqrt{۲x-x^۲}$ میباشد وبا استفاده از این‌مطلب یکی از دو نیمدایره را رسم‌کرده وسپس شکل راکامل‌کنید. بارم ۱ و ۳ نمره .

حل: $y=Y+۱$ (۰/۵ نمره)

$Y+۱=۱\pm\sqrt{۲x-x^۲}$ (۰/۲۵ نمره)

$Y=\pm\sqrt{۲x-x^۲}$ (۰/۲۵ نمره) $\qquad -Y=\pm\sqrt{۲x-x^۲}$ (۰/۲۵ نمره)

اگر دوطرف تساوی دریك منهاضرب‌شود همان‌معادله اول‌بدست میآید پس‌خط $y=۱$ محور تقارن منحنی است.

$y=۱+\sqrt{۲x-x^۲} \qquad ۲x-x^۲>۰ \Longrightarrow ۲>x>۰$ (۰/۵ نمره)

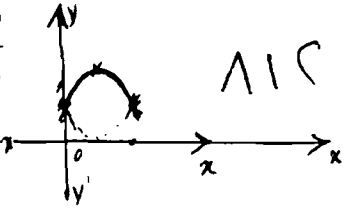
$y'=\frac{۲-۲x}{۲\sqrt{۲x-x^۲}}=\frac{۱-x}{\sqrt{۲x-x^۲}}$ (۰/۲۵ نمره)

$y'=۰ \Longrightarrow x=۱$ و $y=۲$ (۰/۲۵ نمره)

$x=0 \Longrightarrow y=1$ (۰/۲۵ نمره) و $x=2 \Longrightarrow y=1$ (۰/۲۵ نمره)

$y=0 \Longrightarrow 1+\sqrt{2x-x^2}=0$ غیرممکن‌است (۰/۲۵ نمره)

x	۰		۱		۲
y'	∞	+	۰	−	∞
y	۱	↗	۲	↘	۱
			max		



رسم جدول (۰/۵ نمره)

رسم هرقسمت‌شکل (۰/۵ نمره)

۳۰۹۷ـ اولامنحنی (c') نمایش تغییرات تابع $y=\frac{(x+1)^2}{x^2+x+1}$ را رسم کنید (بارم ۳ نمره) .

ثانیاً ـ خط D بمعادلهٔ $y=mx+1$ منحنی (c') را همیشه در یك نقطه‌ثابت قطع میکند این‌نقطه‌را تعیین‌کنید (بارم ۱) .

ثالثاً ـ معادله درجه‌دوم $mx^2+mx+m-1=0$ که طول‌دونقطه تقاطع‌دیگر رامیدهدمفروض‌است‌معلوم‌کنیدبازاءچه‌مقادیر m نقطه‌ثابت‌بین‌دونقطه‌تقاطع‌دیگرواقع‌میشود. (بارم ۱) .

رابعاً ـ درتابع $y=\frac{ax^2+bx+1}{x^2+x+1}$ aوbرا بقسمی انتخاب‌کنید تانمودار تابع‌فوق با دوخط $y=0$ و $y=\frac{3}{3}$ مماس باشد (ماکزیمم تابع $\frac{3}{3}$ و می‌نیمش ۰ باشد) بارم ۳ . $b\neq 0$ و a

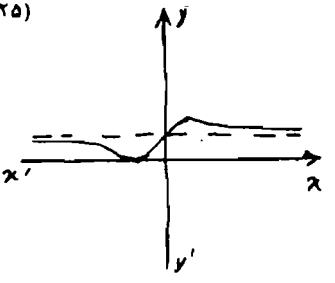
حل: اولاـ

$y'=\frac{x^2-1}{V^2}$ (۰/۵ نمره)

$$\begin{cases} y'=0 \Longrightarrow x=\pm 1 \\ y=3 \div 3 \text{ و } 0 \quad (0/5 \text{ نمره}) \end{cases}$$

$x=\pm\infty \Longrightarrow y=1$ (۰/۲۵ نمره)

$x=0 \Longrightarrow y=1$



رسم جدول (۰/۷۵ نمره)

رسم منحنی (۰/۷۵ نمره)

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0		$\perp$		0	$-$	
y	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$4\div3$	$\searrow$	1
			min				max		

حل ثانیاً ـ $\dfrac{(x+1)^2}{x^2+x+1}=mx+1$ (۰/۲۵ نمره)

$x(mx^2+mx+m-1)=0 \Longrightarrow x=0$ (۰/۵ نمره)

$x=0 \Longrightarrow y=1 \Longrightarrow A(0,4)$ نقطه ثابت (۰/۲۵ نمره)

حل : ثالثاً ـ باید صفر بین ریشه‌های معادله $mx^2+mx+m-1=0$ باشد یعنی باید یکی از ریشه‌ها مثبت و یکی منفی باشد یعنی:

$\dfrac{c}{a}<0 \Longrightarrow \dfrac{m-1}{m}<0$ (۰/۵ نمره) $1>m>0$ (۰/۵ نمره)

حل: رابعاً ـ $y=0$ و $y=4\div3$ عرضهای نقاط ماکزیمم و مینیمم است. (۰/۵ نمره).

$$y=\frac{ax^2+bx+1}{x^2+x+1} \Longrightarrow ax^2+bx+1=yx^2+yx+y$$

$(a-y)x^2+(b-y)x+1-y=0$ (۰/۵ نمره)

$\Delta=(b-y)^2-4(a-y)(1-y)=0$

$3y^2+2(b-2a-2)y+b^2-4a=0$ (۰/۵ نمره)

$$\begin{cases} y=0 \Longrightarrow b^2-4a=0 \\ y=\frac{4}{3} \Longrightarrow 3b^2+8b-28a=0 \end{cases}$$ (۰/۵ نمره)

ازحل‌دستگاه فوق‌نتیجه میشود $a=1$ و $b=2$ (۱ نمره)

خردادماه ۱۳۵۱

۳۰۹۸- اولاً- تحقیق کنید که $x=2$ یکی‌ازریشه‌های‌معادله $x^3-3x-2=0$ میباشد و معادله‌را کاملاً حل کنید. (۱ نمره)

ثانیاً- تقعر وتحدب منحنی $y=\frac{x^3+3x+1}{x^2}$ را معلوم کرده ومختصات نقطهٔ‌عطف آنرا پیدا کنید. (۱/۵ نمره)

ثالثاً- با توجه بدو قسمت قبل جدول و منحنی (c) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x^3+3x+1}{x^2}$ را رسم کنید. (۲ نمره)

رابعاً- مطلوبست تعیین‌حدود m ضریب‌زاویه‌های‌خطوطی که ازمبداء مختصات‌میگذرند و منحنی (c) را درسه‌نقطه متمایز قطع میکنند (۱/۵ نمره) ودرحالتیکه خط برمنحنی‌مماس است مختصات نقطه تماس را پیدا کنید. (۱ نمره)

حل: اولاً- $x=2 \Longrightarrow (8-3\times 2)-2=0 \Longrightarrow 0=0$ (۰/۲۵ نمره)

$x^3-3x-2=0 \Longrightarrow (x-2)(x+1)^2=0$ (۰/۵ نمره)

$x=2$ و -1 (۰/۲۵ نمره)

$y'=\frac{x^3-3x-2}{x^2}$ (۰/۵ نمره)

$y''=\frac{6(x+1)}{x^3}$ (۰/۵ نمره)

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y''	$-$	0	$+$
تقعر	↘	-2	↗

نقطه $I(-1$ و $-3)$ نقطه‌عطف‌منحنی است (۰/۵ نمره)

حل: ثالثاً ـ

$$\begin{cases} y' = 0 \Longrightarrow x = 2 \text{ و } -1 \\ y = \frac{15}{4} \text{ و } -3 \quad (0/5 \text{ نمره}) \end{cases}$$

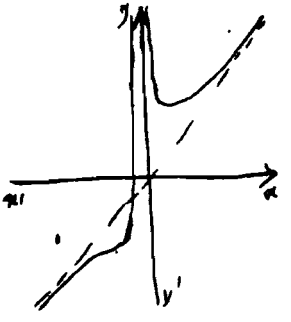
$x = 0 \Longrightarrow y = \infty$ (۰/۲۵ نمره)

$x = \pm\infty \Longrightarrow y = \pm\infty$ (۰/۲۵ نمره)

$$\begin{cases} \frac{x^3+3x+1}{x^2} = x + \frac{3x+1}{x^2} \\ y = x \quad \text{معادله مجانب} \quad (0/5 \text{ نمره}) \end{cases}$$

جدول (۰/۵ نمره)

رسم منحنی (۰/۵ نمره)



x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	∞	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	$\frac{15}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\begin{cases} y = \frac{x^3+3x+1}{x^2} \\ y = mx \Longrightarrow (m-1)x^3 - 3x - 1 = 0 \quad (0/25 \text{ نمره}) \end{cases}$$

$x^3 - \frac{3}{m-1}x - \frac{1}{m-1} = 0$ ($\frac{1}{4}$ نمره)

$4p^3 + 27q^2 < 0 \Longrightarrow \frac{27m - 135}{(m-1)^3} < \frac{1}{2}$ ($\frac{1}{4}$ نمره)

m	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$4p^3 + 27q^2$		$+$	∞	$-$	0	$+$	

(۰/۵ نمره)

$1 \leq m < 5$

بازاء $m = 5$ خط برمنحنی مماس است (۰/۲۵ نمره)

$$۴x^۳-۳x-۱=۰ \Longrightarrow (x+۱)(۲x+۱)^۲=۰ \qquad (۰/۵ \text{ نمره})$$

$$۲x+۱=۰ \Longrightarrow x=-۰/۵ \text{ و } y=-۲/۵ \qquad (۰/۲۵ \text{ نمره})$$

۳۰۹۹- منحنی بمعادله $x^۲-۲x(y+a)+y^۲+۴=۰$ مفروض است.

الف- پارامتر a را قسمی انتخاب کنید که $x=۲$ طول نقطه می‌نیمم نمودار تابع فوق باشد. (۱/۵ نمره)

ب- هرگاه خط $y=kx$ منحنی تابع $x^۲-۲x(y+۲)+y^۲+۴=۰$ را در دو نقطه A و B قطع کند مطلوبست تعیین معادله مکان هندسی نقطه C وسط وتر AB. (۱/۵ نمره)

ج- جدول تغییرات سهمی $y=x\pm۲\sqrt{x-۱}$ را معین کرده و منحنی $(c_۱)$ نمودار آنرا رسم کنید. (۴ نمره)

(جدول تغییرات هر دو تابع لازم است).

د - سطح محصور بین منحنی $y=x-۲\sqrt{x-۱}$ و محور xها و خطوط $x=۱$ و $x=۲$ وهمچنین حجم حادث از دوران این سطح را حول محور $x'x$ حساب کنید (هر قسمت ۲ نمره).

حل: الف- از معادله منحنی طبق قواعد مشتق توابع ضمنی مشتق گرفته بجای x مساویش عدد ۲ و بجای y' مساویش صفر را قرار داده و عرض نقطه مینیمم را بدست میآوریم و سپس این مختصات را در تابع بجای x و y قرار میدهیم و مقدار a را حساب میکنیم.

$$۲x-۲(y+a)-۲xy'+۲yy'=۰ \qquad x=۲ \text{ و } y'=۰ \quad (۰/۵ \text{ نمره})$$

$$۴-۲y-۲a=۰ \Longrightarrow y=۲-a \Longrightarrow Min(۲ \text{ و } ۲-a) \qquad (۰/۵ \text{ نمره})$$

$$x^۲-۲x(y+a)+y^۲+۴=۰ \text{ و } Min(۲ \text{ و } ۲-a)$$

$$۴-۲(۲)(۲-a+a)+(۲-a)^۲+۴=۰ \qquad (۰/۲۵ \text{ نمره})$$

$$a=۲ \qquad (۰/۲۵ \text{ نمره})$$

حل: ب:

$$x^۲-۲x(kx+۲)+k^۲x^۲+۴=۰$$

$$(k-۱)^۲x^۲-۴x+۴=۰ \qquad (۰/۲۵ \text{ نمره})$$

$$AB \text{ وسط } x_c=\frac{x'+x''}{۲}=\frac{-b}{۲a}=\frac{۲}{(k-۱)^۲} \qquad (۰/۲۵ \text{ نمره})$$

$$y=kx \Longrightarrow y_c=\frac{۲k}{(k-۱)^۲} \qquad (۰/۲۵ \text{ نمره})$$

$$\frac{y}{x}=k \text{ و } y=\frac{۲k}{(k-۱)^۲} \Longrightarrow y=\frac{\frac{۲y}{x}}{(\frac{y}{x}-۱)^۲}$$

$$1 = \frac{2x}{(y-x)^2} \Longrightarrow (y-x)^2 = 2x$$ (۰/۵ نمره)

$$y - x = \pm\sqrt{2x} \Longrightarrow y = x \pm \sqrt{2x}$$ (۰/۲۵ نمره)

حل: ج ـ

$$x - 1 \geq 0 \Longrightarrow x \geq 1$$ (۰/۲۵ نمره)

$$y = x + 2\sqrt{x-1}$$

$$y' = 1 + \frac{1}{\sqrt{x-1}} > 0$$ ($\frac{1}{2}$ نمره)

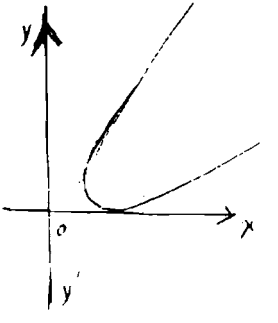
$$x = +\infty \Longrightarrow y = +\infty$$ (۰/۲۵ نمره)

$$x = 1 \Longrightarrow y = 1$$ (۰/۲۵ نمره)

$$y = 0 \Longrightarrow x = 2$$

x	1		2		$+\infty$
y'		−	0	+	
y	1	↘	0	↗	$+\infty$

min



$$y = x - 2\sqrt{x-1} \Longrightarrow x \geq 1$$

$$y' = 1 - \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$ (۰/۲۵ نمره)

x	1		2		$+\infty$
y'		−	0	+	
y	1	↘	0	↗	$+\infty$

min

$$\begin{cases} y' = 0 \Longrightarrow x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$ (۰/۵ نمره)

حل: د ـ

$$y = x - 2\sqrt{x-1} = x - 2(x-1)^{0/5}$$ (۰/۲۵ نمره)

$$Y = F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}(x-1)^{1/5}$$ (۰/۷۵ نمره)

$$S = F(2) - F(1) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$ (۱ نمره)

$$g(x)=\pi y^{2}=\pi(x^{2}+4x-4-4x\sqrt{x-1})$$

$$g(x)=\pi[x^{2}+4x-4-4(x-1+1)\sqrt{x-1}]$$

$$g(x)=\pi\left[x^{2}+4x-4-4(x-1)^{1/5}-4(x-1)^{0/5}\right]$$

$$G(x)=\pi\left[\frac{1}{3}x^{3}+2x^{2}-4x-\frac{8}{5}(x-1)^{2/5}-\frac{8}{2}(x-1)^{1/5}\right]$$

$$V=G(2)-G(1)=\frac{-8\pi}{5}+\frac{5\pi}{3}=\frac{\pi}{15}$$

۳۱۰۰- معادله درجه دوم :

$$a^{2}(x-\alpha)(x-\beta)+b^{2}(x-\alpha)(x-\gamma)+c^{2}(x-\beta)(x-\gamma)=0$$

مفروض است ثابت کنید بازاء جمیع مقادیر a و b و c و α و β و γ معادله فوق دارای دو ریشه حقیقی میباشد. (۲ نمره)

راهنمائی: از $f(\alpha)\cdot f(\beta)\cdot f(\gamma)$ میتوانید استفاده کنید (a و b و c لااقل یکی مخالف صفر است).

حل:

$$f(\alpha)=c^{2}(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)$$

$$f(\beta)=b^{2}(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)=-b^{2}(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)$$

$$f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)=-a^{2}b^{2}c^{2}(\alpha-\beta)^{2}(\alpha-\gamma)^{2}(\beta-\gamma)^{2}$$

چون عبارت فوق منفی است پس لااقل یکی از مقادیر $f(\alpha)$ یا $f(\beta)$ یا $f(\gamma)$ کوچکتر از صفر است و چون در معادله فوق ضریب x^{2} برابر $a^{2}+b^{2}+c^{2}$ میباشد و همواره مثبت است پس لااقل یکی از مقادیر $af(\alpha)$ یا $af(\beta)$ یا $af(\gamma)$ کوچکتر از صفر است پس معادله همواره دارای دو ریشه است .

شهریورماه ۱۳۵۱

۱-۳۱۰۱ تابع $y=ax^3+bx^2+cx+d$ مفروض است :

اولاً: پارامترهای a و b و c و d را قسمی انتخاب کنید که مبدأ مختصات نقطهٔ ماکزیمم تابع بوده و $F(1,-2)$ نقطه عطف آن باشد. (۲ نمره)

ثانیاً: جدول و منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=x^3-3x^2$ را رسم کنید. (۲/۵ نمره)

ثالثاً: در تعداد و علامت ریشه‌های معادله درجه سوم $x^3-3x^2-m=0$ بحث کنید. (۳ نمره)

رابعاً: سطح محصور بین منحنی (C) و محور yها و مماس بر منحنی در نقطه می‌نیمم را که در ناحیه چهارم محورهای مختصات قرار دارد حساب کنید. (۲ نمره)

حل اولاً: $F(1,-2)$ نقطه عطف ، $O(0,0)$ نقطه ماکزیمم

$y'=3ax^2+2bx+c$ و $y''=6ax+2b$ (۰/۵ نمره)

$$\begin{cases} 0=0+0+c\Longrightarrow c=0 & \text{طول نقطه O در مشتق} \\ 0=0+0+0+d\Longrightarrow d=0 & \text{مختصات O در تابع} \\ 0=6a+2b\Longrightarrow 3a+b=0 & \text{طول نقطه F در مشتق ثانی} \\ -2=a+b+c+d\Longrightarrow a+b=-2 & \text{مختصات نقطه F در تابع} \end{cases}$$

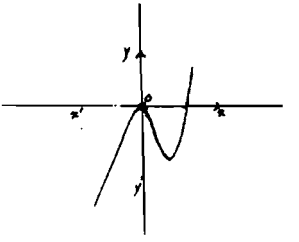
هر معادله (۰/۲۵ نمره) دارد

$$\begin{cases} 3a+b=0 \\ -a-b=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2a=2\Longrightarrow a=1 \\ b=-3a=-3 \end{cases} \quad (0/5 \text{ نمره})$$

حل ثانیاً: $y=x^3-3x^2\Longrightarrow y'=3x^2-6x$ (۰/۲۵ نمره)

$$\begin{cases} y'=0\Longrightarrow 3x^2-6x=0 \\ x=0 \text{ و } 2\Longrightarrow y=0 \text{ و } -4 \end{cases} \quad (0/25 \text{ نمره})$$

$$\begin{cases} y=0\Longrightarrow x^3-3x^2=0 \\ x=0 \text{ و } 3 \end{cases} \quad (0/5 \text{ نمره})$$



$x = \pm\infty \Longrightarrow y = \pm\infty$ (۰/۲۵ نمره)

(جدول ۰/۷۵ نمره)

(رسم منحنی ۰/۵ نمره)

x	$-\infty$		۰		۲		۳		$+\infty$
y'		+	۰	−	۰	+		+	
y	$-\infty$	↗	۰	↘	−۴	↗	۰	↗	$+\infty$

حل ثالثاً: (۰/۵ نمره)

$x = \frac{۱}{X} \Longrightarrow \frac{۱}{x^۲} - \frac{۳}{X^۲} - m = ۰$

$mX^۲ + ۳X - ۱ = ۰ \Longrightarrow X^۲ + \frac{۳}{m}X - \frac{۱}{m} = ۰$ (۰/۵ نمره)

$\Delta = ۴p^۲ + ۲۷q^۲ = ۴ \times \frac{۲۷}{m^۲} + \frac{۲۷}{m^۲} = \frac{۲۷(۴+m)}{m^۲}$ (۰/۲۵ نمره)

$\Delta = \frac{۲۷}{m^۲} \times \frac{۴+m}{m} \Longrightarrow m = -۴$ (۰/۲۵ نمره)

$\Longrightarrow m = ۰$

$q = \frac{-۱}{m} \Longrightarrow m = ۰ \Longrightarrow q = \infty$ (۰/۵ نمره)

m	$-\infty$		−۴		۰		$+\infty$
Δ		+	۰	−	∞	+	
q		+		+	∞	−	
بحث	یک ریشه منفی دارد		یک ریشه منفی و دو ریشه مثبت دارد			یک ریشه مثبت دارد	
	$x_۱ = x_۲ = ۲$ و $x_۳ = -۱$				$x_۱ = x_۲ = \infty$ و $x_۳ = ۳$		

بحث درجدول یك نمره دارد .

حل رابعاً : سطح موردنظر برابراست باتفاضل S_1 (سطح محصور بین منحنی ومحور طولها ودوخط $x=0$ و $x=2$) ازسطح S_2 (مساحت مستطیل OABC) (۰/۵ نمره)

$$f(x)=x^3-3x^2 \Longrightarrow F(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+C \quad (\text{۰/۵ نمره})$$

$$S_1=F(2)-F(0)=4 \quad (\text{۰/۵ نمره})$$

$$S_2=2\times 4=8 \quad (\text{۰/۲۵ نمره})$$

$$S=S_2-S_1=8-4=4 \quad (\text{۰/۲۵ نمره})$$

ج ۷ / مسأله ۱۱-۳-اولاً : درتابع $y=\frac{a(x-1)^2}{x^2-2}$ پارامتر a را قسمی انتخاب کنید که مجموع عرضهای نقاط ماکزیمم ومینیمم تابع فوق برابر $\frac{1}{2}$ باشد (۱/۵ نمره) و بهازای $a=1$ منحنی را رسم کنید. (۲/۵ نمره)

ثانیاً: درمعادلهٔ درجهٔ دوم $(m-1)x^2+2x-(2m+1)=0$ پارامتر m را چگونه اختیار کنیم تااعدادصفر و ۱ هردو بین دوریشه معادله فوق واقع شوند. (۳ نمره)

حل اولاً:

طرفین وسطین می‌نمائیم

$$yx^2-2y=ax^2-2ax+a$$

$$(y-a)x^2+2ax-2y-a=0 \quad (\text{۰/۵ نمره})$$

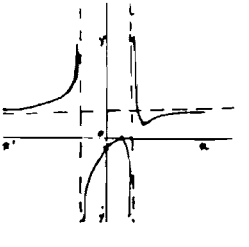
$$\Delta'=0 \Longrightarrow a^2-(y-a)(-2y-a)=0 \quad (\text{۰/۲۵ نمره})$$

$$a^2+2y^2+ay-2ay-a^2=0 \Longrightarrow 2y^2-ay=0 \quad (\text{۰/۲۵ نمره})$$

$$y'+y''=\frac{-b}{a}=\frac{a}{2} \Longrightarrow \frac{1}{2}=\frac{a}{2} \Longrightarrow a=1 \quad (\text{۰/۵ نمره})$$

$$a=1 \Longrightarrow y=\frac{(x-1)^2}{x^2-2}$$

$$y'=\frac{2(x-1)(x-2)}{(x^2-2)^2}$$



$$\begin{cases} y' = 0 \Longrightarrow x = 1 \text{ و } 2 \\ y = 0 \text{ و } \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x = \pm\infty \Longrightarrow y = 1$$

$$y = \pm\infty \Longrightarrow x^2 - 2 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		1		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
y'		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	1	↗	$+\infty$	↗	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}$	↘	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	1

حل ثانیاً: $(m-1)x^2 + 2x - (2m+1) = 0 \quad x' > 1 > 0 > x''$

$$\begin{cases} af(1) < 0 \Longrightarrow (m-1)(-2m-1) < 0 \Longrightarrow m = 1 \text{ و } \frac{-1}{2} \\ af(0) < 0 \Longrightarrow (m-1)(-m) < 0 \Longrightarrow m = 1 \text{ و } 0 \end{cases}$$

m	$-\infty$		$-1 \div 2$		0		1		$+\infty$
$af(1)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$af(0)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
بحث	جواب‌دارد		جواب‌ندارد			جواب‌ندارد		جواب‌دارد	

۳۱۰۳- تابع $y^2 + 2(x-1)y + 2x^2 - 2x - 1 = 0$ مفروض است:

اولاً: تحقیق کنید که $\omega(0 \text{ و } 1)$ مرکز تقارن منحنی (C_m) نمایش تغییرات تابع فوق می‌باشد. (۱ نمره)

ثانیاً: ثابت کنید محور yها ($x=0$) بامنحنی (C_2) متقاطع است و مختصات نقاط تقاطع را پیدا کنید. (۰/۵ نمره)

ثالثاً: جدول و منحنی (C_2) نمایش بیضی $y=1-x\pm\sqrt{2-x^2}$ را رسم کنید (۳ نمره)

(یکی از دو تابع را رسم کرده و با توجه به اینکه نقطه ω مرکز بیضی است شکل را کامل کنید.)

حل اولاً: $x=X+0=X$ و $y=Y+1$

$(Y+1)^2+2(X-1)(Y+1)+2X^2-2X-1=0$ (۰/۵ نمره)

$Y^2+1+2Y+2XY+2X-2Y-2+2X^2-2X-1=0$

$Y^2+2X^2+2XY-2=0$ (۰/۲۵ نمره)

چون با تبدیل $-X$ به X و $-Y$ به Y در معادله منحنی تغییری حاصل نمیشود پس مبدأ جدید یعنی $\omega(0,1)$ مرکز تقارن منحنی است. (۰/۲۵ نمره)

حل ثانیاً: $x=0\Longrightarrow y^2-2y-1=0\Longrightarrow y=1\pm\sqrt{2}$

$A(0,1+\sqrt{2})$ و $B(0,1-\sqrt{2})$ (۰/۵ نمره)

حل ثالثاً: $y=1-x+\sqrt{2-x^2}$

$2-x^2>0\Longrightarrow\sqrt{2}>x>-\sqrt{2}$. تابع معین است (۰/۵ نمره)

$$y'=-1-\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}$$

$$y'=\frac{-\sqrt{2-x^2}-x}{\sqrt{2-x^2}}$$ (۰/۵ نمره)

$y'=0\Longrightarrow -x-\sqrt{2-x^2}=0$

$x=-1\Longrightarrow y=1+1+\sqrt{2-1}=3$

$x=0\Longrightarrow y=1+\sqrt{2}$

$x=-\sqrt{2}\Longrightarrow y=1+\sqrt{2}$

$x=\sqrt{2}\Longrightarrow y=1-\sqrt{2}$

هرعمل (۰/۲۵ نمره) دارد رسم جدول (۰/۷۵ نمره) رسم منحنی (۰/۷۵ نمره) دارد

x	$-\sqrt{2}$		-1		0		$\sqrt{2}$
y′		+	0	−		−	
y	$1+\sqrt{2}$	↗	3	↘	$1+\sqrt{2}$	↘	$1-\sqrt{2}$
			Max				

خردادماه ۱۳۵۲

مسئله اول: تابع $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ مفروض است:

الف: ضرائب a و b و c و d و e را قسمی انتخاب کنید که مبدأ مختصات نقطهٔ میانیم و $M(-1,1)$ نقطهٔ ماکسیمم تابع بوده وضمناً نمودار تابع فوق از نقطهٔ $A(x=1, y=9)$ بگذرد. (۲ نمره)

ب: جدول ومنحنی (c) نمایش تغییرات تابع $y=x^4+4x^3+4x^2$ رادرسم کنید. (۳ نمره)

ج: سطح محصور بین منحنی (c) ومحور xها از $x=-2$ تا $x=0$ حساب کنید. (۲ نمره)

حل اولا: $y'=4ax^3+3bx^2+2cx+d$

(۱)	$0=0+0+0+d \Rightarrow d=0$	طول مبدأ در مشتق
(۲)	$0=0+0+0+0+e \Rightarrow e=0$	مختصات مبدأ در تابع
(۳)	$0=-4a+3b-2c+d$	طول Min در مشتق
(۴)	$1=a-b+c-d+e$	مختصات Min در تابع
(۵)	$9=a+b+c+d+e$	مختصات A در تابع

تشکیل هرمعادله (۰/۲۵ نمره) دارد، اگر در معادلات (۳) و (۴) وبجای d و e مقادیر بدست آمده یعنی صفر را قرار دهیم سه معادله بصورت زیر درمیآید.

$$\begin{cases} -4a+3b-2c=0 & (0/25 \text{ نمره}) \\ a-b+c=1 \\ a+b+c=9 \end{cases} \xrightarrow[\text{دو رابطه}]{\text{از تفاضل}} \begin{cases} 2b=8 \\ b=4 \end{cases}$$

حال درمعادله (۱) و(۳) بالا بجای b مقدارش یعنی ۴ راقرار میدهیم.

$$\begin{cases} -4a+12-2c=0 \\ a-4+c=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -2a-c=-6 \\ a+c=5 \end{cases}$$

ازجمع دورابطه $\Longrightarrow -a=-1 \Longrightarrow a=1$ (0/5 نمره)

$a+c=5 \Longrightarrow 1+c=5 \Longrightarrow c=4$ (0/25 نمره)

حل ثانیاً : $y=x^4+4x^3+4x^2$ و $y'=4x^3+12x^2+8x$

$y'=0 \Longrightarrow 4x^3+12x^2+8x=0 \Longrightarrow 4x(x^2+3x+2)=0$

$x=0$ و -2 و -1 (0/5 نمره)

$y=0$ و 0 و 1 (0/25 نمره)

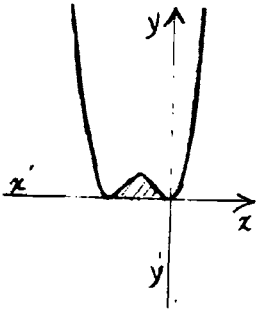
$y=0 \Longrightarrow x^4+4x^3+4x^2=0$

$x^2(x^2+4x+4)=0$

$x^2(x+2)^2=0$

$x=0$ و -2 (0/25 نمره)

$x=\pm\infty \Longrightarrow y=+\infty$ (0/25 نمره)



جدول وتعیین‌علامت(0/75 نمره)

رسم منحنی (0/75 نمره)

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$
			Min		Max		Min		

حل ثالثاً: $y=x^3+2x^2+2x^2$

$$Y=\frac{1}{5}x^5+x^4+\frac{4}{3}x^3+c \qquad (1\text{ نمره}) \qquad , \quad F(0)=c$$

$$F(-2)=\frac{-32}{5}+16-\frac{32}{3}+c=\frac{-96+240-160}{15}+c$$

$$F(-2)=\frac{-16}{15}+c$$

$$S=\left|F(0)-F(-2)\right|=\left|c+\frac{16}{15}-c\right|=\frac{16}{15}\text{ واحد مربع} \quad (1\text{ نمره})$$

مسئله دوم: تابع $y=1-a^2\pm(x+2)\sqrt{4-x^2}$ مفروض است:

۱ـ بازاء چه مقادیر a محور x ها محور تقارن منحنی تابع فوق است. (۰/۵ نمره)

۲ـ جدول و منحنی (c') نمایش تغییرات تابع $y=\pm(x+2)\sqrt{4-x^2}$ را رسم کنید. (۳/۵ نمره) (جدول تغییرات یکی از دو تابع کافی است)

۳ـ حجم حادث از دوران سطح محصور بین منحنی (c') و محور xها را حول محور xها از $x=-2$ تا $x=2$ حساب کنید. (۲ نمره)

حل ۱ـ برای اینکه محور x ها محور تقارن باشد باید با تبدیل y به $-y$ معادله منحنی تغییر نکند پس باید $1-a^2$ مساوی صفر باشد.

$$1-a^2=0 \Longrightarrow a^2=1 \Longrightarrow a=\pm 1 \qquad (0/5\text{ نمره})$$

حل ۲ـ $y=(x+2)\sqrt{4-x^2}$

تابع معین است (۰/۵ نمره) $4-x^2\geqslant 0 \Longrightarrow 2\geqslant x\geqslant -2$

$$y'=\sqrt{4-x^2}+\frac{-x(x+2)}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{4-x^2-x^2-2x}{\sqrt{4-x^2}} \quad (0/5\text{ نمره})$$

$y' = 0 \Longrightarrow -2x^2 - 2x + 4 = 0$

$x^2 + x - 2 = 0$

$x = 1 \text{ و } -2$

$y = 3\sqrt{3} \text{ و } 0$ (۰/۵ نمره)

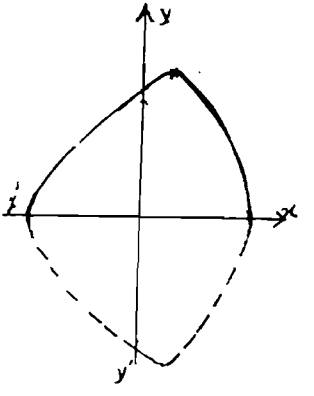
$y = 0 \Longrightarrow (x+2)\sqrt{4 - x^2} = 0$

$x = \pm 2$ (۰/۲۵ نمره)

$x = 0 \Longrightarrow y = 4$

رسم جدول (۰/۷۵ نمره)

رسم هر قسمت منحنی (۰/۷۵ نمره)



x	-2		0		1		2
y'	∞	$+$		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$3\sqrt{3}$	$\searrow$	0
	Min				Max		

حل ۳ـ $y = (x+2)\sqrt{4 - x^2} \Longrightarrow y^2 = (x+2)^2(4 - x^2)$

$y^2 = (x+2)^2(x+2)(2 - x) = (x+2)^3[2 - (x+2)]$

$y^2 = 2(x+2)^3 - (x+2)^4$ ، $g(x) = \pi y^2$

$g(x) = \pi[2(x+2)^3 - (x+2)^4]$ (۰/۵ نمره)

$G(x) = \pi[(x+2)^4 - \frac{1}{5}(x+2)^5] + c$ (۰/۵ نمره)

$G(-2) = c$

$G(0) = \pi[(0+2)^4 - \frac{1}{5}(0+2)^5] + c$

$G(0)=\pi(16-\frac{32}{5})+c=\frac{48\pi}{5}+c$ (۰/۵ نمره)

$V=G(0)-G(-2)=\frac{48\pi}{5}$ واحد مکعب (۰/۵ نمره)

مسئله سوم ـ ثابت کنید معادلهٔ $mx^2-2(m+1)x+2m+1=0$ هیچگاه نمیتواند فقط یکریشه بین اعداد سه ویك داشته باشد. (۱/۵ نمره)

حل: $f(3)f(1)<0$ (۰/۵ نمره)

$(9m-6m-6+2m+1)(m-2m-2+2m+1)<0$ (۰/۵ نمره)

$(5m-5)(m-1)<0 \Longrightarrow 5(m-1)^2<0$ غیرممکن است (۰/۵ نمره)

مسئله چهارم ـ مشتق تابع $y=3\sin^3[tg^3(3x^3)]$ راحساب کنید (y تابع x است) (۱/۵ نمره)

$y'=27x^2\times 3tg^2 3x^3(1+tg^2 3x^3)\times 3\sin^2(tg^3 3x^3)\cos(tg^3 3x^3)$

(۰/۲۵ نمره) (۰/۵ نمره) (۰/۵ نمره)

$y'=243x^2 tg^2 3x^3 \sin^2(tg^3 3x^3)\cos(tg^3 3x^3)(1+tg^2 3x^3)$ (۰/۲۵ نمره)

مسئله پنجم ـ درمعادلهٔ درجه سوم $x^3+(a-1)x^2-(2a+1)x-a=0$ پارامتر a راقسمی انتخاب کنید که داشته باشیم $\alpha^{-2}+\beta^{-2}+\gamma^{-2}=9$ (αوβوγ ریشه‌های معادله فوق هستند) (۲ نمره)

حل: $\alpha^{-2}+\beta^{-2}+\gamma^{-2}=9 \Longrightarrow \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}=9$

$\frac{\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2+\alpha^2\beta^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}=9$ (۰/۵ نمره)

$\frac{(\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha^2\alpha^2\gamma^2}=9$ (۰/۵ نمره)

$(\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=9\alpha^2\beta^2\gamma^2$

$(2a+1)^2-2(a)(-a+1)=9a^2$ (۰/۵ نمره)

$2a^2-2a-1=0 \Longrightarrow a=(1\pm\sqrt{2})\div 2$ (۰/۵ نمره)

مسئله ششم: حد تابع $y=\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}$ راوقتی که $x\to 0$ پیدا کنید. (۲ نمره)

$y=\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$ ، $x=0 \Longrightarrow y\div$ مبهم است (۰/۲۵ نمره)

$$y \equiv y_1 = \frac{2x - \sin 2x}{2x\sin^2 x + x^2 \sin 2x} \quad , \quad x = 0 \Longrightarrow y = \frac{0}{0}$$ مبهم است (۰/۲۵ نمره)

$$y \equiv y_2 = \frac{2 - 2\cos 2x}{2\sin^2 x + 4x\sin 2x + 2x^2\cos 2x} \quad x = 0 \Longrightarrow y = \frac{0}{0}$$ مبهم است

$$y \equiv y_3 = \frac{2\sin 2x}{6\sin 2x + 12x\cos 2x - 4x^2\sin 2x}$$ (۰/۲۵ نمره)

$x = 0 \Longrightarrow y = 0 \div 0$ مبهم است (۰/۵ نمره)

$$y \equiv y_4 = \frac{8\cos 2x}{24\cos 2x - 32x\sin 2x - 8x^2\cos 2x}$$ (۰/۵ نمره)

$$x = 0 \Longrightarrow y = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$ (۰/۲۵ نمره)

شهریورماه ۱۳۵۲

مسئله اول : تابع $y = \frac{x^2+4}{2ax+3}$ مفروض است: $a \neq 0$

الف: ثابت کنید بازاء جمیع مقادیر a منحنی تابع فوق ازنقطه ثابتی که مختصات آنرا معین میکنید میگذرد. (۱ نمره)

ب: بکمك تشکیل معادلهٔ درجه دومی که ریشههایش عرضهای نقاط ماکسیمم ومی‌نیمم باشد ثابت کنید تابع‌فوق همیشه دارای‌یك ماکسیمم ویك‌می‌نیمم می‌باشد: (۲ نمره)

ج: هرگاه معادله : مطلوب در قسمت (ب) بصورت $a^2y^2 + 3y - 4 = 0$ باشد پارامتر a راقسمی انتخاب کنید که داشته‌باشد $y_1 - y_2 = 5$ (y_1 و y_2 نمایش مقادیرماکسیمم ومی‌نیمم‌است) (۱ نمره)

د: منحنی (c) نمایش تغییرات تابع $y = \frac{x^2+4}{2x+3}$ رارسم کنید. (۳ نمره)

هـ بکمك منحنی (c) یا مستقیماً ریشههای معادله درجه دوم

$x^2 - 2mx - 3m + 4 = 0$ را با اعداد ۰ و ۱ مقایسه کنید . (۲ نمره)

حل الف: $y = \frac{x^2+4}{2ax+3} \Longrightarrow x^2 + 4 - 2axy - 3y = 0$

$$-2axy+x^2+4-3y=0$$ (۰/۲۵ نمره)

$-2xy=0 \Rightarrow x=0$ یا $y=0$ و $x^2+4-3y=0$ نمره (۰/۵)

$$x=0 \Rightarrow 4-3y=0 \Rightarrow y=\frac{4}{3} \Rightarrow A(0 \text{ و } \frac{4}{3})$$

$y=0 \Rightarrow x^2+4=0 \Rightarrow x^2=-4$ ریشه ندارد

پس کلیه منحنی‌ها از نقطه $A(0 \text{ و } 4 \div 3)$ میگذرند (۰/۲۵ نمره)

حل ب: پس از طرفین وسطین کردن و تمام جملات را بیک طرف آوردن و خلاصه نمودن نتیجه میشود.

$$x^2-2axy+4-3y=0 \Rightarrow \Delta'=a^2y^2-4+3y=0$$ (۱ نمره)

$$a^2y^2-3y-4=0 \Rightarrow \Delta=9+16a^2>0$$ (۰/۵ نمره)

چون دلتای Δ' همواره بزرگتر ازصفر است پس $\Delta'=0$ همواره دارای دوریشه است یعنی کلیه منحنی‌ها که بازاء جمیع مقادیر a بدست میآیند ازدو نقطه ثابت می گذرند (۰/۵ نمره)

حل ج:

$$a^2y^2+3y-4=0$$

$$\begin{cases} y_1-y_2=5 \\ y_1+y_2=\dfrac{-3}{a^2} \\ y_1y_2=\dfrac{-4}{a^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=\dfrac{5a^2-3}{2a^2} \\ y_2=\dfrac{-5a^2-3}{2a^2} \end{cases}$$

(۰/۵ نمره)

$$y_1y_2=\frac{-4}{a^2} \Rightarrow \frac{-5a^2-3}{2a^2}\times\frac{5a^2-3}{2a^2}=\frac{-4}{a^2}$$

$$\frac{-(25a^4-9)}{4a^2}=\frac{-4}{a^2} \Rightarrow 25a^4-9=16$$

$$25a^2=25 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1$$ (۰/۵ نمره)

حل د:

$$y=\frac{x^2+4}{2x+3}\ ,\ y'=\frac{2x^2+6x-8}{v^2}$$ (۰/۵ نمره)

$y' = 0 \Rightarrow 2x^2 + 6x - 8 = 0 \Rightarrow x = 1$ و -4 (۰/۵ نمره)

$x = 1 \Rightarrow y = 1$ و $x = -4 \Rightarrow y = -4$ (۰/۲۵ نمره)

$x = \pm\infty \Rightarrow y = \pm\infty$

(۰/۲۵ نمره)

$x = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$

$y = \pm\infty \Rightarrow 2x + 3 = 0$

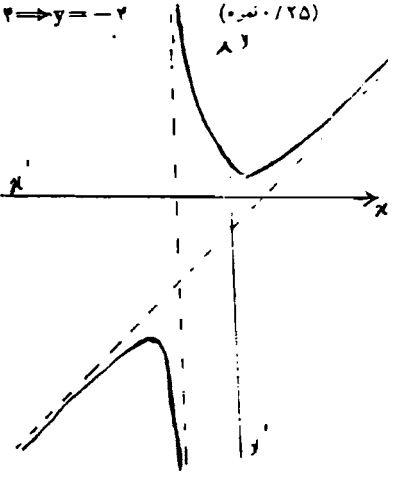
$x = -1/5$ (۰/۲۵ نمره)

$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

معادله مجانب (۰/۲۵ نمره)

رسم جدول (۰/۵ نمره)

رسم شکل (۰/۵ نمره)



x	$-\infty$		-4		$-1/5$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	$\frac{4}{3}$	↘	1	↗	$+\infty$
			Max						Min		

حل ه: پنج شرط دارد که هر کدام (۰/۲۵ نمره) دارد و جدول کاملاً صحیح هم (۰/۷۵ نمره) دارد جدول وشرط آن بقرار زیر است.

m	بحث
$m<-۴$	$x''<x'<۰<۱$
$m=-۴$	$x''=x'=-۲<۰<۱$
$۱>m>-۴$	معادله ریشه ندارد
$m=۱$	$۰<x''=x'=۱$
$m>۱$	$x''<۰\leqslant ۱<x'$

مسئله دوم ـ منحنی تابع $y=\frac{x}{x^۲+۱}$ دارای سه نقطهٔ عطف میباشد مختصات این سه نقطه را پیدا کنید و تحقیق کنید که این سه نقطه روی خط مستقیمی که معادلهٔ آنرا تعیین میکنید قرار دارند. (۳ نمره)

حل :

$$y'=\frac{۱-x^۲}{(۱+x^۲)^۲}\ (۱\text{ نمره})\quad ،\quad y''=\frac{۲x^۳-۶x}{(x^۲+۱)^۳}\qquad (۰/۵\text{ نمره})$$

$$y''=۰\Longrightarrow ۲x^۳-۶x=۰\Longrightarrow x=۰\ \text{و}\ \pm\sqrt{۳}\qquad (۰/۵\text{ نمره})$$

$$x=۰\Longrightarrow y=۰\ \text{و}\ x=\pm\sqrt{۳}\Longrightarrow y=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}\qquad (۰/۵\text{ نمره})$$

$$O(۰,۰)\ \text{و}\ A(\sqrt{۳},\frac{\sqrt{۳}}{۴})\ \text{و}\ B(-\sqrt{۳},-\frac{\sqrt{۳}}{۴})$$

معادله OA بصورت $y=\frac{۱}{۴}x$ میباشد که مختصات نقطه B هم درآن صدق می‌کند پس هر سه نقطه عطف روی یك خط راست قرار دارند.

مسئله سوم ـ صورت کلی توابع اولیه تابع $y=\sqrt[۳]{۴x-۱}+۶x(x-۱)^۲$ را پیدا کنید. (۲ نمره)

$$y=(۴x-۱)^{\frac{۱}{۳}}+۳(۲x)(x^۲-۱)^۲\qquad (۰/۵\text{ نمره})$$

$$Y=\frac{3}{16}(4x-1)^{\frac{4}{3}}+(x^2-1)^3+c$$ (۱ نمره)

$$Y=\frac{3(4x-1)\sqrt[3]{4x-1}}{16}+(x^2-1)^3+c$$ (۰/۵ نمره)

مسئله چهارم ـ جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع $y=\sqrt[3]{x^2-2x}$ رارسم کنید (۳ نمره)

(توجه داشته باشید تابع بازای همهٔ مقادیر x معین است)

$$y'=\frac{2x-2}{3\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}}$$

(۰/۵ نمره)

$$\begin{cases} y'=0 \Longrightarrow 2x-2=0 \\ x=1 \Longrightarrow y=-1 \end{cases}$$

(۰/۵ نمره)

$$x=\pm\infty \Longrightarrow y=\infty$$

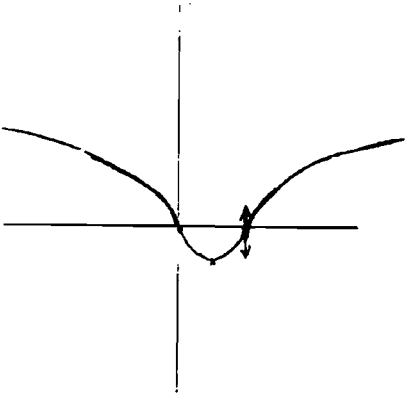
(۰/۲۵ نمره)

$$y=0 \Longrightarrow x^2-2x=0$$

$x=0$ و ۲ (۰/۲۵ نمره)

جدول و رسم منحنی هر کدام

(۰/۷۵ نمره)



x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		−		−	0	+		+	
y	$+\infty$	↘	0	↘	−1	↗	0	↗	$+\infty$

Min

مسئله پنجمـ مطلوبست بحث درتعداد وعلامت ریشه‌های معادلهٔ درجه‌سوم زیروقتیکه a تغییر کند. (۳ نمره)

$x^3-3(a-1)x-2(a-1)=0$

حل:

$\Delta=4p^3+27q^2=4\times-27(a-1)^3+27\times4(a-1)^2$ (۰/۵ نمره)

$\Delta=108(a-1)^2(-a+1+1)=108(a-1)^2(-a+2)$ (۰/۵ نمره)

$\Delta=0\Longrightarrow(a-1)^2(-a+2)=0\Longrightarrow a=1$ و ۲ (۰/۵ نمره)

$q=-2(a-1)=0\Longrightarrow a=1$ (۰/۵ نمره)

رسم جدول وتعیین علامت (۰/۵ نمره)

a	$-\infty$		1		2		$+\infty$
Δ		+	0	−	0	−	
q		+	0	−		−	
بحث		یک ریشه منفی دارد		دو ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد		دو ریشه منفی و یک ریشه مثبت دارد	

$x=0$ | $x_1=x_2=-1$ و $x_3=2$

حل چند معادله درجه سوم

قاعده ۱

بعضی از معادلات درجه سوم کامل را وقتی بجای x مجهول معاونی بصورت $x=y-\frac{b}{3a}$ قرار دهیم معادله درجه سوم ناقصی بدست میآید که قابل حل میباشد، پس از بدست آوردن y در رابطه $x=y-\frac{b}{3a}$ بجای y مقادیر بدست آمده را قرار داده و x را حساب می کنیم مانند مثالهای زیر:

۱- $x^3-6x^2+11x-6=0$

حل: $x=y-\frac{b}{3a}=y+\frac{6}{3}=y+2$

$(y+2)^3-6(y+2)^2+11(y+2)-6=0$

$y^3-y=0\Longrightarrow y=0$ و ±1

$x=y+۲$ ، $y=۰ \Longrightarrow x=۲$

$y=۱ \Longrightarrow x=۱+۲=۳$ ، $y=-۱ \Longrightarrow x=-۱+۲=۱$

۲- $x^۳-۹x^۲+۲۶x-۲۴=۰$

حل: $x=y-\frac{b}{۳a}=y+\frac{۹}{۳}=y+۳$

$(y+۳)^۳-۹(y+۳)^۲+۲۶(y+۳)-۲۴=۰$

$y^۳-y=۰ \Longrightarrow y=۰$ و ± ۱

$x=y+۳$ ، $y=۰ \Longrightarrow x=۰+۳=۳$

$y=۱ \Longrightarrow x=۱+۳=۴$ ، $y=-۱ \Longrightarrow x=-۱+۳=۲$

۳- $x^۳+۱۲x^۲+۴۴x+۴۸=۰$

حل: $x=y-۴ \Longrightarrow (y-۴)^۳+۱۲(y-۴)^۲+۴۴(y-۴)+۴۸=۰$

$y^۳-۴y=۰ \Longrightarrow y=۰$ و ± ۲

$x=y-۴ \Longrightarrow y=۰ \Longrightarrow x=-۴$

$y=۲ \Longrightarrow x=۲-۴=-۲$ ، $y=-۲ \Longrightarrow x=-۲-۴=-۶$

قاعده ۲

وقتی درمعادلات درجه سوم کامل بجای x مجهول معاونی بصورت $x=y-\frac{b}{۳a}$ را قرار میدهیم معادله درجه سوم ناقصی بصورت $y^۳+py+q=۰$ بدست‌میآید اگر $\Delta=۴p^۳+۲۷q^۲$ این معادله مساوی صفر شود یکی از ریشه‌های مشتق این‌معادله جواب‌مضاعف‌معادله $y^۳+py+q=۰$ هم‌میباشد بنابراین از معادله‌مشتق مساوی صفر مقادیر y راحساب‌کرد. وسپس تحقیق می‌کنیم که کدام یکاز ریشه‌مضاعف معادله $y^۲+py+q=۰$ است وبعد عبارت $(y^۳+py+q)$ رابر (ریشه مضاعف $-y$)یابر ^{۲}(ریشه‌مضاعف $-y$) تقسیم نموده‌وریشه دیگر رامحاسبه می‌کنیم و سپس در رابطه $x=y-\frac{b}{۳a}$ بجای y مقادیر بدست آمده‌را قرار میدهیم و x راحساب می‌کنیم مانند مثالهای زیر

معادلات زیر را حل کنید :

۴ـ $x^3-12x^2+45x-50=0$

حل: $x=y+4 \Rightarrow (y+4)^3-12(y+4)^2+45(y+4)-50=0$

$y^3-3y+2=0 \Rightarrow 2p^3+17q^2=4(-3)^3+27(2)^2=0$

پس‌ازمشتق گیری نتیجه مشهود $\Leftarrow$ $3y^2-3=0 \Rightarrow y=\pm 1$

پس $y=1$ ریشه مضاعف است $\Rightarrow$ $y=1 \Rightarrow (1)^3-3(1)+2=0$

$(y^3-3y+2)\div(y-1)^2=y+2$

$y+2=0 \Rightarrow y=-2$ و $x=y+4$

$y=1 \Rightarrow x=1+4=5$ ، $y=-2 \Rightarrow x=-2+4=2$

۵ـ $x^3-3x^2-9x+27=0$

حل: $x=y+1 \Rightarrow (y+1)^3-3(y+1)^2-9(y+1)+27=0$

$y^3-12y+16=0 \Rightarrow \Delta=4p^3+27q^2=4(-12)^3+27(16)^2=0$

پس‌ازمشتق گیری نتیجه‌میشود $\Leftarrow$ $3y^2-12=0$

$y^2=4 \Rightarrow y=\pm 2$

$y=2 \Rightarrow (2)^3-12(2)+16=0 \Rightarrow 0=0$

پس $y=2$ ریشه مضاعف است.

$(y^3-12y+16)\div(y-2)^2=y+4$

$y+4=0 \Rightarrow y=-4$ و $x=y+1$

$y=2 \Rightarrow x=2+1=3$ ، $y=-4 \Rightarrow x=-4+1=-3$

۶ـ $x^3-75x+250=0$

حل: $\Delta=4p^3+27q^2=4(-75)^3+27(250)^2=0$

پس‌معادله دارای ریشه مضاعف است مشتق گرفته ومساوی صفر قرار میدهیم.

$3x^2-75=0 \Rightarrow x^2=25 \Rightarrow x=\pm 5$

$x=5 \Rightarrow (5)^3-75(5)+250=0 \Rightarrow 0=0$

پس $x=5$ ریشه مضاعف است.

$(x^3-75x+250)\div(x-5)^2=x+10$ $x+10=0 \Rightarrow x=-10$

۷ـ $x^3-12x+16=0$

$\Delta=4p^3+27q^2=4(-12)^3+27(16)^2=0$

$3x^2-12=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$

غیرممکن است $۰ = ۱۶ - \Longrightarrow (-۲)^۳ - ۱۲(۲) + ۱۶ \Longrightarrow x = -۲$.

پس ۲ − ریشه مضاعف نیست وحتماً عدد ۲ ریشه مضاعف است.

$$(x^۳ - ۱۲x + ۱۶) \div (x - ۲)^۲ = x + ۴ \qquad x + ۴ = ۰ \Longrightarrow x = -۴$$

قاعده ۳

وقتی دلتای معادله $x^۳ + px + q = ۰$ یعنی $۴p^۳ + ۲۷q^۲$ آن‌مساوی صفرشود معادله دارای‌یك‌ریشه‌مضاعف ویك‌ریشه ساده است که از فرمول زیر بدست میآید:

$$x_۱ = x_۲ = \frac{-۳q}{۲p} \quad و \quad x_۳ = -۲x_۱ = \frac{۳q}{p}$$

مانند مثالهای زیر:

۸ـ معادله $x^۳ - ۱۲x - ۱۶ = ۰$ راحل کنید.

$$۴p^۳ + ۲۷q^۲ = ۴(-۱۲)^۳ + ۲۷(-۱۶)^۲ = ۰$$

$$x_۱ = x_۲ = \frac{-۳q}{۲p} = \frac{-۳ \times -۱۶}{۲ \times -۱۲} = \frac{+۴۸}{-۲۴} = -۲$$

$$x_۳ = -۲x_۱ = -۲ \times -۲ = ۴$$

۹ـ معادله $x^۳ - ۳x + ۲ = ۰$ را حل کنید.

حل:

$$\Delta = ۴p^۳ + ۲۷q^۲ = ۴(-۳)^۳ + ۲۷(۲)^۲ = ۰$$

$$x_۱ = x_۲ = \frac{-۳q}{۲p} = \frac{-۳ \times ۲}{۲ \times -۳} = ۱ \qquad x_۳ = -۲x_۱ = -۲ \times ۱ = -۲$$

قاعده ۴

معادلات درجه سومی که بصورت:

$ax^۳ + bx^۲ + bx + a = ۰$ ویا بصورت

$ax^۳ + bx^۲ - bx - a = ۰$ میباشد یکی ازریشه‌های آنها به ترتیب ۱− و ۱+ میباشد پس‌اولی بر $(x+۱)$ ودومی بر $(x-۱)$ بخش پذیر است پس برای حل آنها عامل $(x+۱)$ یا $(x-۱)$ را بوجود آورده وازآنها فاکتورمی گیریم درنتیجه یك‌معادله درجه اول ویك معادله درجه دوم بدست میآید آنهارا حل می‌نمائیم مانند مثالهای زیر:

۱۰- $2x^3+7x^2+7x+2=0$

حل: $2(x^3+1)+7x(x+1)=0$

$2(x+1)(x^2-x+1)+7x(x+1)=0$

$(x+1)(2x^2+5x+2)=0 \Longrightarrow x=-1$ و -2 و $-0/5$

۱۱- $3x^3-13x^2+13x-3=0$

حل: $3(x^3-1)-13x(x-1)=0$

$3(x-1)(x^2+x+1)-13x(x-1)=0$

$(x-1)(3x^2-10x+3)=0 \Longrightarrow x=1$ و 3 و $\frac{1}{3}$

۹۲- معادله: $x^3+18x-19=0$ را حل کنید

$$x=\sqrt[3]{\frac{19}{2}+\sqrt{\frac{361}{3}+216}}+\sqrt[3]{\frac{19}{2}-\sqrt{\frac{316}{3}+216}}$$

$$x=\sqrt[3]{\frac{19}{2}+\frac{35}{2}}+\sqrt[3]{\frac{19}{2}-\frac{35}{2}}=3-2=1$$

قاعده ۷

اگر معادله درجه سوم $x^3+px+q=0$ دارای سه ریشه باشد یعنی $4p^3+27q^2<0$ باشد ابتداء از رابطه:

$\cos 3\alpha=\frac{-q}{2}\sqrt{\frac{-27}{p^3}}$ مقدار $\cos 3\alpha$ را حساب کرده وسپس α را بدست میآوریم و بعد ریشه‌های معادله فوقرا از فرمولهای زیر محاسبه می‌نمائیم:

$$x_1=2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\alpha$$

$$x_2=2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$x_3=2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)$$

مانند مثالها زیر:

۱۳ـ معادله $x^3-6x-4=0$ را حل کنید.

حل: $\Delta=4p^3+27q^2=4(-6)^3+27(-4)^2=-432<0$

پس معادله فوق سه ریشه دارد $q=-4$ و $p=-6$

$$\cos 3\alpha=\frac{-q}{2}\sqrt{\frac{-27}{p^3}}=\frac{4}{2}\sqrt{\frac{-27}{(-6)^3}}=2\sqrt{\frac{1}{8}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 3\alpha=\cos 45^\circ \Longrightarrow \alpha=15^\circ$$

$$x_1=2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\alpha=2\sqrt{\frac{6}{3}}\cos 15^\circ=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$x_1=\sqrt{3}+1$$

$$x_2=2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=2\sqrt{\frac{6}{3}}\cos(15^\circ+120^\circ)=2\sqrt{2}\cos 135^\circ$$

$$x_2=-2\sqrt{2}\cos 45^\circ=-2$$

$$x_3=2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)=2\sqrt{\frac{6}{3}}\cos(15^\circ+240^\circ)$$

$$x_3=2\sqrt{2}\cos 255^\circ=2\sqrt{2}\cos(180^\circ+75^\circ)$$

$$x_3=-2\sqrt{2}\cos 75^\circ=-(\sqrt{3}-1)=1-\sqrt{3}$$

۱۴ـ معادله $x^3-3x-1=0$ را حل کنید.

حل: $\Delta=4p^3+27q^2$ و $q=-1$ و $p=-3$

$$\Delta=4(-3)^3+27(-1)^2=-108+27=-81<0$$

$$\cos 3\alpha=\frac{-q}{2}\sqrt{\frac{-27}{p^3}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-27}{-27}}=\frac{1}{2}=\cos 60^\circ \qquad 3\alpha=20^\circ\Longrightarrow\alpha=20^\circ$$

$$x_1=2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\alpha=2\sqrt{\frac{3}{3}}\cos 20^\circ=2\cos 20^\circ$$

$$x_2=2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=2\sqrt{\frac{3}{3}}\cos(20^\circ+120^\circ)$$

$$x_2 = 2\cos 120^\circ = -2\cos 40^\circ$$

$$x_3 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = 2\sqrt{\frac{3}{3}}\cos(20 + 240^\circ)$$

$$x_3 = 2\cos 260^\circ = -2\cos 80^\circ$$

۱۵ـ معادله $x^3 - 12 - 8 = 0$ راحل کنید.

جواب: $x = 4\cos 20^\circ$ و $-4\cos 20^\circ$ و $-4\cos 80^\circ$

۱۶ـ معادله $x^3 - 3x + 2 = 0$ راحل کنید.

جواب: $x = 1$ و $x = -2$

۱۷ـ معادله $x^3 - 12x + 16 = 0$ راحل کنید.

جواب: $x = 2$ و -4

۱۸ـ حاصل جمع سه یال مکعب مستطیلی ۹ متر و سطح کل آن ۵۲ متر مربع و حجمش $24M^3$ است. **اولاً:** طول هر یال آن‌را بدست آورید. **ثانیاً:** ثابت کنید قطر آن برابر با $\sqrt{29}$ است.

راهنمائی ـ اگر یالها را با x_1 و x_2 و x_3 نشان‌دهیم خواهیم‌داشت:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9 = -\frac{b}{a} \qquad (1)$$

$$(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = \frac{1}{2}\text{ سطح کل } = 26 = \frac{c}{a} \qquad (2)$$

$$x_1x_2x_3 = \text{ حجم } = 24 = -\frac{d}{a} \qquad (3)$$

حالا باداشتن ضرائب بفرض آنکه a رامساوی یك بگیریم معادله درجه سوم زیر را می‌نویسیم.

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$$

این معادله قبلاً حل شده است

تست‌های جبر
کنکور سراسری رشته ریاضی و طبیعی
و کنکور مدارس عالی کشور

تست جبر کنکور سراسری تیر ماه ۱۳۴۹ گروه «ریاضی»

۱- معادلهٔ $2x+\sqrt{2x-1}=1$ دارای

الف: یک جواب مضاعف است. ب: جواب نیست

ج: دو جواب متمایز است. د: یک جواب است

۲- تابع $x^2+y^2=xy$ مفروض است مشتق y نسبت به x مساوی است با:

الف: $\frac{2x+y}{x+2y}$ ب: $\frac{x-2y}{2x-y}$ ج: $\frac{x+2y}{2x-y}$ د: $\frac{2x-y}{x-2y}$

۳- حد تابع $\frac{x\sin x}{\sin(x^2)}$ وقتی x به سمت صفر میل کند کدام است؟

الف: صفر ب: ۱ ج: $\frac{1}{2}$ د: حد ندارد

۴- منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x-1}{x^2+1}$ محور oy را تحت چه زاویه‌ای قطع میکند؟

الف: $\frac{\pi}{6}$ ب: صفر ج: $\frac{\pi}{3}$ د: $\mathrm{Arctg}\sqrt{2}$

۵- n عدد مثبت و غیر مشخص است کدام یک از نامساویهای زیر همواره درست است؟

الف : $a-\frac{1}{a}>2$ ب : $a+\frac{1}{a}>2$

ج: $a+\frac{1}{a}<2$ د: $a-\frac{1}{a}<2$

۶ـ مبدأ مختصات مرکز تقارن کدام یک از منحنی نمایش تغییرات توابع زیر است؟

الف: $y=x^2-3x$ ب: $y=\frac{x^2+8}{x^2-4x}$

ج: $y=x^2+4x^2$ د: $y=\frac{2x+1}{5x-1}$

۷ـ کسر $\frac{x^2-3x+2}{x^3-4x^2+6x-3}$ به ازاء کدام یک از مقادیر زیر صفر میشود؟

الف: $x=2$ ب: $x=-1$ ج: $x=-2$ د: $x=1$

۸ـ برای آنکه سه جمله‌ای درجه دوم $(\alpha-1)x^2-2\beta x-1$ به ازاء همه مقادیر x مثبت باشد لازم است :

الف: $\alpha<1$ و $\beta^2+\alpha>1$ ب: $\alpha>1$ و $\beta^2+\alpha>1$

ج: $\alpha>1$ و $\beta^2+\alpha<1$ د: $\alpha<1$ و $\beta^2+\alpha<1$

۹ـ $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}$ برابر با کدام یک از چهار مقدار زیر است؟

الف: $1+\sqrt{2x-1}$ ب: $1-\sqrt{2x-1}$

ج: $\frac{1}{2}-\sqrt{x-\frac{1}{4}}$ د: $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{x-\frac{1}{2}}$

۱۰ـ مقدار $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ با کدام یک از مقادیر زیر برابر است ؟

الف: $1+\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$ ب: $1+\sqrt{3}$ ج: $1+\sqrt{2}+\sqrt{4}$ د: $1-\sqrt{2}$

۱۱ـ درصورتیکه x' و x'' ریشه‌های معادله $x^2+x-1=0$ باشند $\frac{x'^3+x''^3}{2x'x''}$ برابر است با :

الف: ۲ ب: -۲ ج: $\frac{۹۱}{۲}$ د: $-\frac{۳}{۴}$

۱۲- خطوط $P=۳x+۴y=۵$ و $Q=۴x+۳y=۵$ مفروض‌اند. کدام یک از چهار خط زیر نیمساز زاویه بین دو خط P و Q است؟

الف: $y=x$ ب: $y=x+۱$ ج: $y=x-۱$ د: $y=-x$

۱۳- اگر $f(x)=x+۳$ و $g(x)=x^۲+x-۲$ باشد جوابهای معادله $g[f(x)]=۰$ عبارتند از:

الف: -۲ و ۱ ب: $-\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۲۱}}{۲}$ و $-\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۲۱}}{۲}$

ج: -۸ و -۵ د: -۲ و -۵

۱۴- کدام یک از چهار خط زیر نسبت به منحنی نمایش تغییرات تابع

$$y=\frac{\sqrt{x^۲-۱}}{x+۲}$$

مجانب است؟

الف: $y=x-۲$ ب: $y=x-۱$ ج: $y=x+۲$ د: $y=-x+۲$

۱۵- به ازاء کدام مقدار A و B رابطه $\frac{۵x+۲}{x^۲+x-۲}=\frac{A}{(x-۱)}+\frac{B}{x+۲}$ یک اتحاد است؟

الف: $A=\frac{۱}{۳}$ و $B=\frac{۲}{۳}$ ب: $A=\frac{۲}{۳}$ و $B=-\frac{۷}{۳}$

ج: $A=\frac{۷}{۳}$ و $B=\frac{۸}{۳}$ د: $A=\frac{۸}{۳}$ و $B=\frac{۱}{۳}$

۱۶- عبارت $x^۲+۱$ بر کدام یک از عبارات زیر همواره قابل قسمت است؟

الف: $x^۲+۱$ ب: $x^۲-۱$ ج: $x^۲-x\sqrt{۲}+۱$ د: $x+۹$

۱۷- تابع $f(x)=\frac{۱}{۱-x}$ مفروض است کدام یک از روابط زیر درست است؟

الف: $f[f(x)]=\frac{x-۱}{x}$ ب: $f[f(x)]=-\frac{x+۱}{x}$

ج: $f[f(x)]=\frac{۱-x}{x}$ د: $f[f(x)]=\frac{x+۱}{x}$

۱۸- سطح محصور بین دو منحنی $y=\frac{x^2}{2}$ و $y^2=2x$ برابر است با:

الف: $\frac{16}{3}$ ب: ۴ ج: $\frac{12}{5}$ د: ۲

۱۹- تابع $y=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$ مفروض است کدام یك از احکام زیر همواره درست است؟

الف: y می‌تواند هر مقداری را اختیار کند.

ب: $\frac{1}{2}<y<\frac{3}{2}$ ج: $y>1$ د: $y<\frac{1}{2}$ یا $y>\frac{3}{2}$

۲۰- مختصات نقطه M' قرینه نقطه $M\left|\begin{matrix}3\\1\end{matrix}\right.$ نسبت بخط $y+2x=1$ عبارت است از:

الف: $M'(-3 \text{ و } -1)$ ب: $M'(-\frac{8}{3} \text{ و } -\frac{10}{3})$

ج: $M'(-\frac{12}{5} \text{ و } -\frac{11}{5})$ د: $M'(-\frac{5}{2} \text{ و } -3)$

۲۱- مرکز تقارن منحنی نقطه $M(x=\frac{1}{\cos\alpha} \text{ و } y=1+\tan\alpha)$ کدام یك از نقاط زیر است؟

الف: $A(1,0)$ ب: $B(0,0)$ ج: $C(0,1)$ د: $D(1,1)$

۲۲- نامساوی $(|x|-5)(|x|-3)>0$ دارای کدام یك از جوابهای زیر است؟

الف: $-5<x<-3$ یا $3<x<5$ ب: $-3<x<3$ یا $x>5$

ج: $x<5$ د: $x>0$

۲۳- اگر $f(x)=\log(1-x)$ باشد مطلوبست محاسبه z بطوریکه $f(z)=f(x)+f(y)$

الف: $z=x+y-xy$ ب: $z=x-y+xy$

ج: $z=x+y+xy$ د: $z=xy-x-y$

۲۴- کدامیك از عبارتهای زیر همواره بر $x-1$ قابل قسمت و باقیمانده تقسیم آن بر $x+2$ برابر ۳۳ است؟

الف: x^2-5x+4 ب: $x^2-10x+9$ ج: x^2-4x+3 د: x^2-9x+8

۲۵- درصفحه xoy دو نقطهٔ $A(2,0)$ و $B(8,0)$ مفروض‌اند اگر نقطه M را روی محور ox طوری انتخاب کنیم که زاویه ANB ماکسیمم شود طول نقطهٔ M برابر خواهد شد با:

الف: $2\sqrt{5}$ ب: $\sqrt{15}$ ج: $\sqrt{17}$ د: ۴

۲۶- اگردو معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ و $a'y^2+b'y+c'=0$ دارای مهین‌های مساوی باشند کدام‌یك ازروابط زیر برقرار است ؟

الف: $\frac{a}{a'}x=\frac{b}{b'}y$ ب: $(2ax+b)^2=(2a'y+b')^2$

ج: $(ab'-ba')x=(bc'-cb')y+(ac'-ca')$

د: $(b^2-c'^2)x^2=(a^2-b'^2)y^2$

تست‌جبر کنکور دانشگاه شبانه ۴۹-۵۰

۲۷- کدام یك ازخطهای زیراز دونقطه $A(2,-1)$ و $B(1,-1)$ می‌گذرد ؟

الف: $x+y-3=0$ ب: $x-y-3=0$

ج: $x-y+3=0$ د: $x+y+3=0$

۲۸- کدام یك از عددهای زیر عرض نقطهٔ ماکزیمم تابع $y=-x^2+3x+1$ است؟

الف: $-\frac{3}{4}$ ب: $\frac{3}{2}$ ج: $-\frac{13}{4}$ د: $\frac{13}{4}$

۲۹- کدام‌یك ازاعداد زیر برابر فاصلهٔ $A(1,-1)$ ازخط $3x-4y+3=0$ است ؟

الف: $\frac{4}{5}$ ب: $\frac{5}{4}$ ج: $-\frac{4}{5}$ د: $\frac{5}{3}$

۳۰- می‌دانیم که دو خط $2x+y-3=0$ و $(m-1)x-2y=0$ یکدیگر رادر نقطه‌ای بطول ۳ قطع می‌کنند .دراین‌صورت m برابر باکدام‌یك‌از عددهای‌زیراست ؟

الف: ۱ ب: ۰ ج: -1 د: -2

۳۱- مقدار $\frac{3\sqrt{5}-2}{4-3\sqrt{20}}$ باکدام یك از مقادیر زیر برابر است؟

الف: $-\frac{1}{2}$ ب: $\frac{1}{2}$ ج: $\frac{21+3\sqrt{5}}{-41}$ د: $\frac{41-6\sqrt{5}}{82}$

۳۲- دو نقطه $A(3,5)$ و $B(-2,7)$ مفروضند. کدام‌یك‌ازنقطه‌های زیرقرینه‌نقطهٔ A نسبت به‌نقطهٔ B است ؟

الف: $C\left|\begin{matrix}-10\\10\end{matrix}\right.$ ب: $D\left|\begin{matrix}11\\-9\end{matrix}\right.$ ج: $E\left|\begin{matrix}-9\\11\end{matrix}\right.$ د: $F\left|\begin{matrix}9\\-11\end{matrix}\right.$

۳۳ـ اگر $ac=b^2$ باشد، کدام‌یك از رابطه‌های زیر درست است؟

الف: $\frac{a}{b}=\frac{b+a}{c+a}$ ب: $\frac{a}{b}=\frac{b-2a}{c-2b}$

ج: $\frac{a}{b}=\frac{b+2a}{2c+b}$ د: $\frac{a}{b}=\frac{2b-a}{c-2b}$

۳۴ـ کدام یك از عبارتهای زیر مشتق تابع $y=\sqrt[5]{(5x-1)^3}$ است؟

الف: $\frac{3(5x-1)^2}{\sqrt[5]{(5x-1)^4}}$ ب: $\frac{3}{\sqrt[5]{(5x-1)^4}}$

ج: $\frac{3(5x-1)^2}{\sqrt[5]{5x-1}}$ د: $\frac{3}{\sqrt[5]{(5x-1)^2}}$

۳۵ـ خط Δ با خط $y=2x+1$ موازی و در نقطه A بر منحنی $y=x^2+2x$ مماس است. طول نقطهٔ A کدام یك از عددهای زیر است؟

الف: ۲ ب: ۱ ج: صفر د: -1

۳۶ـ مساحت سطح محدود بمنحنی $y=x^2+2$ و محور های مختصات و خط $x=\frac{\pi}{2}$ با کدام یك از مقادیر زیر برابر است؟

الف: $2+\frac{\pi}{2}$ ب: $1-\frac{\pi}{2}$ ج: $1-\frac{\pi}{2}$ د: $1+\frac{\pi}{2}$

۳۷ـ سطح محدود بمحورهای مختصات و منحنی $y=\frac{2}{1+x}$ و خط $x=1$ را حول محور ox دوران می‌دهیم حجم جسم حاصل برابر با کدام یك از مقادیر زیر است؟

الف: $\frac{7\pi}{2}$ ب: $\frac{9\pi}{2}$ ج: $\frac{3\pi}{2}$ د: $\frac{3\pi}{2}$

۳۸ـ به ازای کدام یك از مقادیر a و b عبارت x^3+ax^2-bx-1 بر x^2-1 قابل قسمت است؟

الف: $a=2$ و $b=1$ ب: $a=1$ و $b=2$

ج: $a=-2$ و $b=-2$ د: $a=-1$ و $b=-2$

۳۹- دو خط $ax+by=6$ و $2x-4y=3$ مفروضند. به ازای چه مقدار a و b این دو خط برهم منطبق‌اند؟

الف: $a=8$ و $b=-4$ ب: $a=-8$ و $b=4$

ج: $a=-4$ و $b=8$ د: $a=4$ و $b=-8$

۴۰- وقتی x به سمت $\frac{\pi}{2}$ میل می‌کند، حد عبارت $\frac{\operatorname{tg}2x}{\operatorname{tg}6x}$ برابر است با:

الف: -3 ب: 3 ج: ∞ د: $-\infty$

۴۱- اگر $a+b-c=1$ باشد، کدام یک از برابریهای زیر درست است؟

الف: $a^2+b^2+c^2=2(\frac{1}{2}+ab+c)$

ب: $c^2+b^2-a^2=2(\frac{1}{2}+ab-c)$

ج: $a^2+b^2-c^2=2(\frac{1}{2}-ab+c)$

د: $a^2-b^2+c^2=2(\frac{1}{2}-ab-c)$

۴۲- اگر $f(x)=3x^2-5x+\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x}$ باشد، کدام یک از برابریهای زیر درست است؟

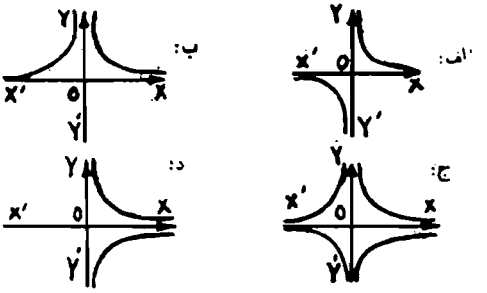
الف: $f(x)=f(-x)$ ب: $f(x)=f(-\frac{1}{x})$

ج: $f(x)=f(2x)$ د: $f(x)=f(\frac{1}{x})$

۴۳- کسر $\frac{x^2+x-2}{x^3-5x^2+8x-4}$ به ازای کدام یک از مقادیر زیر بینهایت می‌شود؟

الف: $x=1$ ب: $x=-2$ ج: $x=-1$ د: $x=2$

۴۴- منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{1}{\sqrt{x^2}}$ به کدام یک از منحنی‌های زیر شبیه است؟



۳۵ـ معادلهٔ درجه دوم $x^2 \operatorname{tg}\alpha + 2x\sqrt{\cos\alpha - \cot\alpha} = 0$ مفروض است.

اگر $\cos\alpha$ مثبت باشد، نتیجه می‌شود که:

الف: معادلهٔ بالا ریشه ندارد.

ب: معادلهٔ بالا دارای یک ریشه مضاعف است.

ج: معادله بالا دارای دو ریشه متحدالعلامه است.

د: معادله بالا دارای دو ریشه مختلف‌العلامه است.

۳۶ـ اگر $x\sin y + y\cos x = 0$ باشد، y' برابر با کدام یک از عبارتهای زیر است؟

الف: $\dfrac{y\sin x - \sin y}{x\cos y + \cos x}$ ب: $\dfrac{x\cos y + \cos x}{y\sin x - \sin y}$

ج: $\dfrac{x\sin y - \sin x}{y\cos x + \cos y}$ د: $\dfrac{y\sin x + \sin y}{x\cos y - \cos x}$

۳۷ـ مقدار $\dfrac{1}{3\sqrt{3} + 2\sqrt{9} + 3}$ برابر با کدام یک از مقادیر زیر است؟

الف $2 + \sqrt{9}$ ب: $2 - \sqrt{9}$ ج: $2 + \sqrt{3}$ د: $2 - \sqrt{3}$

۳۸ـ به ازای کدام یک از مقادیر t مجموع مربعات ریشه های معادلهٔ زیر می‌نیمم است؟

$$x^2 + (3t+2)x + 3(t-1) = 0$$

الف: $t=-\frac{1}{2}$ ب: $t=3$ ج: $t=\frac{2}{3}$ د: $t=1$

۴۹ـ کدام‌یك از عبارتهای زیر تابع اولی تابع $\frac{\sqrt[18]{x^2-2x+1}^{\,5}}{5(x-1)^5}$ است؟

الف: $\frac{1}{(x-1)^2\sqrt[5]{(x-1)^2}}$ ب: $-\frac{1}{(x-1)^3\sqrt[5]{(x-1)^3}}$

ج: $-\frac{1}{(x-1)^3\sqrt[5]{(x-1)^2}}$ د: $\frac{1}{(x-1)\sqrt[5]{(x-1)^3}}$

۵۰ـ برای مقادیر m کدام یك از نامساویهای زیر را انتخاب کنیم تا تنها یکی از ریشه‌های معادله $(m-1)x^2+2mx+2m=0$ بین ۱و۱− باشد؟

الف: $1<m<5$ ب: $0<m<2$ ج: $\frac{1}{5}<m<1$ د: $-1<m<1$

۵۱ـ اگر $f(x)=\frac{2x}{1-x^2}$ و $g(x)=\operatorname{tg}2x$ باشد، کدام یك از برابریهای زیر درست است؟

الف: $f[g(x)]=\operatorname{tg}4x$ ب: $f[g(x)]=\operatorname{tg}x$

ج: $f[g(x)]=\operatorname{tg}^2x$ د: $f[g(x)]=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$

۵۲ـ مثلث OAB با دو رأس ثابت $O\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$ و $A\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}$ مفروض است رأس B روی خط $x+y-1=0$ حرکت می‌کند. مکان نقطه G محل برخورد میانه‌های مثلث OAB عبارت است از:

الف: خطی گذرنده بر مبدأ مختصات ب: دایره‌ای بمرکز مبدأ مختصات

ج: خط $3x+3y-1=0$ د: خط $x+y+3=0$

۵۳ـ نامعادلهٔ $(1-x)^2-\sqrt{(1-x)^2}-2<0$ دارای کدام یک از جوابهای زیر است؟

الف: $-2<x<2$ ب: $-1<x<4$

ج: $-2<x<3$ د: $-1<x<3$

۵۴ـ از نامساویهای $c<d$ و $a<b$ همواره نتیجه می‌شود که :

الف: $ac<bd$ ب: $\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$ ج: $ad<bc$ د: $a-3d<b-3c$

۵۵ـ ریشه معادله $\sqrt[3]{\frac{x-1}{7}}=\sqrt{\frac{2x+1}{7}}$ کدام است ؟

الف: $\frac{4}{5}$ ب: $-\frac{5}{4}$ ج: $\frac{5}{4}$ د: $-\frac{4}{5}$

۵۶ـ اگر $f(x)=\log\frac{2}{x}$ و $f(z)=f(x)+f(y)$ باشد، z برابر با کدام یک از عبارتهای زیر است ؟

الف: $2xy$ ب: xy ج: $\frac{xy}{2}$ د: $2xy$

۵۷ـ درچند جمله‌ای $(2x+1)^3(2x-1)^5(4x^2-2x-1)^4$ مجموع ضرایب x و x^2 و x^3 و ... و x^{16} برابر با کدام یک از عددهای زیر است ؟

الف: ۲۵ ب: ۲۶ ج: ۲۷ د: ۲۸

۵۸ـ طولهای دو نقطه A و B ریشه‌های معادله $ax^2+bx+c=0$ و طولهای دو نقطه C و D ریشه‌های معادله $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ است. اگر A و B مزدوج توافقی C و D باشند، کدام یک از برابریهای زیر درست است ؟

الف: $(a\gamma+c\alpha)=a\alpha$ ب: $2(a\gamma+c\alpha)=b\beta$

ج: $2(a\gamma+c\alpha)=a\alpha$ د: $(a\gamma+c\alpha)=c\gamma$

۵۹ـ سه نقطه A و B و C روی محور $x'ox$ چنان قرار دارند که $AC=\frac{CB}{2}$ است اگر $\overline{OA}=a$ و $\overline{OB}=b$ باشد، مقدار $\overline{OC}$ برابر است با :

الف: $\frac{a+2b}{3}$ ب: $\frac{a+b}{3}$ ج: $\frac{2a+b}{3}$ د: $\frac{a-b}{3}$

تذکر: مسأله زیر به‌خاطر حل تست (۹۰۷) و (۹۴۰) حل شده است.

۶۰- اگر $f(x)=log(x-1)$ و $f(z+1)=f(y)+f(x)$ باشد مقدار z را حساب کنید؟

حل: $f(z+1)=log(z+1-1)=log z$ و $f(y)=log(y-1)$

$log z=log(y-1)+log(x-1) \Longrightarrow log z=log(y-1)(x-1)$

$z=(y-1)(x-1)$

«چند نمونه از سئوالات ریاضی کنکور سراسری کشور گروه طبیعی»

شنبه ۴۹/۴/۲۰

۶۱- کدامیک از خطوط زیر بر منحنی $y=x^2-2$ مماس است؟

الف: $y=2x+4$ ب: $y=2x-3$ ج: $y=2x+1$ د: $y=2x-4$

۶۲- زاویه بین دو خط $x+2y+1=0$ و $x-3y+2=0$ کدامیک است؟

الف: $\frac{\pi}{12}$ ب: $\frac{\pi}{6}$ ج: $\frac{\pi}{4}$ د: $\frac{\pi}{12}$

۶۳- حجم حاصل از دوران منحنی $y=\sin x$ در فاصله (0 و π) حول محور x کدام است؟

الف: π^2 ب: $\frac{\pi^2}{2}$ ج: $\frac{\pi^2}{3}$ د: π

۶۴- مشتق تابع $y=\sin\sqrt{x}$ کدام است؟

الف: $\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$ ب: $\frac{-1}{\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$ ج: $\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$ د: $\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}$

۶۵- کدامیک از خطوط زیر مجانب منحنی $(y-x+1)(y+x-1)=1$ است؟

الف: $y=-(x+1)$ ب: $y=x+1$

ج: $y=2(-x-2)$ د: $y=x-1$

۶۶- اگر $9^{5-n}=27^{-n}$ باشد n برابر است با:

الف: یک ب: نه ج: دوازده د: پانزده

۶۷- کدامیک از خطوط زیر از محل برخورد دوایر $x^2+y^2-x=1$ و $x^2+y^2+y=0$ می‌گذرد

الف: $x+y=1$ ب: $x-y=5$ ج: $x+y+1=0$ د: $x-y=1$

۶۸ـ نقطه M بمختصات $x=\frac{2\sin t-2\cos t}{\sin t}$ و $y=4t+1$ مفروض است اگر t تغییر کند مکان هندسی M کدامیک ازمنحنی‌های زیر است ؟

الف: $(x-1)(y-2)+2=0$ ب: $(x-2)(y-1)+2=0$

ج: $2x^2+y^2=1$ د: $(x-2)^2+(y-1)^2=2$

۶۹ـ مساحت سطح محصور بین محور xها و منحنی نمایش تغییرات تابع $y=2x-x^2$ کدام است ؟

الف: $\frac{2}{5}$ ب: $\frac{2}{3}$ ج: $\frac{4}{3}$ د: $\frac{4}{5}$

۷۰ـ اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ باشد کدامیک ازروابط زیر درست است ؟

الف: $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bd}$ ب: $\frac{a}{b}=\frac{a+2c}{b+2d}$ ج: $\frac{a}{b}=\frac{a-c}{d-b}$ د: $\frac{a}{b}=\frac{2a+c}{2b+d}$

۷۱ـ خط $3x-2y-1=0$ بر کدامیک ازخطوط زیر عمود است؟

الف: $3x+2y-1$ ب: $2y-3x+1=0$

ج: $6x-4y+1=0$ د: $4x+6y-\frac{12}{5}=0$

۷۲ـ $\sqrt{\frac{24}{\sqrt[4]{6}}}$ برابر کدامیک ازمقادیر زیر است ؟

الف: $2\sqrt{6}$ ب: $2\sqrt[6]{6}$ ج: $3\sqrt[6]{6}$ د: $\frac{16}{6}\sqrt{6}$

۷۳ـ تساوی $\sqrt{\frac{ac^4}{b^2}}=-\frac{c^2}{b}\sqrt{a}$ در کدامیک ازحالات زیر صحیح است ؟

الف: $a>0$ و $b<0$ ب: $a>0$ و $b>0$ ج: $a<0$ و $b<0$ د. $b>0$

۷۴ـ تابع اولیه $\cos^2 x+\sin x$ کدام است ؟

الف: $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x-\cos x+c$

ب: $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+\cos x+c$

ج: $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x-\cos x+c$ ب:

د: $\frac{x}{2}\times\frac{1}{4}\cos 2x-\sin x+c$ د:

۷۵ـ معادله یکشیبی بصورت $y^2-8y-2x+21=0$ است کدامیک از نقاط زیر رأس این سهمی است ؟

الف: $A(2,5/3)$ ب: $B(1,3)$ ج: $C(5,3)$ د: $D(2,2)$

۷۶ـ مشتق تابع $y=\sqrt[4]{3x^2}$ کدام است ؟

الف: $y'=\frac{6x}{4\sqrt[3]{3x^2}}$ ب: $y'=\frac{6x}{\sqrt[3]{9x^6}}$

ج: $y'=\frac{6x}{4\sqrt[3]{27x^8}}$ د: $y'=\frac{6x}{4\sqrt[3]{27x^6}}$

۷۷ـ اگر a و b دو عدد غیر مشخص باشند کدام یک از نامساویهای زیر همواره درست است ؟

الف: $a^2+b^2<2(a+b)$ ب: $a^2+b^2>2ab$ ج: $a^2+b^2<2ab$

د: $a^2+b^2>4ab$

«چند نمونه از تستهای کنکور دانشگاه آریامهر در سال ۴۸»

۷۸ـ کدامیک از روابط زیر صحیح است؟ $(m<0)$

الف: $\sqrt[6]{m^2}=\sqrt[3]{m}$ ب: $\sqrt[6]{m^2}=\pm\sqrt[3]{m}$

ج: $\sqrt[6]{m^2}=-\sqrt[3]{m}$ د: هر سه عبارت صحیح است

۷۹ـ معادله $(x-1)^3+8(2-x)^3+(x-3)^3=0$ مفروض است این معادله ؟

الف: دارای سه ریشه مساوی است .

ب: اقلا دارای یک ریشه حقیقی است

ج: دارای سه ریشه حقیقی که تشکیل تصاعد عددی میدهند .

د : دارای سه ریشه است که تشکیل تصاعد هندسی میدهند

۸۰ـ مقدار عبارت

$$\sqrt{a^2(b-x)^2}-3\sqrt{2(a+b)x^2}+\sqrt{x^2+ax+a^2}$$

باء $a=-5$ و $b=7$ و $x=-3$ برابر است با :

الف: ۱۰ـ ب: ۱۰ ج: $(40\log_{10}+6)$ د: ۶۴

۸۱ـ بجای علامت سئوال کدامیک از روابط زیر را باید قرار داد ؟

$$\sqrt[3]{(\sqrt{3}-2)^3}=?$$

الف: $\sqrt{3}+2$ ب: $\pm(\sqrt{3}-2)$ ج: $\sqrt{3}-2$ د: $2-\sqrt{3}$

۸۲ـ اگر $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ باشد $fff(x)$ برابر است با:

الف: $\frac{x+1}{x-1}$ ب: $\frac{x+1}{1-x}$ ج: $-\frac{1}{x}$ د: x

۸۳ـ حدود تغییرات x را چنان پیدا کنید که قدر مطلق حاصلضرب $(x-1)(x+4)$ کوچکتر از ۶ شود ؟

الف: $-1<x<2$ ب: $-5<x<-2$ و $-1<x<2$

ج: $-5<x<-2$ د: $-\infty<x<\infty$

۸۴ـ حد $\frac{1-\frac{x^2}{2}-\cos x}{x^4}$ وقتی x بسمت صفر میل کند ؟

الف: یک است ب: صفر است ج: $-\frac{1}{24}$ است د : وجود ندارد

۸۵ـ اگر $f(x)=\frac{m\log\sin x+n(x^2+1)}{x^2+1}$ و $g(x)=\frac{\log\sin x}{x^2+1}$ باشد ؟

الف: $f'(x)=g'(x)$ ب: $f'(x)=mg'(x)$ ج: $f'(x)=mg'(x)+n$

د: $f'(x)=g'(x)+n$

۸۶- تابع $y=|x|$ داده شده است

الف: نقطه صفر نقطه عطف تابع است

ب: نقطه یک نقطه می‌نیمم تابع است

ج: نقطه صفر نقطه ماکزیمم تابع است

د: نقطه صفر نقطه می‌نیمم تابع است

۸۷- مقدار r را طوری تعیین کنید که ریشه‌های معادله $x^3-12x^2+rx-28=0$ تشکیل یک تصاعد حسابی بدهند.

الف: $r=39$ ب: $r=36$ ج: $r=16$ د: $r=12$ هـ: هیچکدام

۸۸- منحنی نمایش $y=\frac{x^3+2x^2-9x-18}{3-x}$

الف: فقط مجانب موازی محور yها دارد

ب: مجانبهای موازی هر دو محور دارد

ج: فقط مجانب موازی محور xها دارد

د: اصلا مجانب ندارد

۸۹- اگر $f(x)=a^x+b^x$ و $g(x)=\frac{f(x)}{f(x-2)}$ باشد.

الف: $g(3)=a^2+b^2$ ب: $g(3)=a^2-b^2$

ج: $g(3)=a^2+b^2+2ab$ د: $g(3)=a^2-ab+b^2$

۹۰- اگر $f(x)$ بازای $x=1$ دارای باقیمانده ۲ باشد و تابع $g(x)=f(x)-2$ باشد.

الف: $g(x)$ بر $x-1$ قابل قسمت است

ب: $f(x)$ بر $x-1$ قابل قسمت است

ج: $g(x)$ بر $x+1$ قابل قسمت است

د: $f(x)$ بر $x+1$ قابل قسمت است

«چند نمونه از تستهای کنکور دانشگاه پهلوی شیراز ۳۹»

۹۱- a و b دو عدد مثبت و مفروضند بطوریکه $I=\sqrt{ab}$ و $g=\frac{a+b}{2}$

کدامیك از جملات زیر درست است؟

الف: $I>g$ ب: $I=g$

ج: I و g رابطه‌ای با یکدیگر ندارند د: $I<g$

۹۲ـ a را چنان پیدا کنید که فاصله خط $D=y+ax=1$ از نقطه $A(1,1)$ مساوی $\sqrt{3}$ باشد؟

الف: $a=\sqrt{3}$ ب: $a=\pm\sqrt{3}$ ج: $a=-\sqrt{3}$ د: $a=\pm 1$

۹۳ـ معادله $\sqrt{x^2+1}=1-2x$ دارای

الف: دوجواب است ب: یك‌جواب است

ج: جواب نیست د: یك‌جواب بزرگتر از یك است

۹۴ـ اگر $f(x)=x^2-mx-1$ باشد عدد m

الف: بین دوریشه است ب: نمی‌توان بحث نمود

ج: از دو ریشه کوچکتر است د: از دوریشه بزرگتر است

«چند نمونه از تستهای کنکور دانشگاه شبانه ۱۳۴۸»

۹۵ـ سطح محصور بین منحنی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ و محورهای مختصات برابر است با:

الف: $\frac{2}{3}$ ب: 2 ج: $\frac{1}{2}$ د: $\frac{3}{2}$

۹۶ـ حاصل عبارت $\frac{1}{\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{2}+1}$ برابر است با:

الف: $\sqrt{2}-1$ ب: $\sqrt[4]{2}-1$ ج: $\sqrt{2}+1$ د: $\sqrt[4]{2}+1$

۹۷ـ مرکز تقارن منحنی $y^2-xy-3y+x+4=0$ کدامیك از نقاط زیر است؟

الف: $O(1\ و\ -1)$ ب: $O(-1\ و\ 1)$

ج: $O(-1\ و\ -1)$ د: $O(1\ و\ 1)$

۹۸ـ حدود تغییرات p کدامیك از مقادیر زیر باید باشد تا عبارت

$y=\frac{x^2-px+1}{3(x^2+x+1)}$ کسینوس یك زاویه باشد؟

(کنکور معماری ملی ۴۸)

الف: $-5<p<2$ ب: $-1<p<1$

ج: $-1<p<5$ د: $-5<p<1$

«چند نمونه از تستهای کنکور سراسری سال ۱۳۴۸»

۹۹ـ مقدار m را طوری تعیین کنید که مجموع دو ریشه معادله $x^2-19x+m=0$ برابر ۲ باشد.

الف: ۱۵ ب: ۱۵− ج: ۳ د: ۳۰−

۱۰۰ـ حد عبارت $y=x+3-\sqrt{x^2-x+4}$ بازاء $x=\infty$ برابر است با:

الف: $\frac{7}{2}$ ب: ∞ ج: صفر د: $\frac{2}{7}$

۱۰۱ـ محل تلاقی منحنی $y=x^2-3x+2$ با محورهای مختصات کدامیک از نقاط زیر است؟

الف: $B(1,0)$ و $A(0,2)$ ب: $B(0,1)$ و $A(2,0)$

ج: $C(0,2)$ و $B(2,0)$ و $A(1,0)$

د: $C(0,2)$ و $B(2,0)$ و $A(0,1)$

«تست ریاضی امتحان ورودی شبانه دانشگاه تبریز»

۱۰۲ـ در تقسیم x^m+a^m بر $x-a$ باقیمانده برابر است با:

الف: $2a^m$ ب: صفر ج: $(-1)^m a^m+a^m$ د: a^m

۱۰۳ـ عبارت $x^4-3x^2+mx+72$ بر $x-2$ قابل قسمت است اگر:

الف: $m=20$ ب: $m=0$

ج: $m=-1$ د: $m=-24$

۱۰۴ـ اگر $x\neq 0$ باشد $\sqrt[3]{2x\sqrt{\frac{1}{3x^2}}}$ برابر است با:

الف: یک ب: دو ج: ± 1 د: $\frac{1}{2}$

۱۰۵ـ جوابهای معادلهٔ زیر برابر است با:

$(x-1)(x+1)=(x-1)(2x+3)$

الف: یک و صفر ب: صفر و ۱−

ج: ۱− و ۳− د: ۱ و ۲−

۱۰۶- به‌ازاء چه مقداری از x عبارت زیر برابر صفر است

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$$

الف: ۱و۲ ب: یك ج: دو د: صفر

۱۰۷- به ازاء چه مقداری از a و b معادلهٔ $(a-b)x+a-1=0$ مبهم است.

الف: $a=1$ و $b=0$ ب: $a=0$ و $b=1$

ج: $a=b=0$ د: $a=b=1$

۱۰۸- در مورد معادلهٔ درجه‌اول $ax+b=0$ کدامیك ازمفاهیم زیر نادرست است؟

الف: وقتی ممتنع است که $a=0$ و $b=0$

ب: وقتی مبهم است که $a=0$ و $b=0$

ج: وقتی ممتنع است که $a=0$ و $b\neq 0$

د: بافرض $a\neq 0$ ریشه آن $-\frac{b}{a}$ است.

۱۰۹- کدامیك ازاعداد زیر جواب معادلهٔ $\sqrt{2x^2-4}=+x$ می‌باشند؟

الف: -2 ب: $+2$ ج: ± 2 د: هیچکدام

۱۱۰- واسطهٔ عددی سه عدد ۱و۲و۳ برابراست با:

الف: ۳ ب: صفر ج: ± 2 د: $\frac{14}{3}$

۱۱۱- دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی.

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

مفروض است. کدامیك ازمفاهیم زیر نادرست است؟

الف: $b'a-a'b\neq 0$ دستگاه منحصراً دارای یك‌دسته جواب‌است.

ب: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ دستگاه‌ممتنع است

ج: بافرض $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ دستگاه مبهم است

د: بافرض $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ دستگاه مبهم است

۱۱۲- درخصوص معادلهٔ درجه دوم.

$$ax^2+bx+c=0$$

کدامیك ازمفاهیم زیر نادرست است؟

الف: $\frac{c}{a}>0$ دوریشه درصورت وجود، متحدالعلامه‌اند .

ب: اگر $\frac{c}{a}<0$ دوریشه درصورت وجود، مختلف‌العلامه‌اند.

ج: اگر $\frac{b}{a}>0$ دوریشه درصورت وجود، متحدالعلامه‌اند.

د: $\frac{b}{a}=0$ دوریشه درصورت وجود قرینه‌اند.

۱۱۳- نقطه $A(2,1)$ با کدامیك ازنقاط زیر نسبت بمبدأ مختصات متقارن است ؟

الف: $B(-2,1)$ ب: $B(-2,-1)$

ج: $B(2,1)$ د: $B(-2,-1)$

۱۱۴- نقطه $A(m+1, 2)$ و $B(m-1, 2)$ نسبت به کدامیك از خطوط زیر متقارن است ؟

الف: خط $x=2$ ب: خط $y=m$

ج: خط $y=-m$ د: خط $x=-2$

۱۱۵- خط $y=2x+a$ به ازاء چه‌مقادیری از a موازی نیمسازربع اول است؟

الف: یك ب: ۱- ج: ۲ د: به‌ازاء هیچ‌مقدارازa

۱۱۶- به‌ازاء چه‌مقادیری‌ازa خطوط $x+y=1$ و $4x-2y=1$ و $-2x+2ay=1$ ازیك نقطه می‌گذرند ؟

الف: ۲- ب: ۲ ج: صفر د: به ازاء هیچ مقدارازa

۱۱۷- به‌ازاء جمیع مقادیر a منحنی $y=\frac{ax-2}{x-2a}$ ازکدامیك از نقطه‌های ثابت زیرمی‌گذرند؟

الف: $A(-1,-2)$ ب: $B(2,1)$

ج: $C(-1,2)$ د: $D(2,-1)$

۱۱۸- مکان نقطه‌های $(1+\sin\alpha, 2\cos^2\alpha)$ منحنی به‌معادلهٔ زیراست :

الف: $y=2x^2+4x$ ب: $y=2x^2-4x$

ج: $y=2x^2-3x$ د: $y=-2x^2+4x$

۱۱۹ـ مقدار حقیقی کسر $\frac{\sin 3x}{\sin x}$ به ازاء $x=\pi$ برابر است با:

الف: $\frac{1}{3}$ ب: $-\frac{1}{3}$ ج: ۳ د: -3

۱۲۰- تابع $y=\frac{3x}{x^2-3}$

الف: دارای مجانبی موازی امتداد xها است.

ب: دارای مجانبی مایل بضریب زاویه ۲ است.

ج: دارای مجانبی مایل بضریب زاویهٔ ۳ است.

د: دارای هیچ مجانبی نیست.

«نمونه‌ای از تست‌های ریاضی کنکور دانشگاه پهلوی شیراز»

۱۲۱ـ a و b دو عدد صحیح و مثبت مفروضند، بطوری که داریم.

$i=\sqrt{ab}$ و $I=\frac{a+b}{2}$ کدامیك از جوابهای زیر درست است.

الف: $i>I$ ب: $i<I$ ج: $i=I$

د: i و I هیچ رابطه‌ای با یکدیگر ندارند

۱۲۲- اگر $f(x)=x^2-mx-1$ باشد. عدد m در کدامیك از شرایط زیر صدق می‌کند؟

الف: بین دو ریشه است. ب: از دو ریشه بزرگتر است

ج: از دو ریشه کوچکتر است. د: نمی‌توان بحث کرد

۱۲۳- a را چنان پیدا کنید که فاصلهٔ خط $D\equiv y+ax=1$ از نقطه $A(1,1)$ مساوی $\frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد؟

الف: $a=\pm\sqrt{3}$ ب: $a=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

ج: $a=+\sqrt{3}$ د: $a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ هـ: $a=\pm 1$

۱۲۴ـ $y=x+\sqrt{x}$ مفروض است به فرض اینکه $x=t^2$ و t عدد منفی باشد $(t<0)$ کدامیك از جوابهای زیر درست است؟ (جوابهای زیر عرض نقاط هستند)

الف: t^2+t ب: t^2-t ج: $-t^2+t$ د: $-t^2-t$

۱۲۵- تابع $y=\sqrt{\sin^2 x-2}$ مفروض است، مشتق تابع عبارتست از:

الف: $\frac{2\sin x\cos x}{2\sqrt{(\sin^2 x-2)^2}}$ ب: مشتق ندارد

ج: $\frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x-2}$ د: $\frac{\sin x\cos x}{2-\sin^2 x}$

تست مؤسسهٔ عالی حسابداری

۱۲۶- توابع $f(x)=x^2-x$ و $g(x)=\sin 2x$ داده شده‌اند. مقدار: $f[g(\frac{\pi}{12})]$ برابر است با

الف: $\frac{3}{16}$ ب: $\frac{3}{8}$ ج: $-\frac{3}{16}$ د: $-\frac{2}{8}$

۱۲۷- مجموع $S_n=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$ برابر است با:

الف: $\frac{(n+1)x^n-nx^{n+1}+1}{(x-1)^2}$

ب: $\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$

ج: $\frac{nx^{n+1}+(n+1)x^n-1}{(x-1)^2}$ د: $\frac{1-nx^{n+1}-(n+1)x^n}{(x-1)^2}$

۱۲۸- ضریب زاویه مماس بر منحنی $x^2+y^2-xy-7=0$ در نقطه $M(1,2)$ کدام است.

الف: $\frac{1}{11}$ ب: $\frac{2}{11}$ ج: $-\frac{1}{11}$ د: $-\frac{2}{11}$

۱۲۹- مکان هندسی نقطهٔ $M\left|\begin{array}{l}x=a\sin^n\theta\\ y=a\cos^n\theta\end{array}\right.$ $(n\neq 0)$ کدام است.

الف: $\sqrt[n]{x^2}+\sqrt[n]{y^2}=\sqrt[n]{a^2}$

ب: $\sqrt[n]{x^2}-\sqrt[n]{y^2}=\sqrt[n]{a^2}$

ج: $\sqrt{x^n}-\sqrt{y^n}=\sqrt{a^n}$

د: $\sqrt{x^n}+\sqrt{y^n}=\sqrt{a^n}$

۱۳۰- مقدار $\frac{\cos a+\sin a}{\cos a-\sin a}$ برابر کدام است؟

الف: $\operatorname{tg} a-\sec a$ ب: $\operatorname{tg} 2a+\sec 2a$ ج: $\operatorname{tg} 2a-\sec 2a$

د: $\operatorname{tg} a+\sec a$

۱۳۱- جواب معادلهٔ $2=\left(\frac{x}{x+9}\right)^{\frac{1}{2}}+2\left(1+\frac{9}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$ کدام است؟

الف: $x=2$ ب: $x=-9$ ج: $x=-3$ د: $x=9$

۱۳۲- مجموع سه عدد ۲۶۵۰ می‌باشد اولی از دومی ۱۶۰ واحد بیشتر و دومی از سومی ۲۷۰ واحد بیشتر است این سه عدد کدام‌اند

الف: ۱۰۸۰ و ۹۲۲ و ۶۵۰ ب: ۱۰۸۲ و ۹۲۰ و ۶۵۰

ج: ۱۰۸۰ و ۹۲۰ و ۶۵۲ د: ۱۰۸۰ و ۹۲۰ و ۶۵۰

تست‌های مدرسه عالی بیمه تهران

۱۳۳- اگر داشته باشیم

$$n(n+1)(2n+1)=An+Bn(n-1)+Cn(n-1)(n-2)$$

A و B و C بترتیب عبارتند از :

الف: ۶ و ۹ و ۲ ب: ۸- و ۹ و ۲ ج: ۸ و ۹ و ۲-

۱۳۴- حاصل عبارت $2\sqrt{32}-3\sqrt{72}+5\sqrt{8}$ برابر است با :

الف: $2\sqrt{48}$ ب: $2\sqrt{112}$ ج: صفر

۱۳۵- اگر $x+\frac{1}{x}=a$ باشد. $x^2+\frac{1}{x^2}$ برابر کدام یك از مقادیر زیر است.

الف: a^2 ب: a^2-3a ج: $3a$

۱۳۶- حاصل عبارت $\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$ برابر است با:

الف: $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ ب: $\frac{\sqrt{7}-1}{2}$ ج: $\frac{1-\sqrt{7}}{2}$

۱۳۷- عبارت: $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^2y^2}-2\sqrt[3]{x^2y}$ برابر کدام یک از عبارتهای زیر است:

الف: $\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}\right)$

ب: $x(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})^2$ ج: $\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})^2$

۱۳۸- مشتق تابع $\sqrt[3]{(2x+1)^5}$ برابر کدام یک از عبارتهای زیر است

الف: $\frac{10}{3}\sqrt[3]{(2x+1)^2}$ ب: $\frac{6}{5\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$

ج: $\frac{3\sqrt[3]{2x+1}}{10}$

۱۳۹- کدام دسته از اعداد زیر مختصات نقطهٔ ماکزیمم منحنی تابع $y=-x^2+6x-5$ می‌باشند:

الف: (۳و۴) ب: (۴و۳) ج: (۲و۳-)

۱۴۰- در تابع $y=x^3-ax^2+4x-b$ اعداد ثابت a و b کدام دسته از مقادیر زیر باشند تا نقطهٔ M(۱ و ۳-) نقطه ماکزیمم منحنی تابع باشد:

الف: (۸و۵-) ب: (۸-و۵-) ج: (۵و۸-)

۱۴۱- a برابر کدام یک از اعداد زیر باشد تا ضریب زاویه‌ای خط مماس بر منحنی تابع $y=\frac{a+x}{1-x}$ در نقطه بطول ۲ برابر ۲ گردد:

الف: ۱- ب: ۱ ج: ۲

۱۴۲ـ a برابر کدام دسته ازمقادیر زیر باشد.تا زاویهٔ بین دوخط $2x-y=3$ و $(a-1)x+2ay=-1$ برابر 45° درجه باشد

الف: $(\frac{3}{5}$ و $\frac{1}{5})$ ب: $(-\frac{3}{5}$ و $-\frac{1}{5})$ ج: $(\frac{3}{5}$ و $-\frac{1}{5})$

۱۴۳ـ اگر سه نقطه $A(2,3)$ و $B(a-1,2a)$ و $C(a+1,2a-3)$ روی یك خط راست باشند a برابر کدام یك از مقادیر زیراست.

الف: $\frac{7}{15}$ ب: $-\frac{15}{7}$ ج: $\frac{15}{7}$

۱۴۴ـ دوخط $2x-3y=5$ و $6y-4x=12$ نسبت بهم چه وضعی دارند:

الف: منطبق برهم هستند ب: متقاطع هستند ج: موازی هستند

۱۴۵ـ نقاط $A(3,1)$ و $B(2,-1)$ و $C(-3,-2)$ داده شده‌اند .کدام یك از دسته اعداد زیر مختصات نقطه D رأس دیگر متوازی‌الاضلاع ABCD می‌باشند:

الف: $(-2,6)$ ب: $(-4,2)$ ج: $(-4,2)$

۱۴۶ـ a برابر کدام دسته از مقادیر زیر باشد تافاصلهٔ نقطهٔ $M(a+1,2a)$ ازخط $4x-3y=7$ برابر $\frac{1}{5}$ باشد:

الف: $(-1,2)$ ب: $(1,2)$ ج: $(-1,2)$

۱۴۷ـ نقاط $A(-1,3)$ و $B(2,-4)$ داده شده‌اند اگر داشته باشیم $5\overline{MA}=3\overline{MB}$ کدام دسته از اعداد زیر مختصات نقطه M است.

الف: $(4/5,14/5)$ ب: $(-5/5,13/5)$ ج: $(6/5,-13/5)$

۱۴۸ـ کدام دسته از نقاط زیر محل تلاقی دایرهٔ $x^2+y^2-16x+4y+18=0$ وخط $x+y=0$ می‌باشند.

الف: $[(-9,-1)$ و $(9,1)]$ ب: $[(-9,1)$ و $(9,-1)]$

ج: $[(1,-1)$ و $(-9,9)]$

۱۴۹ـ مجانبهای هذلولی $(y+2)^2-\frac{(x-1)^2}{4}=1$ کدام یك از دسته خطوط زیر می‌باشند:

الف: $\begin{vmatrix} 2y=x-5 \\ 2y=-x-3 \end{vmatrix}$ ب: $\begin{vmatrix} 2y=-x-5 \\ 2y=x-3 \end{vmatrix}$ ج: $\begin{vmatrix} 2y=-x+5 \\ 2y=x-3 \end{vmatrix}$

۱۵۰ـ کدام یك از دسته اعداد زیر مختصات مرکز بیضی

$16x^2+25y^2+32x-100y=282$ میباشد :

الف: $(2-و1)$ ب: $(2و1-)$ ج: $(1-و2)$

۱۵۱ - عبارت $xy=1$ معادلهٔ کدام یك ازمنحنی‌های زیراست:

الف: بیضی ب: سهمی ج: هذلولی

۱۵۲ - سطح محصور بین سهمی $y=-x^2+6x-5$ و محور xها ودوخط $x=3$ و $x=1$ برابر کدام یك از مقادیر زیراست:

الف: $\frac{16}{3}$ ب: $\frac{22}{3}$ ج: $\frac{16}{3}$

«مسابقات تست ورودی مدرسه عالی علوم اقتصادی واجتماعی»

۱۵۳ - کدامیك از اتحادهای زیر درست نیست؟

الف: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

ب: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

ج: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

د: $(a-b)^3=a^3-3a^2b-3ab^2+b^3$

۱۵۴ - حاصل عبارت $[(\frac{1}{2})(-2)(-\frac{2}{5})]^3$ برابر است با:

الف: $\frac{8}{15}$ ب: $\frac{8}{25}$ ج: $\frac{8}{125}$ د: $\frac{8}{75}$

۱۵۵ - کسر $\frac{x^2-1}{x^2-1}$ به ازای $x=-2$ برابراست با

الف: $\frac{5}{2}$ ب: $\frac{7}{3}$ ج: -3 د: 3

۱۵۶ - درعبارت $\left\{[(x)^6]^{-3}\right\}^{-2}$ توان x چه عددی است ؟

الف: ۳۶ ب: ۱ ج: ۱۱ د: -30

۱۵۷ - جواب معادلهٔ $\frac{x}{6}+\frac{x}{5}+\frac{x}{3}+\frac{x}{2}=174$ کدام‌است؟

الف: ۳۰ ب: ۱۲۰ ج: ۶۰ د: ۲۴۰

۱۵۸ - تجزیهٔ عبارت $(2x+3y)^2-(x-5y)^2$ کدام است؟

الف: $(3x+2y)(x-8y)$

ب: $(2x+3y)(x-8y)$

ج: $(3x-2y)(x+8y)$

د: $(3x-2y)(8x+y)$

۱۵۹ — جوابهای دستگاه $\begin{cases} x-y=4 \\ \frac{3x}{2}+3y=-3 \end{cases}$ عبارتند از:

الف: $x=2$ و $y=-2$ ب: $x=16$ و $y=12$

ج: $x=3$ و $y=-1$ د: $x=9$ و $y=5$

۱۶۰ — از تناسب $\frac{x-y}{x+y}=\frac{2}{3}$ نسبت $\frac{x}{y}$ برابر است با:

الف: $\frac{1}{5}$ ب: -5 ج: 5 د: $\frac{3}{2}$

۱۶۱ — در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم $B=90^\circ$ و $AB=6$ و $BC=8$ طول وتر AC برابر است با:

الف: ۱۰۰ ب: ۱۴ ج: ۱۰ د: ۵

۱۶۲ — پنج ضلعی منتظمی که طول هر ضلع آن ۲ سانتیمتر میباشد طول محیط آن برابر است با.

الف: ۲۰ سانتیمتر ب: ۳۰ سانتیمتر ج: ۱۵ سانتیمتر د: ۱۰ سانتیمتر

۱۶۳ — بر سه خط دوبدو متقاطع چند دایره میتوان مماس کرد:

الف: دو دایره ب: چهار دایره ج: سه دایره د: پانزده دایره

«تست جبر و حساب امتحان مسابقه ورودی دانشسراهای دوساله راهنمائی»

۱۶۴ — معادله زیر مفروض است: $[mx(x-3)+x^2-1](x^2+x+2)=0$

معین کنید این معادلهٔ:

الف: جواب ندارد ب: دوجواب دارد ج: سه جواب دارد

د: چهار جواب دارد

۱۶۵ — معادلهٔ مکان هندسی نقاطی را در صفحه که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ $C_1(2,1)$ مساوی ۵ است در نظر میگیریم معین کنید.

الف: نقطه $A(6,10)$ ب: نقطه $B(2,0)$

ج: نقطهٔ $C(5,-5)$ د: نقطهٔ $D(-5,5)$

روی مکان نامبرده قرار دارد

۱۶۶ – معادلهٔ دو دایره بصورت زیر است: $\begin{cases} x^2+y^2-4x=1 \\ x^2+y^2-2y=9 \end{cases}$ طولهای نقاط تلاقی دو دایره عبارتند از:

الف: (۱و۱ = x) ب: (۱ و ۳ = x) ج: (۳و۳ = x)

د: (نقطه تلاقی ندارند)

تست جبر رشته طبیعی دانشگاه شبانه تهران

۱۶۷ – کدام یك از خطهای زیر از دو نقطه A(۲و۱ –) و B(۱و۱ –) می‌گذرد؟

الف: $x+y-3=0$ ب: $x-y-3=0$ ج: $x-y+3=0$

د: $x+y+3=0$

۱۶۸ – کدام یك از عددهای زیر عرض نقطه ماکزیمم تابع $y=-x^2+2x+1$ است؟

الف: $-\frac{3}{4}$ ب: $\frac{3}{4}$ ج: $-\frac{13}{4}$ د: $\frac{13}{4}$

۱۶۹ – کدام یك از اعداد زیر برابر فاصلهٔ نقطهٔ A(۱و۱ –) از خط $3x-4y+3=0$ است؟

الف: $\frac{4}{5}$ ب: $\frac{5}{4}$ ج: $-\frac{4}{5}$ د: $\frac{5}{3}$

۱۷۰ – می‌دانیم که دو خط $2x+y-3=0$ و $(m-1)x-2y=0$ یکدیگر را در نقطه‌ای بطول ۳ قطع می‌کنند در این صورت m برابر با کدام یك از عددهای زیر است؟

الف: ۱ ب: ۰ ج: ۱ – د: ۲ –

۱۷۱ – مقدار $\frac{3\sqrt{5}-2}{4-3\sqrt{20}}$ با کدام یك از مقادیر زیر برابر است؟

الف: $-\frac{1}{2}$ ب: $\frac{1}{2}$ ج: $\frac{21+3\sqrt{5}}{-41}$ د: $\frac{41-6\sqrt{5}}{82}$

۱۷۲ – دو نقطهٔ A (۵و۳) و B(۷و۲ –) مفروضند. کدام یك از نقطه‌های زیر قرینهٔ نقطه A نسبت به نقطهٔ B است؟

الف: $C\begin{vmatrix} -15 \\ 10 \end{vmatrix}$ ب: $D\begin{vmatrix} 11 \\ -9 \end{vmatrix}$ ج: $E\begin{vmatrix} -9 \\ 11 \end{vmatrix}$ د: $F\begin{vmatrix} 9 \\ -11 \end{vmatrix}$

۱۷۳ -- اگر $ac=b^2$ باشد، کدام یك از رابطه‌های زیر درست است؟

الف: $\frac{a}{b}=\frac{b+a}{c+a}$ ب: $\frac{a}{b}=\frac{b-2a}{c-2b}$

ج: $\frac{a}{b}=\frac{b+2a}{2c+b}$ د: $\frac{a}{b}=\frac{2b-a}{c-2b}$

۱۷۴ ــ کدام یك از عبارتهای زیر مشتق تابع $y=\sqrt[5]{(5x-1)^3}$ است؟

الف: $\frac{3(5x-1)^2}{\sqrt[5]{(5x-1)^3}}$ ب: $\frac{3}{\sqrt[5]{(5x-1)^4}}$

ج: $\frac{3(5x-1)^2}{\sqrt[5]{5x-1}}$ د: $\frac{3}{\sqrt[5]{(5x-1)^2}}$

۱۷۵ - خط Δ با خط $y=2x+1$ موازی و در نقطه A بر منحنی $y=x^2+2x$ مماس است طول نقطهٔ A کدام یك از عددهای زیر است؟

الف: ۲ ب: ۱ ج: ۰ د: ۱-

۱۷۶ ــ کدام یك از عبارتهای زیر تابع اولی تابع $tg^2x-\frac{3}{\sin^2x}$ است؟

الف: $tgx-x+3cotgx+c$ ب: $tgx+x-3cotgx+c$

ج: $tgx+x+3cotgx+c$ د: $tgx-x-3cotgx+c$

۱۷۷ ــ مساحت سطح محدود به منحنی $y=2+tg^2x$ و محورهای مختصات و خط $x=\frac{\pi}{4}$ با کدام یك از مقادیر زیر برابر است؟

الف: $2+\frac{\pi}{4}$ ب: $1-\frac{\pi}{4}$ ج: $1-\frac{\pi}{4}$ د: $1+\frac{\pi}{4}$

۱۷۸ ــ سطح محدود به محورهای مختصات و منحنی $y=\frac{3}{1+x}$ و خط $x=1$ را حول محور ox دوران می‌دهیم حجم جسم حاصل برابر با کدام یك از مقادیر زیر است؟

الف: $\frac{7\pi}{4}$ ب: $\frac{9\pi}{2}$ ج: $\frac{3\pi}{4}$ د: $\frac{3\pi}{2}$

۱۷۹ – کدام یك از نقطه‌های زیر مرکز دایره $x^2+y^2-8x+2y=0$ است؟

الف: (۱و۲) ب: (۱و۲ –) ج: (۱ –و۲) د: (۱و۲ –)

۱۸۰ – کدام یك از نقطه‌های زیر یکی از کانونهای بیضی $25x^2+16y^2=400$ است؟

الف: (۲و۰) ب: (۳و۰) ج: (۰و۲) د: (۰و۳)

۱۸۱ – کدام یك از خطهای زیر یکی از مجانبهای هذلولی $\frac{(x-5)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{16}=1$ است؟

الف: $4x+3y-11=0$ ب: $4x+3y+29=0$

ج: $4x-3y+29=0$ د: $4x-3y+11=0$

۱۸۲ – اگر $a+b-c=1$ باشد کدامیك از برابریهای زیر درست است.

الف: $a^2+b^2+c^2=2(\frac{1}{2}+ab+c)$

ب: $c^2+b^2-a^2=2(\frac{1}{2}+ab-a)$

ج: $a^2+b^2-c^2=2(\frac{1}{2}-ab+c)$

د: $a^2-b^2+c^2=2(\frac{1}{2}-ab-c)$

۱۸۳ – طولهای دو نقطه A و B ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ و طولهای دو نقطهٔ C و D ریشه‌های معادلهٔ $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ است اگر A و B مزدوج توافقی C و D باشند، کدامیك از برابریهای زیر درست است:

الف: $(a\gamma+c\alpha)=a\alpha$ ب: $2(a\gamma+c\alpha)=b\beta$

ج: $2(a\gamma+c\alpha)=a\alpha$ د: $(a\gamma+c\alpha)=c\gamma$

۱۸۴ – در چند جمله‌ای $(4x^2-2x-1)^4(2x-1)^5(2x+1)^3$ مجموع ضرایب x و x^2 و x^3 و ... و x^{11} برابر با کدامیك از عددهای زیر است.

الف: ۲۵ ب: ۲۶ ج: ۲۷ د: ۲۸

۱۸۵ – ریشه معادلهٔ $\sqrt[3]{7x-1}=\sqrt{7^2x+1}$ کدام است

الف: $\frac{2}{5}$ ب: $-\frac{5}{2}$ ج: $\frac{5}{2}$ د: $-\frac{2}{5}$

۱۸۶ ــ مقدار $\frac{۱}{۲\sqrt[۳]{۳}+۲\sqrt[۳]{۹}+۲}$ برابر با کدامیك از مقادیر زیر است:

الف: $\sqrt[۳]{۹}+۲$ ب: $\sqrt[۳]{۹}-۲$ ج: $\sqrt[۳]{۳}+۲$

د: $\sqrt[۳]{۳}-۲$

تست جبر مدرسه عالی بازرگانی رشت

۱۸۷ ــ حاصل کسر مرکب $\frac{\frac{x}{۱+x}-\frac{۱}{۱-x}}{\frac{x}{x^۲-۱}-\frac{۱}{x+۱}}$ برابر باکدامیك ازرواجطزیراست؟

الف: $\frac{۱+x}{۲x^۲}$ ب: ۱ ج: $\frac{۱-x}{x^۲}$ د: $۲x^۲$

۱۸۸ ــ کدامیك ازدسته اعداد زیرجواب دستگاه دومجهولی :

$$\begin{cases}\frac{x}{۳}-\frac{y}{۲}=\frac{۵xy}{۲۳} \text{ و } \frac{۳}{x}+\frac{۲}{y}=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

میباشد؟

الف : $x=-۶$ و $y=۲$ ب: $x=۱$ و $y=۱$

ج: $x=-۲$ و $y=-۶$ د: $x=۲$ و $y=-۶$

۱۸۹ — منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x^2-3x+4$:

الف: محورعرض‌ها را قطع می‌کند. ب: برمحور طولها مماس است.

ج: برمحور عرض‌ها مماس است. د: محورطولها راقطع می‌کند.

۱۹۰ — عبارت x^4-x^2-x+1 برابر با کدامیک ازعبارتهای زیراست؟

الف: $(x^2-x+1)^2$ ب: $(x^2-2x^2)(x-1)$

ج: $(x+2)(x^2+1)$ د: $(x-1)(x^2+x^2-1)$

۱۹۱ — تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ مفروض است کدامیک ازتناسب زیرصحیح است؟

الف: $\frac{a+2c}{b+2d}=\frac{a}{d}$ ب: $\frac{a-c}{b}=\frac{2c}{3b}$

ج: $\frac{a+2c}{b+2d}=\frac{a-c}{b-d}$ د: $\frac{a}{c}=\frac{b-d}{3d}$

۱۹۲ — عبارت $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ بازاء $a=\frac{8}{3}$ و $b=\frac{-2}{3}$ برابر با کدامیک ازاعداد زیراست؟

الف: $a+b$ ب: $\frac{a}{b}$ ج: ۲ د: $\frac{-b}{a}$

۱۹۳ — مجموع دوعدد برابر۱۵و جموع‌عکس آندوبرابر $\frac{-15}{34}$ است کدامیک از دسته اعداد زیردو عدد مفروض است؟

الف: ۵و۱۰ ب: ۱۹و۴ ج: ۱۷و۲- د: ۲و۱۳

۱۹۴ — ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)x+\sqrt{6}+\sqrt{3}=0$ عبارتند از:

الف: $1+\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ ب: $\sqrt{2}$ و $1-\sqrt{6}$

ج: $\sqrt{3}$ و $1-\sqrt{2}$ د: $\sqrt{2}$ و $1-\sqrt{3}$

۱۹۵ — ضریب زاویه مماس برمنحنی $y=-x^2+x-2$ در نقطه تقاطع آن با محور عرضها کدامیک ازمقادیر زیراست؟

الف: $m=\frac{-1}{2}$ ب: $m=\frac{1}{2}$ ج: $m=-1$ د: $m=1$

تست‌های جبر کنکور سراسری
تیرماه ۱۳۵۰ (رشته ریاضی)

۱۹۶ ــ منحنی نمایش تغییرات تابع $y = x^3 - 3x^2 + 5$

الف: محور xها را در ۳ نقطه قطع میکند .

ب: محور xها را در ۲ نقطه قطع میکند .

ج: برمحور xها مماس است. د: محور xها را قطع نمیکند.

۱۹۷ ــ برای آنکه اعداد ۱ ــ و ۲ ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشد لازم است که داشته باشیم :

الف: $c - 2b = 0$ ب: $c + 2b = 0$

ج: $2b - c = 0$ د: $2b + c = 0$

۱۹۸ ــ اگر a عددی گویا و مخالف صفر و b عددی گنگ باشد کدام یك از حکم‌های زیر ممکن است صحیح نباشد ؟

الف: ab^2 عددی گویاست ب: ab عددی گنگ است

ج : $a - b$ عددی گنگ است. د: $\frac{a}{b}$ عددی گنگ است .

۱۹۹ ــ فرض کنیم $F(x) = x + k$ برای آنکه $F(x^2 - 1)$ بر $x - 2$ بخش‌پذیر باشد لازم است که k برابر باشد با:

الف: ۳ ب: ۳ ــ ج: ۱ د : ۰

۲۰۰ـ اگر $F(x)=F(-x)$ باشد تابع $F(x)$ را زوج نامند. کدام‌یك از تابع‌های زیر زوج است؟

الف: $x\sin x$ ب: $x\cos x$ ج: $x^2\operatorname{tg} x$ د: $x+\cos x$

۲۰۱ـ اگر $n\geq 2$ باشد کدام‌یك از اعداد زیر در خارج فاصله $(0\,,\frac{1}{n})$ واقع است؟

الف: $\frac{1}{2n}$ ب: $\frac{1}{n^2}$ ج: $\frac{1}{n+1}$ د: $\frac{1}{\sqrt{n}}$

۲۰۲ـ برای آنکه $(x-\alpha)(x-\beta)+k$ بر $(x-\beta-\alpha)$ بخش‌پذیر باشد لازم است که k برابر باشد با:

الف: $-\alpha\beta$ ب: $-(\alpha+\beta)$ ج: $\alpha\beta$ د: $\alpha+\beta$

۲۰۳ـ تابع $F(x)=1-x^2$ در فاصله $(-2\ \text{و}\ 5)$

الف: همجا نزولی است. ب: همجا صعودی است.

ج: همجا ثابت است. د: گاهی صعودی و گاهی نزولی است.

۲۰۴ـ منحنی $y=\frac{x^2+x+3}{x+1}$ و خط $y=x$

الف: برهم مماس‌اند. ب: همدیگر را قطع میکنند.

ج: باهم مجانب‌اند. د: برهم عمودند.

۲۰۵ـ اگر $f(u)=a^u$ و $g(x)=\log_a x$ و $a>1$ و $x>0$ باشد $f[g(x)]$ همواره برابر است با:

الف: ax ب: x ج: $\log_a x$ د: $\frac{x}{a}$

۲۰۶ـ حد تابع $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ وقتی $x\to\infty$ برابر است با:

الف: ۱ ب: صفر ج: بی‌نهایت د: $\frac{1}{2}$

۲۰۷ـ اگر مشتق تابع $f(x)$ نسبت به x معادل $\frac{1}{x}$ باشد مشتق تابع $f(ax)$ که در آن a مقداری است ثابت برابر است با:

الف: $\frac{1}{x}$ ب: $\frac{a}{x}$ ج: $\frac{1}{x^2}$ د: $\frac{a}{x^2}$

۲۰۸ – اگر چندجمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ ریشه‌مشترك نداشته‌باشندبرای آنکه‌منحنی $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ محصور بین‌دوخط $y=0$ و $y=1$ باشدلازم است که:

الف: درجه $f(x)$ بیش از درجه $g(y)$ باشد .

ب: ۰ و ۱ ریشه‌های $f(x)$ باشد .

ج: $f(x)$ ریشه نداشته‌باشد .

د : $g(x)$ ریشه نداشته باشد .

۲۰۹ – برای آنکه $\frac{A}{\sqrt{2}+1}+\frac{B}{\sqrt{2}-1}=1$ و A و B اعداد گویاباشند لازم و کافی است که:

الف: $A=\frac{1}{2}$ و $B=-\frac{1}{2}$ ب: $A=\frac{-1}{2}$ و $B=\frac{1}{2}$

ج: $A=\frac{1}{2}$ و $b=\frac{1}{2}$ د: $A=-\frac{1}{2}$ و $B=-\frac{1}{2}$

۲۱۰ – فاصله نزدیك‌ترین نقطه‌منحنی $y^2=2x+4$ ازمبداء مختصات‌برابراست‌با:

الف: ۲ ب: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ج: $\sqrt{3}$ د: $2\sqrt{3}$

۲۱۱ – معادله $|x-1|+|x-2|=3$ دارای چندجواب است ؟

الف: یك ب: دو ج: چهار د: هیچ

۲۱۲ – اگر c منحنی تابع $y=f(x)$ باشدبرای‌رسم‌منحنی $y=f(x+3)$ کافی است منحنی c را درصفحه‌مختصات برابرسه‌واحد انتقال‌دهیم. انتقال‌درکدام‌یك ازجهت‌های زیر بایدصورت گیرد ؟

الف: درجهت‌مثبت ox ب: درجهت‌منفی ox

ج: درجهت‌مثبت oy د: درجهت‌منفی oy

۲۱۳ – بسط $(a+b+c+d)^2$ دارای‌چندجمله‌متمایزاست؟

الف: ۱۶ ب: ۱۲ ج: ۱۰ د: ۸

۲۱۴ – حدمجموع $\frac{1}{n^4}+\frac{2}{n^4}+\frac{3}{n^4}+\dots+\frac{n^2}{n^4}$ که‌در آن n عددی درست است وقتی $n\to\infty$ برابراست‌با:

الف: $\frac{1}{3}$ ب: $\frac{1}{2}$ ج: $\frac{2}{3}$ د: ۱

تست‌های جبر کنکور رشته ریاضی دانشگاه شبانه تهران تیرماه ۱۳۵۰

۲۱۵ – شرط لازم و کافی برای این که $ax^3+5x^2+bx-20$ بر $x+2$ بخش‌پذیر باشد این است که:

الف: $4a+b=0$ ب: $4a-b=0$

ج: $a+4b=0$ د: $a-4b=0$

۲۱۶ – حد $\frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{x+\sqrt{2x+\sqrt{3x}}}}$ وقتی x بسمت $+\infty$ میل میکند برابر است با:

الف: $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ب: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ج: $\frac{\sqrt{3}}{3}$ د: $\sqrt{3}$

۲۱۷ – برای اینکه نامساوی $|x-1|<1$ برقرار باشد لازم است داشته باشیم:

الف: $x>1$ ب: $x<-1$

ج: $0<x<2$ د: $-2<x<0$

۲۱۸ – نقطه قرینهٔ $A\left|\begin{matrix}2\\7\end{matrix}\right.$ نسبت به خط $x+y=0$ کدام یک از جوابهای زیر است؟

الف: ۷ و ۲ ب: ۷– و ۱–

ج: ۲– و ۷– د: ۷ و ۲–

۲۱۹ – نقطه M بمختصات (۱۲ و ۵) و نقطه متحرک N روی دایرهٔ $x^2+y^2=64$ مفروض است کوتاهترین فاصله M از N برابر است با:

الف: ۸ ب: ۵ ج: $5\sqrt{2}$ د: $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

۲۲۰ــ برای اینکه عدد ۲ بین ریشه‌های معادلهٔ $-x^2-mx+1=0$ باشد لازم است :

الف: $m>\frac{3}{2}$ ب: $m>0$

ج: $m<-\frac{3}{2}$ د : $m<0$

۲۲۱ــ مشتق تابع $\sqrt{x}\sin x$ برابراست با:

الف: $\frac{\sin x+2x\cos x}{2\sqrt{x}}$ ب: $\frac{\sin x-2x\cos x}{2\sqrt{x}}$

ج: $\frac{x\sin x+2\cos x}{2\sqrt{x}}$ د: $\frac{x\sin x-2\cos x}{2\sqrt{x}}$

۲۲۲ــ مشتق تابع $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ برابراست با:

الف: $\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$ ب: $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

ج: $\frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$ د : $\frac{-1}{2\sqrt{x}}$

۲۲۳ــ تابع اولیه $\frac{1}{\sqrt{x}}\times(2\sqrt{x}+3)^{\frac{1}{5}}$ عبارت‌است از:

الف: $\frac{5}{6}(2\sqrt{x}+3)^{\frac{6}{5}}+c$ ب: $\frac{5}{6}(2\sqrt{x}+3)^{\frac{5}{6}}+c$

ج: $\frac{6}{5}(2\sqrt{x}+3)^{\frac{6}{5}}+c$ د : $\frac{6}{5}(2\sqrt{x}+3)^{\frac{5}{6}}+c$

۲۲۴ــ مساحت سطح محصور بین منحنی‌های $y=x^2$ و $y=\sqrt{x}$ برابراست با:

الف: ۱ ب: $\frac{2}{3}$ ج: $\frac{1}{3}$ د: $\frac{1}{6}$

۲۲۵ــ مساحت محصور بین منحنی $y=\sqrt{x}$ و محور xها و خط $x=1$ را حول ox دوران می‌دهیم حجم حاصل از این دوران برابر است با:

الف: $\frac{\pi}{2}$ ب: $\frac{\pi}{3}$ ج: $\frac{2\pi}{3}$ د: $\frac{3\pi}{2}$

۲۲۶ــ مکان هندسی نقطه متحرك M که مجموع مجذورات فواصل آن از دو خط $x+2y+1=0$ و $2x-y+3=0$ همواره برابر ۴ است، عبارت است از:

الف: خط راست. ب: یك دایره

ج: یك بیضی د: یك سهمی

۲۲۷ــ تابع $y=x^2+\frac{16}{x}$ دارای:

الف: مینیمی برابر ۱۲ است. ب: مینیمی برابر ۸ است.

ج: ماکزیمی برابر ۸ است. د: ماکزیمی برابر ۱۲ است.

۲۲۸ــ وقتی $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ است، $f(\frac{1}{x},\frac{1}{y})$ برابر است با:

الف: $f(x,y)$ ب: $f(-x,y)$

ج: $f(x,-y)$ د: $-f(x,y)$

۲۲۹ــ منحنی $y^3=x^2$ در مبدأ مختصات مماس است بر:

الف: محور xها ب: محور yها

ج: نیمساز ناحیه اول د: نیمساز ناحیه دوم

۲۳۰ــ منحنی‌های c بمعادلهٔ $y=x^2$ و c' بمعادلهٔ $y=\frac{x^3+1}{x}$ مفروض‌اند:

الف: c و c' یکدیگر را در دو نقطه قطع میکنند.

ب: c و c' یکدیگر را در سه نقطه قطع میکنند.

ج: c بر c' مماس است.

د: c مجانب c' است.

۲۳۱ــ تابع اولیه $\frac{\cos 2x}{1+\cos 2x}$ عبارت است از:

الف: $x+\operatorname{tg}x+c$ ب: $x-\operatorname{tg}x+c$

ج: $x+\frac{1}{2}\operatorname{tg}x+c$ د: $x-\frac{1}{2}\operatorname{tg}x+c$

۲۳۲ — وقتی m و n عددهای گویا ومعادلهٔ $x^2+mx+n=0$ دارای ریشه مضاعف است معادلهٔ $x^2+mx+n-2=0$ دارای :

الف: ریشه مضاعف است ب: دو ریشه گنگ است.

ج: دو ریشه گویا د: ریشه نیست.

۲۳۳ — منحنی‌های $y=\cos x$ و $x=\cos y$ نسبت به کدامیك از خط زیر قرینه یکدیگر ند.

الف: محور x ها ب: محور y ها

ج: نیمساز ربع اول د: نیمساز ربع دوم

۲۳۴ — وقتی $f'(x)$ مشتق تابع $xf(x)$ و $xf'(x)+f(x)=1$ است $f(x)$ عبارت است از :

الف: $\cos x+1$ ب: $\frac{c}{x}+1$

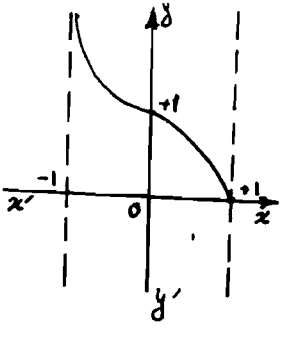
ج: $\cos x-1$ د: $\frac{c}{x}-1$

۲۳۵ — وقتی $y=\frac{1}{1+\sqrt{x}}$ است، y درچه فاصله تغییر می‌کند .

الف: $(1 \text{ و } +\infty)$ ب: $(-\infty \text{ و } 1)$

ج: $(0 \text{ و } 1)$ د: $(0 \text{ و } \frac{1}{2})$

۲۳۶ — منحنی نمایش کدامیك ازتابع‌های زیر به شکل‌روبرواست .



الف: $y=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

ب: $y=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

ج: $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

د: $y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

تست‌های ریاضی کنکور سراسری

تیرماه ۱۳۵۰ (رشته طبیعی)

۲۳۷ـ خط $3x-4y+5=0$ بر کدامیك از خطهای زیر عمود است.

الف: $4x+3y+5=0$ ب: $4x-3y+5=0$

ج: $3x+4y+5=0$ د: $-3x+4y+5=0$

۲۳۸ـ $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ است $f(\frac{1}{x})$ برابر است با :

الف: $f(x)$ ب: $-f(x)$ $-f(-x)$ د: $f(-x)$

۲۳۹ـ مشتق تابع $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ برابر است با :

الف: $\frac{-1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ ب: $\frac{1-2x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

ج: $\frac{2x^2-1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ د: $\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

۲۴۰ـ مکان هندسی نقطه‌هائی از صفحهٔ xoy که مجموع مربع فاصله‌هایشان از نقطه o ومحور x ها مقدار ثابت a^2 است .

الف: یك خط راست است ب: یك دایره است .

ج: یك بیضی است د: یك سهمی است .

۲۴۱ـ معادله مکان هندسی نقطه M به مختصات $x=\frac{\sin t}{1+\cos t}$ و $y=tgt$ وقتی t تغییر کند عبارتست از :

الف: $y=\frac{2x}{1-x^2}$ ب: $y=\frac{1+x^2}{2x}$

د: $y=\frac{2x}{1+x^2}$ ج: $y=\frac{1-x^2}{2x}$

۲۴۲ — معادله دایره‌ای‌که شعاع یکدر ربع‌اول بر محورهای مختصات مماس است عبارتست از :

الف: $x^2+y^2-2x+2y-1=0$

ب: $x^2+y^2-2x-2y+1=0$

ج: $x^2+y^2+2x-2y+1=0$

د: $x^2+y^2-2x-2y-1=0$

۲۴۳ — اگر نقطه $c\left|\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right.$ مرکز بیضی $4x^2+9y^2+8x+36my=23$ باشد m برابراست با ؟

الف: -2 ب: 2 ج: $-\frac{1}{2}$ د: $\frac{1}{2}$

۲۴۴ — تابع اولیه‌تابع $\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ ازعبارتست از :

الف: $\frac{1}{4}\sin\sqrt{x}+c$ ب: $-\frac{1}{2}\sin\sqrt{x}+c$

ج: $-4\sin\sqrt{x}+c$ د: $2\sin\sqrt{x}+c$

۲۴۵ — مساحت سطح محصورمنحنی $y=tg^2x$ ومحور x ها وخط $x=\frac{\pi}{4}$ برابر است با :

الف: $1-\frac{\pi}{4}$ ب: $1+\frac{\pi}{4}$ ج: $\frac{\pi}{4}$ د: 1

۲۴۶ — مثلث متساوی‌الاضلاع ABC بضلع a را حول‌یك ضلع‌آن‌دوران میدهیم حجم حاصل‌از دوران برابراست با :

الف: $\frac{1}{6}\pi a^2\sqrt{3}$ ب: $\frac{1}{3}\pi a^2\sqrt{3}$

ج: $\frac{1}{2}\pi a^2$ د: $\frac{1}{4}\pi a^2$

۲۴۷ — اگر دریك‌تصاعد حسابی جمله اول‌برابر a وجمله نهم دوبرابرجمله‌چهارم باشد قدرنسبت‌این تصاعد برابراست با :

الف: a ب: $\frac{a}{2}$ ج: $\frac{a}{3}$ د: $\frac{a}{4}$

۲۴۸ – $\log\sqrt{2} - \log\sqrt{2000}$ برابر است با :

الف: $\frac{3}{2}$ ب: $\frac{2}{3}$ ج: 3 د: $\frac{1}{3}$

۲۴۹ – $(\sqrt{2}+1)^{10}(\sqrt{3}-1)^{12}$ برابر است با :

الف: $3+2\sqrt{2}$ ب: 1 ج: $3-2\sqrt{2}$ د: $2+3\sqrt{2}$

۲۵۰ – شرط لازم وکافی $tg\,x = tg\,y$ باشد این‌است که :

الف: $x-y=2k\pi$ ب: $x+y=2k\pi$

ج: $x-y=k\pi$ د: $x+y=k\pi$

۲۵۱ – دوره تناوب تابع $y=\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{3}$ برابراست با :

الف: 2π ب: 4π ج: 6π د: $k\pi$

۲۵۲ – معادله $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2$ در فاصله $(0 \text{ و } 2\pi)$ چند جواب‌دارد :

الف: ۱ ب: دو ج: چهار د: پنج

۲۵۳ – وقتی $\cos x=2$ است $tg^2 x$ برابراست با :

الف: $\frac{4}{5}$ ب: $\frac{3}{5}$ ج: $\frac{4}{3}$ د: $\frac{1}{4}$

۲۵۴ – $tg(\frac{\pi}{4}-x)+tg(\frac{\pi}{4}+x)=0$ برابراست با:

الف: $\frac{2}{\cos 2x}$ ب: $\frac{2}{\sin 2x}$ ج: $\frac{1}{\sin 2x}$ د: $\frac{1}{\cos 2x}$

۲۵۵ – کدامیك ازشکلهای زیر مرکزتقارن ندارند.

الف: دایره ب: بیضی ج: سهمی د: هذلولی

۲۵۶ – اگردریك چهارضلعی زاویه‌های روبروبرابرباشند این‌چهار ضلعی همواره

الف: مستطیل است ب: لوزی است

ج: ذوزنقه‌است د: مربع‌است

۲۵۷ – وقتی M نقطه بر خورد نیمسازهای داخلی مثلث ABC است زاویه $B\hat{M}C$ برابر است با :

الف: $\pi - \frac{\hat{A}}{2}$ ب: $\pi - \hat{A}$

ج: $\pi + \frac{\hat{A}}{2}$ د: $\frac{\pi}{2} + \frac{\hat{A}}{2}$

۲۵۸ – اگر درمثلث قائم‌الزاویه ABC طول وتر برابر a وطول دوضلع دیگر b و c باشد طول شعاع دایره محاطی داخلی برابر است با :

الف: $\frac{b+c-a}{2}$ ب: $a - \frac{b+c}{2}$

ج: $2a-b-c$ د: $b+c-a$

تست‌های ریاضی دانشگاه شبانه تهران

تیرماه ۱۳۵۰ (رشته طبیعی)

۲۵۹ – دوره تناوب تابع $y = \sin\frac{x}{2} + \tan x$ برابراست با :

الف: π ب: 2π ج: 3π د: 4π

۲۶۰ – برای آنکه کسینوس دو کمان برابر باشد لازم است .

الف: دو کمان برابر باشد ب: تفاضلشان مضرب 2π باشد.

ج: مجموع یا تفاضلشان مضرب صحیحی از 2π باشد.

د: مجموعشان مضرب صحیحی از π باشد .

۲۶۱ – طول برآیند دو بردار

الف: همواره ازطول هریك از مؤلفه‌ها بیشتراست .

ب: همواره از طول هریك از مؤلفه‌ها کمتراست .

ج: ممکن است باطول یکی ازمؤلفه‌ها برابر باشد .

د: ممکن است ازتفاضل طول مؤلفه‌ها کمتر باشد .

۲۶۲ – برای آنکه دو قطر یك چهار ضلعی یکدیگر را نصف کنند لازم است که این چهار ضلعی :

الف: مربع باشد ب: مستطیل باشد

ج: لوزی باشد د: متوازی‌الاضلاع باشد

۲۶۳ – حد تابع $y=\frac{\sin 2x}{x}$ وقتی $x \to 0$ برابر است با:

الف: $\frac{1}{2}$ ب: ۰ ج: ۲ د: ∞

۲۶۴ – با شرط $0<x<\frac{\pi}{2}$ کدامیك ازنامساویهای زیرهمواره صحیح است؟

الف: $\sin x<\operatorname{tg} x$ ب: $\sin x<\cos x$

ج: $\sin x<\sin^2 x$ د: $\sin x<\cos^2 x$

۲۶۵ – اگر حاصلضرب سه عددمثبت a وb وc برابریك باشد

$\log a^2 b+\log b^2 c+\log c^2 a$ برابراست با:

الف: ۱ ب: ۳ ج: $\frac{1}{3}$ د:

۲۶۶ – معادله خطی که از نقطه $A\left|\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right.$ گذشته وبرخط $2y-x+2=0$ عمود است عبارت است از:

الف: $y+2x-3=0$ ب: $y+2x=0$

ج: $2y+x-3=0$ د: $2y+x=0$

۲۶۷ – ضریب زاویهٔ مماس بر دایره $x^2+y^2=25$ در نقطه $T\left|\begin{matrix}3\\-4\end{matrix}\right.$ برابر است با:

الف: $-\frac{4}{3}$ ب: $\frac{4}{3}$ ج: $-\frac{4}{3}$ د: $\frac{3}{4}$

۲۶۸ – منحنی نمایش تغییرات‌تابع $y=+\sqrt{x^2+a^2}$ قسمتی است ازیك

الف: بیضی ب: دایره ج: سهمی د: هذلولی

۲۶۹ – مساحت سطح‌محصوربین محور x ها وسهمی $y=3-3x^2$ برابراست‌با:

الف: π ب: ۳/۲ ج: $\frac{3\pi}{2}$ د: ۴

۲۷۰ـ منحنی نمایش تابع $y=x^2-mx-3$ بازاء اندازه‌های مختلف m همواره

الف: بالای محور xها قرار دارد.

ب: محور xها را دریکجانب مبداء مختصات قطع می‌کند.

ج: برمحور xها مماس است.

د: محور xها را در دو جانب مبداء مختصات قطع می‌کند.

۲۷۱ـ دستگاه دو معادله دومجهولی $\begin{cases} 4x+6y-8=0 \\ 6x+9y-12=0 \end{cases}$ دارای:

الف: بینهایت‌دسته جواب‌است ب: جواب نیست.

ج: یکدسته جواب است د: دو دسته جواب است

۲۷۲ـ اگر خط $y=x-1$ برمنحنی $y=mx^2$ مماس‌باشد m برابراست‌با:

الف: $\frac{1}{4}$ ب: ۴ ج: $-\frac{1}{4}$ د: -4

۲۷۳ـ اگر $3\pi<\alpha<\frac{5\pi}{2}$ و $tg\alpha=\sqrt{3}$ باشد α برابر است با:

الف: $\frac{13\pi}{6}$ ب: $\frac{7\pi}{3}$ ج: $\frac{9\pi}{4}$ د: $\frac{17\pi}{8}$

۲۷۴ـ منحنی‌های $y=5x^2$ و $x=5y^2$

الف: یکدیگر را قطع نمی‌کنند ب: در دونقطه متقاطعند

ج: یکدیگر را درچهارنقطه قطع‌می‌کنند د: برهم مماس‌اند

۲۷۵ـ اگر $f'(x)$ مشتق تابع $f(x)$ و $g'(x)$ مشتق تابع $g(x)$ و $g'(x)-f'(x)=\sin 2x$ باشد $g(x)$ برابراست با:

الف: $f(x)^2-\cos 2x+c$ ب: $f(x)+\cos 2x+c$

ج: $f(x)-\frac{1}{2}\cos 2x+c$ د: $f(x)+\frac{1}{2}\cos 2x+c$

۲۷۶ـ مساحت‌دایره محیطی مربعی‌که طول ضلع آن برابر یکناست مساویست با:

الف: π ب: $\pi\sqrt{2}$ ج: $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ د: $\frac{\pi}{2}$

۲۷۷ـ منحنی $x^2+y^2-2x-2y-2=0$

الف: دایره‌ایست بشعاع ۳ ب: دایره‌ایست به مرکز $\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$ O وشعاع ۲

ج: بیضی‌است به قطر بزرگ ۴ د: هذلولی‌است به فاصله کانونی ۴

۲۷۸ — نامساوی $x^2+4>4x$

الف: بازاء همه مقادیر x برقراراست .

ب: به ازاء هرمقدار $x\neq 2$ برقرار است.

ج: فقط بازاء $-2<x<2$ برقراراست .

د: فقط بازاء $x>2$ و $x<-2$ برقرار است .

۲۷۹ — مکان هندسی نقطه M به مختصات $x=2\cos t$ و $y=\sin^2 t$ وقتی t تغییر می‌کند .

الف: دایره است ج: سهمی‌است ب: بیضی‌است د: هذلولی‌است

۲۸۰ — اگر a و b دوضلع یکمثلث باشندوزاویه بین‌این دوضلع $\frac{\pi}{6}$ باشد مساحت‌این مثلث برابراست با :

الف: $\frac{a^2+b^2}{4}$ ب: $\frac{a^2+b^2}{2}$ ج: $\frac{ab}{4}$ د: $\frac{ab}{2}$

۲۸۱ — اگر $\sin x=\frac{1}{3}$ باشد $|\sin 2x|$ برابراست با :

الف: $\frac{2}{3}$ ب: $\frac{1}{9}$ ج: $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ د: $\frac{2\sqrt{2}}{9}$

۲۸۲ — بفرض $b>0$ و a و $a>b$ دراینصورت‌همواره $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$

الف: $ab<1$ ب: $ab>1$ ج: $a>b$ د: $a<b$

مدرسه عالی ریاضیات و مدیریت اقتصادی ـ کرج

۲۸۳- مختصات نقطهٔ قرینهٔ نقطهٔ $M(1 \text{ و } -2)$ نسبت بنقطهٔ $N(-3 \text{ و } 2)$ عبارتست از :

الف: $\begin{vmatrix} -7 \\ 4 \end{vmatrix}$ ب: $\begin{vmatrix} -7 \\ -3 \end{vmatrix}$ ج: $\begin{vmatrix} -4 \\ 4 \end{vmatrix}$ د: $\begin{vmatrix} -7 \\ 6 \end{vmatrix}$

۲۸۴- برای آنکه $x^2 < 1$ باشد لازم است داشته باشیم :

الف: $x > 1$ ب: $x < -1$ ج: $|x| > 1$ د: $x > -1$

۲۸۵- می‌دانیم که عبارت $x^2 + (3m+2)x + 7m + 1$ بر $x + 3$ بخش‌پذیر است. دراینصورت m برابر است با:

الف: ۱ ب: ۲ ج: ۳ د: ۴

۲۸۶- معادلهٔ خطی که بر نقطهٔ $A(2 \text{ و } 3)$ میگذرد و برخط $y + 2x = 0$ عمود است عبارتست از :

الف: $y - 2x + 1 = 0$ ب: $2y - x - 2 = 0$

ج: $y + 2x - 7 = 0$ د: $2y - x - 4 = 0$

۲۸۷- خط $y = x - 1$ و منحنی $x = x^2 + 1$ همدیگررا :

الف: قطع نمیکنند. ب: در یك نقطه قطع میکنند.

ج: در دو نقطه قطع میکنند. د: مماس‌اند .

۲۸۸- ریشه‌های معادلهٔ $ax^2 + bx + c = 0$ عکس ریشه‌های کدامیك ازمعادله‌های زیر ند؟

الف: $bx^2+cx+a=0$ ب: $bx^2+ax+c=0$

ج: $cx^2+ax+b=0$ د: $cx^2+bx+a=0$

۲۸۹ـ برای آنکه عدد یك بین ریشه‌های معادلهٔ: $x^2-2mx+m+1=0$ باشد لازم است داشته باشیم:

الف: $m<2$ ب: $m>2$ ج: $m\to 2$ د: $m=3$

۲۹۰ـ وقتی x به سمت ۲ میل می‌کند، حد تابع $\frac{x^3-8}{x^2-4}$ برابر است با:

الف: صفر ب: ∞ ج: ۳ د: ۹

۲۹۱ـ کدامیك از خطهای زیر بر منحنی $y=x^2+2$ مماس است؟

الف: $y=2x-2$ ب: $y=2x-1$

ج: $y=2x$ د: $y=2x+1$

۲۹۲ـ وقتی $f(x)=\frac{1}{x}$ است، $f[f(x)]$ برابر است با:

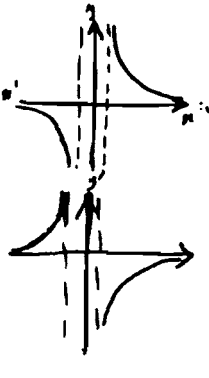
الف: $\frac{1}{x^2}$ ب: x ج: ۱ د: x^2

۲۹۳ـ وقتی $f(x)=2^x$ است، $f(x+2)+f(x+3)$ برابر است با:

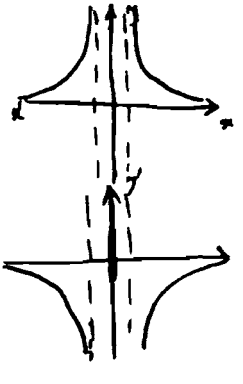
الف: $5f(x)$ ب: $6f(x)$ ج: $8f(x)$ د: $12f(x)$

۲۹۴ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ بکدامیك از منحنیهای زیر شبیه است؟

الف:



ب:



ج:

د:

۲۹۵ـ منحنی نمایش تابع $y=1+\sqrt{x}$:

الف: یك سهمی است
ب: یك بیضی است
ج: قسمتی‌ازیك‌سهمی است
د: قسمتی از یك‌بیضی‌است

۲۹۶ـ مشتق‌تابع $2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}$ برابراست با:

الف: $\frac{\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
ب: $\frac{-\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
ج: $\frac{\cos\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
د: $\frac{-\cos\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

۲۹۷ـ تابع اولیه تابع $\frac{x^2-2\sqrt{x}}{x}$ عبارتست از:

الف: $x^2-2\sqrt{x}+C$
ب: $x^2-4\sqrt{x}+C$
ج: $\frac{x^2}{2}-2\sqrt{x}+C$
د: $\frac{x^2}{2}-4\sqrt{x}+C$

۲۹۸ـ تابع اولیه تابع $(tgx+cotgx)^2$ برابر است با:

الف: $tgx+cotgx+C$
ب: $-tgx-cotgx+C$
ج: $-tgx+cotgx+C$
د: $tgx-cotgx+C$

۲۹۹ـ مقدارسطح محدود به محور xها و منحنی : $y=4-3x^2-x^3$ برابر است با :

الف: $\frac{24}{5}$ ب: $\frac{28}{5}$ ج: $\frac{32}{5}$ د: $\frac{38}{5}$

۳۰۰ـ در کدامیك از فاصله‌های زیر عبارت : $(x-2)(x-4)^2(x-6)^3$ منفی است ؟

الف: $-1<x<+1$
ب: $1<x<3$
ج: $3<x<5$
د: $5<x<7$

۳۰۱ـ زاویهٔ بین دوسهمی: $y=x^2$ و $y=x^2-\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}$

درنقطهٔ برخوردشان برابر است با:

الف: 30° ب: 45° ج: 60° د: 90°

۳۰۲- مقدار $a\sqrt[3]{a^{-2}\sqrt[3]{a^{-2}}}$

الف: $\sqrt[9]{a}$ ب: $\sqrt[9]{a^{2}}$ ج: $\sqrt[9]{a^{-2}}$ د: $\sqrt[9]{a^{-2}}$

۳۰۳- $\frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[4]{2}}$ برابراست با:

الف: $\sqrt[12]{108}$ ب: $\sqrt[12]{162}$ ج: $\sqrt[12]{216}$ د: $\sqrt[12]{324}$

۳۰۴- مقدار $\frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ برابر است با :

الف: $\sqrt{15}$ ب: $3\sqrt{15}$

ج: $15+\sqrt{15}$ د: $15+3\sqrt{15}$

تست کنکور مدرسه عالی علوم اقتصادی و اجتماعی

۳۰۵- مقدار عبارت $\frac{x-2}{\sqrt{x^2+32}-6}$ به ازای $x=2$ برابراست با:

الف: ۳ ب: ۴ ج: ۳- د: ۴-

۳۰۶- اگر $a=2^{15}$ و $b=2^{6}$ باشد ، ریشه سوم $\frac{a}{b}$ برابراست با:

الف: $\pm\frac{32}{27}$ ب: $-\frac{32}{27}$

ج: $+\frac{32}{27}$ د: $\pm\sqrt{\frac{32}{27}}$

۳۰۷- وقتی x از طریق مقادیر مثبت بسمت صفر میل کند، $\frac{\sin x}{x}$ برابراست با:

الف: ۱- ب: ۱ ج: صفر د: هرعدد

۳۰۸- جواب x و y ازرابطهٔ $\begin{cases} x+ay=۴ \\ ۳x-ay=a \end{cases}$ برابراست با:

الف: $\begin{cases} x=\frac{a+۵}{۴} \\ y=\frac{۱۶-a}{۵} \end{cases}$ ب: $\begin{cases} x=\frac{۵-a}{۴} \\ y=\frac{۱۶-a}{۶a} \end{cases}$

ج: $\begin{cases} x=\frac{a+۴}{۵} \\ y=\frac{۱۶-a}{۵} \end{cases}$ د: $\begin{cases} x=\frac{۵+a}{۵} \\ y=\frac{۱۶-a}{۵a} \end{cases}$

۳۰۹- ضریب زاویهٔ مماس برمنحنی $y=x+\frac{۱}{x}$ درنقطهٔ $A(۳ \text{ و } \frac{۱۰}{۳})$ برابراست با:

الف: $\frac{۹}{۸}$ ب: $\frac{۷}{۹}$ ج: $\frac{۸}{۹}$ د: $-\frac{۹}{۷}$

۳۱۰- مقدارکسر $\frac{۲x^۲-۳x-۲}{x^۳-۲x^۲-x^۲+x+۲}$ بهازاء $x=۲$ برابراست با:

الف: صفر ب: ۱ ج: ∞ د: $-\infty$

۳۱۱- نقاط تقاطع یکخطمستقیم با محورهای Ox و Oy بهترتیب ۲ و ۴ میباشد. معادلهٔ این خط عبارتست از:

الف: $\frac{y}{۴}+\frac{x}{۲}=۱$ ب: $\frac{y}{۲}-\frac{x}{۴}=۱$

ج: $y-۲x=۱$ د: $y+۲x=۴$

۳۱۲- جواب معادلهٔزیر کدام‌است؟

$$\frac{\frac{x}{x-۲}-\frac{x+۳}{x+۲}}{\frac{۱}{x+۲}+\frac{۲}{x-۲}}=\frac{۹}{۱۱}$$

الف: ۳ ب: ۲ ج: ۳- د: ۲-

۳۱۳- $(\sqrt{18}+\sqrt{2})^2=?$

الف: $\sqrt{20}$ ب: ۱۶

ج: ۲۲ د: ۶۴

۳۱۴- این عبارت را حساب کنید: $A=\frac{\sqrt{15}\times\sqrt{6}}{\sqrt{12}\times\sqrt{120}}$

الف: $\frac{1}{6}$ ب: $\frac{1}{5}$

ج: $\frac{1}{4}$ د: $\frac{1}{3}$

۳۱۵- عبارت زیر را حساب کنید: $(5\sqrt{8}+3\sqrt{2})(5\sqrt{8}-3\sqrt{2})$

الف: ۱۷۲ ب: ۱۸۲

ج: ۱۶۲ د: ۱۹۲

۳۱۶- عبارت زیر را بازاء $X=2$ حساب کنید: $A=\frac{X^2-2X+2}{X-2}$

الف: ۱ ب: ۰ ج: بینهایت(∞) د: ۲

۳۱۷- عبارت x^2-5x+4 را بحاصلضرب دو جمله تبدیل کنید.

الف: $(x-1)(x+4)$ ب: $(x+1)(x+4)$

ج: $(x-1)(x-4)$ د: $(x+1)(x-4)$

۳۱۸- معادله دو مجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} 2x-y=5 \\ -x+2y=-4 \end{cases}$$

الف: $y=2 ، x=1$ ب: $y=-1 ، x=2$

ج: $y=-1 ، x=-1$ د: $y=1 ، x=-2$

۳۱۹- جوابهای معادله زیر را بدست آورید: $\frac{x-1}{x-3}=\frac{4x+2}{2x-2}$

الف: ۴ و ۱- ب: ۱ و ۴

ج: ۴- و ۱ د: ۴- و ۱-

تست ریاضی گروه طبیعی (۵۱-۵۲)

۳۲۰- مساحت بیضی به معادله $4x^2+y^2=8$ برابر است با:

الف: 2π ب: $2\sqrt{2}\pi$ ج: 2π د: $4\sqrt{2}\pi$

۳۲۱- قرینه نقطه $\begin{matrix}-3\\2\end{matrix}$ نسبت به نقطهٔ $\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}$ کدامیك از نقطه‌های زیر است؟

الف: $\begin{matrix}5\\-6\end{matrix}$ ب: $\begin{matrix}5\\6\end{matrix}$ ج: $\begin{matrix}-5\\-6\end{matrix}$ د: $\begin{matrix}-5\\6\end{matrix}$

۳۲۲- بیضی‌های $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ و $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

الف همدیگر را درچهار نقطه قطع می‌کنند.

ب: همدیگر را در دونقطه قطع‌می‌کنند.

ج: در دونقطه برهم‌مماس‌اند. د: همدیگر راقطع‌نمی‌کنند.

۳۲۳- زاویه حاده بین‌دوخط $y=2x+1$ و $y=\frac{x}{3}-1$ برابر است با:

الف: $\frac{\pi}{6}$ ب: $\frac{\pi}{4}$ ج: $\frac{\pi}{3}$ د: $Arctg^2$

۳۲۴- اگر n عدد درست مثبت‌باشدعبارت x^n-y^n بر کدام‌یك از عبارت‌های زیر همواره بخش پذیراست:

الف: $x+y$ ب: x^2+y^2 ج: x^2-y^2 د: $x-y$

۳۲۵- فاصله دوخط‌موازی $y=x+5$ و $y-x=0$ برابر است با:

الف: $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ب: $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ج: 5 د: $5\sqrt{2}$

۳۲۶- تابع $y=\sqrt{2-x^2}$ درکدامیك ازفاصله‌های زیرهمواره معین است؟

الف: $(-2و2)$ ب: $(\sqrt{2}و2)$

ج: $(-1و\sqrt{2})$ د: $(-\sqrt{2}و2)$

۳۲۷- مشتق تابع $y=(\sqrt{x}+1)^2$ برابر است با:

الف: $1+\frac{1}{\sqrt{x}}$ ب: $2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})$ ج: $1-\frac{1}{\sqrt{x}}$ د: $-1+\frac{1}{\sqrt{x}}$

۳۲۸- اگرمشتق‌تابع $f(x)$ برابر $\lg x$ باشد مشتق تابع $f(ax)$ که درآن a ثابت است برابراست با :

الف: $\lg ax$ ب: $a\lg x$ ج: $a\lg ax$ د: $\frac{1}{a}\lg ax$

۳۲۹- به ازاء چه اندازه a و b خطهای $x=2$ و $y=-1$ مجانبهای منحنی تابع $y=\frac{1+ax}{2x+b}$ است ؟

الف: $a=-2$ و $b=4$ ب: $a=-2$ و $b=4$

ج: $a=2$ و $b=-4$ د: $a=-2$ و $b=-4$

۳۳۰- مساحت‌سطح محصور بین منحنی $y=1+\frac{1}{(x-1)^2}$ و محور xها و خطهای $x=2$ و $x=3$ برابراست با: الف: ۱ ب: $\frac{4}{3}$ ج: $\frac{3}{2}$ د: ۲

۳۳۱- می‌دانیم به موازات امتداد مفروض می‌توان یک مماس و تنها یک مماس برمنحنی C رسم کرد این منحنی :

الف: بیضی‌است. ب: دایره است.

ج: هذلولی‌است. د: سهمی‌است

۳۳۲- $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[6]{2}}$ برابراست با : الف: $\sqrt[6]{54}$ ب: $\sqrt[6]{27}$ ج: $\sqrt[6]{18}$ $\sqrt{3}$

تست‌های کنکورسراسری(رشته‌ریاضی)

سال‌تحصیلی (۵۱-۵۲)

۳۳۳- اگر a و b ریشه‌های معادله $x^2+px+4=0$ باشد $\lg(a+b)$ برابراست‌با:

الف: $\frac{5}{p}$ ب: $\frac{p}{5}$ ج: $\frac{2}{p}$ د: $\frac{p}{2}$

۳۳۴- ریشه‌های معادله $x^2-mx+m-2=0$ به‌ازای اندازه‌های مختلف m :

الف: هردو بزرگتر از یک‌است ب: هردو کوچکتر از یک‌است.

ج: تنها یکی بزرگتر از یک‌است د: یکی بزرگتر از یک‌ودیگری برابر یک‌است.

۳۳۵- تعداد اعداد درستی که در نامساوی $x^2-8x+7<0$ صدق می‌کند برابر است با:

الف: ۵ ب: ۶ ج: ۷ د: ۸

۳۳۶- مکان هندسی نقطهٔ M بمختصات $x=t^2$ و $y=1+t^2$ وقتی t تغییر کند:

الف: قسمتی از یک دایره است. ب: یک دایره است.

ج: قسمتی از یک خط است. د: یک خط است.

۳۳۷- نمایش هندسی $(x-y)(x+y-2)=0$.

الف: دایره است. ب: هذلولی است.

ج: سهمی است. د: دو خط راست است.

۳۸۸- دو نقطهٔ $\begin{vmatrix}4\\3\end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix}2\\5\end{vmatrix}$ روی بیضی مفروض‌اند اگر مماس‌های بر بیضی در این دو نقطهٔ متوازی باشند مرکز بیضی کدام یک از نقطه‌های زیر است؟

الف: $\begin{vmatrix}3\\4\end{vmatrix}$ ب: $\begin{vmatrix}-3\\4\end{vmatrix}$ ج: $\begin{vmatrix}3\\-4\end{vmatrix}$ د: $\begin{vmatrix}-3\\-4\end{vmatrix}$

CM برابر است با:

۳۳۹- نقطه‌های $A\begin{vmatrix}2\\-1\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}0\\-1\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}-1\\1\end{vmatrix}$ سه رأس یک مثلث‌اند طول میانهٔ CC'

الف: ۴ ب: $2\sqrt{2}$ ج: ۲ د: $\sqrt{2}$

۳۴۰- اگر $E=xy+yz+zx$ و $x+y+z=0$ باشد همواره:

الف: $E>0$ ب: $E\geq 0$ ج: $E<0$ د: $E\leq 0$

۳۴۱- اگر $a<x<b$ باشد $|x-a|+|x-b|$ برابر است با:

الف: $2x-a-b$ ب: $b-a$

ج: $a-b$ د: $2x-b-a$

۳۴۲- از نامساوی‌های $x+y<1$ و $x-y>-1$ نتیجه میشود.

الف: $x<1$ ب: $x>-1$ ج: $y<1$ د: $y>-1$

۳۴۳- مشتق تابع $y=\sin\sqrt{x}$ برابر است با:

الف: $\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$ ب: $\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$

ج: $2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}$ د: $\sqrt{x}\cos\sqrt{x}$

۳۴۴- اگر U و V تابع‌هایی از x و U' و V' مشتق آنها باشند از $\frac{U'}{V'}+\frac{U}{V}=0$ نتیجه میشود.

الف: $\frac{U}{V}$ ثابت است ب: $U\times V$ ثابت است.

ج: $U+V$ ثابت است د: U برابر صفر است.

۳۴۵ - ضریب زاویه‌ای قائم بر منحنی $y^2=2x$ در نقطه‌ای به عرض b برابر است با:

الف: $\frac{b^2}{2}$ ب: $-\frac{b^2}{2}$ ج: b د: $-b$

۳۴۶- m کدام یك از اندازه‌های زیر باشد تا خط $y=mx$ از نقطهٔ مینیمم منحنی $y=x^2-2mx+8$ بگذرد؟

الف: ۳- ب: ۱- ج: ۱ د: ۲

۳۴۷- یك مجانب منحنی $y=2x+\sqrt{x^2+x}$ موازی خط:

الف: $y=x$ است. ب: $y=-x$ است.

ج: $y=2x$ است. د: $y=-2x$ است.

۳۴۸- اگر خط $y=x+1$ مجانب منحنی $y=g(x)+x-2$ در ناحیه اول باشد $\lim_{x\to\infty} g(x)$ برابر است با:

الف: ۱- ب: ۲ ج: ۱ د: ۲-

۳۴۹- کدام یك از خط‌های زیر محور تقارن منحنی $y=x+\sqrt{x^2+2}$ است؟

الف: خط $x=0$ ب: خط $y=x$ ج: خط $y=-x$ د: خط $y=0$

۳۵۰- محور تقارن منحنی $x^2+y^2=1$

الف: محور xهاست. ب: محور yها است.

ج: نیمساز ناحیه اول و سوم است. د: نیمساز ناحیه دوم و چهارم است.

۳۵۱- اگر x و y دو عدد مثبت و $x+y=2a$ باشد کدام یك از رابطه‌های زیر همواره صحیح است؟

الف: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{2}{a}$ ب: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{2}{a}$

ج: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<\frac{1}{a}$ د: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<\frac{1}{a}$

۳۵۲- تابع $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{3}{2}}$ در کدام یك از فاصله‌های زیر همواره معین است.

الف: $(-2,0)$ ب: $(0,2)$

ج: $(-1,\frac{1}{2})$ د: $(-\frac{3}{2},\frac{1}{2})$

۳۵۳- اگر $F(x)$ یکی از توابع اولی تابع $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ و $F(0)=-1$ باشد $F(2)$ برابر است با:

الف: -1 ب: -2 ج: -3 د: -4

دورهٔ شبانهٔ دانشگاه تهران
گروه ریاضی (تیرماه ۱۳۵۱)

۳۵۴- می‌دانیم که خط $mx+8y-5=0$ بر خط $2x+my-1=0$ عمود است. در این صورت m برابر است با:

الف: ۳ ب: ۲ ج: ۱ د: صفر

۳۵۵- کدام یك از خطهای زیر بر وسط پاره خط واصل بین دو نقطه $A\begin{vmatrix}1\\3\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}-3\\-1\end{vmatrix}$ عمود است؟

الف: $x+2y=0$ ب: $y+2x=0$

ج: $x+y=0$ د: $x-y=0$

۳۵۶- کدام یك از خطهای زیر از دو خط موازی $3x-y+7=0$ و $3x-y-3=0$ به یك فاصله است؟

الف: $3x-y-2=0$ ب: $3x-y-1=0$

ج: $3x-y+1=0$ د: $3x-y+2=0$

۳۵۷- خط Δ بر خط $3x+4y+8=0$ عمود است و فاصله مبدأ مختصات از خط Δ برابر ۲ است. معادلهٔ خط Δ عبارتست از:

الف: $4x-3y+10=0$ ب: $4x-3y+8=0$

ج: $4x-3y+6=0$ د: $4x-3y+4=0$

۳۵۸- نقطهٔ برخورد دو خط $y=x+2$ و $y=mx-2$ بر نیمساز ربع دوم واقع است. دراین صورت مقدار m برابر است با:

الف: ۲ ب: ۳ ج: ۲- د: ۳-

۳۵۹- سه نقطهٔ A (۵و۱) و B(۸و۷) و C در یک امتدادند و $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{CA}$ است. طول نقطه C برابر است با:

الف: ۳ ب: ۵ ج: ۶ د: ۷

۳۶۰- وقتی $a+b-c=0$ است، مقدار $a^3+b^3-c^3$ همواره برابر است با:

الف: $6abc$ ب: $-6abc$ ج: $2abc$ د: $-2abc$

۳۶۱- می‌دانیم $f(x,y)=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ است. دراین صورت $f(\frac{1}{x^2},\frac{1}{y^2})$ برابر است با:

الف: $\frac{x+y}{x-y}$ ب: $\frac{x-y}{x+y}$ ج: $\frac{y+x}{y-x}$ د: $\frac{y-x}{y+x}$

۳۶۲- وقتی $\log a$ و $\log b$ ریشه‌های معادله $x^2+2mx-3=0$ باشند، مقدار $\frac{\log ab}{\log a\log b}$ برابر است با:

الف: $-\frac{2}{3}m$ ب: $\frac{3}{2m}$ ج: $\frac{2}{3}m$ د: $-\frac{3}{2m}$

۳۶۳- به ازای چه مقدار از t مجموع ریشه‌های معادله:

$(1+t^2)x^2-(2+t^2)x-(1+2t^2)=0$ ماکزیمم است ۲

الف: ۲- ب: صفر ج: ۲ د: ∞

۳۶۴- برای آن که عدد ۲ بین دو ریشهٔ معادله $(m+1)x^2+mx-10=0$ باشد، کافی است:

الف: $m<-2$ باشد. ب: $-1<m<1$ باشد.

ج: $0<m<2$ باشد. د: $m>2$ باشد.

۳۶۵- مشتق تابع $y=2\sin^2\sqrt{x}$ برابر است با:

الف: $2\cos 2\sqrt{x}$ ب: $2\sin^2\sqrt{x}$

ج: $\frac{\cos 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ د: $\frac{\sin 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

۳۶۶- مشتق تابع $y = x^2 + x\sin 2x + \cos^2 x$ برابر است با:

الف: $2x\sin^2 x$ ب: $2x\cos^2 x$ ج: $4x\sin^2 x$ د: $4x\cos^2 x$

۳۶۷- مشتق تابع $y = |x| + |x-4|$ ، هنگامی که $0 < x < 4$ است برابر است با :

الف: صفر ب: ۱ ج: ۲ د: ۴

۳۶۸- اگر تابع اولی $f(x)$ برابر با $\frac{x^3}{6}$ باشد ، مشتق $f(\frac{1}{x})$ برابر است با:

الف: $-\frac{1}{x^3}$ ب: $-\frac{1}{x^2}$ ج: $\frac{1}{6x^3}$ د: $\frac{1}{2x^2}$

۳۶۹- برای آن که $(x-3)(x-1)(x+1) < 0$ باشد:

الف: لازم است $x < -1$ باشد ب: لازم است $-1 < x < 1$ باشد.

ج: کافی است $1 < x < 3$ باشد. د: کافی است $x > 3$ باشد.

۳۷۰- نامساوی $(|2x|-4)(|x|+3) > 0$ دارای کدام یك از جوابهای زیر است؟

الف: $-2 < x < 2$ ب: $x > 2$ و $x < -2$

ج: $x > 1$ د: $x > -2$

۳۷۱- حد تابع $\frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}$ ، وقتی x به سمت صفر میل کند، برابر است با :

الف: $-\frac{1}{2}$ ب: $-\frac{1}{4}$ ج: $\frac{1}{4}$ د: $\frac{1}{2}$

۳۷۲- $\lim_{x \to \infty} (\frac{x^2 - 2x + 5}{x + 2} - x)$ برابر است با:

الف: صفر ب: ∞ ج: ۲ د: -4

۳۷۳- منحنی نمایش تابع $y = \sin x$ را در فاصلهٔ $(-\pi, +\pi)$ حول محور x ها دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل برابر است با:

الف: 2π ب: 4π ج: π^2 د: $\frac{\pi^2}{2}$

۳۷۴- دو مماس از مبدأ مختصات بر دایرهٔ $x^2 + y^2 - 8x + 8 = 0$ رسم میکنیم زاویهٔ بین این دو مماس برابر است با:

الف: $\frac{\pi}{2}$ ب: $\frac{\pi}{3}$ ج: $\frac{\pi}{6}$ د: $\frac{2\pi}{3}$

۳۷۵- اگر نقطهٔ $A(1,2)$ نقطه عطف منحنی نمایش تابع $y=ax^3-6x^2+b$ باشد. a و b برابرند با:

الف: $a=3$ ، $b=5$ ب: $a=2$ ، $b=6$

ج: $a=2$ ، $b=4$ د: $a=1$ ، $b=7$

۳۷۶- منحنی نمایش کدام یك از تابع‌های زیر بشکل روبرو شبیه است؟

الف: $y=\sqrt{x^3+x}$

ب: $y=\sqrt{x^3-x}$

ج: $y=\sqrt{x^3+x^2}$

د: $y=\sqrt{x^3-x^2}$

۳۷۷- خط $y=m$ منحنی نمایش تابع $y=2x^3-3x$ را در دو نقطهٔ M_1 و M_2 قطع میکند. هرگاه زاویهٔ $M_1\hat{O}M_2$ قائمه باشد (O مبدأ مختصات است)، m برابر است با:

الف: ۱ ب: $\frac{1}{2}$ ج: $\frac{2}{3}$ د: $\frac{3}{4}$

دورهٔ شبانهٔ دانشگاه تهران
گروه طبیعی (تیرماه ۱۳۵۱)

۳۷۸- مقدار $\sqrt[3]{36}\cdot\sqrt[3]{12}$ برابر است با:

الف: $4\sqrt[3]{2}$ ب: $3\sqrt[3]{4}$ ج: $6\sqrt[3]{2}$ د: $6\sqrt[3]{3}$

۳۷۹- کسر $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{a+b}{b}+\frac{a+b}{a}}$ برابر است با:

الف: $\frac{1}{ab}$ ب: $\frac{ab}{a+b}$ ج: $\frac{a+b}{ab}$ د: $\frac{1}{a+b}$

۳۸۰- کسر $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ برابر است با :

الف: $2+\sqrt{6}$ ب: $3+\sqrt{6}$

ج: $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ د: $\sqrt{6}-2$

۳۸۱- عبارت $2b^2+ab(b-a)-ab(a+b)$ برابر است با:

الف: $2b(a+b)(b-a)$ ب: $2b(a-b)(b+a)$

ج: $2b(a-b)(b-a)$ د: $2b(a-b)^2$

۳۸۲- یکی از جوابهای معادلهٔ $\frac{x+b}{x-3}=\frac{3x-b}{x+3}$ عبارتست از :

الف: $3+2b$ ب: $4+b$ ج: $6+b$ د: $6-b$

۳۸۳- یک چهارم عدد مثبتی برابر با مکعب آن عدد است. آن عدد برابر است با:

الف: $\frac{1}{3}$ ب: $\frac{1}{8}$ ج: $\frac{1}{6}$ د: $\frac{1}{2}$

۳۸۴- سه نقطه $A\left|\begin{matrix}2\\-4\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}-\alpha\\+\alpha\end{matrix}\right.$ روی یک خط راست قرار دارند. α برابر است با: الف: ۱ ب: ۱- ج: ۲ د: ۲-

۳۸۵- نقطه‌های $A\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}5\\8\end{matrix}\right.$ مفروض‌اند. معادلهٔ خطی که از وسط پارهٔ خط AB میگذرد و موازی خط $y-2x+5=0$ است، عبارتست از:

الف: $y-2x+3=0$ ب: $y-2x+2=0$

ج: $y-2x+3=0$ د: $y-2x+1=0$

۳۸۶- دو خط $x+(m-1)y-2m+1=0$ و $2mx-3y+m=0$ بر یکدیگر عمودند. m برابر است با: .

الف: ۱ ب: ۲ ج: ۳ د: ۴

۳۸۷- کدام یک از خطهای زیر از مرکز دایرهٔ $x^2+y^2+2x=0$ می گذرد ؟

الف: $y-2x=2$ ب: $y-2x=3$

ج: $y-2x=-2$ د: $y-2x=-3$

۳۸۸- معادلهٔ دایره‌ای که از نقطهٔ $A(0,4)$ میگذرد و در مبدأ مختصات بر محور yها مماس است عبارتست از :

الف: $x^2+y^2-2y=16$ ب: $x^2+y^2=16$

ج: $x^2+y^2-4x=0$ د: $x^2+y^2-4y=0$

۳۸۹- خط Δ در نقطه‌ای به‌طول ۳ بر منحنی $y = \frac{x-m}{x-2}$ مماس است و ضریب زاویه‌ای خط Δ برابر ۴ است m برابر است با :

الف: ۲ ب: ۳ ج: ۶ د: ۸

۳۹۰- مشتق تابع $y = \sin(x+a)\cos(x-a)$ برابر است با:

الف: $\sin 2x$ ب: $\sin^2 x$ ج: $\cos 2x$ د: $\cos^2 x$

۳۹۱- مساحت سطح محدود به منحنی نمایش تابع $y = -4x^3 + 12x^2$ و دو خط $x = 1$ و $x = 2$ برابر است با :

الف: ۱۱ ب: ۱۲ ج: ۱۳ د: ۱۴

۳۹۲- کدام یک از خطهای زیر در نقطه‌ای به طول صفر بر بیضی $x^2 + 4y^2 = 16$ مماس است؟

الف: $x = 2$ ب: $x = 4$ ج: $y = 2$ د: $y = 4$

۳۹۳- مختصات رأس سهمی $y^2 + 4x - 2y = 7$ عبارتند از:

الف: $(-2, 1)$ ب: $(2, -1)$

ج: $(-2, 1)$ د: $(2, 1)$

۳۹۴- کدام یک از خطهای زیر یک مجانب هذلولی $y^2 - 4x^2 + 16x - 8y = 4$ است؟

الف: $y = 2x$ ب: $y = -2x$

ج: $2y = x$ د: $2y = -x$

۳۹۵- خط Δ به معادلهٔ $2x + 4y + 1 = 0$ و هذلولی H به معادلهٔ $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ مفروض‌اند. در این صورت ،

الف: خط Δ هذلولی H را قطع نمی‌کند.

ب: خط Δ هذلولی H را در یک نقطه قطع میکند.

ج: خط Δ هذلولی H را در دو نقطه قطع می‌کند .

د: خط Δ به هذلولی H مماس است.

کلید تست جبر

۱ — د
۲ — د
۳ — ب
۴ — ج
۵ — ب
۶ — الف
۷ — الف
۸ — ج
۹ — د
۱۰ — ج
۱۱ — الف
۱۲ — الف
۱۳ — د
۱۴ — الف
۱۵ — ج
۱۶ — ج
۱۷ — الف
۱۸ — الف
۱۹ — ب
۲۰ — ج
۲۱ — ج
۲۲ — ج
۲۳ — الف
۲۴ — ب
۲۵ — د
۲۶ — ب
۲۷ — ب
۲۸ — د
۲۹ — الف
۳۰ — ج
۳۱ — الف
۳۲ — ج
۳۳ — ب
۳۴ — د
۳۵ — د
۳۶ — د
۳۷ — ب
۳۸ — الف
۳۹ — د
۴۰ — ب
۴۱ — ج
۴۲ — د
۴۳ — د
۴۴ — ب
۴۵ — د
۴۶ — الف
۴۷ — ب
۴۸ — الف
۴۹ — ب
۵۰ — ج
۵۱ — الف
۵۲ — ج
۵۳ — د
۵۴ — د
۵۵ — ب
۵۶ — ج
۵۷ — ج
۵۸ — ب
۵۹ — ج
۶۰ — حل شده
۶۱ — ب
۶۲ — ج
۶۳ — ب
۶۴ — الف
۶۵ — د
۶۶ — د
۶۷ — ج
۶۸ — ب
۶۹ — ج
۷۰ — بود
۷۱ — د
۷۲ — الف
۷۳ — الف
۷۴ — ج
۷۵ — الف
۷۶ — د
۷۷ — ب
۷۸ — ج
۷۹ — ج
۸۰ — ه
۸۱ — د
۸۲ — الف
۸۳ — ب
۸۴ — ج
۸۵ — ب
۸۶ — د
۸۷ — الف
۸۸ — د
۸۹ — د
۹۰ — الف
۹۱ — د
۹۲ — هیچکدام
۹۳ — ب
۹۴ — الف
۹۵ — هیچکدام
۹۶ — ب
۹۷ — ب
۹۸ — د
۹۹ — د
۱۰۰ — الف
۱۰۱ — ج
۱۰۲ — الف
۱۰۳ — د
۱۰۴ — ج
۱۰۵ — د
۱۰۶ — ب
۱۰۷ — د
۱۰۸ — الف
۱۰۹ — ب
۱۱۰ — ج
۱۱۱ — ج
۱۱۲ — ج و ب
۱۱۳ — د
۱۱۴ — ب
۱۱۵ — د
۱۱۶ — ب
۱۱۷ — د
۱۱۸ — د
۱۱۹ — ج
۱۲۰ — الف

۱۲۱ — ب
۱۲۲ — الف
۱۲۳ — الف
۱۲۴ — ب
۱۲۵ — ب
۱۲۶ — د
۱۲۷ — ب
۱۲۸ — ج
۱۲۹ — الف
۱۳۰ — ب
۱۳۱ — الف
۱۳۲ — د
۱۳۳ — الف
۱۳۴ — ج
۱۳۵ — ب
۱۳۶ — ب
۱۳۷ — ج
۱۳۸ — الف
۱۳۹ — ب
۱۴۰ — الف
۱۴۱ — ب
۱۴۲ — ج
۱۴۳ — ج
۱۴۴ — ج
۱۴۵ — ب
۱۴۶ — ج
۱۴۷ — ب
۱۴۸ — ج
۱۴۹ — الف
۱۵۰ — ب
۱۵۱ — ج
۱۵۲ — الف
۱۵۳ — د
۱۵۴ — ج
۱۵۵ — ج
۱۵۶ — الف
۱۵۷ — ب
۱۵۸ — ج
۱۵۹ — الف
۱۶۰ — ج
۱۶۱ — ج
۱۶۲ — د
۱۶۳ — ب
۱۶۴ — ب
۱۶۵ هیچکدام
۱۶۶ — ب
۱۶۷ — ب
۱۶۸ — د
۱۶۹ — الف
۱۷۰ — ج
۱۷۱ — الف
۱۷۲ — ج
۱۷۳ — ب
۱۷۴ — د
۱۷۵ — د
۱۷۶ — الف
۱۷۷ — د
۱۷۸ — ب
۱۷۹ — ج
۱۸۰ — ب
۱۸۱ — الف
۱۸۲ — ج
۱۸۳ — ب
۱۸۴ — ج
۱۸۵ — ج
۱۸۶ — ب
۱۸۷ — ب
۱۸۸ — الف
۱۸۹ — الف
۱۹۰ — د
۱۹۱ — الف
۱۹۲ هیچکدام
۱۹۳ — ج
۱۹۴ — الف
۱۹۵ — د
۱۹۶ — د
۱۹۷ — الف
۱۹۸ — الف
۱۹۹ — ب
۲۰۰ — الف
۲۰۱ — د
۲۰۲ — الف
۲۰۳ — د
۲۰۴ — ج
۲۰۵ — ب
۲۰۶ — د
۲۰۷ — ب
۲۰۸ — ج
۲۰۹ — ب
۲۱۰ — ج
۲۱۱ — ب
۲۱۲ — الف
۲۱۳ — ج
۲۱۴ — ب
۲۱۵ — الف
۲۱۶ — د
۲۱۷ — ج
۲۱۸ — ج
۲۱۹ — ب
۲۲۰ — ج
۲۲۱ — الف
۲۲۲ — الف
۲۲۳ — الف
۲۲۴ — الف
۲۲۵ — الف
۲۲۶ — الف
۲۲۷ — د
۲۲۸ — د
۲۲۹ — الف
۲۳۰ — د
۲۳۱ — ب
۲۳۲ — ب
۲۳۳ — ج
۲۳۴ — ب
۲۳۵ — ج
۲۳۶ — د
۲۳۷ — الف
۲۳۸ — ب
۲۳۹ — د
۲۴۰ — د

۲۴۱ — الف
۲۴۲ — ب
۲۴۳ — ج
۲۴۴ — د
۲۴۵ — الف
۲۴۶ — ب
۲۴۷ — ب
۲۴۸ — الف
۲۴۹ — ج
۲۵۰ — ج
۲۵۱ — ج
۲۵۲ — الف
۲۵۳ — د
۲۵۴ — الف
۲۵۵ — ج
۲۵۶ — ج
۲۵۷ — د
۲۵۸ — الف
۲۵۹ — د
۲۶۰ — ج
۲۶۱ — الف
۲۶۲ — د
۲۶۳ — ج
۲۶۴ — الف
۲۶۵ — د
۲۶۶ — ب
۲۶۷ — د
۲۶۸ — د
۲۶۹ — د
۲۷۰ — د
۲۷۱ — الف
۲۷۲ — الف
۲۷۳ — ب
۲۷۴ — ب
۲۷۵ — ج
۲۷۶ — د
۲۷۷ — الف
۲۷۸ — الف
۲۷۹ — ج
۲۸۰ — ج
۲۸۱ — ج
۲۸۲ — ج
۲۸۳ — د
۲۸۴ — ج
۲۸۵ — ب
۲۸۶ — د
۲۸۷ — الف
۲۸۸ — د
۲۸۹ — ب
۲۹۰ — ج
۲۹۱ — د
۲۹۲ — ب
۲۹۳ — د
۲۹۴ — ب
۲۹۵ — ج
۲۹۶ — الف
۲۹۷ — د
۲۹۸ — د
۲۹۹ — ب
۳۰۰ — ب
۳۰۱ — د
۳۰۲ — الف
۳۰۳ — ب
۳۰۴ — الف
۳۰۵ — ج
۳۰۶ — ج
۳۰۷ — ب
۳۰۸ — ج
۳۰۹ — ج
۳۱۰ — ب
۳۱۱ — الف
۳۱۲ — الف
۳۱۳ — ج
۳۱۴ — ج
۳۱۵ — ب
۳۱۶ — الف
۳۱۷ — ج
۳۱۸ — ب
۳۱۹ — الف
۳۲۰ — ج
۳۲۱ — الف
۳۲۲ — الف
۳۲۳ — ب
۳۲۴ — د
۳۲۵ — ب
۳۲۶ — ج
۳۲۷ — الف
۳۲۸ — ج
۳۲۹ — د
۳۳۰ — ج
۳۳۱ — د
۳۳۲ — الف
۳۳۳ — د
۳۳۴ — ج
۳۳۵ — الف
۳۳۶ — د
۳۳۷ — ب
۳۳۸ — الف

۳۳۹—ب
۳۴۰—د
۳۴۱—ب
۳۴۲—ج
۳۴۳—الف
۳۴۴—ب
۳۴۵—د
۳۴۶—د
۳۴۷—الف
۳۴۸—ب
۳۴۹—د
۳۵۰—ج
۳۵۱—ب
۳۵۲—ج
۳۵۳—ج
۳۵۴—د
۳۵۵—ج
۳۵۶—د
۳۵۷—الف
۳۵۸—د
۳۵۹—ج
۳۶۰—د
۳۶۱—الف
۳۶۲—ج
۳۶۳—ب
۳۶۴—ب
۳۶۵—د
۴۶۶—د
۳۶۷—الف
۳۶۸—الف
۳۶۹—الف
۳۷۰—ب
۳۷۱—ب
۳۷۲—د
۳۷۳—ج
۳۷۴—الف
۳۷۵—ب
۳۷۶—ج
۳۷۷—ب
۳۷۸—ج
۳۷۹—د
۳۸۰—ب
۳۸۱—الف
۳۸۲—د
۳۸۳—د
۳۸۴—ب
۳۸۵—د
۳۸۶—ج
۳۸۷—الف
۳۸۸—ج
۳۸۹—ج
۳۹۰—ج
۳۹۱—ج
۶۹۲—د
۳۹۳—د
۳۹۴—الف
۳۹۵—ب