مثلثات

برای سال ششم ریاضی

توانا بود هر که دانا بود

وزارت آموزش و پرورش

بها در تمام کشور ۴۵ ریال

توانا بود هرکه دانا بود

وزارت آموزش و پرورش

مثلثات

برای سال ششم ریاضی

چاپ و توزیع از :

شرکت سهامی خاص طبع و نشر کتابهای درسی ایران

۱۳۵۴

این کتاب که به وسیلهٔ آقایان : حسین بحرانی ، محمد قلی زاوشی ، دکتر محمد علی مجتهدی ، دکتر هوشنگ منتصری نگارش یافته ، برطبق مادهٔ ۳ قانون کتابهای درسی واساسنامهٔ سازمان کتابهای درسی ایران برای تدریس در دبیرستانها برگزیده شده است.

چاپ از : پیروز

فهرست مندرجات

به نام خدا

فصل اول

یادآوری و تکمیل

۱ـ تبدیل واحدهای کمان به یکدیگر ـ اگر $\widehat{AB}$ برابر D درجه یا G گراد یا R رادیان باشد ، بین اندازه‌های مزبور این روابط برقرار است :

$$\frac{D}{180}=\frac{G}{200}=\frac{R}{\pi}$$

۲ـ دایرهٔ مثلثاتی ، دایره‌ای است به شعاع واحدکه روی‌آن ، نقطهٔ A را مبدأ کمانها وجهت حرکت مخالف باجهت حرکت عقربه‌های ساعت را جهت مثبت و جهت حرکت موافق با جهت حرکت عقربه‌ها را جهت منفی اختیار می‌کنند .

نقطهٔ A ، مبدأ تمام کمانهایی اختیار می شود که متحرکی ، با عزیمت از A و حرکت بر روی دایره در جهت مثبت و یا منفی ، می‌تواند بپیماید .

۳ـ کمان مثلثاتی ـ اگر M نقطه‌ای از دایرهٔ مثلثاتی باشد ، کمان مثلثاتی AM به مبدأ A وبه منتهای M کمانی است‌که متحرکی خواهد پیمود هرگاه ازمبدأ A روی دایرهٔ مثلثاتی دریك جهت حرکت کند وپس ازآنکه دایره را صفر یا ۱ یا ۲ یا ... یا k مرتبه طی‌کرد، به نقطهٔ M برسد .

عنوان	صفحه

به نام خدا

فصل اول

یادآوری و تکمیل

۱ـ تبدیل واحدهای کمان به یکدیگر ـ اگر $\widehat{AB}$ برابر D درجه یا G گراد یا R رادیان باشد ، بین اندازه‌های مزبور این روابط برقرار است :

$$\frac{D}{180}=\frac{G}{200}=\frac{R}{\pi}$$

۲ـ دایرهٔ مثلثاتی ، دایره‌ای است به شعاع واحدکه روی آن ، نقطهٔ A را مبدأ کمانها وجهت حرکت مخالف باجهت حرکت عقربه ـ های ساعت را جهت مثبت و جهت حرکت موافق با جهت حرکت عقربه‌ها را جهت منفی اختیار می‌کنند .

نقطهٔ A ، مبدأ تمام کمانهایی اختیار می شود که متحرکی ، با عزیمت از A و حرکت بر روی دایره در جهت مثبت و یا منفی ، می‌تواند بپیماید .

۳ـ کمان مثلثاتی ـ اگر M نقطه‌ای از دایرهٔ مثلثاتی باشد ، کمان مثلثاتی AM به مبدأ A وبه منتهای M کمانی است‌که متحرکی خواهد پیمود هرگاه ازمبدأ A روی دایرهٔ مثلثاتی دریك جهت حرکت کند وپس ازآنکه دایره را صفر یا ۱ یا ۲ یا ... یا k مرتبه طی‌کرد، به نقطهٔ M برسد .

اگر اندازهٔ کمان هندسی AM برابر α رادیان باشد، اندازهٔ کمان مثلثاتی AM برابربا $2k\pi+\alpha$ خواهد بودکه درآن ، k نمایش عددی است صحیح ، مثبت یا منفی یا صفر.

بنابراین ، **کمان مثلثاتی متغیری است که می‌تواند تمام مقادیر را از** $(-\infty)$ **تا** $(+\infty)$ **اختیارکند .**

۴ـ توابع مثلثاتی یك کمان ـ اگر به‌این نکته‌توجه‌کنید که‌مقادیر $\sin x$ ، $\cos x$ ، $tg\,x$ ، $cotg\,x$ ، $séc\,x$ و $cosé c\,x$ فقط به مقدار کمان x بستگی‌دارند و با تغییرآن تغییر می‌کنند ، این معنی‌آشکار می‌شود که هریك ازشش مقدار نامبرده تابعی ازمتغیر x هستند و به‌همین مناسبت است که $\sin x$ ، $\cos x$ ، $tg\,x$ ، $cotg\,x$ ، $séc\,x$ و $cosé c\,x$ را (همانطورکه‌در سال پنجم دیده‌اید) **توابع مثلثاتی** کمان x می‌نامند .

۵ـ روابط بین توابع مثلثاتی یك کمان ـ بین توابع‌مثلثاتی کمان α روابط زیربرقرار است :

روابط اصلی
$$\left\{\begin{aligned} &\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\\ &tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\\ &cotg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\end{aligned}\right.$$

روابط فرعی
$$\left\{\begin{aligned} &tg\alpha\, cotg\alpha=1\\ &1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\\ &1+cotg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}\end{aligned}\right.$$

۶ـ اندازهٔ توابع مثلثاتی بعض ازکمانها ـ اندازهٔ توابع مثلثاتی‌بعض ازکمانها در جدول صفحهٔ بعد نوشته شده و باید آنها را به خاطر سپرد .

khosro1952

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$cotg\alpha$	
0	0	$+1$	0	$\pm\infty$	
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	۱۵
$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$	۲۲/۵
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	۳۰
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+1$	$+1$	۴۵
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۶۰
$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{2}-1$	۶۷/۵
$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	۷۵
$\frac{\pi}{2}$	$+1$	0	$\pm\infty$	0	۹۰
π	0	-1	0	$\pm\infty$	۱۸۰
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\pm\infty$	0	۲۷۰
2π	0	$+1$	0	$\pm\infty$	۳۶۰

۷ـ روابط بین توابع مثلثاتی بعض از کمانها :

الف ـ دو کمان که انتهای آنها نسبت به محور سینوسها قرینهٔ یکدیگر باشند ، دارای سینوسهای برابر و کسینوسها و تانژانتها و کتانژانتهای قرینه‌اند .

حالت خاص ـ ازحکم کلی (الف) ، در مورد دو کمان مکمل α و $(\pi-\alpha)$ دستورهای زیرنتیجه می‌شود :

$$\begin{cases} \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha \\ \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha \\ tg(\pi-\alpha)=-tg\alpha \\ cotg(\pi-\alpha)=-cotg\alpha \end{cases}$$

ب ـ دوکمان که انتهای آنها نسبت به محورکسینوسها قرینهٔ یکدیگر باشند ، دارای کسینوسهای برابر و سینوسها و تانژانتها و کتانژانتهای قرینه‌اند .

حالات خاص ـ از حکم کلی (ب) ، در مورد دو کمان α و $(2\pi-\alpha)$ دستورهای (E) ودر بارهٔ دوکمان قرینهٔ (α) و $(-\alpha)$ دستورهای (E') به شرح زیرنتیجه می‌شود :

$$(E)\begin{cases} \sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha \\ \cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha \\ tg(2\pi-\alpha)=-tg\alpha \\ cotg(2\pi-\alpha)=-cotg\alpha \end{cases} \qquad (E')\begin{cases} \sin(-\alpha)=-\sin\alpha \\ \cos(-\alpha)=\cos\alpha \\ tg(-\alpha)=-tg\alpha \\ cotg(-\alpha)=-cotg\alpha \end{cases}$$

ج ـ دو کمان که انتهای آنها نسبت به مرکز دایرهٔ مثلثاتی قرینهٔ یکدیگر باشند، دارای تانژانتها وکتانژانتهای برابرو سینوسها وکسینوسهای قرینه‌اند .

حالت خاص ـ از حکم کلی (ج) ، در مورد دو کمان α و $(\pi+\alpha)$ این دستورها نتیجه می‌شود :

$$\begin{cases} \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha \\ \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha \\ tg(\pi+\alpha)=tg\alpha \\ cotg(\pi+\alpha)=cotg\alpha \end{cases}$$

د ـ هرگاه انتهای دو کمان نسبت به نیمساز ربع اول و سوم دایرهٔ مثلثاتی قرینهٔ یکدیگر باشند ، سینوس هر یك از آنها برابر با کسینوس دیگری و تانژانت هریك ازآنها برابر باکتانژانت دیگری است .

حالت خاص ـ از حکم کلی (د) ، در مورد دو کمان متمم α و $(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ دستورهای زیر نتیجه می‌شود :

$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha \\ \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha \\ tg(\frac{\pi}{2}-\alpha)=cotg\alpha \\ cotg(\frac{\pi}{2}-\alpha)=tg\alpha \end{cases}$$

۸ـ محاسبهٔ توابع مثلثاتی مجموع دوکمان ـ توابع مثلثاتی کمان $(a+b)$ را از روی توابع مثلثاتی کمانهای a و b ، به کمك روابط زیر حساب می‌کنند :

$$\begin{cases} \sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b \\ \cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b \\ tg(a+b)=\dfrac{tg a+tg b}{1-tg a\, tg b} \end{cases}$$

۹ـ محاسبهٔ توابع مثلثاتی تفاضل دوکمان ـ توابع مثلثاتی

کمان $(a-b)$ را از روی توابع مثلثاتی کمانهای a و b ، به کمک روابط زیر حساب می‌کنند :

$$\begin{cases} \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ tg(a-b) = \dfrac{tg\, a - tg\, b}{1 + tg\, a\, tg\, b} \end{cases}$$

۱۰ ـ محاسبهٔ توابع مثلثاتی کمان 2a ـ توابع مثلثاتی کمان 2a ، برحسب توابع مثلثاتی کمان a ، از این روابط بدست می‌آید :

$$\begin{cases} \sin 2a = 2 \sin a \cos a \\ \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \\ tg\, 2a = \dfrac{2\, tg\, a}{1 - tg^2 a} \end{cases}$$

از روابط سوم و چهارم دستورهای اخیر ، بترتیب دو رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود :

$$\begin{cases} \cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2} \\ \sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2} \end{cases}$$

۱۱ ـ محاسبهٔ توابع مثلثاتی کمان 3a ـ توابع مثلثاتی کمان 3a ، برحسب توابع مثلثاتی کمان a ، چنین می‌شود :

$$\begin{cases} \sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a \\ \cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a \\ tg\, 3a = \dfrac{3\, tg\, a - tg^3 a}{1 - 3\, tg^2 a} \end{cases}$$

۱۲ ـ محاسبهٔ توابع مثلثاتی کمان a برحسب $tg\frac{a}{2}$ ـ روابط زیر :

$$\begin{cases} \sin a = \dfrac{2\, tg\frac{a}{2}}{1 + tg^2\frac{a}{2}} \\[2ex] \cos a = \dfrac{1 - tg^2\frac{a}{2}}{1 + tg^2\frac{a}{2}} \\[2ex] tg\, a = \dfrac{2\, tg\frac{a}{2}}{1 - tg^2\frac{a}{2}} \end{cases}$$

توابع مثلثاتی کمان a را برحسب $tg\frac{a}{2}$ بدست می‌دهند .

تبصره ـ عبارتهای :

$$\frac{2\, tg\frac{a}{2}}{1 + tg^2\frac{a}{2}} \quad ، \quad \frac{1 - tg^2\frac{a}{2}}{1 + tg^2\frac{a}{2}} \quad و \quad \frac{2\, tg\frac{a}{2}}{1 - tg^2\frac{a}{2}}$$

که سابقاً برای $\sin a$ ، $\cos a$ و $tg\, a$ پیدا کرده‌ایم و در شمارهٔ ۱۲ یادآوری شد در صورتی $\sin a$ ، $\cos a$ و $tg\, a$ را بدست می‌دهند که $tg\frac{a}{2}$ مقدار معینی داشته باشد ، یعنی کمان $\frac{a}{2}$ به مبدأ A منتهی به‌نقطهٔ B یا B' ازدایرهٔ مثلثاتی نباشد . اگر $\frac{a_1}{2}$ کمانی منتهی به‌نقطهٔ B یا B' باشد و a به‌سمت a_1 میل کند ، عبارتهای تعیین شده برای $\sin a$ ، $\cos a$ و $tg\, a$ باید به‌سمت $\sin a_1$ ، $\cos a_1$ و $tg\, a_1$ میل کنند وقتی که a به سمت a_1 میل کند و

درنتیجه وقتی که $tg\frac{a}{2}$ بینهایت شود . مثلا فرض کنیم که a به سمت π میل‌کند ، در این صورت $tg\frac{a}{2}$ بینهایت می‌شود و عبارتهای تعیین‌شده برای $\sin a$ ، $\cos a$ و $tg\, a$ بترتیب به‌سمت ۰ ، ۱− و ۰ میل می‌کنند که عیناً بترتیب برابرند با $\sin\pi$ ، $\cos\pi$ و $tg\,\pi$.

(عموماً $\frac{a_1}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2}$ و $a_1=2k\pi+\pi$)

۱۳- برای تبدیل مجموع یا تفاضل سینوسها یا کسینوسها یا تانژانتها یا کتانژانتهای دو کمان به حاصل ضرب عاملها، از دستورهای زیر استفاده می‌کنند :

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$tg\,p\pm tg\,q=\frac{\sin(p\pm q)}{\cos p\cos q}$$

$$cotg\,p\pm cotg\,q=\frac{\sin(q\pm p)}{\sin p\sin q}$$

۱۴- برای تبدیل حاصل ضرب یك سینوس و یك کسینوس ، یا دو کسینوس ویا دو سینوس ، به مجموع یا تفاضل دو سینوس یا دو کسینوس ، از این دستورها استفاده می‌کنند :

$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$$

$$\cos a\sin b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)]$$

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$$

$$\sin a\sin b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$$

تمرین

۱- درصورتی‌که $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$ و انتهای کمان α درربع سوم باشد ، مطلوب است محاسبهٔ توابع مثلثاتی کمان $(\pi+\alpha)$.

۲- درصورتی‌که $tg\alpha=-\frac{5}{12}$ و انتهای کمان α در ربع دوم باشد، توابع مثلثاتی‌کمان $(-\alpha)$ را حساب‌کنید .

۳- α و β دوزاویهٔ حاده هستند بطوری‌که $\cos\alpha=\frac{12}{13}$ و $cotg\beta=\frac{7}{24}$. مطلوب است محاسبهٔ :

$\sin(\alpha+\beta)$ ، $\cos(\alpha-\beta)$ ، $tg(\alpha+\beta)$ و $cotg(\alpha-\beta)$

۴- می‌دانیم‌که $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$ و انتهای کمان α در ربع دوم است . مطلوب است محاسبهٔ توابع مثلثاتی‌کمان 2α.

۵- درصورتی‌که بدانیم : $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$ ، توابع مثلثاتی کمان α را حساب‌کنید .

۶- می‌دانیم که $tg2\alpha=-\frac{4}{3}$ ؛ توابع مثلثاتی کمان α را حساب کنید درصورتی که انتهای کمان α در ربع اول باشد .

۷- ثابت کنید که عبارت $2(\sin^6x+\cos^6x)-3(\sin^4x+\cos^4x)$ بستگی به x ندارد .

اتحادهای زیر را ثابت‌کنید :

۸- $$\frac{tg^3\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{cotg^3\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=tg^3\alpha+cotg^3\alpha$$

۹- $$\sin^2(x+45^\circ)-\sin^2(x-45^\circ)=\sin 2x$$

۱۰- $$\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}=2\,cotg\frac{x}{2}$$

۱۱- $$\sin 3a=4\sin a\sin\left(\frac{\pi}{3}+a\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-a\right)$$

۱۲- $$\cos 3a=4\cos a\cos\left(\frac{\pi}{3}+a\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-a\right)$$

۱۳- $$tg\,3a=tg\,a\,tg\left(\frac{\pi}{3}+a\right)tg\left(\frac{\pi}{3}-a\right)$$

۱۴- $$\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ=\frac{3}{16}$$

۱۵- $$tg\,6^\circ\,tg\,42^\circ\,tg\,66^\circ\,tg\,78^\circ=1$$

۱۶- $$\frac{\sin 7x}{\sin x}-2\cos 2x-2\cos 4x-2\cos 6x=1$$

۱۷- $$\frac{\sin(a-b)}{\sin a\sin b}+\frac{\sin(b-c)}{\sin b\sin c}+\frac{\sin(c-a)}{\sin c\sin a}=0$$

۱۸- $$tg\,9^\circ-tg\,27^\circ-tg\,63^\circ+tg\,81^\circ=4$$

۱۹- توابع مثلثاتی‌کمان $5a$ را برحسب توابع مثلثاتی‌کمان a حساب کنید .

درصورتی‌که $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ و $\hat{C}$ زوایای‌مثلثی باشند، اتحادهای‌زیر را ثابت‌کنید:

۲۰- $$\frac{\cos A}{\sin B\sin C}+\frac{\cos B}{\sin C\sin A}+\frac{\cos C}{\sin A\sin B}=2$$

۲۱- $$\frac{tgB+tgC}{\sin 2A}=\frac{tgC+tgA}{\sin 2B}=\frac{tgA+tgB}{\sin 2C}$$

۲۲- $$1+\frac{\sin C\cos B}{\sin A\sin^2 B}+\frac{\sin A\cos C}{\sin B\sin^2 C}+\frac{\sin B\cos A}{\sin C\sin^2 A}=(cotgA+cotgB+cotgC)^2$$

مطلوب است محاسبهٔ هریك از عبارتهای زیر :

۲۳- $$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\dots+\sin nx$$

۲۴- $$\cos x+2\cos 2x+3\cos 3x+\dots+n\cos nx$$

۲۵- $$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\dots+\cos^2 nx$$

۲۶- درستی‌تساوی زیر را تحقیق‌کنید :

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$$

۲۷- ثابت‌کنید : $$\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5}=\frac{5}{16}$$

۲۸- مطلوب است محاسبهٔ حد عبارت زیر وقتی‌که $n\to\infty$:

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$$

۲۹- مطلوب است محاسبهٔ عبارت زیر:

$$S=tg\alpha+\frac{1}{2}tg\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}tg\frac{\alpha}{4}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}tg\frac{\alpha}{2^{n-1}}$$

(**راهنمایی** - ازدستور : $tg\alpha=cotg\alpha-2cotg2\alpha$ استفاده کنید)

۳۰- ثابت‌کنید :

$$tga\,tg2a+tg2a\,tg3a+\dots+tg(n-1)a\,tg\,na=\frac{tg\,na}{tg\,a}-n$$

۳۱- مطلوب است محاسبهٔ عبارت زیر :

$$S=\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin 2\alpha}+\frac{1}{\sin 4\alpha}+\dots+\frac{1}{\sin 2^{n-1}\alpha}$$

۳۲- ثابت کنید :

$$\sin^4 9^\circ+\sin^4 27^\circ+\sin^4 63^\circ+\sin^4 81^\circ+\sin^4 99^\circ+$$
$$\sin^4 117^\circ+\sin^4 153^\circ+\sin^4 171^\circ=3\frac{1}{4}$$

۳۳- مطلوب‌است محاسبهٔ عبارت زیر :

$$S=\sin^3\frac{a}{3}+3\sin^3\frac{a}{3^2}+\dots+3^{n-1}\sin^3\frac{a}{3^n}$$

فصل دوم

بکاربردن جدولهای لگاریتم، زاویهٔ معین، وحل مثلثاتی معادلهٔ درجهٔ دوم

۱ـ جدولهای لگاریتم ـ در مثلثات ، لگاریتم توابع مثلثاتی کمانها را از جدولهای مخصوصی به نام جدولهای لگاریتم مثلثاتی استخراج می‌کنند و در محاسبات بکار می‌برند .

جدولهای لگاریتم مثلثاتی ، شامل لگاریتم توابع مثلثاتی کمانهای واقع بین °۰ و °۹۰ هستند که تا ۴ یا ۵ یا ۷ رقم اعشارحساب شده است . جدولی که بیشتر بکار می‌رود ، جدول (**J. Dupuis**) است که لگاریتم توابع مثلثاتی‌کمانها را تا ۵ رقم‌اعشار بدست می‌دهد .

هر دو صفحهٔ جدول مزبور ، شامل لگاریتم توابع مثلثاتی یکی از درجه‌های‌کمان است .

درجات کمانهای بین °۰ و °۴۵ در بالای صفحه ها ، خارج از کادر جدول ، و دقیقه‌ها در ستون اول طرف چپ از بالا به پایین نوشته شده و نام هرتابع مثلثاتی در بالای ستونهای دیگر ثبت شده است .

درجات کمانهای بین °۴۵ و °۹۰ در زیر صفحه ها ، خارج از کادر جدول ، و دقیقه‌ها در ستون اول طرف راست از پایین به بالا نوشته شده و نام هر تابع مثلثاتی در پایین ستونهای دیگر ثبت شده است .

علاوه بر ستونهای مزبور ، هر صفحهٔ جدول نامبرده ، شامل ستونهای دیگری است که با علامت D مشخص شده‌اند ؛ اعدادمندرج دراین ستونها ، تفاضل دو لگاریتم متوالی‌را نشان می‌دهند .

به کمك جدولهای لگاریتم مثلثاتی ، دو مسئلهٔ زیر را می‌توان حل‌کرد :

مسئلهٔ اول ـ کمانی معلوم است ، لگاریتم توابع مثلثاتی آن را تعیین کنید .

مسئلهٔ دوم ـ لگاریتم یکی از توابع مثلثاتی کمانی معلوم است ، اندازهٔ آن کمان را تعیین کنید .

حل مسئلهٔ اول ـ اگر اندازهٔ‌کمان معلوم بیشتر از °۹۰ باشد ، آن را به ربع اول تحویل می کنیم و چنانچه کمان حاصل فقط شامل درجه و دقیقه باشد ، لگاریتم توابع مثلثاتی آن را مستقیماً از جدول استخراج می‌کنیم . مثلا :

$$\log\sin 10^\circ\ 18' = \bar{1}{,}25237$$
$$\log\cos 14^\circ\ 37' = \bar{1}{,}98571$$
$$\log tg\ 71^\circ\ 5' = 0{,}46508$$
$$\log cotg\ 49^\circ\ 51' = \bar{1}{,}92612$$

اگر کمان مفروض شامل ثانیه هم باشد ، اندازهٔ لگاریتم توابع مثلثاتی و اندازهٔ کمان را در فاصلهٔ بین دو دقیقهٔ متوالی تقریباً متناسب دانسته مانند این مثالها عمل می‌کنیم :

الف ـ مطلوب است محاسبهٔ $\log\sin 17^\circ 15' 12''$.

از روی جدول معلوم می‌شود :

$$\log\sin 17^\circ 15' = \bar{1},47209$$

اختلاف این لگاریتم با $\log\sin 17^\circ 16'$ برابر ۰٫۰۰۰۴۰ است که درستون بعدی D به صورت $D=40$ نوشته شده است .

حال گوییم اگر $1'$ یا $60''$ به کمان افزوده شود ، لگاریتم سینوس‌آن ۰٫۰۰۰۴۰ افزایش خواهد یافت ، پس اگر $12''$ به کمان افزوده شود ، مقدار :

$$\frac{12 \times 0,00040}{60} = 0,00008$$

به لگاریتم سینوس $17^\circ 15'$ افزوده خواهد شد و در نتیجه :

$$\log\sin 17^\circ 15' 12'' = \bar{1},47217$$

ب ـ مطلوب است محاسبهٔ $\log\cos 57^\circ 13' 6''$.

از روی جدول معلوم می‌شود :

$$\log\cos 57^\circ 13' = \bar{1},73357$$

اختلاف این لگاریتم با $\log\cos 57^\circ 14'$ برابر ۰٫۰۰۰۲۰ است که درستون بعدی D به صورت $D=20$ درج شده است .

حال‌گوییم اگر $1'$ یا $60''$ به‌کمان افزوده شود ، لگاریتم‌کسینوس آن ۰٫۰۰۰۲۰ کاهش‌خواهد یافت ، پس‌اگر $6''$ به‌کمان افزوده شود ، مقدار :

$$\frac{6 \times 0,00020}{60} = 0,00002$$

از لگاریتم کسینوس $57^\circ 13'$ کاسته می‌شود و در نتیجه :

$$\log\cos 57^\circ 13' 6'' = \bar{1},73355$$

تبصره ـ لگاریتم تانژانت هرکمان ، مانند لگاریتم سینوس آن، ولگاریتم‌کتانژانت هرکمان ، مانند لگاریتم کسینوس‌آن محاسبه می‌شود .

حل‌مسئلهٔ دوم ـ قبل از حل مسئله باید توجه داشت‌که :

$$\log\sin 45^\circ = \log\cos 45^\circ = \bar{1},84949$$

و

$$\log tg 45^\circ = \log cotg 45^\circ = 0$$

بنابراین ، اگر لگاریتم سینوس یا لگاریتم تانژانت کمانی بترتیب از مقادیر بالا کوچکتر باشند ، در ستون مربوط جدول ، از بالای صفحه ، و در صورتی که بترتیب از مقادیر بالا بزرگتر باشند ، در ستون مربوط جدول ، از پایین صفحه ، لگاریتم داده شده راجستجو کرده وکمان مربوط به‌لگاریتم مفروض‌را تعیین می‌کنیم .

همچنین اگر لگاریتم کسینوس یا لگاریتم کتانژانت کمانی بترتیب از مقادیر بالا کوچکتر باشند ، در ستون مربوط جدول ، از پایین صفحه ، و در صورتی که بترتیب از مقادیر بالا بزرگتر باشند ، در ستون مربوط جدول، ازبالای صفحه ، لگاریتم داده شده راجستجو کرده وکمان مربوط را بدست می‌آوریم . مثلا :

از روی جدول معلوم می‌شود :
$$\begin{cases} \log\sin x = \bar{1},50072 \\ x = 18^\circ 28' \end{cases}$$

از روی جدول معلوم می‌شود :
$$\begin{cases} \log tg\, y = 0,34398 \\ y = 65^\circ 28' \end{cases}$$

از روی جدول معلوم می‌شود : $\begin{cases} \log\cos u = \bar{1}/۷۲۹۴۲ \\ u = ۵۷^\circ ۳۴' \end{cases}$

از روی جدول معلوم می‌شود : $\begin{cases} \log\operatorname{cotg} v = ۰/۰۲۹۵۸ \\ v = ۴۳^\circ ۳' \end{cases}$

اگر لگاریتم داده شده عیناً درستون مربوط وجود نداشته باشد، **کمان مطلوب** شامل ثانیه خواهد بود و به وسیلهٔ تناسب مقدار آن را **مانند مثالهای** زیرحساب می‌کنیم :

الف ـ $\log\operatorname{tg}\alpha = \bar{1}/۵۱۷۵۵$. می‌خواهیم کمان α را تعیین کنیم .

لگاریتم داده شده بین دولگاریتم زیرواقع است :

$$\log\operatorname{tg} ۱۸^\circ ۱۳' = \bar{1}/۵۱۷۳۴$$

$$\log\operatorname{tg} ۱۸^\circ ۱۴' = \bar{1}/۵۱۷۷۶$$

اختلاف این دو لگاریتم $D = ۴۲$ و D' ، اختلاف $\log\operatorname{tg}\alpha$ و $\log\operatorname{tg} ۱۸^\circ ۱۳'$ چنین است : $D' = ۲۱$.

حال گوییم اگر $۱'$ یا $۶۰''$ به کمان افزوده شود ، لگاریتم تانژانت آن $۰/۰۰۰۴۲$ افزایش خواهد یافت ؛ و چون لگاریتم تانژانت α به اندازهٔ $(۰/۰۰۰۲۱)$ از $\log\operatorname{tg} ۱۸^\circ ۱۳'$ زیادتراست ، کمان α به اندازهٔ :

$$\frac{۰/۰۰۰۲۱ \times ۶۰}{۰/۰۰۰۴۲} = ۳۰''$$

ازکمان $۱۸^\circ ۱۳'$ بزرگتراست .

بنابراین ، مقدار اصلی کمان α عبارت است از :

$$\alpha = ۱۸^\circ ۱۳' ۳۰'' \ .$$

ب ـ $\log\operatorname{cotg}\beta = \bar{1}/۶۹۵۲۸$. می‌خواهیم کمان β را تعیین کنیم .

لگاریتم داده شده بین دولگاریتم زیرواقع است :

$$\log\operatorname{cotg} ۶۳^\circ ۳۷' = \bar{1}/۶۹۵۵۲$$

$$\log\operatorname{cotg} ۶۳^\circ ۳۸' = \bar{1}/۶۹۵۲۰$$

اختلاف این دو لگاریتم $D = ۳۲$ و D' ، اختلاف $\log\operatorname{cotg}\beta$ و $\log\operatorname{cotg} ۶۳^\circ ۳۷'$ ، چنین است : $D' = ۲۴$.

حال گوییم اگر $۱'$ یا $۶۰''$ به کمان افزوده شود ، لگاریتم کتانژانت آن $۰/۰۰۰۳۲$ کاهش خواهد یافت ؛ و چون $\log\operatorname{cotg}\beta$ به اندازهٔ $(۰/۰۰۰۲۴)$ از $\log\operatorname{cotg} ۶۳^\circ ۳۷'$ کمتراست ، کمان β به اندازهٔ :

$$\frac{۰/۰۰۰۲۴ \times ۶۰}{۰/۰۰۰۳۲} = ۴۵''$$

ازکمان $۶۳^\circ ۳۷'$ بزرگتراست .

بنابراین ، مقدار اصلی کمان β عبارت است از:

$$\beta = ۶۳^\circ ۳۷' ۴۵'' \ .$$

تبصره ـ اگرلگاریتم سینوس‌کمانی معلوم باشد ، برای محاسبهٔ کمان مجهول ، همان روش را بکار می‌بریم که با فرض معلوم بودن لگاریتم تانژانت یك‌کمان بکار بردیم وچنانچه لگاریتم کسینوس یك کمان در دست باشد ، روش محاسبهٔ کمان مطلوب ، مشابه با رویه‌ای است‌که بافرض معلوم بودن لگاریتم کتانژانت یك کمان ، برای تعیین آن کمان ذکرکردیم .

مثال۱ - با فرض $A=\dfrac{2\sin 18^\circ 45' \times \cos 27^\circ 15'}{tg\, 65^\circ 20'}$ ، مقدار A **را حساب کنید.**

حل - می‌توان چنین نوشت :

$$\log A=\log 2+\log\sin(18^\circ 45')+\log\cos(27^\circ 15')+colog\, tg(65^\circ 20')$$

و چون

$$\left.\begin{aligned}\log 2&=0/30103\\ \log\sin(18^\circ 45')&=\bar{1}/50710 \quad \text{و}\\ \log\cos(27^\circ 15')&=\bar{1}/94891 \quad \text{و}\\ colog\, tg(65^\circ 20')&=\bar{1}/66204 \quad \text{و}\end{aligned}\right\}$$

پس: $\log A=\bar{1}/41908$

واز آنجا : $A=0/26247$

مثال۲ - مطلوب است محاسبهٔ زاویهٔ حادهٔ **x** در صورتی که می‌دانیم : $\sin x+\cos x=1/14$.

حل - عبارت $\sin x+\cos x$ را به‌عاملهای ضرب تبدیل می‌کنیم:

$$\sin x+\cos x=\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

بنابراین :

$$\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1/14$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1/14}{\sqrt{2}}$$

با استفاده ازقضایای لگاریتم چنین خواهیم داشت :

$$\log\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\log 1/14+\frac{1}{2}colog\, 2$$

$$\log\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0/05690+\bar{1}/84949=\bar{1}/90639$$

وچون $\bar{1}/90639=\log\cos 36^\circ 17'$ ، مقدار $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ به صورت کلی، چنین می‌شود :

$$x-45^\circ=k\times 360^\circ\pm(36^\circ 17')$$

اما نظربراینکه زاویهٔ **x** حاده است ، فقط به‌ازای $k=0$ برای **x** دومقدار قابل قبول به صورت زیر بدست می‌آید :

$$x=8^\circ 43' \quad \text{و} \quad x=81^\circ 17'$$

برخی تبدیلهای لگاریتمی با بکار بردن زاویهٔ مُعین

۲- تبدیل a+b :

مقصود این است‌که به فرض معلوم بودن لگاریتمهای دو عدد مثبت a و b ، بدون تعیین خود اعداد a و b ، عبارت $(a+b)$ را به عبارتی قابل محاسبه به وسیلهٔ لگاریتم تبدیل‌کنیم ؛ یعنی بدون محاسبهٔ a و b ، می‌خواهیم لگاریتم $(a+b)$ را حساب‌کنیم .

برای انجام دادن این مقصود ، ابتدا عبارت مفروض را به این صورت می‌نویسیم : $a+b=a\left(1+\frac{b}{a}\right)$

سپس ، زاویهٔ حاده ومثبت φ را بقسمی اختیار می‌کنیم که داشته باشیم :

$$tg^{۲}\varphi=\frac{b}{a}$$

و با این قرار ، چنین خواهیم داشت :

$$a+b=a(۱+\frac{b}{a})=a(۱+tg^{۲}\varphi)=\frac{a}{\cos^{۲}\varphi}$$

عبارت $\frac{a}{\cos^{۲}\varphi}$ به‌وسیلهٔ لگاریتم قابل محاسبه است و از رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود :

$$\log(a+b)=\log\frac{a}{\cos^{۲}\varphi}=\log a+۲\,colog\cos\varphi$$

زاویهٔ حادهٔ φ راکه وسیلهٔتبدیل قرارگرفته است ، **زاویهٔ مُعین** می‌نامند ؛ برای محاسبهٔ φ ازرابطهٔ $tg^{۲}\varphi=\frac{b}{a}$ ، چنین عمل می‌کنیم :

$$۲\log tg\varphi=\log b+colog\,a$$

و از آنجا :

$$\log tg\varphi=\frac{۱}{۲}(\log b+colog\,a)$$

چون $\log a$ و $\log b$ معلومند ، از رابطهٔ اخیر $\log tg\varphi$ و بالاخره زاویهٔ φ محاسبه می‌شود .

مثال - درصورتی‌که بدانیم :

$$\log a=۰/۴۷۷۱۲ \quad \text{و} \quad \log b=۰/۳۴۹۴۸$$

بدون محاسبهٔ a و b ، لگاریتم $(a+b)$ را حساب‌کنید .

حل - همانطور که در حل کلی مسئلهٔ شمارهٔ ۲ همین فصل گفته شد ، فرض می‌کنیم $tg^{۲}\varphi=\frac{b}{a}$ (φ زاویهٔ حاده و مثبت) و در نتیجه می‌توان چنین نوشت :

$$\log(a+b)=\log a+۲\,colog\cos\varphi$$

ولی :

$$\log tg\varphi=\frac{۱}{۲}(\log b+colog\,a)=\frac{۱}{۲}(۰/۳۴۹۴۸+\bar{۱}/۵۲۲۸۸)=\bar{۱}/۹۳۶۱۸$$

و از آنجا : $\varphi=۴۰^{\circ}۴۸'۱۸''$

پس: $\log(a+b)=۰/۴۷۷۱۲+۰/۲۴۱۸۸=۰/۷۱۹۰۰$

۳- تبدیل $a-b$:

در اینجا نیز با مفروضات شمارهٔ ۲ همین فصل و با فرض ($a>b$ ، یعنی $\frac{b}{a}<۱$)، ابتدا عبارت مفروض رابه‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$a-b=a\left(۱-\frac{b}{a}\right)$$

و برای تبدیل‌آن ، دوطریقه ذکر می‌کنیم :

طریقهٔ اول - چون $۰<\frac{b}{a}<۱$ ، می‌توان زاویهٔ حاده ومثبت φ را بقسمی اختیار کردکه یکی از دو رابطهٔ زیررا داشته باشیم :

$$\sin^{۲}\varphi=\frac{b}{a} \tag{E}$$

$$\cos^{۲}\varphi=\frac{b}{a} \tag{E'}$$

و با این قرار ، برحسب آنکه زاویهٔ φ در رابطهٔ (E) و یا (E') صدق کند ، عبارت $a-b$ به یکی از دو صورت (F) ویا (F') به شرح زیر تبدیل خواهد شد :

$$a-b=a(۱-\frac{b}{a})=a(۱-\sin^{۲}\varphi)=a\cos^{۲}\varphi \tag{F}$$

$$a-b=a(۱-\frac{b}{a})=a(۱-\cos^{۲}\varphi)=a\sin^{۲}\varphi \tag{F'}$$

چنانکه ملاحظه می‌شود، درهریك از دو روش مذکور که اختیار شود، عبارتهای حاصل، یعنی $a\cos^2\varphi$ ویا $a\sin^2\varphi$، به وسیلهٔ لگاریتم قابل محاسبه هستند.

ضمناً مقدار زاویهٔ φ **(زاویهٔ مُعین)**، با روشی مشابه با آنچه ضمن شمارهٔ ۲ همین فصل گفته شد، از رابطهٔ (E) یا (E') و بامراجعه به جدول لگاریتم، بدست می‌آید.

طریقهٔ دوم ـ زاویهٔ حاده و مثبت φ را بقسمی اختیار می‌کنیم که داشته باشیم:

$$tg^2\varphi = \frac{b}{a}$$

و با این‌قرار، چنین خواهیم داشت:

$$a-b = a\left(1-\frac{b}{a}\right) = a(1-tg^2\varphi) = a\left(\frac{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right) = \frac{a\cos 2\varphi}{\cos^2\varphi}$$

بطوری که ملاحظه می‌شود، عبارت اخیر نیز به وسیلهٔ لگاریتم قابل محاسبه است.

تبصره ـ برای تبدیل هر یك از دو عبارت $(a\pm b)$، ممکن است زاویهٔ حادهٔ کمکی φ را بقسمی انتخاب کنیم که $tg\varphi=\frac{b}{a}$ باشد و در این صورت، چنین خواهیم داشت:

$$a\pm b = a\left(1\pm\frac{b}{a}\right) = a(1\pm tg\varphi)$$

یا:

$$a\pm b = a\left(tg\frac{\pi}{4}\pm tg\varphi\right) = \frac{a\sin\left(\frac{\pi}{4}\pm\varphi\right)}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\varphi}$$

و پس از اختصار:

$$a\pm b = \frac{a\sqrt{2}}{\cos\varphi}\sin\left(\frac{\pi}{4}\pm\varphi\right)$$

چنانکه ملاحظه می‌شود، عبارتهای اخیر نیز به وسیلهٔ لگاریتم قابل محاسبه هستند.

یادآوری ـ φ برحسب رادیان است.

۴ـ تبدیل $\frac{a\pm b}{a\mp b}$:

در اینجا نیز با مفروضاتی که در شمارهٔ ۲ همین فصل گفته شد و با فرض $(a>b)$، می خواهیم دو عبارت $\frac{a\pm b}{a\mp b}$ را به عبارتی قابل محاسبه به وسیلهٔ لگاریتم تبدیل کنیم. برای انجام دادن این مقصود، به ذکر دو طریقه می پردازیم:

طریقهٔ اول ـ چون صورت و مخرج کسر را جداگانه تبدیل کرده‌ایم، از تقسیم دو حاصل برهم، نتیجهٔ تبدیل دو کسر مفروض تعیین خواهد شد.

طریقهٔ دوم ـ به ترتیب زیر نیز مستقیماً می‌توان دوکسرمفروض را تبدیل‌کرد:

$$\frac{a\pm b}{a\mp b} = \frac{a\left(1\pm\frac{b}{a}\right)}{a\left(1\mp\frac{b}{a}\right)} = \frac{1\pm\frac{b}{a}}{1\mp\frac{b}{a}}$$

اگر φ زاویهٔ حاده‌ای باشد بقسمی‌که داشته باشیم: $tg\varphi=\frac{b}{a}$ ، عبارتهای بالا به صورت زیر در می‌آیند:

$$\frac{a\pm b}{a\mp b} = \frac{1\pm tg\varphi}{1\mp tg\varphi} = \frac{tg\frac{\pi}{4}\pm tg\varphi}{1\mp tg\frac{\pi}{4}tg\varphi} = tg\left(\frac{\pi}{4}\pm\varphi\right)$$

۵- تبدیل $\sqrt{a^2 \pm b^2}$:

دراین مورد نیزمقصود این است که بامعلوم بودن لگاریتمهای دو عددمثبت a و b، بدون‌تعیین خود اعداد a و b ، دوعبارت $\sqrt{a^2-b^2}$، $(a>b)$ و $\sqrt{a^2+b^2}$ رابه‌عباراتی‌قابل محاسبه به وسیلهٔ لگاریتم‌تبدیل کنیم؛ برای انجام دادن این‌مقصود ، ابتدا عبارتهای مفروض را بترتیب به صورتهای زیر می‌نویسیم :

$$\sqrt{a^2\pm b^2}=\sqrt{a^2\left(1\pm\frac{b^2}{a^2}\right)}=a\sqrt{1\pm\frac{b^2}{a^2}}$$

حال اگر مقصود ، تبدیل $\sqrt{a^2+b^2}$ باشد ، زاویهٔ حاده و مثبت φ را بقسمی اختیار می‌کنیم‌که داشته باشیم :

$$tg^2\varphi=\frac{b^2}{a^2}$$

و با این قرار ، چنین خواهیم داشت :

$$\sqrt{a^2+b^2}=a\sqrt{1+tg^2\varphi}=\frac{a}{\cos\varphi}$$

و اگر مقصود ، تبدیل $\sqrt{a^2-b^2}$ باشد ، زاویهٔ حاده و مثبت φ را بقسمی اختیار می‌کنیم‌که یکی از دو رابطهٔ زیر را داشته باشیم :

$$(E)\qquad \sin^2\varphi=\frac{b^2}{a^2}$$

$$(E')\qquad \cos^2\varphi=\frac{b^2}{a^2}$$

و با این قرار ، برحسب آنکه زاویهٔ φ در رابطهٔ (E) و یا (E′) صدق کند ، عبارت مفروض به یکی از دو صورت (F) ویا (F′) به این شرح تبدیل خواهد شد :

$$(F)\qquad \sqrt{a^2-b^2}=a\sqrt{1-\sin^2\varphi}=a\cos\varphi$$

$$(F')\qquad \sqrt{a^2-b^2}=a\sqrt{1-\cos^2\varphi}=a\sin\varphi$$

۶- تبدیل عبارتهای : $a\sin x\pm b\cos x$ به عبارات قابل محاسبه به وسیلهٔ لگاریتم .

برای تبدیل عبارات مذکور، ابتدا آنها را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$a\sin x\pm b\cos x=a\left(\sin x\pm\frac{b}{a}\cos x\right)$$

حال زاویهٔ φ را بین $-\frac{\pi}{2}$ و $+\frac{\pi}{2}$ بقسمی اختیار می کنیم که داشته باشیم :

$$tg\varphi=\frac{b}{a}$$

وبا این قرار، عبارتهای مفروض را می‌توان به صورتهای زیر نوشت :

$$\begin{aligned} a\sin x\pm b\cos x&=a(\sin x\pm tg\varphi\cos x)\\ &=a\left(\sin x\pm\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos x\right)\\ &=a\,\frac{\sin x\cos\varphi\pm\sin\varphi\cos x}{\cos\varphi}\end{aligned}$$

یا بطور خلاصه :

$$a\sin x\pm b\cos x=\frac{a\sin(x\pm\varphi)}{\cos\varphi}$$

حل مثلثاتی معادلهٔ درجهٔ دوم

۷- مقصود ازحل مثلثاتی معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ که ریشه‌های آن حقیقی فرض می‌شوند ، این است که ریشه‌های معادله را به عباراتی قابل محاسبه به وسیلهٔ لگاریتم تبدیل کنیم و با معلوم

بودن لگاریتمهای قدر مطلق ضرایب معادله، جوابهای معادله راحساب کنیم.

چنانکه می‌دانیم ریشه‌های معادلهٔ نامبرده عبارتند از:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

برای تبدیل ریشه‌های مذکور، ابتدا آنها را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x = \frac{-b \pm b\sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}}}{2a}$$

حال برحسب آنکه $\frac{c}{a}$ منفی یامثبت باشد، دوحالت ممکن‌است اتفاق افتد:

حالت اول ـ $\frac{c}{a}<0$:

در این صورت، مقدار $\left(-\frac{4ac}{b^2}\right)$ مثبت خواهد بود و اگر φ زاویهٔ حاده و مثبتی باشد بقسمی‌که داشته باشیم:

$$tg^2\varphi = -\frac{4ac}{b^2}$$

ریشه‌های معادلهٔ مفروض را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x = \frac{-b \pm b\sqrt{1+tg^2\varphi}}{2a} = \frac{-b \pm \frac{b}{\cos\varphi}}{2a} = \frac{-b(\cos\varphi \mp 1)}{2a\cos\varphi}$$

و بنابراین:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{b\sin^2\frac{\varphi}{2}}{a\cos\varphi} \\[2ex] x'' = \dfrac{-b\cos^2\frac{\varphi}{2}}{a\cos\varphi} \end{cases}$$

حالت دوم ـ $\frac{c}{a}>0$:

دراین‌حالت، باتوجه به‌اینکه دوریشهٔ معادله حقیقی‌فرض شده‌اند، لزوماً نامساوی $b^2-4ac>0$ و درنتیجه نامساوی: $1>\frac{4ac}{b^2}$ محقق است؛ در عین حال، از نامساوی مفروض $\frac{c}{a}>0$ معلوم می‌شودمقدار ac و در نتیجه $\frac{4ac}{b^2}$ مثبت است؛ با توجه به این نکات‌که یادآوری شد، واضح می‌شودکه $1>\frac{4ac}{b^2}>0$؛ یعنی‌مقدار $\frac{4ac}{b^2}$ بین صفر و $(+1)$ واقع است و اگر φ زاویهٔ حاده و مثبتی باشد بقسمی که داشته باشیم: $\sin^2\varphi = \frac{4ac}{b^2}$، ریشه‌های معادلهٔ مفروض بترتیب چنین‌می‌شوند:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-b+b\sqrt{1-\sin^2\varphi}}{2a} = \dfrac{-b+b\cos\varphi}{2a} = \dfrac{-b(1-\cos\varphi)}{2a} \\[2ex] x'' = \dfrac{-b-b\sqrt{1-\sin^2\varphi}}{2a} = \dfrac{-b-b\cos\varphi}{2a} = \dfrac{-b(1+\cos\varphi)}{2a} \end{cases}$$

و پس از اختصار:

$$\begin{cases} x' = -\frac{b}{a}\sin^2\frac{\varphi}{2} \\[1ex] x'' = -\frac{b}{a}\cos^2\frac{\varphi}{2} \end{cases}$$

و

مثال ـ مطلوب است حل مثلثاتی معادلهٔ:

$$x^2+140x+4731=0$$

حل ـ چون $\frac{c}{a}>0$، بنابر (شمارهٔ ۷ ـ حالت دوم) چنین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x' = -\frac{b}{a} sin^{۲}\frac{\varphi}{۲} \\ x'' = -\frac{b}{a} cos^{۲}\frac{\varphi}{۲} \end{cases}$$

ولی : $sin^{۲}\varphi = \frac{۴ac}{b^{۲}} = \frac{۴۷۳۱}{۴۹۰۰}$

بنابراین : $۲ \log sin\varphi = \log ۴۷۳۱ + colog\,۴۹۰۰$

و از آنجا : $\log sin\varphi = \bar{۱}/۹۹۲۳۸$

و درنتیجه : $\varphi = ۷۹^{\circ}۱۸'$

و $\frac{\varphi}{۲} = ۳۹^{\circ}۳۹'$

پس : $\begin{cases} x' = -۱۴۰\, sin^{۲}۳۹^{\circ}۳۹' \\ x'' = -۱۴۰\, cos^{۲}۳۹^{\circ}۳۹' \end{cases}$

قدر مطلقهای ریشه‌ها را با لگاریتم حساب می‌کنیم :

$$\log|x'| = \log ۱۴۰ + ۲\log sin ۳۹^{\circ}۳۹' = ۱/۷۵۵۹۱$$
$$\log|x''| = \log ۱۴۰ + ۲\log cos ۳۹^{\circ}۳۹' = ۱/۹۱۹۰۷$$

و از آنجا :

$$\begin{cases} x' = -۵۷/۰۰۵ \\ x'' = -۸۲/۹۹۸ \end{cases}$$

تمرین

در صورتی‌که داشته باشیم :

۱- $A = sin ۱۸^{\circ}۴۵' + cos ۳۲^{\circ}۲۱'$

۲- $B = \sqrt{۲} + ۲ sin ۶۴^{\circ}۱۸'$

۳- $C = \sqrt{۳} - ۲ cos ۷۲^{\circ}۲۰'$

۴- $D = \frac{۱ - tg ۲۳^{\circ}۱۲'}{\sqrt{۳} + cotg ۴^{\circ}۸'}$

مقدار A ، B ، C و D را به‌کمك جدول لگاریتم حساب‌کنید .

به‌کمك زاویهٔ معین، عبارات زیررا قابل‌محاسبه به‌وسیلهٔ لگاریتم‌کنید :

۵- $\sqrt{۳} \pm \sqrt{۲}$ ۶- $\frac{۱ \pm \sqrt{۲}}{۲}$ ۷- $\frac{۳ + \sqrt{۳}}{۳ - \sqrt{۳}}$

۸- $۲ \pm \sqrt{۳}$ ۹- $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} + \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$

۱۰- $\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}$

۱۱- $cos\,a + \sqrt{۳}\, sin\,a$

مطلوب است حل مثلثاتی معادلات زیر:

۱۲- $x^{۲} + px + q = ۰$ درصورتی‌که $\begin{cases} \log p = ۰/۵۳۱۳۷ \\ \log q = \bar{۱}/۸۰۳۸۱ \end{cases}$

۱۳- $x^{۲} - \sqrt[۴]{۵}\,x - \pi = ۰$

۱۴- $۰/۵۲۵x^{۲} - ۵/۷۴x + ۱۲/۶۳۲ = ۰$

۱۵- $x^{۲} tg\alpha - ۲x + tg\alpha = ۰ \qquad (\alpha = ۲۶^{\circ}۱۵')$

۱۶- $x^{۲} cos ۲\alpha + ۲x\, sin\alpha - sin ۲\alpha = ۰ \qquad (\alpha = ۲۷^{\circ}۱۲')$

عبارات زیررا قابل محاسبهٔ لگاریتمی‌کنید :

۱۷- $۱ - \sqrt{۲}\, cos\alpha + cos ۲\alpha$

۱۸- $۱ + sin\alpha + cos\alpha + tg\alpha$

۱۹- $\frac{\sqrt{۲} - cos\alpha - sin\alpha}{sin\alpha - cos\alpha}$

۲۰- $tg\alpha - ۱ + sin\alpha(۱ - tg\alpha) + \frac{۱}{۱ + tg^{۲}\alpha}$

۲۱- $۱ - \frac{۱}{۴} sin^{۲} ۲\alpha - sin^{۲}\beta - cos^{۴}\alpha$

۲۲- $tg\,a + tg\,b + tg\,c - \frac{sin(a+b+c)}{cos\,a\, cos\,b\, cos\,c}$

۲۳- $۱ - cos^{۲}a - cos^{۲}b - cos^{۲}c + ۲ cos\,a\, cos\,b\, cos\,c$

۲۴- $(sin\,a + sin ۲a + sin ۳a)^{۳} - sin^{۳}a - sin^{۳}۲a - sin^{۳}۳a$

فصل سوم

معادلات مثلثاتی

الف- معادلات مثلثاتی یك مجهولی

۱- تعیین کمانهای x که سینوس آنها برابر با مقدار معلوم q باشد. $(-1<q<+1)$

همانطورکه درسال پنجم دیده‌ایم، اگر اندازهٔ یکی از کمانهایی که سینوس آنها برابربا مقدار معلوم q است مساوی با **a** رادیان باشد، مقدار کلیهٔ کمانهای x که سینوس آنها مساوی با q است، در دو دستور زیر مندرج است:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 2k\pi + a \\ x &= (2k+1)\pi - a \end{aligned}} \qquad (1)$$

همچنین می‌دانیم که از کمانهای مذکور، فقط یکی بین $-\frac{\pi}{2}$ و $+\frac{\pi}{2}$ واقع است. این کمان را α می‌نامیم.

کمان α را، هم از راه ترسیم هندسی و هم از طریق محاسبه به کمك روابط مثلثاتی و جدولی که در آن توابع مثلثاتی کمانها را نوشته‌اند، یا جدول لگاریتم مثلثاتی، می‌توان بدست آورد؛ و با

معلوم شدن کمان α، چنین خواهیم داشت:

$$\sin x = \sin\alpha$$

و درنتیجه، بین کمانهای **x** و α که دارای سینوسهای برابرند، بنا به دستورهای (۱)، دورابطهٔ زیر برقرار است:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 2k\pi + \alpha \\ x &= (2k+1)\pi - \alpha \end{aligned}} \qquad (2)$$

مثال- کمانهای **x** را چنان تعیین کنیدکه داشته باشیم: $\sin x = \frac{1}{2}$.

حل - چون $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$، می‌توان چنین نوشت:

$$\sin x = \sin\frac{\pi}{6}$$

و بنا به‌دستورهای (۲) چنین خواهیم داشت:

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

۲- تعیین کمانهای x که کسینوس آنها برابر با مقدار معلوم p باشد. $(-1<p<+1)$

بطوری‌که قبلا دیده‌ایم، اگر اندازهٔ یکی ازکمانهایی‌که‌کسینوس آنها برابر با مقدار معلوم **p** است مساوی با **a** رادیان باشد، مقدار کلیهٔ کمانهای **x** که کسینوس آنها مساوی با **p** است، در دو دستورزیر مندرج است:

$$\boxed{x = 2k\pi \pm a} \qquad (3)$$

همچنین می‌دانیم که از کمانهای مذکور فقط یکی بین ۰ و π واقع است . این‌کمان را α می‌نامیم .

کمان α را ، هم از راه ترسیم هندسی وهم از طریق محاسبه به کمك روابط مثلثاتی‌وجدولی‌که درآن توابع مثلثاتی‌کمانهارا نوشته‌اند ، یا جدول لگاریتم مثلثاتی ، می‌توان بدست آورد ؛ و با معلوم شدن کمان α ، چنین خواهیم داشت :

$$\cos x = \cos \alpha$$

و درنتیجه ، بین‌کمانهای x و α که دارای کسینوسهای برابرند ، بنا به دستورهای (۳)، دورابطهٔ زیربرقرار است :

$$\boxed{x = 2k\pi \pm \alpha} \qquad (۴)$$

مثال- کمانهای x را چنان تعیین کنید که داشته باشیم : $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

حل- چون $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، می‌توان چنین نوشت :

$$\cos x = \cos\frac{3\pi}{4}$$

و با توجه به دستورهای (۴) نتیجه می‌شود :

$$x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$$

۳- تعیین کمانهای x که تانژانت آنها برابر با مقدار معلوم t باشد .

همانطورکه قبلا دیده‌ایم ، اگر اندازهٔ یکی ازکمانهایی‌که‌تانژانت

آنها برابر با مقدار معلوم t است مساوی با a رادیان باشد ، مقدار کلیهٔ کمانهای x که تانژانت آنها مساوی با t است ، در دستور زیر مندرج است :

$$\boxed{x = k\pi + a} \qquad (۵)$$

همچنین می‌دانیم که ازکمانهای مذکور ، فقط یکی بین $-\frac{\pi}{2}$ و $+\frac{\pi}{2}$ واقع است . این‌کمان را α می‌نامیم .

کمان α را،هم ازراه ترسیم هندسی‌وهم ازطریق محاسبه‌به‌کمك روابط مثلثاتی و جدولی که در آن توابع مثلثاتی کمانها را نوشته‌اند ، یا جدول‌لگاریتم مثلثاتی، می‌توان بدست‌آورد ؛ وبا معلوم‌شدن‌کمان α، چنین خواهیم داشت :

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha$$

و در نتیجه ، بین کمانهای x و α که دارای تانژانتهای‌برابرند، بنا به دستور(۵) رابطهٔ زیر برقرار است :

$$\boxed{x = k\pi + \alpha} \qquad (۶)$$

مثال- کمانهای x را چنان تعیین کنیدکه داشته باشیم :

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$$

حل- چون $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ ، نتیجه می‌شود :

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$$

و بنا به دستور (۶) چنین خواهیم داشت :

$$x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

۴ـ تعیین کمانهای x که کتانژانت آنها برابر بامقدار معلوم m باشد.

بطوری که سابقاً دیده‌ایم، اگر اندازهٔ یکی از کمانهایی که کتانژانت آنها برابر بامقدار معلوم m است مساوی با a رادیان باشد، مقدار کلیهٔ کمانهای x که کتانژانت آنها مساوی با m است، در دستور زیرمندرج است :

$$\boxed{x = k\pi + a} \qquad (۷)$$

همچنین می‌دانیم که از کمانهای مذکور، فقط یکی بین $-\frac{\pi}{2}$ و $+\frac{\pi}{2}$ واقع است. این کمان را α می‌نامیم.

کمان α را، هم ازراه ترسیم هندسی و هم از طریق محاسبه به کمك روابط مثلثاتی وجدولی که درآن توابع مثلثاتی کمانها رانوشته‌اند، یا جدول لگاریتم مثلثاتی، می‌توان بدست آورد؛ و با معلوم‌شدن کمان α، چنین خواهیم داشت :

$$cotg\, x = cotg\, \alpha$$

ودر نتیجه، بین کمانهای x و α که دارای کتانژانتهای برابرند، بنا به دستور(۷)، رابطهٔ زیربرقرار است :

$$\boxed{x = k\pi + \alpha} \qquad (۸)$$

۵ـ معادلهٔ مثلثاتی- فرض می‌کنیم A و B دو عبارت جبری نسبت به یك یاچند تابع ازتوابع مثلثاتی کمان x یا مضارب x باشند.

اگر A و B فقط به‌ازای بعض مقادیر x مقادیر عددی متساوی اختیارکنند، رابطهٔ $A=B$ رامعادلهٔ مثلثاتی یك مجهولی‌می‌نامند ومقادیری از x که به ازای آنها مقادیر عددی A و B باهم مساوی شوند جوابهای معادلهٔ $A=B$ نامیده می‌شوند. مثلا رابطهٔ :

$$\sin x + \cos 2x = \sin 3x$$

معادلهٔ مثلثاتی یك مجهولی است و کمان $x=\frac{\pi}{6}$ یکی از جوابهای آن است.

۶ـ طریقهٔ حل معادلهٔ مثلثاتی- برای حل یك معادلهٔ مثلثاتی یك مجهولی، یعنی تعیین جوابهای‌آن، **عموماً** چنین عمل می‌کنند:

برحسب مورد بابکار بردن یك یا چند رابطه از روابط مذکور در شماره‌های ۵ (روابط اصلی)، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۳ و ۱۴ فصل اول واستفادهٔ مناسب از آنها صورت ظاهر معادله را تغییر داده و آن را به صورت معادله‌ای درمی‌آورند که، بدون شامل بودن رادیکالهایی که موجب پیدایش جوابهای خارجی می‌شوند، **منحصراً** شامل یك تابع مثلثاتی از یك کمان مجهول **فقط**، مثلا کمان x، باشد؛ برای انتخاب این تابع مثلثاتی، که مجهول معاون گرفته می‌شود، می‌توان طبق قاعدهٔ زیر موسوم به **قاعدهٔ بیوش*** عمل‌کرد:

۱) اگردر معادله‌کمان x رابه $(-x)$ تبدیل‌کنیم و معادله تغییر نکند، $\cos x$ را مجهول معاون قرار می‌دهیم.

۲) اگر در معادله کمان x را به $(\pi - x)$ تبدیل کنیم و معادله تغییرنکند، $\sin x$ را مجهول معاون قرار می‌دهیم.

۳) اگر در معادله کمان x را به $(\pi + x)$ تبدیل کنیم و معادله

* Ch. Bioche

تغییر نکند ، $tg\,x$ را مجهول معاون قرار می‌دهیم .

۴) اگر در معادله کمان x را به $(-x)$ ، $(\pi-x)$ و $(\pi+x)$ تبدیل کنیم و معادله تغییر کند ، با استفاده از روابط شمارهٔ ۱۲ فصل اول ، $tg\frac{x}{2}$ را مجهول معاون قرار می‌دهیم .

۵) اگر در معادله کمان x را به $(-x)$ ، $(\pi-x)$ و $(\pi+x)$ تبدیل کنیم و معادله تغییر نکند ، می‌توان هر یك از سه تابع مثلثاتی $\cos x$ ، $\sin x$ یا $tg\,x$ را بدلخواه مجهول معاون قرار داد ؛ همچنین ، برای پایین‌آوردن درجهٔ معادله ، می‌توان $\cos 2x$ راکه با هرسه تبدیل نامبرده بلاتغییر می‌ماند مجهول معاون قرار داد .

حال اگرفرضاً x کمان مجهول و y یکی از توابع مثلثاتی x و معادلهٔ جبری :

$$(E) \qquad f(y)=0$$

با واسطهٔ y یك معادلهٔ مثلثاتی یك مجهولی نسبت به مجهول x باشدکه با بکار بردن قاعدهٔ بیوش یا هر طریقهٔ دیگر از یك معادلهٔ مثلثاتی مفروض نتیجه شده است ، به کمك دستورهای جبری و طرق معمول در جبرمعادلهٔ (E) را نسبت به مجهول معاون y حل می‌کنند وباتوجه به حدودی‌که y بین آن حدود می‌تواند تغییرکند در ریشه های معادلهٔ (E) بحث می‌کنند .

برای تعیین حدود y به منظور بحث در ریشه‌های معادلهٔ (E) دو حالت ممکن است اتفاق افتد :

I) **مجهول x محدود به حدودی نیست** ، یعنی می‌تواند از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییرکند ؛ در این حالت :

اگر y نمایش $\sin x$ یا $\cos x$ باشد ، هر ریشه از معادلهٔ (E) در صورتی قابل قبول است‌که متعلق به فاصلهٔ $(-1 , +1)$ باشد ؛ یعنی مثلا اگر y_1 یکی از ریشه‌های معادلهٔ (E) باشد ، این ریشه به شرطی قابل قبول است‌که داشته باشیم :

$$-1 < y_1 < +1$$

و چنانچه y نمایش $tg\,x$ یا $cotg\,x$ باشد ، هر ریشه از معادلهٔ (E) در صورتی قابل قبول است‌که حقیقی باشد .

II) **مجهول x به حدودی محدود است** ، یعنی فرضاً x مقیدبه‌این شرط است‌که در نامساویهای :

$$(1) \qquad a < x < b$$

صدق‌کند ؛ در این صورت ناچار y نیز به حدودی محدود خواهد بود یعنی مقید به این شرط خواهد بودکه در نامساویهایی به صورت :

$$(2) \qquad a' < y < b'$$

صدق‌کند . دراین حالت بااستفاده ازنامساویهای مفروض(۱) ودرصورت لزوم با رسم‌کردن دایرهٔ مثلثاتی حدود y را تشخیص و تعیین می‌کنند یعنی‌نامساویهای (۲) را تشکیل می‌دهند وبا تشکیل نامساویهای (۲)، هرریشهٔ y_1 از معادلهٔ (E) به شرطی قابل قبول است که داشته باشیم :

$$a' < y_1 < b'$$

با بکار بردن طریقهٔ مذکور برای هریك از ریشه‌های قابل قبول

معادلهٔ (E) یك معادلهٔ مثلثاتی ساده به یکی از سه شکل زیر بدست می‌آید :

$$(A) \qquad \sin x = a$$

$$(B) \qquad \cos x = b$$

$$(C) \qquad tg\, x = c$$

حال برحسب آنکه معادلهٔ (A) یا (C) بدست آمده باشد، یك کمان α بین $-\frac{\pi}{2}$ و $+\frac{\pi}{2}$ وجود خواهد داشت بقسمی‌که داشته باشیم :

$$\sin\alpha = a$$

یا $$tg\,\alpha = c$$

این کمان α را به کمك روابط مثلثاتی و جدول توابع مثلثاتی طبیعی* یا جدول لگاریتم تعیین می‌کنند وبا معلوم شدن کمان α یکی از دو رابطهٔ :

$$\sin x = \sin\alpha$$

یا $$tg\, x = tg\,\alpha$$

را نتیجه‌گرفته وجوابهای‌کلی معادلهٔ (A) یا (C) را ازروی دستورهای (۲) یا (۶) می‌نویسند .

چنانچه حل یك معادلهٔ مثلثاتی به‌حل معادله‌ای به صورت (B) منجر شده باشد، یك کمان α بین ۰ و π وجود خواهد داشت بقسمی که داشته باشیم :

$$\cos\alpha = b$$

این کمان α را به کمك روابط مثلثاتی و جدول توابع مثلثاتی طبیعی یا جدول لگاریتم تعیین می‌کنند وبا معلوم شدن‌کمان α رابطهٔ:

* مثلثات سال پنجم ، جدول آخر فصل نهم .

$$\cos x = \cos\alpha$$

را نتیجه‌گرفته و جوابهای کلی معادلهٔ (B) را از روی دستورهای (۴) می‌نویسند .

واضح است‌که دراین جوابهای کلی‌عدد صحیح وجبری k وجود خواهد داشت که به ازای مقادیر مختلف آن ، جوابهای بیشمار برای معادلهٔ (A) ، (B) یا (C) بدست می‌آیند .

چنانچه مجهول x محدود به حدودی باشد یعنی مثلا x مقید به این شرط باشدکه در نامساویهای :

$$a < x < b$$

صدق‌کند ، معادلهٔ (A)،(B)یا(C) یك عدهٔ معین جواب خواهد داشت که همهٔ آنها از جواب‌کلی‌به ازای بعض مقادیر k بدست می‌آیند .

یادآوری ـ در دستور های (۲) ، (۴) و(۶) مقدار α برحسب رادیان است ؛ چنانچه برای تعیین جوابهای معادلهٔ (A)،(B) یا (C) اندازهٔ α برحسب درجه یاگراد حساب شده باشد ، به اقتضای موردباید دردستورهای (۲)،(۴)یا(۶) عدد ۱۸۰ یا ۲۰۰ را جانشین π کرد .

۷ـ تبصره ـ علاوه برطریقهٔ‌کلی مذکور درشمارهٔ۶ ، دربسیاری از موارد برای حل معادلات مثلثاتی یك مجهولی طریقه‌های متعدد دیگری وجود داردکه راه‌حلهای جالب و سریعتری بدست می‌دهند و پیداکردن‌آنها فرع برتمرین و عادت است .

۸ـ چند مثال نمونه :

مثال ۱ـ مطلوب است حل معادلهٔ :

$$cotg\, x - 3\, tg\, x = \frac{4}{\sin x}$$

حل- درمعادلهٔ مفروض اگر x رابه $(\pi - x)$ یا $(\pi + x)$ تبدیل کنیم معادله تغییر می‌کند ، اما با تبدیل x به $(-x)$ معادله تغییر نمی‌کند (چرا؟) ؛ بنابراین $\cos x$ را مجهول معاون قرار می‌دهیم یعنی تمام توابع مثلثاتی x موجود در معادله را برحسب $\cos x$ می‌نویسیم و برای انجام دادن این‌کار به ترتیب زیرعمل می‌کنیم :

$$\operatorname{cotg} x - 3\operatorname{tg} x = \frac{4}{\sin x}$$

$$\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{3\sin x}{\cos x} - \frac{4}{\sin x} = 0$$

$$\frac{\cos^2 x - 3\sin^2 x - 4\cos x}{\sin x \cos x} = 0$$

$$\cos^2 x - 3\sin^2 x - 4\cos x = 0$$

$$\cos^2 x - 3(1 - \cos^2 x) - 4\cos x = 0$$

$$4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0 \qquad (1)$$

حال فرض می‌کنیم :

$$\cos x = y \qquad (D)$$

با این فرض ، معادلهٔ (1) به صورت زیر درمی‌آید :

$$f(y) = 4y^2 - 4y - 3 = 0 \qquad (E)$$

و هرریشه از معادلهٔ (E) به شرطی قابل قبول است که متعلق به فاصلهٔ $(-1, +1)$ باشد .

ریشه‌های معادلهٔ (E) عبارتند از :

$$y' = \frac{3}{2} \quad \text{و} \quad y'' = -\frac{1}{2}$$

ریشهٔ y' که از 1 بزرگتر است قابل قبول نیست وفقط ریشهٔ y'' قابل قبول است ؛ در معادلهٔ (D) به جای y مقدار $y'' = -\frac{1}{2}$ را قرار

می‌دهیم حاصل می‌شود :

$$\cos x = -\frac{1}{2} \qquad (B)$$

اما می‌دانیم که

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \qquad \left(0 < \frac{2\pi}{3} < \pi\right)$$

در نتیجه $\cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$

وبنا به دستورهای (4) کمانهای x ، جوابهای‌کلی معادلهٔ (B) که‌همان جوابهای کلی معادلهٔ مفروضند ، به دو صورت زیر می‌باشند :

$$\boxed{x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}}$$

مثال۲- مطلوب است تعیین‌کمانهای x جوابهای معادلهٔ :

$$1 + \sqrt{2}\sin 3x = \cos 2x$$

بقسمی‌که داشته باشیم :

$$-\pi < x < 3\pi \qquad (I)$$

حل- ابتدا جوابهای‌کلی معادلهٔ مفروض‌را به ترتیب زیر بدست می‌آوریم :

ملاحظه می‌کنیم که در معادلهٔ مفروض اگر x را به $(-x)$ یا $(\pi + x)$ تبدیل‌کنیم معادله تغییر می‌کند ، اما با تبدیل x به $(\pi - x)$ معادله تغییر نمی‌کند (چرا ؟) ؛ بنابراین $\sin x$ را مجهول معاون قرار می‌دهیم یعنی تمام توابع مثلثاتی موجود در معادله را برحسب $\sin x$ می‌نویسیم وبرای انجام دادن این‌کار به این ترتیب عمل می‌کنیم :

$$1+\sqrt{2}\sin 3x=\cos 2x$$
$$1+\sqrt{2}(3\sin x-4\sin^3 x)=1-2\sin^2 x$$
$$1+3\sqrt{2}\sin x-4\sqrt{2}\sin^3 x=1-2\sin^2 x$$
$$4\sqrt{2}\sin^3 x-2\sin^2 x-3\sqrt{2}\sin x=0$$

و با ضرب‌کردن طرفین معادلهٔ اخیر در $\frac{\sqrt{2}}{2}$ چنین خواهیم داشت :

$$(1)\qquad 4\sin^3 x-\sqrt{2}\sin^2 x-3\sin x=0$$

حال فرض می‌کنیم :

$$(D)\qquad \sin x=y$$

بااین فرض ، معادلهٔ (۱) به صورت زیردر می‌آید :

$$4y^3-\sqrt{2}y^2-3y=0$$

یا

$$(E)\qquad f(y)=y(4y^2-\sqrt{2}y-3)=0$$

و هرریشه از معادلهٔ (E) به شرطی قابل قبول است که متعلق به فاصلهٔ $(-1\,,\,+1)$ باشد .

ریشه‌های معادلهٔ (E) عبارتند از :

$$y'=0 \quad ، \quad y''=-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad ، \quad y'''=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

ریشهٔ y''' که از ۱ بزرگتراست قابل‌قبول نیست وفقط دوریشهٔ y' و y'' قابل قبولند ؛ در معادلهٔ (D) به جای y بترتیب هر یك از مقادیر $y'=0$ و $y''=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ را قرار می‌دهیم دو معادلهٔ (A) و (A') به صورت زیر حاصل می‌شوند :

$$(A)\qquad \sin x=0$$

و

$$(A')\qquad \sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

اما می‌دانیم‌که :

$$\sin 0=0$$

و

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad \left(-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{4}<0<\frac{\pi}{2}\right)$$

درنتیجه دومعادلهٔ (A) و (A') را بترتیب می‌توان به صورتهای زیر نوشت :

$$\sin x=\sin 0$$

و

$$\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

و ازاین‌روکمانهای x ، جوابهای‌کلی معادلات (A) و (A') راکه همان جوابهای‌کلی معادلهٔ مفروضند ، بااستفاده ازدستورهای (۲) بترتیب به صورتهای (II) و (III) به شرح زیر می‌نویسیم :

$$x=2k\pi \quad و \quad x=(2k+1)\pi$$

یا بطور خلاصه :

$$(II)\qquad \{x=k\pi$$

$$(III)\qquad \begin{cases} x=2k\pi-\frac{\pi}{4} \\ x=2k\pi+\frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

حال باتوجه‌به‌اینکه درروابط (II) و (III) عدد k عددصحیحی است‌که ممکن است مثبت یامنفی یا صفر باشد ، باید تحقیق کنیم از جوابهای بیشماری که روابط (II) و (III) به ازای مقادیر مختلف k برای معادلهٔ مفروض بدست می‌دهند کدامشان درنامساویهای (I) صدق می‌کنند ، یعنی به ازای چه مقادیری از k جوابهای حاصل از روابط (II) و (III) بزرگتراز $-\pi$ وکوچکتر از 3π هستند. این‌تحقیق راازِ

دو راه می‌توان انجام داد : راه اول آزمایش اعداد صحیح مثبت ، منفی و صفر است که در روابط (II) و (III) به جای k قرار داده شوند و جوابهای حاصل بررسی شوند که در نامساویهای (I) صدق می‌کنند یا نه ، و راه دوم این است که هر یك از جوابهای (II) و (III) را در نامساویهای (I) به‌جای x قرار داده و از آن‌رو با انجام دادن اختصارات لازم مقادیر مناسبی را که می‌توان به k نسبت داد تعیین کنند ، مثلا جواب اول از روابط (III) را که در نامساویهای (I) به‌جای x قرار دهیم چنین خواهیم داشت :

$$-\pi < ۲k\pi - \frac{\pi}{۴} < ۳\pi$$

و پس از اختصار :

$$-\frac{۳}{۸} < k < \frac{۱۳}{۸}$$

یعنی به k باید مقادیر صحیح واقع بین $-\frac{۳}{۸}$ و $\frac{۱۳}{۸}$ را نسبت داد ، پس :

$$k = ۰ \quad و \quad k = ۱$$

و بنابراین از جوابهای اول روابط (III) فقط دو جواب زیر قابل قبولند :

به ازای	$k = ۰$	$x = -\frac{\pi}{۴}$
به ازای	$k = ۱$	$x = \frac{۷\pi}{۴}$

از همین راه معلوم می‌شود که از جوابهای دوم روابط (III) فقط دوجواب به شرح زیر قابل قبولند :

به ازای	$k = -۱$	$x = -\frac{۳\pi}{۴}$
به ازای	$k = ۰$	$x = \frac{۵\pi}{۴}$

ونیز با همین روش معلوم می‌شود که از جوابهای رابطهٔ (II) فقط سه جواب به شرح زیر قابل قبولند :

به‌ازای	$k = ۰$	$x = ۰$
به‌ازای	$k = ۱$	$x = \pi$
به‌ازای	$k = ۲$	$x = ۲\pi$

از آنچه‌گفته شد بطور خلاصه معلوم می‌شود جوابهایی از معادلهٔ مفروض که در نامساویهای (I) صدق می‌کنند عبارتند از :

$$\boxed{\begin{array}{c} x = -\frac{۳\pi}{۴} \text{ ، } x = -\frac{\pi}{۴} \text{ ، } x = ۰ \text{ ، } x = \pi \text{ ، } \\ x = \frac{۵\pi}{۴} \text{ ، } x = \frac{۷\pi}{۴} \text{ ، } x = ۲\pi \end{array}}$$

مثال۳- مطلوب است حل معادلهٔ :

$$۲\sin ۳x = ۳\cos x + \cos ۳x$$

حل- درمعادلهٔ مفروض اگر x را به $(-x)$ یا $(\pi - x)$ تبدیل کنیم معادله تغییر می‌کند ، اما با تبدیل x به $(x + \pi)$ معادله تغییر نمی‌کند (چرا ؟) ؛ بنابراین tgx را مجهول معاون قرار می‌دهیم یعنی تمام توابع مثلثاتی موجود در معادله را برحسب tgx می‌نویسیم‌وبرای

انجام دادن این‌کار به ترتیب زیرعمل می‌کنیم :

$$۲\sin ۳x = ۳\cos x + \cos ۳x$$

$$۲(۳\sin x - ۴\sin^۳ x) = ۳\cos x + ۴\cos^۳ x - ۳\cos x$$

$$۲(۳\sin x - ۴\sin^۳ x) = ۴\cos^۳ x$$

$$۳\sin x - ۴\sin^۳ x = ۲\cos^۳ x$$

$$\frac{۳\sin x - ۴\sin^۳ x}{\cos^۳ x} = ۲$$

$$\frac{۳\sin x}{\cos^۳ x} - \frac{۴\sin^۳ x}{\cos^۳ x} = ۲$$

$$\frac{۳\sin x}{\cos x} \cdot \frac{۱}{\cos^۲ x} - ۴tg^۳ x - ۲ = ۰$$

$$۳tg x(۱ + tg^۲ x) - ۴tg^۳ x - ۲ = ۰$$

$$(۱) \qquad tg^۳ x - ۳tg x + ۲ = ۰$$

حال فرض می‌کنیم : $\quad tg x = y \qquad$ (D)

بااین فرض، معادلهٔ (۱) را می‌توان مرتباً به‌این صورتها نوشت :

$$y^۳ - ۳y + ۲ = ۰$$

$$y^۳ - y - ۲y + ۲ = ۰$$

$$y(y^۲ - ۱) - ۲(y - ۱) = ۰$$

$$(y - ۱)[y(y + ۱) - ۲] = ۰$$

$$(y - ۱)(y^۲ + y - ۲) = ۰$$

$$(y - ۱)(y - ۱)(y + ۲) = ۰$$

$$(E) \qquad f(y) = (y - ۱)^۲(y + ۲) = ۰$$

ریشه‌های معادلهٔ (E) عبارتند از :

$$y' = ۱ \quad و \quad y'' = -۲$$

وچون y نمایش $tg x$ است که‌می‌تواند مقادیر مختلف از $-\infty$ تا $+\infty$ را اختیارکند ، هردو ریشهٔ معادلهٔ (E) قابل قبولند .

اکنون در معادلهٔ (D) به جای y بترتیب هر یك از مقادیر $y' = ۱$ و $y'' = -۲$ راکه قرار دهیم دومعادلهٔ (C) و (C') به صورت زیرحاصل می‌شوند :

$$(C) \qquad tg x = ۱$$

$$(C') \qquad tg x = -۲$$

اما می‌دانیم که

$$tg ۴۵° = ۱$$

و $\quad tg ۶۳°۲۶'۵'' = ۲ \quad$ (به کمك جدول لگاریتم)

پس $\quad tg[-(۶۳°۲۶'۵'')] = -۲$

$$[-۹۰° < -(۶۳°۲۶'۵'') < ۴۵° < ۹۰°]$$

در نتیجه دو معادلهٔ (C) و (C') را بترتیب به صورتهای زیر می‌توان نوشت :

$$tg x = tg ۴۵°$$

و $\quad tg x = tg[-(۶۳°۲۶'۵'')]$

و ازاین‌روکمانهای x ، جوابهای کلی معادلات (C) و (C') راکه‌همان جوابهای کلی معادلهٔ مفروضند ، با استفاده از دستور (۶) بترتیب به دوصورت (I) و (II) به شرح زیر می‌نویسیم :

$$\boxed{\begin{array}{ll} (I) & x = k.۱۸۰° + ۴۵° \\ (II) & x = k.۱۸۰° - (۶۳°۲۶'۵'') \end{array}}$$

مثال۴ـ مطلوب است حل معادلهٔ :

$$\sin x+(2-\sqrt{3})\cos x=\sqrt{3}-1$$

حلـ در معادلهٔ مفروض اگر x را به $(-x)$ ، $(\pi-x)$ و $(\pi+x)$ تبدیل‌کنیم معادله تغییر می‌کند ، بنابراین $tg\frac{x}{2}$ را مجهول معاون قرار می دهیم یعنی تمام توابع مثلثاتی موجود در معادله را برحسب $tg\frac{x}{2}$ می‌نویسیم، به این‌ترتیب :

$$\sin x+(2-\sqrt{3})\cos x=\sqrt{3}-1$$

$$(1)\qquad \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^{2}\frac{x}{2}}+(2-\sqrt{3}).\frac{1-tg^{2}\frac{x}{2}}{1+tg^{2}\frac{x}{2}}=\sqrt{3}-1$$

حال فرض می‌کنیم :

$$(D)\qquad tg\frac{x}{2}=y$$

بااین فرض، معادلهٔ (۱) به صورت زیر درمی‌آید :

$$\frac{2y}{1+y^{2}}+\frac{(2-\sqrt{3})(1-y^{2})}{1+y^{2}}=\sqrt{3}-1$$

وپس‌از اختصار :

$$(E)\qquad f(y)=y^{2}-2y+2\sqrt{3}-3=0$$

ریشه‌های معادلهٔ (E) عبارتند از :

$$y'=\sqrt{3}\qquad و \qquad y''=2-\sqrt{3}$$

وچون y نمایش $tg\frac{x}{2}$ است که می‌تواند مقادیر مختلف از $-\infty$ تا $+\infty$ را اختیارکند، هر دو ریشهٔ معادلهٔ (E) قابل قبولند .

اکنون در معادلهٔ (D) به جای y بترتیب هر یك از مقادیر $y'=\sqrt{3}$ و $y''=2-\sqrt{3}$ را که قرار دهیم دو معادلهٔ (C) و (C') به صورت زیر حاصل می‌شوند :

$$(C)\qquad tg\frac{x}{2}=\sqrt{3}$$

$$(C')\qquad tg\frac{x}{2}=2-\sqrt{3}$$

اما می‌دانیم که

$$tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

و $\quad tg\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}\quad$ (جدول صفحهٔ ۳)

$$\left(-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{12}<\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}\right)$$

در نتیجه دو معادلهٔ (C) و (C') را بترتیب به صورتهای زیر می‌توان نوشت :

$$tg\frac{x}{2}=tg\frac{\pi}{3}$$

و $\quad tg\frac{x}{2}=tg\frac{\pi}{12}$

و ازاین‌رو با استفاده از دستور (۶) صورت کلی کمانهای $\frac{x}{2}$ را چنین می‌نویسیم :

$$(I)\qquad \frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{3}$$

$$(II)\qquad \frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{12}$$

و از روابط (I) و (II) کمانهای x ، جوابهای کلی معادلهٔ مفروض ، به دو صورت زیر بدست می‌آیند :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \\ x &= 2k\pi + \frac{\pi}{6} \end{aligned}}$$

مثال ۵ـ مطلوب است حل معادلهٔ :

$$1 + 2\cos x \cos 3x = 0$$

حل ـ در معادلهٔ مفروض اگر x را به $(-x)$ ، $(\pi - x)$ و $(\pi + x)$ تبدیل کنیم معادله تغییر نمی‌کند (چرا؟) ؛ پس هر کدام ازسه تابع مثلثاتی $\cos x$ ، $\sin x$ و $tg\, x$ را بدلخواه می‌توان مجهول معاون قرار داد ، اما برای پایین آوردن درجهٔ معادله بهتر است $\cos 2x$ را مجهول معاون قرار دهیم وبرای انجام دادن این‌کار به این ترتیب عمل می‌کنیم :

$$1 + 2\cos x \cos 3x = 0$$
$$1 + \cos 2x + \cos 4x = 0$$
$$1 + \cos 2x + 2\cos^2 2x - 1 = 0$$
$$2\cos^2 2x + \cos 2x = 0$$
$$\cos 2x(2\cos 2x + 1) = 0 \qquad (1)$$

از معادلهٔ (۱) دو معادلهٔ :

$$\cos 2x = 0$$

و

$$2\cos 2x + 1 = 0$$

یا

$$\cos 2x = 0 \qquad (B)$$

و

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} \qquad (B')$$

نتیجه می‌شود . اما می‌دانیم که

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

و

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \qquad \left(0 < \frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{3} < \pi\right)$$

در نتیجه دو معادلهٔ (B) و (B') را به صورتهای زیر می‌توان نوشت :

$$\cos 2x = \cos\frac{\pi}{2}$$
$$\cos 2x = \cos\frac{2\pi}{3}$$

و از این رو با استفاده از دستورهای (۴) صورت کلی کمانهای $2x$ را چنین می‌نویسیم :

$$(I) \qquad 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$
$$(II) \qquad 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

و از روابط (I) و (II) کمانهای x ، جوابهای کلی معادلهٔ مفروض ، به سه صورت زیر بدست می‌آیند :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= (2k+1)\frac{\pi}{4} \\ x &= k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{aligned}}$$

مثال ۶ـ مطلوب است تعیین کمانهای x جوابهای معادلهٔ :

$$(1) \qquad 4\cos 2x - 4\sqrt{3}\cos x + 5 = 0$$

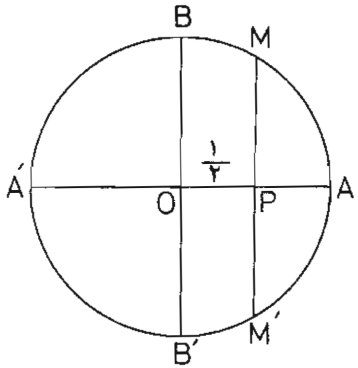
بقسمی که داشته باشیم : $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$.

حل - با فرض : $\cos x = y$ معادلهٔ (۱) را به صورت :

$$(E) \qquad f(y) = 8y^2 - 4\sqrt{3}\,y + 1 = 0$$

می نویسیم و در دایرهٔ مثلثاتی (شکل ۱) ملاحظه می کنیم که نقاط M' و M انتهای کمانهای به مبدأ A و به مقدار جبری $-\frac{\pi}{3}$ و $+\frac{\pi}{3}$ روی عمود منصف شعاع OA قرار دارند ، زیرا :

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$



شکل ۱

و با فرض اینکه y_1 ریشه‌ای ازمعادلهٔ (E) باشد :

۱) اگر داشته باشیم : $0 < y_1 \leq \frac{1}{2}$ ، معادلهٔ (۱) یك جواب قابل قبول نظیرمقدار y_1 خواهد داشت .

۲) چنانچه داشته باشیم : $\frac{1}{2} < y_1 < 1$ ، معادلهٔ (۱) دو جواب قابل‌قبول که قرینهٔ یکدیگرند نظیرمقدار y_1 خواهد داشت .

۳) اگر داشته باشیم : $y_1 = 1$ ، معادلهٔ (۱) یك جواب قابل قبول $x = 0$ نظیرمقدار y_1 خواهد داشت .

حال چون ریشه‌های معادلهٔ(E) راحساب کنیم چنین خواهیم داشت :

$$y' = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \quad , \quad y'' = \frac{-1+\sqrt{3}}{4}$$

وبسهولت دیده می‌شود که وضع اعداد ۰، $\frac{1}{2}$ و ۱ با این ریشه‌هاچنین است:

$$0 < y'' < \frac{1}{2} < y' < 1$$

بنابراین ، نظیر ریشهٔ $y = y''$ یعنی $\cos x = \frac{-1+\sqrt{3}}{4}$ یك جواب قابل قبول ونظیر ریشهٔ $y = y'$ یعنی $\cos x = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$ دو جواب قابل قبول که قرینهٔ یکدیگرند برای معادلهٔ (۱) وجود دارد و با فرض :

$$\cos\alpha = \frac{-1+\sqrt{3}}{4}$$

و

$$\cos\beta = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

$$\left(\alpha = \mathrm{Arc}\cos\frac{-1+\sqrt{3}}{4} \quad , \quad \beta = \mathrm{Arc}\cos\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)$$

جوابهای قابل قبول معادلهٔ (۱) عبارتند از :

$$\boxed{x = \alpha \quad , \quad x = \beta \quad , \quad x = -\beta}$$

تمرین - کمانهای α و β مذکور در مسئلهٔ اخیر را برحسب رادیان حساب کنید .

مثال ۷- معادلهٔ :

$$2\sin x = tg\, x$$

را حل‌کنید وجوابهای آن راکه بین ۰ و 2π محصورند ، تعیین کنید .

حل - معادلهٔ مفروض را متوالیاً به صورتهای زیر می‌نویسیم :

$$2\sin x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$2\sin x - \frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

$$\frac{2\sin x\cos x - \sin x}{\cos x} = 0$$

و از آنجا : $$2\sin x\cos x - \sin x = 0$$

یا $$\sin x(2\cos x - 1) = 0$$

از معادلهٔ اخیر دو معادلهٔ :

$$\sin x = 0 \qquad (A)$$

و $$\cos x = \frac{1}{2} \qquad (B)$$

نتیجه می شود . معادلات (A) و (B) را بترتیب به صورتهای زیر می‌نویسیم:

$$\sin x = \sin 0$$

و $$\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$$

وازاین‌روکمانهای x ، جوابهای‌کلی دو معادلهٔ (A) و (B) راکه‌همان جوابهای کلی معادلهٔ مفروضند ، بترتیب با استفاده از دستورهای (۲) و(۴) به صورتهای (I) و (II) به شرح زیرمی‌نویسیم :

$$x = k\pi \qquad (I)$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \qquad (II)$$

حال اگر در دستورهای (I) و (II) به جای k اعداد ۰ ، ۱ ، ۲ و .... و همچنین ۱− ، ۲− و ... را قرار دهیم خواهیم دید جوابهایی از معادلهٔ مفروض‌که بین۰ و ۲π محصورند عبارتند از :

$$\boxed{x = 0 \;،\; x = \frac{\pi}{3} \;،\; x = \pi \;،\; x = \frac{5\pi}{3} \;\text{و}\; x = 2\pi}$$

مثال ۸ـ مطلوب است حل معادلهٔ :

$$tg 4x - tg x = 0$$

حل ـ معادلهٔ مفروض را به صورت :

$$tg 4x = tg x$$

می‌نویسیم وبنابه دستور (۵) چنین‌خواهیم داشت :

$$4x = k\pi + x$$

واز آنجا : $$3x = k\pi$$

و $$\boxed{x = \frac{k\pi}{3}}$$

مثال ۹ـ مطلوب است حل معادلهٔ :

$$\cos 5x + \cos 4x + \cos 3x = 0$$

حل ـ مجموع $(\cos 5x + \cos 3x)$ را به حاصل ضرب عاملها تبدیل می‌کنیم :

$$\cos 5x + \cos 3x = 2\cos 4x\cos x$$

بنابراین معادلهٔ مفروض‌را به صورت زیرمی‌توان نوشت :

$$2\cos 4x\cos x + \cos 4x = 0$$

یا $$\cos 4x(2\cos x + 1) = 0$$

از معادلهٔ اخیر دو معادلهٔ :

$$\cos 4x = 0 \qquad (B)$$

و $$\cos x = -\frac{1}{2} \qquad (B')$$

نتیجه می‌شود . معادلات (B) و (B') را بترتیب به صورتهای زیر می‌نویسیم :

$$\cos 4x = \cos\frac{\pi}{2}$$

و $$\cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$$

و از این رو کمانهای x ، جوابهای کلی دو معادلهٔ (B) و (B') را که همان جوابهای کلی معادلهٔ مفروضند ، با استفاده از دستورهای (۴) بترتیب به صورتهای (I) و (II) به شرح زیر می‌نویسیم :

$$4x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

و از آنجا :

$$\boxed{\begin{array}{ll} x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8} & \text{(I)} \\ x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} & \text{(II)} \end{array}}$$

مثال ۱۰ ــ معادلهٔ :

$$(m+1)\cos x - m = 0 \qquad (1)$$

راکه درآن m عددی است معلوم حل‌کرده به‌ازای مقادیر مختلف m دروجود جوابهای‌آن بحث کنید .

حل ــ ابتدا با فرض : $\cos x = y$ معادلهٔ :

$$f(y) = (m+1)y - m = 0 \qquad (E)$$

را با شرط اینکه داشته باشیم $m \neq -1$ حل می‌کنیم :

$$y = \frac{m}{m+1}$$

چون $-1 \leq \cos x = y \leq 1$ ، پس $0 \leq \cos^2 x = y^2 \leq 1$ و باید داشته باشیم :

$$\frac{m^2}{(m+1)^2} \leq 1$$

از حل این نامعادله حاصل می‌شود : $m \geq -\frac{1}{2}$ ، و این شرط با شرط $m \neq -1$ سازگار است .

بنابراین معادلهٔ (۱) وقتی‌جواب داردکه داشته‌باشیم : $m \geq -\frac{1}{2}$ ، وبا برقراری این نامساوی کمانهای x ، جوابهای معادلهٔ (۱) ، را چنان تعیین خواهیم کرد که داشته باشیم : $\cos x = y = \frac{m}{m+1}$ (شمارهٔ ۲ همین فصل) .

مثال۱۱ــ معادلهٔ :

$$tg^2 x - 2m\,tg\,x + 4 = 0 \qquad (1)$$

را که در آن m نمایش عددی است معلوم حل کرده به ازای مقادیر مختلف m در وجود جوابهای آن بحث کنید .

حل ــ ابتدا با فرض : $tg\,x = y$ معادلهٔ :

$$f(y) = y^2 - 2my + 4 = 0 \qquad (E)$$

را حل می‌کنیم . اگر y_1 ریشه‌ای حقیقی ازمعادلهٔ (E) باشد ، کمانهای x را چنان تعیین خواهیم کرد که داشته باشیم : $tg\,x = y_1$ (شمارهٔ ۳ همین فصل) .

برای بحث درجوابهای معادلهٔ (۱) ملاحظه می‌کنیم که y یعنی

$tg x$ جمیع مقادیر را می‌تواند اختیار کند ؛ بنابراین تنها شرط وجود جوابهایی برای معادلهٔ (۱) این است که معادلهٔ (E) ریشهٔ حقیقی داشته باشد یعنی مبیّن آن منفی نباشد ، پس باید داشته باشیم :

$$m^2-4\geq 0$$

واین شرایط در صورتی محققند که داشته باشیم :

$$m\leq -2 \qquad \text{یا} \qquad m\geq 2$$

بابرقراری هرکدام از شرایط اخیر معادلهٔ (E) ریشه یاریشه‌های حقیقی خواهد داشت ونظیر هر ریشهٔ حقیقی از معادلهٔ (E) کمانهایی به صورت :

$$x=k\pi+\alpha$$

جوابهایی از معادلهٔ (۱) خواهند بود .

مثال۱۲ـ معادلهٔ :

$$(1)\qquad m\,tg^2x-(2m+1)tg x+m-3=0$$

مفروض‌است . مطلوب است تعیین مقادیری از پارامتر m که به ازای آنهاکمانهای x ، جوابهای معادلهٔ (۱) ، درنامساویهای :

$$(I)\qquad 0<x<\frac{\pi}{2}$$

صدق کنند .

حل‌ـ با فرض : $tg x=y$ معادلهٔ (۱) به‌این‌صورت نوشته می‌شود :

$$(E)\qquad f(y)=my^2-(2m+1)y+m-3=0$$

اگر کمان x ، جوابی از معادلهٔ (۱) ، در نامساویهای (I) صدق کند نامساوی :

$$(II)\qquad tg x=y>0$$

برقرار خواهد بود و چنانچه y ، ریشه‌ای از معادلهٔ (E) ، در نامساوی (II) صدق‌کند و α کمانی واقع‌بین ۰ و $\frac{\pi}{2}$ باشد بقسمی که داشته باشیم : $tg\alpha=y$ ، کمان $x=\alpha$ جوابی از معادلهٔ (۱) خواهد بود که در نامساویهای (I) صدق می‌کند .

بنابراین ابتدا باید تحقیق کنیم به ازای چه مقادیری از m معادلهٔ (E) دارای یك ریشه یا دو ریشهٔ مثبت است وبرای این‌منظوردر معادلهٔ (E) باید علامات عبارتهای :

$$\Delta=16m+1$$

$$\frac{c}{a}=\frac{m-3}{m} \qquad \text{و}$$

$$-\frac{b}{a}=\frac{2m+1}{m} \qquad \text{و}$$

و از آن‌رو علامات ریشه‌های معادله را به ازای مقادیر مختلف m تعیین‌کنیم .

جدول صفحهٔ بعد علامات عبارات مزبور ونیز علامات ریشه‌های معادلهٔ (E) را به ازای مقادیر مختلف m و همچنین مقادیری از m راکه به ازای‌آنها معادلهٔ (E) دارای یك یا دو ریشهٔ مثبت است نشان می‌دهد :

m	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{16}$		0		3	$+\infty$
Δ	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\frac{c}{a}$	$+$		$+$		$+$	∞	$-$	0	$+$
$-\frac{b}{a}$	$+$	0	$-$		$-$	∞	$+$		$+$
علامت ریشه‌ها	معادله ریشه ندارد			$y'=y''<0$	$y'<0$ $y''<0$	$y=-2$	$y'>0$ $y''<0$ $\|y'\|>\|y''\|$	$y''=0$ ، $y'>0$	$y'>0$ $y''>0$

نتیجه:
به ازای مقادیر $3 \geqslant m > 0$ یک ریشهٔ معادله مثبت است.
به ازای مقادیر $m > 3$ هردو ریشهٔ معادله مثبت است.

پس از تنظیم جدول بالا و تشخیص مقادیر مناسب m ، بطوری که قبلا نیزگفتیم، باید متذکر بودکه نظیر هرریشهٔ مثبت y_1 از معادلهٔ (E) کمانی به‌صورت $x=\alpha=\mathrm{Arctg}\,y_1$ جوابی از معادلهٔ (۱) خواهد بودکه در نامساویهای (I) صدق می‌کند.

مثال۱۳ـ معادلهٔ:

$$m\sin^2 x-2(m-2)\sin x+m+2=0 \qquad (1)$$

را که در آن m نمایش عددی است معلوم حل کرده به ازای مقادیر مختلف m در جوابهای‌آن بحث کنید.

حل ـ ابتدا با فرض: $\sin x=y$ معادلهٔ:

$$f(y)=my^2-2(m-2)y+m+2=0 \qquad (E)$$

را حل می کنیم. اگر y_1 ریشه‌ای از معادلهٔ (E) متعلق به فاصلهٔ $(+1, -1)$ باشد، کمانهای x را چنان تعیین خواهیم کردکه داشته باشیم: $\sin x=y_1$ (شمارهٔ ۱ همین فصل)، و نظیر هر ریشه از معادلهٔ (E)که متعلق به فاصلهٔ $(+1, -1)$ باشدکمانهایی به صورتهای:

$$x=2k\pi+\alpha$$
$$x=(2k+1)\pi-\alpha$$

جوابهایی از معادلهٔ (۱) خواهند بود.

برای بحث درجوابهای معادلهٔ (۱) به‌ترتیب زیرعمل می‌کنند:

۱) تحقیق می‌کنند به ازای چه مقادیری از m معادلهٔ (E) دارای دوریشهٔ متمایز است که فقط یکی از آن دو ریشه بین -1 و $+1$ واقع‌بوده وریشهٔ دیگر خارج از فاصلهٔ $(+1, -1)$ باشد. این مقادیرm جوابهای نامساوی زیرند:

$$f(-1)f(1)<0 \qquad (I)$$

وچون داریم:

$$f(-1)=2(2m-1)$$
و
$$f(1)=6$$

نامساوی (I) را که تشکیل دهیم چنین‌خواهیم داشت:

$$f(-1)f(1)=12(2m-1)<0$$

وجواب نامساوی اخیر چنین است:

$$m<\frac{1}{2}$$

بنابراین به ازای مقادیر $m<\frac{1}{2}$ فقط یکی از ریشه‌های معادلهٔ

(E) بین ۱− و ۱+ واقع است.

حال اگرداشته باشیم : $\circ<m<\frac{1}{2}$ ، از اینکه در معادلهٔ (E) علامت $f(1)=6$ موافق با علامت ضریب y^2 می‌شود نتیجه می‌گیریم که علامت $f(-1)$ مخالف با علامت ضریب y^2 است ، پس قطعاً عدد ۱− بین دو ریشه وعدد ۱ بزرگتر ازهردو ریشه است واز این‌رو معلوم می‌شود که با فرض $\circ<m<\frac{1}{2}$ فقط ریشهٔ بزرگتر معادلهٔ (E) بین ۱− و ۱+ واقع است.

چنانچه داشته باشیم : $m<\circ$ ، ازاینکه در معادلهٔ (E) علامت $f(1)=6$ مخالف با علامت ضریب y^2 می‌شود نتیجه می گیریم که عدد ۱ مسلماً بین دو ریشه واقع است و بناچار عدد ۱− کوچکتر از هر دوریشه خواهد بود یعنی با فرض $m<\circ$ فقط ریشهٔ کوچکتر معادلهٔ (E) بین ۱− و ۱+ واقع است.

علاوه برمطالب فوق لازم است به این‌نکته نیز دقیقاً توجه شود که در هر دو حالت مذکور برای بدست آوردن ریشهٔ قابل قبول معادلهٔ (E) باید در عبارتهای :

$$\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

که صورت کلی ریشه‌های یك معادلهٔ درجهٔ دومند فقط علامت + را جلو رادیکال اختیار کرد و به بیان دیگر ، اعم از اینکه نامساوی مضاعف $\circ<m<\frac{1}{2}$ یا نامساوی $m<\circ$ برقرار باشد معادلهٔ (E)

فقط یك ریشهٔ قابل قبول به صورت زیر خواهد داشت :

$$y=\frac{m-2+\sqrt{-6m+4}}{m}$$

برای توضیح یادآور می‌شویم که با فرض حقیقی بودن ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم :

$$(E')\qquad ax^2+bx+c=\circ$$

داریم :

$$x'=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

و

$$x''=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

و در نتیجه مقدار عبارت $x'-x''$ چنین است :

$$(E'')\qquad x'-x''=\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

حال اگر a مثبت باشد ، طرف دوم تساوی (E'') مثبت خواهد بود و در نتیجه خواهیم داشت :

$$x'-x''>\circ$$

یا

$$x'>x''$$

یعنی $x'=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ریشهٔ بزرگتر معادلهٔ (E') است.

چنانچه a منفی باشد ، طرف دوم تساوی (E'') منفی خواهد بود و در نتیجه خواهیم داشت :

$$x'-x''<\circ$$

یا

$$x'<x''$$

یعنی $x'=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ریشهٔ کوچکتر معادلهٔ (E') است.

در حالت خاصی که m مساوی صفر باشد معادلهٔ (E) به معادلهٔ درجهٔ اول :

$$4y+2=0$$

منجر می‌شود و ریشهٔ منحصر به فرد آن $y=-\frac{1}{2}$ بین ۱− و ۱+ واقع است و در این حالت خاص کمانهای x جوابهای معادلهٔ :

$$\sin x=-\frac{1}{2} \qquad \text{(A)}$$

جوابهای معادلهٔ (۱) به ازای $m=0$ خواهند بود ، وچون معادلهٔ (A) را به صورت :

$$\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

بنویسیم بنا به‌دستورهای (۲) جوابهای کلی معادلهٔ (A) به این‌دوصورت نوشته می‌شوند :

$$x=2k\pi-\frac{\pi}{6}$$

$$x=2k\pi+\frac{7\pi}{6}$$

۲) تحقیق می‌کنند به ازای چه مقادیری از m معادلهٔ (E) دارای دو ریشهٔ متمایز است که هر دو بین ۱− و ۱+ واقع باشند .

این مقادیر m مقادیری هستند که در هرپنج نامساوی :

$$\Delta=b^2-4ac=4(-6m+4)>0$$

یا

$$\begin{cases} \Delta'=-6m+4>0 \\ \text{و} \quad a\cdot f(-1)=2m(2m-1)>0 \\ \text{و} \quad -1+\frac{b}{2a}=\frac{-2m+2}{m}<0 \\ \text{و} \quad a\cdot f(1)=6m>0 \\ \text{و} \quad 1+\frac{b}{2a}=\frac{2}{m}>0 \end{cases}$$

صدق کنند و به بیان دیگر ، مقادیر مطلوب m مقادیری هستند که جواب مشترك پنج نامساوی مذکور باشند .

در جدول زیر علامات هر یك از عبارات Δ' ، $a\cdot f(-1)$ ، $-1+\frac{b}{2a}$ ، $a\cdot f(1)$ و $1+\frac{b}{2a}$ به ازای مقادیر مختلف m تعیین شده است .

m	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
Δ'		+		+		+	0	−		−	
$a\cdot f(-1)$		+	0	−	0	+		+		+	
$-1+\frac{b}{2a}$		−	∞	+		+		+	0	−	
$a\cdot f(1)$		−	0	+		+		+		+	
$1+\frac{b}{2a}$		−	∞	+		+		+		+	

و بطوری که جدول بالا نشان می‌دهد پنج نامساوی نامبرده جواب مشترکی ندارند و در نتیجه به ازای هیچ مقداری از m معادلهٔ (E) دارای دو ریشه که هر دو بین ۱− و ۱+ واقع باشند نیست .

مثال ۱۴ـ معادلهٔ زیر مفروض است :

$$3\cos x-\cos 2x=m^2+1$$

۱) آیا مقادیری ازپارامتر m وجود داردکه به ازای آنها فقط یکی از جوابهای معادلهٔ بالا در نامساویهای زیر صدق کنند :

$$\text{(I)} \qquad 0<x<\frac{\pi}{3}$$

۲) مقادیری از پارامتر m را تعیین کنید که به ازای آنها فقط دو جواب از معادلهٔ مفروض در نامساویهای (I) صدق کنند.
در حالات امکان مسئله، جواب قابل قبول را چگونه مشخص می‌کنید؟

حل - چون درمعادلهٔ مفروض $\cos 2x$ را برحسب $\cos x$ بنویسیم ($\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$) پس از اختصار چنین خواهیم داشت:

$$(1)\qquad 2\cos^2 x - 3\cos x + m^2 = 0$$

و با فرض: $\cos x = y$ معادلهٔ (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(E)\qquad f(y) = 2y^2 - 3y + m^2 = 0$$

اگر کمان x، جوابی از معادلهٔ (۱)، در نامساویهای (I) صدق کند، نامساویهای:

$$\cos\frac{\pi}{3} < \cos x = y < \cos 0$$

یا

$$(II)\qquad \frac{1}{2} < \cos x = y < 1$$

برقرار خواهد بود واگر y، ریشه‌ای از معادلهٔ (E)، در نامساویهای (II) صدق‌کند و α کمانی واقع بین ۰ و π باشد بقسمی‌که داشته‌باشیم: $\cos\alpha = y$، کمان α جوابی از معادلهٔ (۱) خواهد بودکه درنامساویهای (I) صدق می‌کند. بنابراین تحقیق می‌کنیم به ازای چه مقادیری از m یك ریشه یا هر دو ریشهٔ معادلهٔ (E) بین $\frac{1}{2}$ و ۱ واقعند.

۱) برای آنکه معادلهٔ (E) دو ریشهٔ متمایز داشته باشد و فقط یکی ازآنها بین $\frac{1}{2}$ و ۱ واقع باشد لازم و کافی است که داشته باشیم:

$$(III)\qquad f(\tfrac{1}{2})f(1) < 0$$

و چون داریم:

$$f(\tfrac{1}{2}) = m^2 - 1$$

و

$$f(1) = m^2 - 1$$

حاصلضرب $f(\frac{1}{2})f(1)$ را که تشکیل دهیم چنین خواهیم داشت:

$$f(\tfrac{1}{2})f(1) = (m^2-1)(m^2-1) = (m^2-1)^2$$

و با ملاحظهٔ اینکه عبارت $(m^2-1)^2$ به ازای $m=\pm 1$ برابرصفر و به‌ازای سایر مقادیر m مثبت است معلوم می‌شود نامساوی (III) به ازای هیچ مقداری از m برقرار نیست و نتیجه اینکه هیچ مقداری از m وجود ندارد که به ازای آن فقط یکی از ریشه‌های معادلهٔ (E) بین $\frac{1}{2}$ و ۱ قرار داشته باشد.

۲) برای آنکه معادلهٔ (E) دو ریشهٔ متمایز داشته باشد وهردو ریشه بین $\frac{1}{2}$ و ۱ باشند لازم و کافی است که مقادیر m چنان باشند که درهر پنج نامساوی:

$$\begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 8m^2 > 0 \\ a\cdot f(\frac{1}{2}) = 2(m^2-1) > 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{b}{2a} = -\frac{1}{4} < 0 \\ a\cdot f(1) = 2(m^2-1) > 0 \\ 1 + \frac{b}{2a} = \frac{1}{4} > 0 \end{cases}$$

صدق کنند و به‌بیان دیگر، مقادیر m بایدجواب مشترك پنج نامساوی مذکور باشند.

در جدول زیرعلامت هریك ازعبارات Δ ، $a\cdot f(\frac{1}{2})$ ، $\frac{1}{2}+\frac{b}{2a}$ ، $a\cdot f(1)$ و $1+\frac{b}{2a}$ به ازای مقادیر مختلف m وهمچنین مقادیر m ، جوابهای مشترك پنج نامساوی مذکور ، که به ازای آنها هر دوریشهٔ معادلهٔ (E) بین $\frac{1}{2}$ و ۱ قرار دارند تعیین شده است :

m	$-\infty$		$-\frac{3\sqrt{2}}{4}$		-1		1		$\frac{3\sqrt{2}}{4}$		$+\infty$
Δ		−	0	+		+		+	0	−	
$a\cdot f(\frac{1}{2})$		+		+	0	−	0	+		+	
$\frac{1}{2}+\frac{b}{2a}$		−		−		−		−		−	
$a\cdot f(1)$		+		+	0	−	0	+		+	
$1+\frac{b}{2a}$		+		+		+		+		+	
نتیجه	بازای مقادیر : $-\frac{3\sqrt{2}}{4}\leqslant m<-1$ و $1<m\leqslant\frac{3\sqrt{2}}{4}$ هر دو ریشهٔ معادله بین $\frac{1}{2}$ و ۱ قراردارند.										

پس از تنظیم جدول اخیر وتشخیص مقادیر مناسب m ، بطوری که قبلا نیز گفتیم ، باید متذکر بود که نظیر هر ریشهٔ قابل قبول y_1 از معادلهٔ (E) کمانی به صورت $x=\alpha=\text{Arc}\cos y_1$ جوابی از معادلهٔ

(۱) خواهد بود که در نامساویهای (I) صدق می‌کنند.

تبصره ــ جدول صفحهٔ قبل نشان می‌دهد که به ازای $m=\pm\frac{3\sqrt{2}}{4}$ معادلهٔ (E) دارای دو ریشهٔ متساوی است ؛ اما چون از همین جدول معلوم می‌شود که این دو ریشهٔ غیرمتمایز بین $\frac{1}{2}$ و ۱ قرار دارند یعنی در شرایط مسئله صدق می‌کنند قابل قبولند.

مثال ۱۵ ــ معادلهٔ :

$$\sin x(\sin x+\cos x)=m$$

مفروض است. مطلوب است تعیین مقادیری از پارامتر m که بدازای آنها داشته باشیم :

$$(I)\qquad \frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$$

حل ــ در معادلهٔ مفروض اگر x را به $(\pi+x)$ تبدیل کنیم معادله تغییر نمی‌کند (چرا ؟) ؛ بنابراین $tg x$ را مجهول معاون قرار می‌دهیم یعنی تمام توابع مثلثاتی موجود در معادله را برحسب $tg x$ می‌نویسیم و برای انجام دادن این کار به ترتیب زیر عمل می‌کنیم :

$$\sin x(\sin x+\cos x)=m$$

$$\sin^2 x+\sin x\cos x-m=0$$

$$\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin 2x-m=0$$

$$\frac{tg^2 x}{1+tg^2 x}+\frac{1}{2}\times\frac{2\,tg x}{1+tg^2 x}-m=0$$

$$\frac{tg^2x}{1+tg^2x}+\frac{tgx}{1+tg^2x}-m=0$$

$$(1)\qquad (m-1)tg^2x-tgx+m=0$$

و با فرض : $tgx=y$ معادلهٔ (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$(E)\qquad f(y)=(m-1)y^2-y+m=0$$

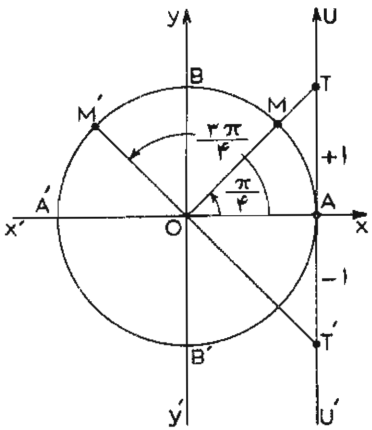
حال باتوجه به‌اینکه داریم : $tg\frac{\pi}{4}=1$ و $tg\frac{3\pi}{4}=-1$ از روی دایرهٔ مثلثاتی (شکل ۲) بسهولت دیده می‌شودکه اگر کمان x ، جوابی ازمعادلهٔ (۱)، در نامساویهای (I) صدق کند ، یکی از دو نامساوی زیر برقرارند :

$$(II)\qquad tgx=y>1$$

یا

$$(III)\qquad tgx=y<-1$$

یعنی $tgx=y$ خارج از فاصلهٔ $(-1 ، +1)$ خواهد بود و چنانچه y ، ریشه‌ای از معادلهٔ (E) ، خارج‌ازفاصلهٔ $(-1،+1)$



شکل ۲

باشد یعنی دریکی از دو نامساوی (II) یا (III) صدق‌کند و α کمانی واقع بین $-\frac{\pi}{2}$ و $+\frac{\pi}{2}$ باشد بقسمی که داشته باشیم : $tg\alpha=y$ ، کمان $x=\alpha$ یا کمان $x=\pi+\alpha$ جوابی از معادلهٔ (۱) خواهد بود که در نامساویهای (I) صدق می‌کند . بنابراین برای بدست آوردن جوابهای

قابل قبول مسئله کافی است مقادیری از m را تعیین کنیم که به ازای آنها ریشه یا ریشه‌های معادلهٔ (E) خارج از فاصلهٔ $(-1 ، +1)$ باشند . برای تشخیص این‌مقادیر m، در معادلهٔ (E) با تعیین علامات عبارتهای :

$$\begin{cases}\Delta=-4m^2+4m+1 \\ a\cdot f(-1)=2m(m-1) & \text{و} \\ -1+\frac{b}{2a}=\frac{-2m+1}{2(m-1)} & \text{و} \\ a\cdot f(1)=2(m-1)^2 & \text{و} \\ 1+\frac{b}{2a}=\frac{2m-3}{2(m-1)} & \text{و}\end{cases}$$

اعداد ۱- و ۱+ را با ریشه‌های معادله به ازای مقادیر مختلف m مقایسه می‌کنیم و از روی نتایج حاصل از این مقایسه مقادیر مطلوب m را مشخص می‌سازیم .

جدول صفحهٔ بعد علامت هریك ازعبارات مذکور ووضع اعداد ۱- و ۱+ را با ریشه‌های معادلهٔ (E) به ازای مقادیر مختلف m و همچنین مقادیری از m را که به ازای آنها معادلهٔ (E) دارای ریشه یا ریشه‌های قابل قبول است نشان می‌دهد .

m	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$		۰		$\frac{1}{2}$		۱		$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Δ		$-$	۰	$+$		$+$		$+$		$+$	۰	$-$		$-$	
$a\cdot f(-1)$		$+$		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$		$+$		$+$	
$-1+\frac{b}{2a}$		$-$		$-$		$-$	۰	$+$	∞	$-$		$-$		$-$	
$a\cdot f(1)$		$+$		$+$		$+$		$+$	۰	$+$		$+$		$+$	
$1+\frac{b}{2a}$		$+$		$+$		$+$		$+$	∞	$-$		$-$	۰	$+$	
مقایسه		معادله ریشه ندارد	$-1<y'=y''=1-\sqrt{2}<1$	$-1<y'<y''<1$	$-1=y'<y''<1$	$y'<-1<y''<1$			$y=1$	$-1<1<y''<y'$	$-1<1<y'=y''=1+\sqrt{2}$	معادله ریشه ندارد			
نتیجه	به ازای مقادیر $0<m<1$ یک ریشهٔ معادله : $y'=\frac{1+\sqrt{-4m^2+4m+1}}{2(m-1)}$ قابل قبول است. به ازای مقادیر $1<m\leqslant\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ هر دو ریشهٔ معادله قابل قبولند.														

khosro1952

پس از تنظیم جدول صفحهٔ قبل و تشخیص مقادیر مناسب m ، بطوری که قبلا نیز گفتیم ، باید متذکر بود که نظیر هر ریشهٔ $y_1>1$ از معادلهٔ (E) کمانی به‌صورت : $x=\alpha=Arctg\,y_1$ و نظیر هر ریشهٔ $y_2<-1$ ازمعادلهٔ (E) کمانی به‌صورت : $x=\pi+\beta=\pi+Arctg\,y_2$ جوابی از معادلهٔ (۱) خواهد بود که در نامساویهای (I) صدق می‌کند .

۹- در شمارهٔ ۸ نمونه‌ای چند از انواع بیشمار معادلات مثلثاتی یك مجهولی وطریقهٔ حل و بحث آنها را دیدیم. اینك به‌دنبال نمونه‌های مذکور طریقهٔ حل و بحث چهار نوع مخصوص از این معادلات را که مورد استعمال بیشتری در مثلثات پیدا کرده و به **معادلات کلاسیك** موسومند بیان می‌کنیم .

۱۰- معادلهٔ کلاسیك نوع اول - صورت کلی معادلهٔ کلاسیك نوع اول چنین است :

$$a\sin x+b\cos x=c \qquad (1)$$

برای حل این معادله دو طریقه ذکر می‌کنیم :

طریقهٔ اول - این طریقه بیشتر در مواردی بکار می‌رود که ضرایب a ، b و c اعداد معلومی باشند و بخواهند مقادیر عددی جوابهای معادله را به وسیلهٔ جدول لگاریتم بدست آورند .

۱) حل معادله : درمعادلهٔ (۱) اگر داشته باشیم : $a=0$، معادله به صورت : $\cos x=\frac{c}{b}$ در می‌آید که حل و بحث آن بسهولت انجام می‌گیرد ؛ پس با فرض : $a\neq 0$ معادلهٔ (۱) را حل می‌کنیم .

چون طرفین معادلهٔ (۱) را بر a تقسیم کنیم حاصل می‌شود :

$$\sin x+\frac{b}{a}\cos x=\frac{c}{a} \qquad (۲)$$

حال فرض می‌کنیم :

$$\frac{b}{a}=tg\alpha \qquad \left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

با این فرض معادلهٔ (۲) به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\sin x+tg\alpha\cos x=\frac{c}{a}$$

یا

$$\sin x+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos x=\frac{c}{a}$$

و از آنجا :

$$\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha=\frac{c}{a}\cos\alpha$$

یا :

$$\sin(x+\alpha)=\frac{c}{a}\cos\alpha \qquad (۳)$$

اگر داشته باشیم : $\left|\frac{c}{a}\cos\alpha\right|>1$ ، معادلهٔ (۳) ممتنع است .

چنانچه داشته باشیم : $\left|\frac{c}{a}\cos\alpha\right|<1$ ، کمانی مانند φ ، بین $-\frac{\pi}{2}$ و $+\frac{\pi}{2}$ ، وجود دارد بقسمی که داشته باشیم :

$$\sin\varphi=\frac{c}{a}\cos\alpha \qquad (۴)$$

و با این قرار ، از مقایسهٔ روابط (۳) و (۴) نتیجه می‌شود :

$$\sin(x+\alpha)=\sin\varphi$$

پس بین کمانهای $(x+\alpha)$ و φ که دارای سینوسهای برابرند

بنا به دستورهای (۲) دو رابطهٔ زیر برقرار است :

$$x+\alpha=2k\pi+\varphi$$

$$x+\alpha=(2k+1)\pi-\varphi$$

واز این دو رابطه کمانهای x ، جوابهای کلی معادلهٔ (۱) ، به دو صورت زیر بدست می‌آیند :

$$\boxed{\begin{array}{l} x=2k\pi+\varphi-\alpha \qquad (۵) \\ x=(2k+1)\pi-\varphi-\alpha \qquad (۶) \end{array}}$$

هرگاه داشته باشیم : $\frac{c}{a}\cos\alpha=1$ ، معادلهٔ (۳) به صورت زیر در می‌آید :

$$\sin(x+\alpha)=1$$

یا

$$\sin(x+\alpha)=\sin\frac{\pi}{2}$$

پس بنا به دستورهای (۲) خواهیم داشت :

$$x+\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

و از رابطهٔ اخیر کمانهای x ، جوابهای کلی معادلهٔ (۱)، به صورت زیر بدست می‌آیند :

$$\boxed{x=2k\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha} \qquad (۷)$$

بالاخره اگر داشته باشیم : $\frac{c}{a}\cos\alpha=-1$ ، معادلهٔ (۳) به این صورت نوشته می‌شود :

$$\sin(x+\alpha) = -1$$

یا
$$\sin(x+\alpha)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

پس بنا به دستورهای (۲) خواهیم داشت :

$$x+\alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

و از رابطهٔ اخیر کمانهای x ، جوابهای کلی معادلهٔ (۱) ، به‌صورت زیر بدست می‌آیند :

$$\boxed{x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - \alpha} \qquad (8)$$

۲) بحث : برای آنکه قدر مطلق $\frac{c}{a}\cos\alpha$ کوچکتر از ۱ باشد ، لازم و کافی است که داشته باشیم :

$$\frac{c^2}{a^2}\cos^2\alpha<1$$

یا
$$\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}<1$$

یا
$$\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}}<1$$

یا
$$\frac{c^2}{a^2+b^2}<1$$

یا
$$a^2+b^2-c^2>0$$

اگر نامساوی اخیر برقرار باشد ، معادلهٔ (۱) دارای جوابهایی به دو صورت (۵) و (۶) خواهد بود و چنانچه داشته باشیم :

$$\left|\frac{c}{a}\cos\alpha\right| = 1$$

یعنی وقتی که داشته باشیم :

$$a^2+b^2-c^2=0$$

معادلهٔ (۱) جوابهایی به صورت (۷) یا (۸) خواهد داشت .

بطور خلاصه معادلهٔ (۱) درصورتی جواب دارد که داشته باشیم :

$$a^2+b^2-c^2\geqslant 0$$

تبصره ــ برای حل کردن معادلهٔ (۱) ممکن بود با فرض $b\neq 0$ طرفین معادله را بر b تقسیم کنیم و زاویهٔ کمکی α $\left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ را بقسمی تعیین کنیم که داشته باشیم : $\frac{a}{b}=\operatorname{tg}\alpha$.

مثال ۱ــ مطلوب است حل معادلهٔ :

$$\sin x+(2-\sqrt{3})\cos x=\sqrt{3}-1 \qquad (1)$$

حل ــ در معادلهٔ (۱) داریم :

$$a^2+b^2-c^2=1^2+(2-\sqrt{3})^2-(\sqrt{3}-1)^2=2(2-\sqrt{3})>0$$

پس معادلهٔ مفروض دارای جواب است و برای حل آن ، طبق قاعده‌ای که‌گفتیم ، چنین عمل می‌کنیم :

$$\sin x+\frac{2-\sqrt{3}}{1}\cos x=\frac{\sqrt{3}-1}{1} \qquad (2)$$

و با توجه به اینکه داریم :

$$\frac{b}{a}=\frac{2-\sqrt{3}}{1}=2-\sqrt{3}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} \text{ ، } \left(0<\frac{\pi}{12}<\frac{\pi}{2}\right)$$ (جدول صفحهٔ ۳)

معادلهٔ (۲) را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$\sin x+\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}\cos x=\sqrt{3}-1$$

یا :
$$\sin x+\frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}}\cos x=\sqrt{3}-1$$

و از آنجا :

$$\sin x\cos\frac{\pi}{12}+\cos x\sin\frac{\pi}{12}=(\sqrt{3}-1)\cos\frac{\pi}{12}$$

یا :
$$\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=\left(\sqrt{3}-1\right)\cos\frac{\pi}{12}$$

معادلهٔ اخیررا نیز با توجه به‌اینکه داریم : $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
(جدول صفحهٔ ۳) ، به صورت زیر می‌توان نوشت :

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

یا بطور خلاصه :
$$\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (3)$$

و چون داریم :

$$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \left(0<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}\right) \qquad (4)$$

از مقایسهٔ روابط (۳) و (۴) نتیجه می‌شود :

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$$

و از این‌رو بنا به‌دستورهای (۲) داریم :

$$x+\frac{\pi}{12}=2k\pi+\frac{\pi}{4}$$
$$x+\frac{\pi}{12}=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{4}$$

و از دو رابطهٔ اخیر کمانهای x ، جوابهای کلی معادلهٔ (۱) ، به‌دوصورت زیر بدست می‌آیند :

$$\boxed{\begin{array}{l} x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \\ x=2k\pi+\frac{2\pi}{3} \end{array}}$$

توجه کنید ! این مثال که به طریقهٔ بالا حل کردیم ، همان مثال چهارم از شمارهٔ ۸ همین فصل است که قبلا به طریقهٔ دیگری حل کرده بودیم و چنانکه مشاهده می‌شود جوابهای معادله از هردو راه یکی است . ضمناً معادلهٔ مفروض صورت خاصی داشت که بدون مراجعه به جدول لگاریتم توانستیم آن را حل کنیم .

مثال ۲ ـ مطلوب است حل معادلهٔ :

$$2\sin x+3\cos x=-2 \qquad (1)$$

حل ـ در معادلهٔ (۱) داریم :

$$a^2+b^2-c^2=2^2+3^2-(-2)^2=9>0$$

پس معادلهٔ مفروض دارای جواب است و برای حل آن چنین عمل می‌کنیم :

$$\sin x+\frac{3}{2}\cos x=-1 \qquad (2)$$

و با فرض :
$$\frac{3}{2}=tg\alpha \qquad \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

معادلهٔ (۲) به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\sin x+tg\alpha\cos x=-1$$

یا :
$$\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha=-\cos\alpha$$

و از آنجا :
$$\sin(x+\alpha) = -\cos\alpha \qquad (۳)$$

اما :
$$-\cos\alpha = -\sin\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right) = \sin\left(\alpha-\frac{\pi}{۲}\right)$$

یا بطور خلاصه :
$$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{۲}\right) = -\cos\alpha \qquad (۴)$$

$$\left(-\frac{\pi}{۲} < \alpha-\frac{\pi}{۲} < ۰\right)$$

از مقایسهٔ روابط (۳) و (۴) نتیجه می‌شود :
$$\sin(x+\alpha) = \sin\left(\alpha-\frac{\pi}{۲}\right)$$

پس بین کمانهای $(x+\alpha)$ و $(\alpha-\frac{\pi}{۲})$ که دارای سینوسهای برابرند بنا به دستورهای (۲) دو رابطهٔ زیر برقرار است :
$$x+\alpha = ۲k\pi+\alpha-\frac{\pi}{۲}$$
$$x+\alpha = (۲k+۱)\pi-\alpha+\frac{\pi}{۲}$$

و از این دو رابطه کمانهای x ، جوابهای‌کلی معادلهٔ (۱) ، به‌دوصورت (۵) و (۶) به شرح زیر بدست می‌آیند :
$$x = ۲k\pi-\frac{\pi}{۲} \qquad (۵)$$
$$x = ۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲}-۲\alpha \qquad (۶)$$

مقدار عددی زاویهٔ کمکی α را به کمک جدول لگاریتم به این ترتیب حساب می‌کنیم :

بنا به فرض داریم :

$$tg\alpha = \frac{۳}{۲} \qquad \left(۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}\right)$$

بنابراین : $\log tg\alpha = \log ۳ + colog ۲$

یا : $\log tg\alpha = ۰/۴۷۷۱۲ + \bar{۱}/۶۹۸۹۷$

یا : $\log tg\alpha = ۰/۱۷۶۰۹$

و از روی جدول لگاریتم مثلثاتی معلوم می‌شود :
$$\alpha = ۵۶^\circ ۱۸' ۳۵'' \qquad (۷)$$

پس باتوجه به رابطهٔ (۷) رابطهٔ (۶) را به صورت زیر می‌توان نوشت :
$$x = k\times ۳۶۰^\circ + (۱۵۷^\circ ۲۲' ۵۰'')$$

و جوابهای کلی معادلهٔ (۱) برحسب درجه به دو صورت زیر نوشته می‌شوند :
$$\boxed{\begin{array}{l} x = k\times ۳۶۰^\circ - ۹۰^\circ \\ x = k\times ۳۶۰^\circ + (۱۵۷^\circ ۲۲' ۵۰'') \end{array}}$$

طریقهٔ دوم ـ این طریقه بیشتر در مواردی بکار می‌رودکه در معادلهٔ مفروض :
$$a\sin x + b\cos x = c \qquad (۱)$$
لااقل یکی از ضرایب a ، b و c بستگی به پارامتری داشته باشد و بخواهند برحسب مقادیر مختلف این پارامتر درجوابهای معادله بحث کنند. بدیهی است که در این قبیل معادلات محاسبهٔ مقادیرعددی برای x مورد نظر نیست. اینك طرز عمل :

ابتدا در معادلهٔ (۱) دو تابع مثلثاتی $\sin x$ و $\cos x$ را بر حسب $tg\frac{x}{2}$ می‌نویسیم تا حاصل شود :

$$a\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}+b\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=c$$

یا :

$$(b+c)tg^2\frac{x}{2}-2a\,tg\frac{x}{2}+(c-b)=0 \qquad (2)$$

وبا فرض : $tg\frac{x}{2}=y$ معادلهٔ (۲) نیز به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$f(y)=(b+c)y^2-2ay+(c-b)=0 \qquad (E)$$

اگر y_1 یك ریشهٔ حقیقی از معادلهٔ (E) و α کمانی واقع بین $-\frac{\pi}{2}$ و $+\frac{\pi}{2}$ باشد بقسمی‌که داشته باشیم : $tg\alpha=y_1$ ، جوابهای معادلهٔ (۱) نظیر ریشهٔ y_1 بقسمی خواهند بود که خواهیم داشت :

$$tg\frac{x}{2}=tg\alpha$$

و در نتیجه بنا به دستور (۶) :

$$\frac{x}{2}=k\pi+\alpha$$

یا :

$$\boxed{x=2k\pi+2\alpha} \qquad (3)$$

به این ترتیب ، نظیر هر ریشهٔ حقیقی از معادلهٔ (E) کمانهای بیشماری به صورت (۳) که همهٔ آنها به یك نقطه از دایرهٔ مثلثاتی منتهی هستند جوابهایی از معادلهٔ (۱) خواهند بود .

معادلهٔ (E) دو ریشهٔ متمایز خواهد داشت به‌شرط اینکه داشته باشیم :

$$a^2-(b+c)(c-b)>0$$

یا :

$$a^2+b^2-c^2>0$$

در حالتی که داشته باشیم : $a^2+b^2-c^2=0$ ، معادلهٔ (E) دو ریشهٔ متساوی خواهد داشت و دراین حالت جوابهای معادلهٔ (۱) ازیك دستور فقط به شکل :

$$x=2k\pi+2\alpha$$

بدست می‌آیند .

بالاخره اگر داشته باشیم : $a^2+b^2-c^2<0$ ، معادلهٔ (E) ریشه ندارد و در نتیجه معادلهٔ (۱) نیز جواب نخواهد داشت .

حالت خاص ـ با توجه به شمارهٔ ۱۲ از فصل اول (تبصره) ، عبارتهای :

$$\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \quad \text{و} \quad \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

که آنها را در معادلهٔ (۱) به جای $\sin x$ و $\cos x$ گذاشتیم در صورتی معتبرند که $tg\frac{x}{2}$ مقدار معینی داشته باشد یعنی وقتی که مقدار x به صورت : $2k\pi+\pi$ نباشد . پس بجاست که مستقیماً تحقیق کنیم آیا کمانهای به‌صورت : $2k\pi+\pi$ جوابهایی برای معادلهٔ(۱) هستند، یعنی اگر در معادلهٔ (۱) به جای $\sin x$ عدد صفر و به جای $\cos x$ عدد -1

را قرار دهیم آیا طرفین معادلهٔ (۱) با هم برابر می‌شوند؟ این برابری وقتی حاصل می‌شود که داشته باشیم: $b+c=0$. در این حالت، معادلهٔ (E) به معادلهٔ درجهٔ اول منجر می‌شود. بنابراین:

وقتی که معادلهٔ (E) به درجهٔ اول منجر شود، جوابهای معادلهٔ (۱) منحصر به کمانهای حاصل از حل این معادلهٔ درجهٔ اول نیستند بلکه کمانهای $2k\pi+\pi$ نیز جوابهای آنند.

فرض کنیم ضرایب a ، b و c به پارامتری، مثلا m ، بستگی داشته باشند و وقتی که این پارامتر به سمت m_1 میل کند، $(b+c)$ به سمت صفر و در همین حال a به سمت عدد $a_1\neq 0$ میل کند. در این شرایط، چون در معادلهٔ (E) ضریب جملهٔ درجهٔ دوم به سمت صفر میل کرده است یکی از ریشه‌های معادلهٔ (E) بینهایت می‌شود *، پس کمانهای $\frac{x}{2}$ نظیر این ریشه به نقاط B و B' از دایرهٔ مثلثاتی منتهی می‌شوند و کمانهای x نظیر این کمانهای $\frac{x}{2}$، درست به سمت $2k\pi+\pi$ میل می‌کنند.

مثال ـ معادلهٔ:

$$(1) \qquad (2+\sqrt{3})\sin x+(1-2m)\cos x=2-m$$

* درمعادلهٔ درجهٔ دوم: $Ax^2+Bx+C=0$ اگر ضرایب A ، B و C بستگی به پارامتری، مثلا m، داشته باشند و وقتی که m به سمت m_1 میل کند A به سمت صفر و B و C بترتیب به سمت اعداد B' و C' $(B'\neq 0)$ میل کنند، یکی از ریشه‌های معادله بینهایت می‌شود و ریشهٔ دیگر به‌سمت $-\frac{C'}{B'}$ میل خواهد کرد (جبر سال ششم، شمارهٔ ۴ از فصل پنجم).

مفروض است.

۱) تحقیق کنید به ازای چه مقادیری از m این معادله دارای جواب است.

۲):

الف ـ مقادیری از پارامتر m را تعیین کنید که به ازای آنها فقط یکی از جوابهای معادلهٔ (۱) در نامساویهای زیر صدق کند:

$$(I) \qquad \frac{\pi}{2}<x<\pi$$

ب ـ آیا مقادیری از پارامتر m یافت می‌شود که به ازای آنها فقط دو جواب از معادلهٔ (۱) در نامساویهای (I) صدق کنند.

در حالات امکان مسئله، جواب قابل قبول را چگونه مشخص می‌کنید؟

۳) به‌ازای $m=1$ مقدار عددی جوابهای معادلهٔ (۱) را حساب کنید.

حل:

۱) در معادلهٔ (۱) داریم:

$$a=2+\sqrt{3}$$
و
$$b=1-2m$$
و
$$c=2-m$$
و
$$a^2+b^2-c^2=(2+\sqrt{3})^2+(1-2m)^2-(2-m)^2$$
یا بطور خلاصه:
$$a^2+b^2-c^2=3m^2+4(1+\sqrt{3})$$
و چون به‌ازای جمیع مقادیر m داریم:
$$3m^2+4(1+\sqrt{3})>0$$

معادلهٔ (۱) به ازای جمیع مقادیر m دارای جواب است .

۲) در معادلهٔ (E) ، مذکور در طریقهٔ دوم همین شماره (صفحهٔ ۸۲) که به صورت :

$$(E)\quad f(y)=(b+c)y^2-2ay+(c-b)=0\ ,\quad (y=tg\frac{x}{2})$$

بدست آمده بود ، به‌جای a ، b و c مقادیرشان را که قرار دهیم ، صورت جدید معادلهٔ مفروض چنین می‌شود :

$$(E')\ f(y)=3(1-m)y^2-2(2+\sqrt{3})y+(m+1)=0\ ,\ (y=tg\frac{x}{2})$$

و درقسمت اول این مثال دیدیم که عبارت :

$$\Delta=a^2+b^2-c^2=3m^2+4(1+\sqrt{3})$$

به ازای جمیع مقادیر m مثبت است ؛ بنابراین معادلهٔ (E') به ازای جمیع مقادیر m دارای دو ریشهٔ متمایز است .

حال اگر کمان x ، جوابی از معادلهٔ (۱) ، در نامساوی مضاعف (I) صدق‌کند ، کمان $\frac{x}{2}$ در نامساوی مضاعف :

$$(II)\qquad \frac{\pi}{4}<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}$$

صدق خواهدکرد و وقتی که کمان $\frac{x}{2}$ در نامساویهای (II) صدق کند ، با توجه به اینکه : $tg\frac{\pi}{4}=1$ ، خواهیم داشت :

$$(III)\qquad tg\frac{x}{2}=y>1$$

بعکس اگر y ، ریشه‌ای از معادلهٔ (E') ، در نامساوی (III) صدق کند و α کمانی واقع بین 0 و $\frac{\pi}{2}$ باشد بقسمی که داشته باشیم :

$tg\alpha=y$ ، کمان $\frac{x}{2}=\alpha$ درنامساویهای (II) صدق‌خواهدکرد ودرنتیجه کمان $x=2\alpha$ جوابی ازمعادلهٔ (۱) خواهد بودکه در نامساویهای (I) صدق می‌کند .

بنا براین برای بدست آوردن جواب یا جوابهای قابل قبول مسئله کافی‌است مقادیری از m را تعیین کنیم که به‌ازای آنها معادلهٔ (E') یك ریشه یا دو ریشهٔ بزرگتر از ۱ داشته باشد .

الف — برای آنکه فقط یکی از ریشه‌های معادلهٔ (E') بزرگتر از ۱ باشد ، لازم و کافی است که داشته باشیم :

$$a\cdot f(1)<0$$

و چون نامساوی اخیر را تشکیل دهیم خواهیم داشت :

$$6(m-1)(m+\sqrt{3})<0$$

این نامساوی در صورتی برقرار است که داشته باشیم :

$$-\sqrt{3}<m<1$$

پس به ازای مقادیر : $-\sqrt{3}<m<1$ فقط یکی از ریشه‌های معادلهٔ (E') بزرگتر از ۱ خواهد بود و بعلاوه به ازای مقادیر : $m<1$ ریشهٔ بزرگتر معادلهٔ (E') عبارت است از :

$$y'=\frac{2+\sqrt{3}+\sqrt{3m^2+4(1+\sqrt{3})}}{3(1-m)}$$

پس به ازای مقادیر : $-\sqrt{3}<m<1$ ، فقط یك کمان x به صورت : $x=2\,Arctg\,y'$ جوابی از معادلهٔ (۱) خواهد بود که در

نامساویهای (I) صدق می‌کند .

ب — برای اینکه هر دوریشهٔ معادلهٔ (E') بزرگتر از ۱ باشند، لازم و کافی است که مقادیر m چنان باشندکه در هر دو نامساوی :

$$a \cdot f(1) = 6(m-1)(m+\sqrt{3}) > 0$$

و

$$1 + \frac{b}{2a} = \frac{3m+\sqrt{3}-1}{3(m-1)} < 0$$

صدق‌کنند و به بیان دیگر، مقادیر m باید جواب مشترك دونامساوی بالا باشند .

در جدول زیر علامت هر یك از عبارتهای $a \cdot f(1)$ و $1+\frac{b}{2a}$ به ازای مقادیر مختلف m تعیین شده است :

m	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\frac{1-\sqrt{3}}{3}$		1		$+\infty$
$a \cdot f(1)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$1+\frac{b}{2a}$		$+$		$+$	0	$-$	∞	$+$	

وبطوری‌که جدول بالانشان می‌هد، دو نامساوی نامبرده‌جواب مشترکی ندارند و در نتیجه به ازای هیچ مقداری از m معادلهٔ (E') دارای دو ریشه که هر دو بزرگتر از ۱ باشند نیست، و بنابراین هیچ مقداری از m یافت نمی‌شود که به ازای آن فقط دو جواب از معادلهٔ (۱) در نامساویهای (I) صدق کنند .

۳) به‌ازای $m=1$ معادلهٔ (E') به‌معادلهٔ درجهٔ‌اول (E'') به‌شرح

زیر منجر می‌شود :

$$(E'') \qquad (2+\sqrt{3})y - 1 = 0 \text{ ، } \left(y = tg\frac{x}{2}\right)$$

پس همانطور که درطریقهٔ دوم (حالت خاص) گفتیم، علاوه برکمانهایی که از حل معادلهٔ درجهٔ اول (E'') بدست خواهند آمد ، کمانهای به صورت : $x = 2k\pi + \pi$ نیز جوابهای معادلهٔ (۱) می‌باشند .

از حل معادلهٔ (E'') حاصل می‌شود :

$$y = 2 - \sqrt{3}$$

یعنی :

$$tg\frac{x}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

اما می‌دانیم‌که

$$tg\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3} \text{ ، } \left(0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}\right)$$

(جدول صفحهٔ ۳)

از مقایسهٔ دو رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود :

$$tg\frac{x}{2} = tg\frac{\pi}{12}$$

وبنابه دستور(۶) بین‌کمانهای $\frac{x}{2}$ و $\frac{\pi}{12}$ که دارای تانژانتهای برابرند، رابطهٔ زیر برقرار است :

$$\frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{12}$$

و از آنجا :

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$$

بنابراین به ازای $m=1$ کمانهای x ، جوابهای معادلهٔ (۱) ، به دوصورت زیرند :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x &= 2k\pi + \pi \end{aligned}}$$

۱۱ ـ معادلهٔ کلاسیك نوع دوم ـ صورت کلی معادلهٔ کلاسیك نوع دوم چنین است :

$$a\,tg\,x + b\,cotg\,x = c \qquad (1)$$

برای حل این معادله دو طریقه ذکر می‌کنیم :

طریقهٔ اول ـ این طریقه بیشتر در مواردی بکار می‌رود که ضرایب a ، b و c اعداد معلومی باشند و بخواهند مقدار یا مقادیر عددی x را بوسیلهٔ جدول لگاریتم بدست آورند . اینك طرز عمل :

معادلهٔ (۱) را متوالیاً به صورتهای زیر می‌نویسیم (فصل اول ، شماره‌های ۵ و ۱۰) :

$$a\frac{\sin x}{\cos x} + b\frac{\cos x}{\sin x} = c$$

$$a\sin^2 x + b\cos^2 x - c\sin x\cos x = 0$$

$$a\frac{1-\cos 2x}{2} + b\frac{1+\cos 2x}{2} - c\frac{\sin 2x}{2} = 0$$

$$c\sin 2x + (a-b)\cos 2x = a+b \qquad (2)$$

معادلهٔ (۲) معادلهٔ کلاسیك نوع اول است و با عمل کردن به طریقهٔ اول مذکور در شمارهٔ ۱۰ همین فصل، حل معادله را به آخر می‌رسانیم.

شرط وجود جوابهایی برای معادلهٔ (۱) این است که داشته باشیم :

$$c^2 - 4ab \geqslant 0$$

مثال ۱ـ مطلوب است حل معادلهٔ :

$$tg\,x + 3\,cotg\,x = 2\sqrt{3} \qquad (1)$$

حل ـ در معادلهٔ مفروض داریم :

$$a=1 \;،\; b=3 \;\text{ و }\; c=2\sqrt{3}$$

و

$$c^2 - 4ab = 12 - 12 = 0$$

پس معادلهٔ مفروض جواب دارد و برای حل آن در معادلهٔ (۲) ، مذکور در طریقهٔ اول ، که به صورت :

$$c\sin 2x + (a-b)\cos 2x = a+b$$

بدست آمده بود ، به‌جای a ، b و c مقادیرشان را که قرار دهیم صورت جدید معادلهٔ مفروض چنین می‌شود :

$$\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 2 \qquad (2)$$

و چون طرفین معادلهٔ (۲) را بر $\sqrt{3}$ تقسیم کنیم خواهیم داشت :

$$\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{3}\cos 2x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad (3)$$

معادلهٔ (۳) را نیز با توجه به اینکه داریم :

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = tg\frac{\pi}{6} \qquad \left(0<\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}\right)$$

می‌توان مرتباً به صورتهای زیر نوشت :

$$\sin 2x - tg\frac{\pi}{6}\cos 2x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 2x - \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}\cos 2x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 2x\cos\frac{\pi}{6} - \cos 2x\sin\frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\frac{\pi}{6}$$

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=1$$

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{2}$$

تساوی اخیر نشان می‌دهد که کمانهای $\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ و $\frac{\pi}{2}$ دارای سینوسهای برابرند ؛ پس بین این دوکمان ، بنا به دستورهای (۲)، دو رابطهٔ زیر برقرار است :

$$2x-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$2x-\frac{\pi}{6}=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{2}$$

و از این دورابطه کمانهای x ، جوابهای کلی معادلهٔ مفروض، به‌صورت زیر بدست می‌آیند :

$$\boxed{x=k\pi+\frac{\pi}{3}}$$

مثال ۲ ـ مطلوب است حل معادلهٔ :

$$4\,tg\,x-16\cot g\,x=-15 \qquad (1)$$

حل ـ در معادلهٔ مفروض داریم :

$$a=4 \quad ، \quad b=-16 \quad و \quad c=-15$$

و

$$c^2-4ab=225-16(-16)=225+256=481>0$$

پس معادلهٔ مفروض جواب دارد و برای حل آن در معادلهٔ (۲) مذکور در طریقهٔ اول که به صورت :

$$c\sin 2x+(a-b)\cos 2x=a+b$$

بدست آمده بود، به‌جای a ، b و c مقادیرشان راکه قراردهیم صورت جدید معادلهٔ مفروض چنین می‌شود :

$$3\sin 2x-4\cos 2x=2.4 \qquad (2)$$

معادلهٔ (۲) را نیز به صورت زیر می‌توان نوشت :

$$\sin 2x-\frac{4}{3}\cos 2x=0.8 \qquad (3)$$

حال فرض می‌کنیم :

$$tg\,\alpha=-\frac{4}{3} \qquad \left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<0\right)$$

از آنجا :

$$-tg\,\alpha=\frac{4}{3}$$

یا :

$$tg(-\alpha)=\frac{4}{3} \qquad \left(0<-\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

در نتیجه :

$$\log tg(-\alpha)=\log 4+\operatorname{colog} 3$$

از جدول لگاریتم حاصل می‌شود :

$$\log 3=0.47712$$

$$\log 4=0.60206$$
$$\operatorname{colog} 3=\bar{1}.52288$$

$$\log tg(-\alpha)=0.12494$$
$$\log tg(53^\circ 7')=0.12473 \qquad D=26$$

به ازای	$40''$	17.3
به ازای	$8''$	3.5

$$\log tg(53^\circ 7' 48'')=0.12494$$
$$-\alpha=53^\circ 7' 48''$$
$$\alpha=-(53^\circ 7' 48'')$$

و با معلوم شدن α معادلهٔ (۳) را به صورت :

$$\sin ۲x + tg\alpha \cos ۲x = ۰/۸$$

یا : $$\sin(۲x+\alpha) = ۰/۸\cos\alpha \qquad (۴)$$

می‌نویسیم .

اکنون فرض می‌کنیم φ کمانی بین ۰ و $\frac{\pi}{۲}$ باشد بقسمی‌که داشته باشیم :

$$\sin\varphi = ۰/۸\cos\alpha$$

و با این قرار ، خواهیم داشت :

$$\log\sin\varphi = \log ۰/۸ + \log\cos\alpha$$

یا : $$\log\sin\varphi = \log ۰/۸ + \log\cos[-(۵۳^\circ ۷' ۴۸'')]$$

یا : $$\log\sin\varphi = \log ۰/۸ + \log\cos(۵۳^\circ ۷' ۴۸'')$$

از جدول لگاریتم حاصل می‌شود :

$$\log\cos(۵۳^\circ ۷') = \bar{۱}/۷۷۸۲۹ \qquad D = ۱۸$$

$$-۱۱/۳ \quad \text{به ازای } ۴۰''$$

$$-۲/۳ \quad \text{به ازای } ۸''$$

$$\overline{\log\cos(۵۳^\circ ۷' ۴۸'') = \bar{۱}/۷۷۸۱۵}$$

$$\log ۰/۸ = \bar{۱}/۹۰۳۰۹$$

$$\log\cos(۵۳^\circ ۷' ۴۸'') = \bar{۱}/۷۷۸۱۵$$

$$\overline{\log\sin\varphi = \bar{۱}/۶۸۱۲۴}$$

$$\log\sin(۲۸^\circ ۴۱') = \bar{۱}/۶۸۱۲۱ \qquad D = ۲۳$$

$$۳/۱ \quad \text{به ازای } ۸''$$

$$\overline{\log\sin(۲۸^\circ ۴۱' ۸'') = \bar{۱}/۶۸۱۲۴}$$

$$\varphi = ۲۸^\circ ۴۱' ۸''$$

و با معلوم شدن کمان φ معادلهٔ (۴) به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\sin(۲x+\alpha) = \sin\varphi$$

پس بین کمانهای $(۲x+\alpha)$ و φ که دارای سینوسهای برابرند بنا به دستورهای (۲) این دو رابطه برقرار است :

$$۲x+\alpha = k\times ۳۶۰^\circ + \varphi$$

$$۲x+\alpha = k\times ۳۶۰^\circ + ۱۸۰^\circ - \varphi$$

و ازاین دورابطه پس از آنکه به جای α و φ مقادیرشان را قراردهیم کمانهای x ، جوابهای کلی‌معادلهٔ (۱) ، به دوصورت زیر برحسب‌درجه بدست می‌آیند :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= k\times ۱۸۰^\circ + (۴۰^\circ ۵۴' ۲۸'') \\ x &= k\times ۱۸۰^\circ + (۱۰۲^\circ ۱۳' ۲۰'') \end{aligned}}$$

طریقهٔ دوم ـ این طریقه بیشتر در مواردی بکار می‌رود که در معادلهٔ مفروض :

$$a\,tg x + b\,cotg x = c \qquad (۱)$$

لااقل یکی از ضرایب a ، b و c بستگی به پارامتری داشته باشد و بخواهند برحسب مقادیر مختلف این‌پارامتر در جوابهای معادله بحث کنند. بدیهی است‌که در این قبیل‌معادلات محاسبهٔ مقادیر عددی برای x نمی‌تواند مورد نظر باشد . اینك طرز عمل :

معادلهٔ (۱) را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$a\,tg x + b\frac{۱}{tg x} = c$$

یا : $$a\,tg^۲ x - c\,tg x + b = ۰ \qquad (۲)$$

با فرض : $tg x = y$ معادلهٔ(۲) نیز به صورت زیرنوشته می‌شود :

$$f(y) = ay^۲ - cy + b = ۰ \qquad (E)$$

اگر y_1 یك ریشهٔ حقیقی از معادلهٔ (E) و α کمانی واقع بین $-\frac{\pi}{2}$ و $+\frac{\pi}{2}$ باشد بقسمی‌که داشته باشیم : $tg\alpha = y_1$ ، جوابهای معادلهٔ (۱) نظیر ریشهٔ y_1 بقسمی خواهند بودکه خواهیم داشت :

$$tg\,x = tg\,\alpha$$

و در نتیجه بنا به دستور (۶) :

$$\boxed{x = k\pi + \alpha} \qquad (۳)$$

به این ترتیب ، نظیر هر ریشهٔ حقیقی از معادلهٔ (E) کمانهای بیشماری به صورت (۳) که به دو نقطهٔ متقارن نسبت به مرکز دایرهٔ مثلثاتی منتهی هستند جوابهایی از معادلهٔ (۱) خواهند بود .

معادلهٔ (E) دو ریشهٔ متمایز خواهد داشت به شرط اینکه داشته باشیم :

$$c^2 - 4ab > 0$$

و با برقراری این نامساوی ، نظیر دو ریشهٔ معادلهٔ (E) چهار انتهای کمان برای جوابهای معادلهٔ (۱) وجود خواهد داشت .

در حالتی که داشته باشیم :

$$c^2 - 4ab = 0$$

معادلهٔ (E) دو ریشهٔ متساوی خواهد داشت و در این حالت جوابهای معادلهٔ (۱) ازیك دستور فقط به شکل : $x = k\pi + \alpha$ بدست می‌آیند واین جوابها فقط به دونقطه از دایرهٔ مثلثاتی منتهی هستند .

بالاخره اگر داشته باشیم :

$$c^2 - 4ab < 0$$

معادلهٔ (E) ریشه ندارد ودرنتیجه معادلهٔ (۱) نیزجواب نخواهد داشت .

۱۲- معادلهٔ کلاسیك نوع سوم - صورت‌کلی معادلهٔ کلاسیك نوع سوم چنین است :

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d \qquad (۱)$$

برای حل این معادله نیز مانند معادلات کلاسیك نوع اول ودوم دو طریقه ذکر می‌کنیم . طریقهٔ اول بیشتر در مواردی بکار می‌رود که ضرایب a ، b ، c و d اعداد معلومی باشند و بخواهند مقدار یامقادیر عددی x را به وسیلهٔ جدول لگاریتم بدست آورند و طریقهٔ دوم بیشتر وقتی بکار می‌رود که لااقل یکی از ضرایب a ، b ، c و d بستگی به پارامتری داشته باشد و بخواهند برحسب مقادیر مختلف این پارامتر در جوابهای معادله بحث کنند ، بدیهی است که در این صورت محاسبهٔ مقادیر عددی برای x نمی‌تواند مورد نظر باشد .

طریقهٔ اول - معادلهٔ (۱) را به صورت زیر می‌نویسیم (فصل اول ، شمارهٔ ۱۰) :

$$a\frac{1-\cos 2x}{2} + b\frac{\sin 2x}{2} + c\frac{1+\cos 2x}{2} = d$$

یا :

$$b\sin 2x + (c-a)\cos 2x = 2d - a - c \qquad (۲)$$

معادلهٔ (۲) معادلهٔ کلاسیك نوع اول است و با عمل کردن به طریقهٔ اول مذکور در شمارهٔ ۱۰ همین فصل ، حل معادله را به آخر می‌رسانیم .

شرط وجود جوابهایی برای معادلهٔ (۱) این است که داشته باشیم :

$$b^2 - 4(a-d)(c-d) \geq 0$$

طریقهٔ دوم ـ طرف دوم معادلهٔ مفروض :

(۱) $$a\sin^2x + b\sin x\cos x + c\cos^2x = d$$

را در عبارت $(\cos^2x+\sin^2x)$ ضرب می‌کنیم تا حاصل شود :

(۲) $$a\sin^2x + b\sin x\cos x + c\cos^2x = d(\cos^2x+\sin^2x)$$

وچون طرفین معادلهٔ (۲) را بر $\cos^2x$ تقسیم‌کنیم چنین خواهیم داشت:

(۳) $$(a-d)tg^2x + b\,tgx + (c-d) = 0$$

بافرض: $tgx = y$ ، معادلهٔ (۳) نیز به‌صورت زیرنوشته می‌شود :

(E) $$f(y) = (a-d)y^2 + by + (c-d) = 0$$

و با تشکیل دومعادلهٔ(۳) و (E) بقیهٔ حل وبحث معادلهٔ (۱) را با همان روش‌که در شمارهٔ ۱۱ همین فصل (طریقهٔ دوم)دیدیم به‌آخرمی‌رسانیم.

شرط وجود جوابهایی برای معادلهٔ (۱) این است که در معادلهٔ (E) داشته باشیم :

$$\Delta = b^2 - 4(a-d)(c-d) \geq 0$$

حالت خاص ـ می‌دانیم که طرفین معادله را برمقداری‌که برابر صفر باشد نمی‌توان تقسیم کرد . بنابراین طرفین معادلهٔ (۲) ، مذکور در طریقهٔ دوم ، را در صورتی بر $\cos^2x$ می‌توان تقسیم کرد که $\cos x$ برابر صفر نباشد، یعنی وقتی‌که مقدار x به صورت : $k\pi+\frac{\pi}{2}$ نباشد .

پس بجاست‌که مستقیماً تحقیق کنیم‌آیا کمانهای به‌صورت : $k\pi+\frac{\pi}{2}$ جوابهایی برای معادلهٔ (۱) هستند یا خیر ، یعنی اگر در معادلهٔ (۱) به جای $\sin x$ اعداد (± 1) و به‌جای $\cos x$ عدد صفر را قرار دهیم آیا طرفین معادلهٔ (۱) باهم برابر می‌شوند؟ این برابری وقتی حاصل‌می‌شود

که داشته باشیم : $a=d$. دراین حالت معادلهٔ (E) ، مذکور در طریقهٔ دوم ، به درجهٔ اول منجر می‌شود . بنابراین :

وقتی که معادلهٔ (E) ، مذکور در طریقهٔ دوم ، به درجهٔ اول منجر شود جوابهای معادلهٔ (۱) منحصر به کمانهای حاصل ازحل این معادلهٔ درجهٔ اول نیستند بلکه کمانهای : $k\pi+\frac{\pi}{2}$ نیز جوابهای آنند .

۱۳ ـ معادلهٔ کلاسیك نوع چهارم ـ هر معادله‌که به‌یکی‌از دو صورت کلی زیر باشد معادلهٔ کلاسیك نوع چهارم نامیده می‌شود :

(A) $$a(\sin x+\cos x) + b\sin x\cos x = c$$

(A') $$a(\sin x-\cos x) + b\sin x\cos x = c$$

اعم از اینکه در دو معادلهٔ (A) و (A') ضرایب a ، b و c اعداد معلومی باشند و یا آنکه بستگی به پارامتری داشته باشند ، معادلات نامبرده را به طریقه‌ای که در زیر برای هر یك از آنها ذکر می‌شود حل می‌کنیم. فقط باید متذکر بودکه اگر محاسبهٔ مقدار عددی برای x مورد نظر باشد ، باید ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دومی را که این راه حل بدست می‌دهد به عبارات قابل محاسبه به وسیلهٔ لگاریتم‌تبدیل کرد وچنانچه مقصود بحث درجوابهای معادلهٔ (A) یا (A') باشد، باید با توجه‌به‌اینکه‌کسینوس یا سینوس یك کمان در فاصلهٔ (۱+ ، ۱−) قرار دارد ، در ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم حاصل از این راه حل بحث کرد . اینك طرز عمل :

۱) حل معادلهٔ :

(A) $$a(\sin x+\cos x) + b\sin x\cos x = c$$

معادلهٔ (A) را مرتباً به این صورتها می‌نویسیم :

$$a\left[\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]+\frac{1}{2}b\sin 2x=c$$

$$2a\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}b\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=c$$

$$2a\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+b\left[2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-1\right]=2c$$

$$2a\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+b\left[2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1\right]=2c$$

$$(B)\qquad 2b\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2a\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-b-2c=0$$

با فرض: $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=y$ معادلهٔ (B) نیز به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(E)\qquad f(y)=2by^2+2a\sqrt{2}y-b-2c=0$$

اگر y_1 یك ریشه از معادلهٔ (E) متعلق به فاصلهٔ $(-1 \text{ ، } +1)$ و α کمانی واقع بین 0 و π باشد بقسمی که داشته باشیم: $\cos\alpha=y_1$، جوابهای معادلهٔ (A) نظیر ریشهٔ y_1 بقسمی خواهند بود که خواهیم داشت:

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\alpha$$

و در نتیجه بنا به دستورهای (۴):

$$x-\frac{\pi}{4}=2k\pi\pm\alpha$$

و از آنجا:

$$(F)\qquad \boxed{x=2k\pi+\frac{\pi}{4}\pm\alpha}$$

به‌این ترتیب، نظیر هر ریشهٔ $-1<y_1<1$ از معادلهٔ (E) کمانهای بیشماری به دو صورت (F) که به دو نقطهٔ متقارن نسبت به نیمساز ربع اول وسوم دایرهٔ مثلثاتی منتهی هستند جوابهایی ازمعادلهٔ (A) خواهند بود.

چنانچه داشته باشیم: $y_1=1$، کمانهای $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$ منتهی به نقطهٔ M، وسط کمان هندسی AB از دایرهٔ مثلثاتی، جوابهای معادلهٔ (A) نظیرریشهٔ y_1 خواهند بود واگر داشته باشیم: $y_1=-1$، کمانهای $x=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}$ منتهی به نقطهٔ M′، وسط‌کمان‌هندسی A′B′ از دایرهٔ مثلثاتی، جوابهای معادلهٔ (A) نظیرریشهٔ y_1 هستند.

برای آنکه معادلهٔ (E) دوریشهٔ متمایز داشته باشد و فقط یکی از آن دو ریشه بین -1 و $+1$ واقع بوده و ریشهٔ دیگر خارج از فاصلهٔ $(-1 \text{ ، } +1)$ باشد، لازم و کافی است‌که در معادلهٔ (E) داشته باشیم:

$$f(-1)\cdot f(1)<0$$

و برای آنکه معادلهٔ (E) دو ریشهٔ متمایز داشته باشد و هر دو ریشه بین -1 و $+1$ واقع باشند، لازم و کافی است که در این معادله نامساویهای زیرتوأماً برقرار باشند:

$$\begin{cases}\Delta>0\\ af(-1)>0\\ -1+\frac{b}{2a}<0\\ af(1)>0\\ 1+\frac{b}{2a}>0\end{cases}$$

مثال ــ معادلهٔ :

$$(۱) \qquad m(\sin x+\cos x)-\sin x\cos x=۱$$

مفروض است .

اولا ــ برحسب مقادیر مختلف m درجوابهای این معادله بحث کنید .

ثانیاً ــ به ازای $m=\pm ۱$ جوابهای معادله را تعیین کنید .

حل :

اولا بحث در جوابهای معادله ــ درمعادلهٔ(۱)که به صورت معادلهٔ A (شمارهٔ ۱۳ همین فصل) می‌باشد داریم :

$$a=m \quad ، \quad b=-۱ \quad و \quad c=۱$$

و چون در معادلهٔ B (شمارهٔ ۱۳ همین فصل) که به صورت :

$$(B) \qquad ۲b\cos^۲\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)+۲a\sqrt{۲}\cos\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)-b-۲c=۰$$

بدست آمده بود به جای a ، b و c مقادیرشان را قرار دهیم صورت جدید معادلهٔ مفروض چنین می‌شود :

$$(C) \qquad ۲\cos^۲\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)-۲m\sqrt{۲}\cos\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)+۱=۰$$

با فرض : $\cos\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)=y$ ، معادلهٔ (C) نیز به‌صورت زیرنوشته می‌شود :

$$(D) \qquad f(y)=۲y^۲-۲m\sqrt{۲}y+۱=۰$$

و هر ریشهٔ $y_۱$ از معادلهٔ (D) در صورتی قابل قبول است که متعلق به فاصلهٔ (۱+ ، ۱−) باشد .

I ــ برای آنکه معادلهٔ (D) دوریشهٔ متمایز داشته باشد وفقط یکی از آن دوریشه بین ۱− و ۱+ واقع بوده و ریشهٔ دیگرخارج ازفاصلهٔ (۱+ ، ۱−) باشد ، لازم و کافی است که دراین معادله داشته باشیم :

$$(G) \qquad f(-۱)\cdot f(۱)<۰$$

و چون داریم :

$$f(-۱)=۳+۲m\sqrt{۲}$$

و

$$f(۱)=۳-۲m\sqrt{۲}$$

نامساوی (G) به صورت زیر تشکیل می‌شود :

$$(H) \qquad f(-۱)\cdot f(۱)=(۳+۲m\sqrt{۲})(۳-۲m\sqrt{۲})<۰$$

در جدول زیر علامات هر یك از عبارتهای $f(-۱)$ ، $f(۱)$ و $f(-۱)\cdot f(۱)$ به ازای مقادیر مختلف m تعیین شده است :

m	$-\infty$		$-\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$		$\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$		$+\infty$
$f(-۱)$		−	۰	+		+	
$f(۱)$		+		+	۰	−	
$f(-۱)\cdot f(۱)$		−	۰	+	۰	−	

و بطوری که این جدول نشان می‌دهد ، نامساوی (H) درصورتی برقرار است که داشته باشیم :

$$m<-\frac{۳\sqrt{۲}}{۴} \quad یا \quad m>\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$$

با توجه به جدول بالابسهولت معلوم می‌شودکه اگرداشته باشیم: $m<-\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$ ، عدد ۱− بین ریشه‌ها و عدد ۱+ بزرگتر از هر دو

ریشهٔ معادلهٔ (D) خواهد بود و در نتیجه به ازای این‌مقادیر m فقط ریشهٔ بزرگتر معادلهٔ (D) به صورت :

$$y'=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\,(m+\sqrt{m^۲-۱})$$

قابل قبول است و چنانچه داشته باشیم : $m>\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$ ، عدد ۱+ بین ریشه‌ها وعدد ۱− کوچکتر ازهر دوریشهٔ معادلهٔ (D) خواهدبودودر نتیجه به‌ازای این مقادیر m فقط ریشهٔ‌کوچکتر معادلهٔ (D) به‌صورت:

$$y''=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(m-\sqrt{m^۲-۱})$$

قابل قبول است .

II ـ برای آنکه معادلهٔ (D) دو ریشهٔ متمایز داشته باشد و هر دو ریشه بین ۱− و ۱+ واقع باشند، لازم وکافی است که مقادیر m چنان باشند که در پنج نامساوی توأم :

$$\begin{cases} \Delta'=۲(m^۲-۱)>۰ \\ af(-۱)=۲(۳+۲m\sqrt{۲})>۰ \\ -۱+\frac{b}{۲a}=-\frac{۱}{۲}(۲+m\sqrt{۲})<۰ \\ af(۱)=۲(۳-۲m\sqrt{۲})>۰ \\ ۱+\frac{b}{۲a}=\frac{۱}{۲}(۲-m\sqrt{۲})>۰ \end{cases}$$

صدق کنند وبه بیان دیگر، مقادیر m باید جواب مشترك پنج نامساوی بالا باشند .

در جدول مقابل علامات هر يك از عبارتهای Δ' ، $af(-۱)$ ، $-۱+\frac{b}{۲a}$ ، $af(۱)$ و $۱+\frac{b}{۲a}$ به‌ازای مقادیر مختلف m تعیین شده‌است ؛ وبطوری‌که این جدول نشان‌می‌دهد مقادیر m، جوابهای مشترك پنج نامساوی مذکور عبارتند از :

$$-\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}<m<-۱$$

و

$$۱<m<\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$$

پس به ازای این مقادیر m هردو ریشهٔ معادلهٔ (D) بین ۱− و ۱+ قرار دارند .

m	$-\infty$		$-\sqrt{۲}$		$-\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$		-۱		۱		$\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$		$\sqrt{۲}$		$+\infty$
Δ'		+		+		+	۰	−	۰	+		+		+	
$af(-۱)$		−		−	۰	+		+		+		+		+	
$-۱+\frac{b}{۲a}$		+	۰	−		−		−		−		−		−	
$af(۱)$		+		+		+		+		+	۰	−		−	
$۱+\frac{b}{۲a}$		+		+		+		+		+		+	۰	−	

درپایان این بحث ، بطوری که ضمن شمارهٔ ۱۳ همین فصل نیز گفتیم ، یادآور می‌شویم که نظیر هرریشهٔ قابل قبول y_1 از معادلهٔ (D) کمانهایی به دو صورت :

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{4}\pm\alpha \qquad (0<\alpha<\pi \ ، \ \cos\alpha=y_1)$$

که به دو نقطهٔ متقارن نسبت به نیمساز ربع اول و سوم دایرهٔ مثلثاتی منتهی هستند جوابهایی از معادلهٔ (۱) خواهند بود .

تبصره – جدول صفحهٔ ۱۰۵ نشان می‌دهد که به‌ازای $m=1$ و $m=-1$ معادلهٔ (D) دارای دو ریشهٔ متساوی یعنی غیرمتمایز است ، اما چون از همین جدول معلوم می‌شود که ریشه‌های مضاعف نظیر $m=1$ و $m=-1$ بین -1 و $+1$ واقعند ، این ریشه‌های مضاعف قابل قبولند .

ثانیاً محاسبهٔ جوابهای معادله به ازای $m=\pm1$:

باتوجه به جدول صفحهٔ ۱۰۵ و بطوری‌که ضمن تبصرهٔ اخیرنیز اشاره کردیم ، وقتی که داشته باشیم : $m=\pm1$ معادلهٔ (D) دارای ریشهٔ مضاعف است و مقدار این ریشهٔ مضاعف چنین است :

به‌ازای $m=+1$:
$$y''=y'=-\frac{b}{2a}=\frac{m\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$$

به‌ازای $m=-1$:
$$y''=y'=-\frac{b}{2a}=\frac{m\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{3\pi}{4}$$

پس به‌ازای $m=+1$ و $m=-1$ بترتیب داریم :

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{3\pi}{4}$$

و از دو معادلهٔ اخیر بنا به دستورهای (۴) نتیجه می‌شود :

$$x-\frac{\pi}{4}=2k\pi\pm\frac{\pi}{4}$$

$$x-\frac{\pi}{4}=2k\pi\pm\frac{3\pi}{4}$$

و از آنجا :

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}$$

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{4}\pm\frac{3\pi}{4}$$

و بطور خلاصه به ازای $m=\pm1$ کمانهای x ، جوابهای کلی معادلهٔ (۱) ، چنین می‌شوند :

به ازای $m=+1$ $\quad \boxed{x=2k\pi \ ، \ x=2k\pi+\frac{\pi}{2}}$

به ازای $m=-1$ $\quad \boxed{x=(2k+1)\pi \ ، \ x=2k\pi-\frac{\pi}{2}}$

تمرین – باتوجه به جدول صفحهٔ ۱۰۵ به‌ازای مقادیر $m=\pm\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ریشه‌های معادلهٔ (D) را بدون حل کردن آن حساب کرده و از آن رو کمانهای x ، جوابهای کلی معادلهٔ (۱) ، را تعیین کنید .

۲) حل معادلهٔ :

$$a(\sin x-\cos x)+b\sin x\cos x=c \qquad (A')$$

معادلهٔ (A') را مرتباً به صورتهای زیر می‌نویسیم :

$$a\left[\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]+\frac{1}{2}b\sin 2x=c$$

$$2a\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}b\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=c$$

$$2a\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+b\left[1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]=2c$$

$$2a\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+b\left[1-2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]=2c$$

$$2b\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-2a\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2c-b=0 \qquad (B')$$

بافرض : $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=y$ ، معادلهٔ (B') نیز به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$f(y)=2by^2-2a\sqrt{2}y+2c-b=0 \qquad (E')$$

اگر y_1 یك ریشه از معادلهٔ (E') متعلق به فاصلهٔ $(-1 , +1)$ و α کمانی واقع بین $-\frac{\pi}{2}$ و $+\frac{\pi}{2}$ باشد بقسمی که داشته باشیم : $\sin\alpha=y_1$، جوابهای معادلهٔ (A') نظیر ریشهٔ y_1 بقسمی خواهند بودکه خواهیم داشت :

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha$$

و در نتیجه بین کمانهای $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ و α که دارای سینوسهای برابرند این دو رابطه برقرار است :

$$x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\alpha$$

$$x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-\alpha$$

و از آنجا :

$$(F') \qquad \boxed{\begin{aligned} x&=2k\pi+\frac{\pi}{4}+\alpha \\ x&=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}-\alpha \end{aligned}}$$

به این ترتیب ، نظیر هر ریشهٔ $-1<y_1<1$ از معادلهٔ (E') کمانهای بیشماری به دو صورت (F') که به دو نقطهٔ متقارن نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم دایرهٔ مثلثاتی منتهی هستند جوابهایی از معادلهٔ (A') خواهند بود .

چنانچه داشته باشیم: $y_1=1$ ، کمانهای $x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{4}$ منتهی به‌نقطهٔ N، وسط‌کمان هندسی BA' از دایرهٔ مثلثاتی، جوابهای معادلهٔ (A') نظیرریشهٔ y_1 خواهند بود واگرداشته باشیم: $y_1=-1$ ، کمانهای $x=2k\pi-\frac{\pi}{4}$ منتهی به نقطهٔ N' ، وسط‌کمان هندسی $B'A$ از دایرهٔ مثلثاتی ، جوابهای معادلهٔ (A') نظیر ریشهٔ y_1 هستند .

بحث درجوابهای معادلهٔ (A') به همان روش که دربارهٔ معادلهٔ A (شمارهٔ ۱۳ همین فصل) دیدیم انجام می‌گیرد .

مثال ـ معادلهٔ :

$$\sin^3 x+\cos^3 x+\cos 2x=(m+1)(\sin x+\cos x) \qquad (1)$$

مفروض است . مطلوب است تعیین مقادیری از m که به ازای آنها داشته باشیم :

$$(P)\qquad \frac{5\pi}{12}<x<\frac{13\pi}{12}$$

حل - بدواً اتحاد :

$$a^3+b^3\equiv(a+b)(a^2+b^2-ab)$$

ودستور : $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$

را یادآوری می‌کنیم وبا استفاده از این دورابطه معادلهٔ (۱) رابه‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$\left\{\begin{array}{l}(\sin x+\cos x)(\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x\cos x)+\\(\cos^2 x-\sin^2 x)-(m+1)(\sin x+\cos x)\end{array}\right\}=0$$

یا :

$$(\sin x+\cos x)[(1-\sin x\cos x)+(\cos x-\sin x)-(m+1)]=0$$

یا :

$$(2)\qquad (\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x+\sin x\cos x+m)=0$$

معادلهٔ (۲) نیز به دو معادلهٔ :

$$(3)\qquad \sin x-\cos x+\sin x\cos x=-m$$

و

$$(4)\qquad \sin x+\cos x=0$$

تجزیه می‌شود و هرجواب از معادلات (۳) و (۴) جوابی از معادلهٔ(۲) و در نتیجه جوابی از معادلهٔ (۱) خواهد بود .

I- در معادلهٔ (۳)که به‌صورت معادلهٔ A′ (شمارهٔ ۱۳ همین‌فصل) می‌باشد داریم :

$$a=1 \quad،\quad b=1 \quad،\quad c=-m$$

و چون در معادلهٔ B′ (شمارهٔ ۱۳ همین فصل) که به صورت :

$$(B')\qquad 2b\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-2a\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2c-b=0$$

بدست آمده بود به جای a ، b و c مقادیرشان را قرار دهیم صورت جدید معادلهٔ (۳) چنین می‌شود :

$$(C')\qquad 2\sin^2(x-\frac{\pi}{4})-2\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})-(2m+1)=0$$

وبا فرض : $\sin(x-\frac{\pi}{4})=y$ ، معادلهٔ (C′) نیز به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$(D')\qquad f(y)=2y^2-2\sqrt{2}y-(2m+1)=0$$

علاوه براین اگر داشته باشیم :

$$(P)\qquad \frac{5\pi}{12}<x<\frac{13\pi}{12}$$

در نتیجه خواهیم داشت :

$$\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{4}<x-\frac{\pi}{4}<\frac{13\pi}{12}-\frac{\pi}{4}$$

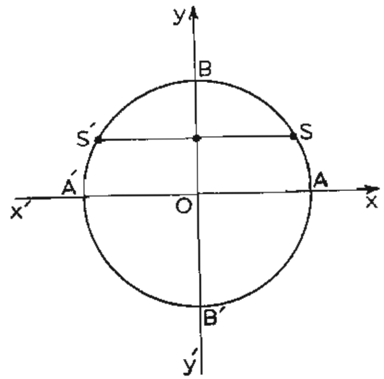
یا :

$$(Q)\qquad \frac{\pi}{6}<x-\frac{\pi}{4}<\frac{5\pi}{6}$$

یعنی کمانهای $(x-\frac{\pi}{4})$ درنامساویهای (Q) صدق‌خواهندکرد؛ وچون دردایرهٔ مثلثاتی (شکل ۳) ملاحظه‌کنیم‌که نقاط S و S′ انتهای‌کمانهای به مبدأ A و به مقدار جبری $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ روی عمودمنصف شعاع OB قرار دارند (زیرا: $\sin\frac{\pi}{6}=\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$)، از روی همین شکل بسهولت

معلوم می‌شود که اگر کمانهای $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ در نامساویهای (Q) صدق کنند، خواهیم داشت:

$$(R)\quad \frac{1}{2}<\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=y\leq 1$$



شکل ۳

بعکس اگر y، ریشه‌ای از معادلهٔ (D′)، در نامساویهای (R) صدق کند و α کمانی واقع بین ۰ و $\frac{\pi}{2}$ باشد بقسمی‌که داشته باشیم: $\sin\alpha=y$، کمانهای $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ به دو صورت:

$$x-\frac{\pi}{4}=\alpha$$

و
$$x-\frac{\pi}{4}=\pi-\alpha$$

در نامساویهای (Q) صدق خواهندکرد و در نتیجه کمانهای:

$$x=\frac{\pi}{4}+\alpha$$

و
$$x=\frac{5\pi}{4}-\alpha$$

جوابهایی از معادلهٔ (۳) خواهند بود که در نامساویهای (P) صدق می‌کنند.

بنابه مراتب مذکورکافی است درمعادلهٔ (D′) مقادیر m راچنان تعیین‌کنیم که‌ریشه یا ریشه‌های این معادله در نامساویهای:

$$\frac{1}{2}<y\leq 1$$

صدق کنند. برای تشخیص این مقادیر m، در معادلهٔ (D′) با تعیین علامات عبارتهای:

$$\begin{cases} \Delta' = 4(m+1) \\ a\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)=-(4m+1+2\sqrt{2}) & \text{و} \\ \frac{1}{2}+\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}(1-\sqrt{2}) & \text{و} \\ a\cdot f(1)=2(-2m+1-2\sqrt{2}) & \text{و} \\ 1+\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}(2-\sqrt{2}) & \text{و} \end{cases}$$

اعداد $\frac{1}{2}$ و ۱ را با ریشه‌های معادلهٔ نامبرده به ازای مقادیر مختلف m مقایسه می‌کنیم و از روی نتایج حاصل از این مقایسه مقادیر مطلوب m را مشخص می‌سازیم.

جدول صفحهٔ بعد علامات هریك‌ازعبارتهای مذکور ووضع اعداد $\frac{1}{2}$ و۱ را با ریشه‌های معادلهٔ (D′) به‌ازای مقادیر مختلف m وهمچنین مقادیری از m را که به ازای آنها معادلهٔ (D′) دارای ریشه یا ریشه‌های قابل قبول است نشان می‌دهد و بطوری که قبلاً نیز گفتیم،

m	$-\infty$	-1		$-\frac{1+2\sqrt{2}}{4}$		$\frac{1-2\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
Δ'	$-$	0	$+ \quad +$		$+ \quad +$		$+$
$a\cdot f(\frac{1}{2})$	$+$		$+ \quad +$	0	$- \quad -$		$-$
$\frac{1}{2}+\frac{b}{2a}$	$-$		$- \quad -$		$- \quad -$		$-$
$a\cdot f(1)$	$+$		$+ \quad +$		$+ \quad +$	0	$-$
$1+\frac{b}{2a}$	$+$		$+ \quad +$		$+ \quad +$		$+$
مقایسه	معادله ریشه ندارد		$\frac{1}{2}<y''<y'<1$		$y''<\frac{1}{2}<y'<1$		$y''<\frac{1}{2}<1<y'$
		$\frac{1}{2}<y''=y'<1$		$\frac{1}{2}=y''<y'<1$		$y''<\frac{1}{2}<y'=1$	

نتیجه:
به ازای مقادیر : $-\frac{1+2\sqrt{2}}{4}\leqslant m\leqslant\frac{1-2\sqrt{2}}{2}$
فقط ریشهٔ بزرگتر معادله به صورت : $y'=\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{m+1}$
قابل قبول است .
به ازای مقادیر : $-1\leqslant m<-\frac{1+2\sqrt{2}}{4}$ هردو
ریشهٔ معادله قابل قبولند .

نظیر هر ریشهٔ $\frac{1}{2}<y_1<1$ از معادلهٔ (D') کمانهایی به دو صورت :

$$\boxed{\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+\alpha \\ x=\frac{5\pi}{4}-\alpha \end{array}} \qquad (0<\alpha<\frac{\pi}{2}\ ،\ \sin\alpha=y_1)$$

و

جوابهایی از معادلهٔ (۳) خواهند بود که در نامساویهای (P) صدق می‌کنند .

II ـ معادلهٔ (۴) که به پارامتر m بستگی ندارد و حل آن بسهولت انجام می‌گیرد دارای جوابهایی مستقل از m به صورت :

$$\boxed{x=k\pi-\frac{\pi}{4}}$$

می‌باشد و از این جوابها فقط یکی که به ازای $k=1$ به صورت : $x=\frac{3\pi}{4}$ بدست می‌آید در نامساویهای (P) صدق می‌کند . بنابراین مقدار m هرچه باشد کمانهای :

$$x=k\pi-\frac{\pi}{4}$$

جوابهایی از معادلهٔ(۱) هستند وازاین‌جوابهافقط‌یکی‌به‌صورت: $x=\frac{3\pi}{4}$ در نامساویهای (P) صدق می‌کنند .

تمرین ـ با توجه به‌جدول اخیر، مربوط به معادلهٔ (D') ، به‌ازای هریك از مقادیر :

$$m=-1$$

و

$$m=-\frac{1+2\sqrt{2}}{4}$$

و

$$m=\frac{1-2\sqrt{2}}{2}$$

ریشهٔ قابل قبول معادلهٔ (D') را بدون حل‌کردن آن حساب کرده و ازآن‌دو کمانهای x ، نظیر هر یك از این ریشه‌ها ، را تعیین کنید .

ب ـ دستگاههای معادلات مثلثاتی

۱۴ـ گرچه برای حل دستگاههای معادلات مثلثاتی قاعدهٔ دقیقی نمی‌توان تعیین کرد، اما بکار بردن طریقه‌های زیر ممکن است وسیلهٔ حل بعضی دستگاهها شود.

۱) وقتی‌که معادلات یك دستگاه منحصراً شامل توابع مثلثاتی کمانهای مجهول باشند، برای هریك ازکمانهای مجهول توابع مثلثاتی موجود در معادلات دستگاه را بر حسب یك تابع مثلثاتی فقط ازهمان کمان می‌نویسند و به‌این ترتیب‌حل‌دستگاه مورد نظر به‌حل دستگاهی منجر می‌شودکه مجهولات آن، توابع مثلثاتی حذف نشده ازمعادلات دستگاهند. محاسبه و تعیین این توابع مثلثاتی وسیلهٔ یافتن کمانهای مجهول است.

۲) حالتی که بیشتر درموارد استعمال حل دستگاههای مثلثاتی پیش می‌آید این است که کمانهای مجهول مستقیماً نیز در معادلات دستگاه واردند. در چنین حالتی:

اگر دستگاه مورد نظرمتشکل از دو معادله و دو مجهول ویکی از معادلات دستگاه به صورت یك معادلهٔ جبری بر حسب کمانهای مجهول باشد، می‌توان ابتدا از معادلهٔ جبری مقدار یکی از دو مجهول را برحسب مجهول دیگر تعیین کرد و آن را در معادلهٔ دوم دستگاه قرار داد تا یك معادلهٔ مثلثاتی یك مجهولی بدست آید؛ چنانچه حل این معادلهٔ یك مجهولی ممکن باشد، آن را حل می‌کنیم

و جواب حاصل را در معادلهٔ جبری دستگاه قرار می‌دهیم تا مقدار مجهول دیگر پیدا شود.

چنانچه دستگاه مفروض متشکل از دو معادله و دو مجهول x و y طوری تنظیم شده باشد که بکار بردن دستورهای شمارهٔ ۱۳ و ۱۴ فصل اول ممکن باشد، در این صورت دستگاه به وسیلهٔ محاسبهٔ $(x+y)$ و $(x-y)$ حل خواهد شد.

۱۵ ـ مسئله ـ مطلوب است حل هر یك از دستگاههای زیر:

$$\begin{cases} x+y=\alpha \\ \sin x-\sin y=a \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=\alpha \\ \sin x+\sin y=a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=\alpha \\ \sin x-\sin y=b \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y=\alpha \\ \sin x+\sin y=b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=\alpha \\ \cos x-\cos y=a \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=\alpha \\ \cos x+\cos y=a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=\alpha \\ \cos x-\cos y=b \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y=\alpha \\ \cos x+\cos y=b \end{cases}$$

حل ـ تمام دستگاههای مفروض به طریقه‌های شبیه به هم حل می‌شوند. یکی ازاین دستگاهها مثلاً دستگاه:

$$\begin{cases} x+y=\alpha \\ \cos x-\cos y=a \end{cases}$$

را درنظر می‌گیریم. این دستگاه را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} x+y=\alpha \\ -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}=a \end{cases}$$

یا :

$$\begin{cases} x+y=\alpha \\ \sin\frac{x-y}{2}=\frac{-a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

حال اگر φ کمانی باشد بقسمی که داشته باشیم :

$$\sin\varphi=\frac{-a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

از دستگاه اخیر دو دستگاه جبری زیر نتیجه می‌شود :

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} x+y=\alpha \\ \frac{x-y}{2}=2k\pi+\varphi \end{cases} \qquad (\mathrm{II})\quad \begin{cases} x+y=\alpha \\ \frac{x-y}{2}=(2k+1)\pi-\varphi \end{cases}$$

و ازحل‌کردن هریك از دستگاههای (I) و (II) مقادیر x و y بدست می‌آیند .

دستگاه مورد نظر دارای جوابهایی خواهد بود به شرط اینکه داشته باشیم :

$$-1\leqslant\frac{-a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\leqslant 1$$

یا :
$$\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\leqslant 1$$

یا :
$$a^2-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\leqslant 0$$

و بالاخره :

$$-2\sin\frac{\alpha}{2}\leqslant a\leqslant 2\sin\frac{\alpha}{2} \quad \text{اگر} \quad \sin\frac{\alpha}{2}>0$$

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\leqslant a\leqslant -2\sin\frac{\alpha}{2} \quad \text{اگر} \quad \sin\frac{\alpha}{2}<0$$

۱۶ـ مسئله ـ مطلوب استحل هریك از دستگاههای زیر:

$$\begin{cases} x-y=\alpha \\ \sin x\sin y=b \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=\alpha \\ \sin x\sin y=b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=\alpha \\ \cos x\cos y=b \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=\alpha \\ \cos x\cos y=b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=\alpha \\ \sin x\cos y=b \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=\alpha \\ \sin x\cos y=b \end{cases}$$

حل ـ تمام دستگاههای مفروض به طریقه‌های شبیه به هم حل می‌شوند. یکی ازاین دستگاهها مثلا دستگاه :

$$\begin{cases} x-y=\alpha \\ \sin x\sin y=b \end{cases}$$

را درنظر می‌گیریم . این دستگاه را به صورت زیر می‌توان نوشت :

$$\begin{cases} x-y=\alpha \\ \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}=b \end{cases}$$

یا :

$$\begin{cases} x-y=\alpha \\ \cos(x+y)=-2b+\cos\alpha \end{cases}$$

حال اگر φ کمانی باشد بقسمی‌که داشته باشیم :

$$\cos\varphi=-2b+\cos\alpha$$

از دستگاه اخیر دو دستگاه جبری زیر نتیجه می‌شود :

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} x-y=\alpha \\ x+y=2k\pi+\varphi \end{cases} \qquad (\mathrm{II})\quad \begin{cases} x-y=\alpha \\ x+y=2k\pi-\varphi \end{cases}$$

و از حل‌کردن هریك ازدستگاههای (I) و (II) مقادیر x و y بدست می‌آیند . اما شرط آنکه این مقادیر x و y وجود داشته باشند این است که داشته باشیم :

$$-1\leqslant -2b+\cos\alpha\leqslant 1$$

یا :

$$-\sin^2\frac{\alpha}{2}\leqslant b\leqslant \cos^2\frac{\alpha}{2}$$

۱۷ـ مسئله ـ مطلوب است حل هریك از دستگاههای زیر :

$$\begin{cases} x-y=\alpha \\ \dfrac{\cos x}{\cos y}=b \end{cases},\quad \begin{cases} x+y=\alpha \\ \dfrac{\cos x}{\cos y}=b \end{cases},\quad \begin{cases} x-y=\alpha \\ \dfrac{\sin x}{\sin y}=b \end{cases},\quad \begin{cases} x+y=\alpha \\ \dfrac{\sin x}{\sin y}=b \end{cases}$$

حل ـ تمام دستگاههای مفروض به‌طریقه‌های شبیه به‌هم حل می‌شوند. یکی از این دستگاهها مثلا دستگاه :

$$\begin{cases} x-y=\alpha \\ \dfrac{\cos x}{\cos y}=b \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم. این دستگاه را به صورت زیر می‌توان نوشت :

$$\begin{cases} x-y=\alpha \\ \dfrac{\cos y-\cos x}{\cos y+\cos x}=\dfrac{1-b}{1+b} \end{cases}$$

یا :

$$\begin{cases} x-y=\alpha \\ \dfrac{2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}=\dfrac{1-b}{1+b} \end{cases}$$

یا :

$$\begin{cases} x-y=\alpha \\ tg\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{1-b}{1+b}\,cotg\dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$$

حال اگر φ کمانی باشد بقسمی که داشته باشیم :

$$tg\,\varphi=\frac{1-b}{1+b}\,cotg\frac{\alpha}{2}$$

از دستگاه اخیر دستگاه جبری زیر نتیجه می‌شود :

$$(\mathrm{A})\ \begin{cases} x-y=\alpha \\ \dfrac{x+y}{2}=k\pi+\varphi \end{cases}$$

و از حل‌کردن دستگاه (A) مقادیر x و y بدست می‌آیند. ضمناً این مقادیر x و y همیشه وجود دارند ، زیرا $tg\frac{x+y}{2}$ می‌تواند جمیع مقادیر از $-\infty$ تا $+\infty$ را اختیارکنند .

۱۸ـ مسئله ـ مطلوب است حل هریك از دستگاههای زیر :

$$\begin{cases} x-y=\alpha \\ tg\,x-tg\,y=a \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=\alpha \\ tg\,x+tg\,y=a \end{cases}$$

حل ـ برای حل‌کردن هر دو دستگاه مفروض یك طریقه بکار

می‌برند . یکی از این دو دستگاه مثلا دستگاه :

$$\begin{cases} x-y=\alpha \\ tg\,x-tg\,y=a \end{cases}$$

را درنظر می‌گیریم . این دستگاه را به صورت زیر می‌توان نوشت :

$$\begin{cases} x-y=\alpha \\ \dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}=a \end{cases}$$

یا :

$$\begin{cases} x-y=\alpha \\ \dfrac{2\sin(x-y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}=a \end{cases}$$

یا :

$$\begin{cases} x-y=\alpha \\ \cos(x+y)=\dfrac{2\sin\alpha-a\cos\alpha}{a} \end{cases}$$

دستگاه اخیر مقادیر $(x-y)$ و$(x+y)$ و درنتیجه مقادیر x و y را بدست می‌دهد .

دستگاه مورد نظر دارای جوابهایی خواهد بود به شرط اینکه داشته باشیم :

$$-1<\frac{2\sin\alpha-a\cos\alpha}{a}<1$$

یا : $$\frac{(2\sin\alpha-a\cos\alpha)^2}{a^2}<1$$

این نامساوی را به‌صورت زیر می‌توان نوشت :

$$a^2 tg^2\alpha+4a\,tg\alpha-4tg^2\alpha\geqslant 0$$

و شرط برقراری این نامساوی این است‌که داشته باشیم :

$a\geqslant 2tg\dfrac{\alpha}{2}$ یا $a\leqslant -2cotg\dfrac{\alpha}{2}$ اگر $tg\dfrac{\alpha}{2}>0$ ؛

$a\geqslant -2cotg\dfrac{\alpha}{2}$ یا $a\leqslant 2tg\dfrac{\alpha}{2}$ اگر $tg\dfrac{\alpha}{2}<0$.

۱۹ـ مسئله ـ مطلوب است حل هریك از دستگاههای زیر:

$$\begin{cases} x-y=\alpha \\ tg\,x+tg\,y=a \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=\alpha \\ tg\,x-tg\,y=a \end{cases}$$

حل ـ یکی از دو دستگاه مفروض مثلا دستگاه :

$$\begin{cases} x-y=\alpha \\ tg\,x+tg\,y=a \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم . این دستگاه را مرتباً به صورتهای زیر می‌توان نوشت :

$$\begin{cases} x-y=\alpha \\ \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}=a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=\alpha \\ \dfrac{2\sin(x+y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}=a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=\alpha \\ 2\sin(x+y)-a\cos(x+y)=a\cos\alpha \end{cases}$$

معادلهٔ دوم دستگاه اخیر معادلهٔ کلاسیك نوع اول است (شمارهٔ

۱۵ همین فصل) و اگر از حل این معادله جوابهایی برای $(x+y)$ بدست آید، بامعلوم بودن $(x-y)$ و $(x+y)$ مقادیر x و y ، جوابهای دستگاه مورد نظر، بسهولت تعیین می‌شوند .

۲۰ـ مسئله ـ مطلوب است حل هریك از دستگاههای زیر :

$$\begin{cases} x+y=\alpha \\ tgx\,tgy=a \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y=\alpha \\ tgx\,tgy=a \end{cases}$$

حل ـ یکی از دو دستگاه مفروض مثلاً دستگاه :

$$\begin{cases} x-y=\alpha \\ tgx\,tgy=a \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم . این دستگاه را مرتباً به صورتهای زیر می‌توان نوشت :

$$\begin{cases} x-y=\alpha \\ \dfrac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}=a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=\alpha \\ \dfrac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{\cos(x-y)+\cos(x+y)}=a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=\alpha \\ \cos(x+y)=\dfrac{1-a}{1+a}\cos\alpha \end{cases}$$

اگر از معادلهٔ دوم دستگاه اخیر مقداری برای $(x+y)$ بدست آید، با معلوم بودن $(x-y)$ و $(x+y)$ مقادیر x و y ، جوابهای دستگاه مورد نظر، بسهولت تعیین می‌شوند . بحث در جوابهای این

دستگاه مانند شمارهٔ ۱۵ همین فصل انجام می‌گیرد.

۲۱ ـ مسئله ـ مطلوب است حل هریك از دستگاههای زیر:

$$\begin{cases} x-y=\alpha \\ \dfrac{tgx}{tgy}=a \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=\alpha \\ \dfrac{tgx}{tgy}=a \end{cases}$$

حل ـ یکی از دو دستگاه مفروض مثلاً دستگاه :

$$\begin{cases} x-y=\alpha \\ \dfrac{tgx}{tgy}=a \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم . این دستگاه را مرتباً به صورتهای زیر می‌توان نوشت :

$$\begin{cases} x-y=\alpha \\ \dfrac{tgx-tgy}{tgx+tgy}=\dfrac{a-1}{a+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=\alpha \\ \dfrac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)}=\dfrac{a-1}{a+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=\alpha \\ \sin(x+y)=\dfrac{a+1}{a-1}\sin\alpha \end{cases}$$

اگر از معادلهٔ دوم دستگاه اخیر مقداری برای $(x+y)$ بدست آید، با معلوم بودن $(x-y)$ و $(x+y)$ مقادیر x و y ، جوابهای دستگاه مورد نظر، بسهولت تعیین می‌شوند . بحث در جوابهای این دستگاه مانند شمارهٔ ۱۵ همین فصل انجام می‌گیرد .

تبصره ـ در چهار مسئلهٔ اخیر برای حل کردن دستگاه مورد نظر ممکن است به جای معادلهٔ اول دستگاه یعنی به جای معادلهٔ :

$$x+y=\alpha \qquad \text{یا} \qquad x-y=\alpha$$

بترتیب معادلهٔ :

$$\frac{tg\,x+tg\,y}{1-tg\,x\,tg\,y}=tg\,\alpha \quad \text{یا} \quad \frac{tg\,x-tg\,y}{1+tg\,x\,tg\,y}=tg\,\alpha$$

را قرار داد و به‌این ترتیب ، حل دستگاه مورد نظر به حل یك‌دستگاه جبری برحسب $tg\,x$ و $tg\,y$ منجر می‌شود .

توجه‌کنید : اگر در هر یك از دستگاههای مفروض در چهار مسئلهٔ اخیر $tg\,x$ و $tg\,y$ را بترتیب به $cotg\,x$ و $cotg\,y$ تبدیل کنیم ، دستگاه دیگری حاصل می‌شودکه روش حل آن مشابه با رویه‌ای است که برای حل دستگاه اولیه ذکر کردیم .

۲۳ ـ چند مثال :

مثال ۱ ـ دستگاه :

$$\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3} \\ \sin x=2\sin y \end{cases}$$

را حل کنید .

حل ـ دستگاه مفروض را مرتباً به صورتهای زیر می‌نویسیم :

$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{3}+y \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}+y\right)=2\sin y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{3}+y \\ \sin\frac{\pi}{3}\cos y+\cos\frac{\pi}{3}\sin y=2\sin y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{3}+y \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos y+\frac{1}{2}\sin y=2\sin y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{3}+y \\ 3\sin y=\sqrt{3}\cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{3}+y \\ tg\,y=\frac{\sqrt{3}}{3}=tg\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{3}+y \\ y=k\pi+\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=k\pi+\frac{\pi}{2} \\ y=k\pi+\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

مثال ۲ ـ دستگاه :

$$\begin{cases} tg\,x=tg\,2y \\ \sin x+2\cos^2 y=2 \end{cases}$$

را حل کنید .

حل ـ دستگاه مفروض را مرتباً به صورتهای زیر می‌نویسیم :

$$\begin{cases} tg\,x = tg\,2y \\ \sin x + 2\cos^2 y - 1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = k\pi + 2y \\ \sin(k\pi + 2y) + \cos 2y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = k\pi + 2y \\ \sin k\pi \cos 2y + \cos k\pi \sin 2y + \cos 2y = 1 \end{cases}$$

و با توجه به اینکه $\sin k\pi = 0$ ، دستگاه اخیر چنین می‌شود :

$$(A) \qquad \begin{cases} x = k\pi + 2y \\ \cos k\pi \sin 2y + \cos 2y = 1 \end{cases}$$

حال اگر k زوج باشد $(k = 2n)$ ، دستگاه (A) به صورت زیر در می‌آید :

$$(B) \qquad \begin{cases} x = 2n\pi + 2y \\ \sin 2y + \cos 2y = 1 \end{cases}$$

و چنانچه k فرد باشد $(k = 2n+1)$ ، دستگاه (A) چنین می‌شود :

$$(C) \qquad \begin{cases} x = (2n+1)\pi + 2y \\ \sin 2y - \cos 2y = -1 \end{cases}$$

بنابراین جوابهای دستگاه (A) عبارتند از جوابهای دودستگاه (B) و (C) .

۱) حل دستگاه (B) :

با توجه به اینکه معادلهٔ دوم دستگاه (B) معادلهٔ کلاسیک نوع

اول است این دستگاه را به صورت زیر می‌نویسیم (شمارهٔ ۱۰ همین فصل ، طریقهٔ اول) :

$$\begin{cases} x = 2n\pi + 2y \\ \sin\left(2y + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

از دستگاه اخیر دو دستگاه جبری زیر نتیجه می‌شود :

$$(B') \begin{cases} x = 2n\pi + 2y \\ 2y + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases} \qquad (B'') \begin{cases} x = 2n\pi + 2y \\ 2y + \frac{\pi}{4} = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

و جوابهای دو دستگاه (B') و (B'') بترتیب عبارتند از :

$$(B'_1) \begin{cases} x = 2k\pi \\ y = k\pi \end{cases} \qquad (B''_1) \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ y = k\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

۲) حل دستگاه (C) :

معادلهٔ دوم دستگاه (C) نیز معادلهٔ کلاسیک نوع اول است واین دستگاه را به صورت زیر می‌نویسیم (شمارهٔ ۱۰ همین فصل ، طریقهٔ اول) :

$$\begin{cases} x = (2n+1)\pi + 2y \\ \sin\left(2y - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

از دستگاه اخیر دو دستگاه جبری زیر نتیجه می‌شود :

$$(C') \begin{cases} x = (2n+1)\pi + 2y \\ 2y - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \qquad (C'') \begin{cases} x = (2n+1)\pi + 2y \\ 2y - \frac{\pi}{4} = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

و جوابهای دو دستگاه (C') و (C'') بترتیب عبارتند از :

$$(C'_1)\quad \begin{cases} x=(2k+1)\pi \\ y=k\pi \end{cases} \qquad (C''_1)\quad \begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \\ y=k\pi-\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

جوابهای [(B'_1) و (C'_1)] و همچنین جوابهای [(B''_1) و (C''_1)] که هرچهار جوابهای دستگاه (A) هستند به سه صورت کلی زیر خلاصه می‌شوند :

$$\begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \\ y=k\pi\pm\frac{\pi}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=k\pi \\ y=k\pi \end{cases}$$

مثال ۳- دستگاه :

$$\begin{cases} x+y=\frac{2\pi}{3} \\ \sin x-\sin y+\sin x\sin y=m \end{cases}$$

را حل کرده بازای مقادیر مختلف پارامتر m در جوابهای آن بحث کنید .

حل - دستگاه مفروض را مرتباً به صورتهای زیر می‌نویسیم :

$$\begin{cases} x+y=\frac{2\pi}{3} \\ 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}+\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right]=m \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=\frac{2\pi}{3} \\ 2\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{x-y}{2}+\frac{1}{2}\left(1-2\sin^2\frac{x-y}{2}-\cos\frac{2\pi}{3}\right)=m \end{cases}$$

$$(A)\qquad \begin{cases} x+y=\frac{2\pi}{3} \\ \sin^2\frac{x-y}{2}-\sin\frac{x-y}{2}-\frac{3}{4}=-m \end{cases}$$

با فرض : $\sin\frac{x-y}{2}=z$ ، معادلهٔ دوم دستگاه (A) به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$(B)\qquad z^2-z+\frac{1}{4}=1-m$$

اگر z_1 ریشه‌ای از معادلهٔ (B) متعلق به فاصلهٔ $(-1 \text{ ، } +1)$ و α کمانی واقع بین $-\frac{\pi}{2}$ و $+\frac{\pi}{2}$ باشد بقسمی که داشته باشیم : $\sin\alpha=z_1$ ، کمانهای x و y نظیر این ریشهٔ z_1 جوابهای یکی از دو دستگاه زیر خواهند بود :

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{3} \\ \frac{x-y}{2}=(2k+1)\pi-\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{3} \\ \frac{x-y}{2}=2k\pi+\alpha \end{cases}$$

بحث در جوابهای دستگاه مفروض منجر به بحث در ریشه‌های معادلهٔ (B) برحسب مقادیر مختلف m می‌شود و مانند نمونه‌هایی که در قسمت الف این فصل دیده‌ایم انجام می‌گیرد . این بحث را به عهدهٔ دانش‌آموزان می‌گذاریم ودر اینجا فقط‌به‌ذکر این نکته اکتفا می‌کنیم که معادلهٔ (B) را به صورت زیر می‌توان نوشت :

$$(B')\qquad \left(z-\frac{1}{2}\right)^2=1-m$$

و معادلهٔ (B') دو ریشهٔ متمایز خواهد داشت به شرط اینکه داشته

باشیم : $m<1$ ؛ و با برقراری این شرط ، مقدار دو ریشهٔ معادلهٔ (B') عبارتند از : $\frac{1}{2}\pm\sqrt{1-m}$.

مثال ۴ ـ به فرض آنکه m عددی مثبت و انتهای کمانهای $2x$ و $2y$ وهمچنین انتهای کمانهای x و y درربع اول واقع باشد، دستگاه :

$$(1)\qquad \begin{cases} \sin 2x = m\sin y \\ \cos 2x + \cos 2y = 1 \end{cases}$$

را حل و بحث کنید .

حل ـ دستگاه (۱) را مرتباً به صورتهای زیر می‌نویسیم :

$$(2)\qquad \begin{cases} \sin y = \dfrac{\sin 2x}{m} \\ \cos 2x = 1 - \cos 2y \end{cases}$$

$$(3)\qquad \begin{cases} \sin y = \dfrac{\sin 2x}{m} \\ \cos 2x = 2\sin^2 y \end{cases}$$

$$(4)\qquad \begin{cases} \sin^2 y = \dfrac{\sin^2 2x}{m^2} = \dfrac{1-\cos^2 2x}{m^2} \\ \cos 2x = 2\sin^2 y \end{cases}$$

معادلهٔ دوم دستگاه (۴) با توجه به معادلهٔ اول همین دستگاه به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$(5)\qquad \cos 2x = \frac{2(1-\cos^2 2x)}{m^2}$$

معادلهٔ (۵) را هم که مرتب کنیم چنین می‌شود :

$$(A)\qquad 2\cos^2 2x + m^2\cos 2x - 2 = 0$$

و بافرض :

$$(B)\qquad \cos 2x = z$$

معادلهٔ (A) را نیز به صورت :

$$(C)\qquad f(z) = 2z^2 + m^2 z - 2 = 0$$

می‌توان نوشت و هرریشه از معادلهٔ (C) به این شرط قابل قبول است که متعلق به فاصلهٔ (۱+ ، ۱−) باشد .

معادلهٔ (C) دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامه است ودر این معادله داریم :

$$af(-1) = -2m^2 < 0$$

و

$$af(1) = 2m^2 > 0$$

پس عدد ۱− بین دو ریشه و عدد ۱+ بزرگتر از هر دو ریشهٔ معادلهٔ (C) است و درنتیجه فقط ریشهٔ مثبت این معادله به صورت :

$$(D)\qquad z = \frac{-m^2 + \sqrt{m^4+16}}{4}$$

قابل قبول است و با توجه به‌معادلهٔ (D) ، معادلهٔ (B) چنین می‌شود :

$$(E)\qquad \cos 2x = \frac{-m^2 + \sqrt{m^4+16}}{4}$$

از معادلهٔ دوم دستگاه (۱) نیز حاصل می‌شود :

$$\cos 2y = 1 - \cos 2x$$

و چون در رابطهٔ اخیر به‌جای $\cos 2x$ مقدارش را از روی رابطهٔ (E) قرار دهیم چنین خواهیم داشت :

$$(F)\qquad \cos 2y = \frac{4 + m^2 - \sqrt{m^4+16}}{4}$$

بدیهی است‌که مقادیر $\cos 2x$ و $\cos 2y$ ، حاصل از روابط (E) و (F) ، به ازای جمیع مقادیر m بین ۰ و ۱ واقعند .

حال فرض می‌کنیم α و β دو کمان واقع بین ۰ و $\frac{\pi}{2}$ باشند بقسمی که داشته باشیم :

$$(E') \qquad \cos\alpha = \frac{-m^2+\sqrt{m^4+16}}{4}$$

و

$$(F') \qquad \cos\beta = \frac{4+m^2-\sqrt{m^4+16}}{4}$$

با این قرار ، از مقایسهٔ رابطهٔ (E) با (E') و همچنین (F) با (F') نتیجه می‌شود :

$$\begin{cases} \cos 2x = \cos\alpha \\ \cos 2y = \cos\beta \end{cases}$$

و از آنجا :

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi \pm \alpha \\ 2y = 2k\pi \pm \beta \end{cases}$$

اما بنابه‌فرض مسئله انتهای کمانهای ۲x و ۲y در ربع اول قرار دارد ؛ بنابراین با توجه به‌اینکه هریك از کمانهای α و β بین ۰ و $\frac{\pi}{2}$ فرض شده‌اند ، از جوابهای اخیر که برای کمانهای ۲x و ۲y بدست آمده است فقط دو جواب :

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \alpha \\ 2y = 2k\pi + \beta \end{cases}$$

و

قابل قبولند و نظیر این مقادیر ۲x و ۲y مقدار x و y بترتیب چنین می‌شود :

$$\begin{cases} x = k\pi + \frac{\alpha}{2} \\ y = k\pi + \frac{\beta}{2} \end{cases}$$

هریك از این مقادیر x و y را نیز برحسب آنکه k زوج ($k=2k'$) یا فرد ($k=2k'+1$) باشد ، بترتیب به دوصورت زیر می‌توان نوشت :

$$\begin{cases} x = 2k'\pi + \frac{\alpha}{2} \\ x = (2k'+1)\pi + \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} y = 2k'\pi + \frac{\beta}{2} \\ y = (2k'+1)\pi + \frac{\beta}{2} \end{cases}$$

بنابراین برای x و y چهار دستگاه مقدار به صورتهای زیر حاصل می‌شود :

$$(I) \begin{cases} x = 2k'\pi + \frac{\alpha}{2} \\ y = 2k'\pi + \frac{\beta}{2} \end{cases} \qquad (II) \begin{cases} x = 2k'\pi + \frac{\alpha}{2} \\ y = (2k'+1)\pi + \frac{\beta}{2} \end{cases}$$

$$(III) \begin{cases} x = (2k'+1)\pi + \frac{\alpha}{2} \\ y = 2k'\pi + \frac{\beta}{2} \end{cases} \qquad (IV) \begin{cases} x = (2k'+1)\pi + \frac{\alpha}{2} \\ y = (2k'+1)\pi + \frac{\beta}{2} \end{cases}$$

اما ازچهاردستگاه مقدار نامبرده‌که برای‌کمانهای x و y بدست آمده است فقط دودستگاه (I) و (III) در معادلات دستگاه(۱) صدق می‌کنند و به‌بیان دیگر ، فقط دو دستگاه (I) و (III) جوابهای

دستگاه (۱) هستند و دستگاههای (II) و (IV) در معادلات دستگاه (۱) صدق نمی‌کنند ، یعنی جوابهای خارجیند [خواننده با توجه به مثبت بودن m و شرایط مفروض برای کمانهای α و β هریك ازچهار دستگاه جواب نامبرده را در دو معادلهٔ دستگاه (۱) امتحان خواهد کرد] .

علت پیدایش جوابهای‌خارجی (II) و (IV) این است‌که به‌جای دستگاه مفروض (۱) دستگاه :

$$(1') \qquad \begin{cases} \sin 2x = -m \sin y \\ \cos 2x + \cos 2y = 1 \end{cases}$$

هم که داده می‌شد ، بابکار بردن همان روش که برای دستگاه (۱) ذکر کردیم حل دستگاه (۱') به‌حل‌همان دستگاه (۴) منجر می‌شد (چرا؟) و نتایج نهایی حاصل برای دستگاه (۱') عین نتایج عاید برای دستگاه (۱) می‌شدند ، منتهی این بارفقط مقادیر x و y مربوط به‌دستگاههای (II) و (IV) در معادلات دستگاه داده شدهٔ (۱') صدق می‌کردند و دستگاههای (I) و (III) جوابهای خارجی دستگاه (۱') می‌شدند . بطور خلاصه مقادیر x و y منـدرج در دستگاههای (I) و (III) جوابهای دستگاه (۱) و کمانهای x و y مندرج در دستگاههای (II) و (IV) جوابهای دستگاه (۱') می‌باشند .

حال با شرح مراتب اخیر چون به این معنی نیز توجه کنیم که بنا به فرض مسئله انتهای‌کمانهای x و y در ربع اول قرار دارد وعلاوه

براین هریك از کمانهای $\frac{\alpha}{2}$ و $\frac{\beta}{2}$ بین ۰ و $\frac{\pi}{2}$ واقعند ، واضح می‌شود که از دودستگاه جواب (I) و(III) حاصل برای دستگاه(۱) فقط دستگاه جوابهای (I) با مطلوب مسئله مطابقت دارند. بنابراین‌جوابهای قابل قبول مسئله عبارتند از :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 2k'\pi + \frac{\alpha}{2} \\ y &= 2k'\pi + \frac{\beta}{2} \end{aligned}}$$

بدیهی است که کمانهای α و β مندرج در دورابطهٔ اخیر را باید با استفاده‌از روابط (E') و (F') تعیین کرد .

تمرین ۱ــ عبارتهای $\cos\alpha$ و $\cos\beta$، مذکور در مثال قبل را به‌عبارات قابل محاسبه به‌وسیلهٔ لگاریتم تبدیل کنید وبا فرض : $\log m = 0/17609$ اندازهٔ عددی کمانهای α و β را برحسب درجه بدست‌آورید .

تمرین ۲ــ مثال قبل را با فرض $m = 0$ حل کنید .

پرسش ــ انتهای‌کمانهای x و y مربوط به‌هریك ازدستگاههای(II) و (III) و (IV) ، مذکور درمثال قبل، درکدام ربع از دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد ؟

تمرین

معادلات زیر را حل کنید :

۱- $\sqrt{3}\,tg\,x = 2\sin x$

۲- $\cos 2x + \cos\frac{x}{2} = 0$

۳- $2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0$

۴- $2\cos^2 x + (2+\sqrt{3})\sin x - (2+\sqrt{3}) = 0$

۵- $\sin^2 x + 2\cos 2x = \frac{1}{2}$

۶- $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin x$

۷- $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos 2x$

۸- $\cos 3x + 2\cos x = 0$

۹- $\cos 3x - 2\cos x + 1 = 0$

۱۰- $tg\frac{x}{2} = \frac{tg\,x - 1}{tg\,x + 1}$

۱۱- $\sin 2x = 3\cos 3x + \cos x$

۱۲- $tg\,x + tg\,2x = tg\,3x$

۱۳- $2\sin x \sin 3x = 1$

۱۴- $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$

۱۵- $tg\,x\,tg\,3x + 1 = 0$

۱۶- $2\cos\frac{x}{3} - \sin\frac{x}{2} = 2$

(فرض کنید $x = 6y$)

۱۷- $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$

۱۸- $\sin x \sin 3x = \cos 2x$

۱۹- $\sin^4 x + \cos^4 x - \sin 2x = \frac{1}{2}$

۲۰- $3tg^2 x - 16\sin^2 x + 3 = 0$

۲۱- $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$

۲۲- $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 4\cos\frac{x}{2}\cos x\cos\frac{3x}{2}$

۲۳- $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

۲۴- $tg(x+a) = \frac{3\sin 2x}{3\cos 2x - 1}$

۲۵- $4\sin 2x - 2(\sqrt{5} - 1)\cos x - 4\sin x + \sqrt{5} - 1 = 0$

۲۶- $\sin^2(x + 15^\circ) - \sin^2(x - 15^\circ) = \frac{1}{4}$

۲۷- $\cos^2(x - a) + \cos^2(x + a) = 1$

۲۸- $tg(a+x)\,tg(a-x) = \frac{1 - 2\cos 2a}{1 + 2\cos 2a}$

۲۹- $\frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \frac{\cos 4x}{\cos^4 x} + \frac{\cos 6x}{\cos^6 x} = -4$

۳۰- $\cos^3 x(\cos 3x - \cos 2x) + \cos^3 2x(\cos x - \cos 3x) + \cos^3 3x(\cos 2x - \cos x) = 0$

۳۱- $2tg\frac{\pi}{12}\cos^2(\frac{\pi}{5} + 2x) - \cos(\frac{\pi}{5} - 8x) = 1$

۳۲- $\cos^{10} x + \sin^{10} x = \frac{29}{16}\cos^4 2x$

۳۳- $\frac{\cos 5x}{\cos^2 2x} = 1 - tg^2 2x$

۳۴- $3 - 7\cos^2 x\sin x - 3\sin^3 x = 0$

۳۵- $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$

۳۶- $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$

۳۷- $(\cos x)^{\cos 3x + 2\cos x} = 1$

۳۸- $a^{\sin^2 x} + a^{1 + \cos^2 x} = 2a$

معادلات کلاسیک زیر را حل کنید :

۳۹- $\sin x - \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

۴۰- $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$

۴۱- $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 2$

۴۲- $\sin x + 2\cos x = \frac{3}{\sqrt{2}}$

۴۳- $(2+\sqrt{3})\sin x + 2(2-\sqrt{3})\cos x = \frac{7}{2}$

۴۴- $tg x + cotg x = \frac{4}{\sqrt{3}}$

۴۵- $tg x - \sqrt{3}\, cotg x = 1 - \sqrt{3}$

۴۶- $tg(x+\frac{\pi}{7}) + tg(\frac{5\pi}{14} - x) = 2$

۴۷- $tg(2x - 15^\circ) + tg(2x + 75^\circ) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

۴۸- $\sin^2 x - 2\cos^2 x + 3\sin x \cos x = 1$

۴۹- $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 3$

۵۰- $\sin x + 2\cos x = \frac{1}{\cos x}$

۵۱- $5\sin^2 x - 2\cos^2 x - 3\sin x\cos x = 0$

۵۲- $(\sqrt{2}+1)\sin^2 x + (\sqrt{2}-1)\cos^2 x + \sin 2x = \sqrt{2}$

۵۳- $\cos a \cos b \sin^2 x - \sin a \sin b \cos^2 x = \sin(a-b)\sin x \cos x$

۵۴- $\sin x + \cos x - \sin x \cos x = 1$

۵۵- $\sin x - \cos x + 2\sin x\cos x = \sqrt{2} - 1$

۵۶- $(1-\sqrt{3})\sin x + 2\sqrt{3}\sin 2x - (\sqrt{3}-1)\cos x = 2$

معادلات زیر را حل کنید :

۵۷- $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos 2x$

۵۸- $\cos^3 x - 2\cos^2 x \sin x + 3\sin^3 x \cos x = 0$

۵۹- $\sin x + \cos x + tg x = \frac{1}{\cos x}$

۶۰- $\sin x + \cos x = cotg x - tg x$

۶۱- $\sqrt{2}\cos x = \cos^3 x + \sin^3 x + \sin x\cos^2 x + \cos x \sin^2 x$

۶۲- $\sin x + \cos x + tg x + cotg x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = -2$

۶۳- $(\sin x + \cos x)^2 - (1+\sqrt{2})(\sin x + \cos x) + \sqrt{2} = 0$

معادلات زیر را حل و بحث کنید :

۶۴- $(2m-1)\sin x - m = 0$

۶۵- $m\cos x - m - 1 = 0 \qquad 0 < x < \frac{\pi}{3}$

۶۶- $(5-2m)\cos^2 x - 2(2m-1)\cos x + 2 = 0$

۶۷- $\cos^2 x + 2(a+1)\sin x - (4a+1) = 0 \qquad \frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6}$

۶۸- $(m-1)\sin x + (m+1)\cos x = 2m$

۶۹- $m\sin x + (2-m)\cos x = 1 \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

۷۰- $m\cos x + \sin x + 2m - 1 = 0 \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

۷۱- $(\sin a + \sin b)\sin x - (\cos a + \cos b)\cos x = \sqrt{2}$

۷۲- $tg^2 x - \sin^2 x = m$

۷۳- $\frac{\cos^4 a}{\cos^2 x} + \frac{\sin^4 a}{\sin^2 x} = 1$

۷۴- $m\sin(x-a) + \sin a - \sin x = 0$

۷۵- $\sin^4 x + \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x = m\cos 4x$

۷۶- $tg(x+a)\,tg(x-a) = m$

۷۷- $\cos 3x = 4a\cos^3 x$

۷۸- $tg x + \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = m \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

۷۹- $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} = m\, tg x$

۸۰- $\sin x\cos x - m(\sin x + \cos x) + 1 = 0$

-۸۱ $\sin 3x + m\sin 2x + \sin x = 0 \qquad -\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{3}$

-۸۲ $4\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)(\sin x+\sin 2x+m)=\cos 3x$

-۸۳ $\cos 2x - m\sin 2x(\sin x-\cos x)+\sin 2x = 1$

-۸۴ $(m+1)\sin x+\cos x = m\sin^2\frac{x}{2}+2m\cos^2\frac{x}{2}$

$$0<x<\pi$$

-۸۵ $m(tg\,x+cotg\,x)-2=\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin x}$

$$\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$$

-۸۶ $(1+\cos 2x)^5+(1-\cos 2x)^5=m(1+\cos 8x)$

-۸۷ $\frac{1}{\sin^2x}-\frac{1}{\cos^2x}=\frac{2m^2}{\cos 2x} \qquad -\frac{\pi}{8}<x<\frac{\pi}{8}$

دستگاههای زیر را حل کنید :

-۸۸ $\begin{cases} x-y=\frac{3\pi}{4} \\ \cos x+\cos y=\frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

-۸۹ $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{3} \\ \sin x+\sin y=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

-۹۰ $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{3} \\ \cos x-\cos y=\frac{1}{2} \end{cases}$

-۹۱ $\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3} \\ tg\,x\,tg\,y=-3 \end{cases}$

-۹۲ $\begin{cases} x+y=\frac{2\pi}{3} \\ \frac{\sin x}{\sin y}=2 \end{cases}$

-۹۳ $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{3} \\ tg\,x\;tg\,y=\frac{1}{3} \end{cases}$

-۹۴ $\begin{cases} x+y=\frac{2\pi}{3} \\ \cos x\cos y=-\frac{1}{2} \end{cases}$

-۹۵ $\begin{cases} tg(x+y)=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ tg\,x+tg\,y=\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

-۹۶ $\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{6} \\ \frac{tg\,x}{tg\,y}=3 \end{cases}$

-۹۷ $\begin{cases} \sin x+\cos y=0 \\ \cos x\sin y=-\frac{1}{2} \end{cases}$

-۹۸ $\begin{cases} \cos x=\sin y \\ tg\,2x=cotg\,y \end{cases}$

-۹۹ $\begin{cases} tg\,x+tg\,y=1 \\ \cos x\cos y=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

-۱۰۰ $\begin{cases} \sin(x+y)=\cos(x-y) \\ tg\,x-tg\,y=1 \end{cases}$

-۱۰۱ $\begin{cases} tg\,x+tg\,y=1 \\ \cos 2x+\cos 2y=1 \end{cases}$

-۱۰۲ $\begin{cases} \cos x+\cos y=\frac{3}{2} \\ \frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\cos y}=3 \end{cases}$

-۱۰۳ $\begin{cases} \cos x+\cos y=1 \\ \cos\frac{x}{2}+\cos\frac{y}{2}=1+\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

-۱۰۴ $\begin{cases} \sin x+\sin y=\frac{3}{2} \\ \cos x-\cos y=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

-۱۰۵ $\begin{cases} \sin x+\sin y=1 \\ \cos x\cos y=-\frac{3}{4} \end{cases}$

-۱۰۶ $\begin{cases} \sin x+\sin y=\sin a \\ \cos x+\cos y=1+\cos a \end{cases}$

-۱۰۷ $\begin{cases} \sin x=a\cos y \\ tg^2x=a\,tg\,y \end{cases}$

-۱۰۸ $\begin{cases} tg\,x=a\,tg\,2y \\ tg\,y=a\,tg\,2x \end{cases}$

-۱۰۹ $\begin{cases} \cos x+\cos y=1 \\ tg\frac{x}{2}\,tg\frac{y}{2}=a \end{cases}$

۱۱۰- به فرض آنکه انتهای کمانهای $2x$ و $2y$ و همچنین انتهای کمانهای x و y در ربع اول باشد دستگاه :

$$\begin{cases} \sin 2x = 2\sin y \\ \cos 2x + \cos 2y = 1 \end{cases}$$

را حل کنید .

۱۱۱- چه رابطه‌ای باید بین $\cos a$ ، $\cos b$ و $\cos c$ برقرار باشد تا دستگاه زیر دارای جواب باشد :

$$\begin{cases} x + y = a \\ \cos x \cos y = \cos b \\ \sin x \sin y = \cos c \end{cases}$$

۱۱۲- چه رابطه‌ای بایدبین $tg\, a$ ، $tg\, b$ و $tg\, c$ برقرارباشدتادستگاه زیر دارای جواب باشد :

$$\begin{cases} x + y = a \\ tg\, x + tg\, y = tg\, b \\ cotg\, x + cotg\, y = cotg\, c \end{cases}$$

۱۱۳- دستگاه : $\begin{cases} \cos x = a\cos 2y \\ \cos y = a\cos 2x \end{cases}$ را حل کنید .

۱۱۴- اولا از دستگاه :

$$\begin{cases} \cos(\alpha + y) + \cos(\alpha + x) + \cos\alpha = 0 \\ \sin(\alpha + y) + \sin(\alpha + x) + \sin\alpha = 0 \end{cases}$$

دستگاه زیر را بدست آورید :

$$\begin{cases} \cos y + \cos x + 1 = 0 \\ \sin y + \sin x = 0 \end{cases}$$

ثانیاً ثابت کنید که اگر انتهای کمانهای α ، $\alpha + x$ و $\alpha + y$ را روی دایرهٔ مثلثاتی به هم وصل کنیم ، مثلث متساوی‌الاضلاعی حاصل می‌شود .

۱۱۵- دستگاه زیر را حل و بحث کنید :

$$\begin{cases} tg\, x = a\, cotg\, y \\ tg\, 2x = b\, cotg\, 2y \end{cases}$$

۱۱۶- مطلوب است حل و بحث دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر :

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 1 \\ \cos 3x + \cos 3y = a \end{cases}$$

۱۱۷- دستگاه زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ \sin x + \sin y + \sin z = \sqrt{2} + 1 \\ \cos x + \cos y + \cos z = \sqrt{2} \end{cases}$$

دستگاههای زیر را حل و بحث کنید :

۱۱۸- $\begin{cases} tg\, x\, tg\, y = 2 \\ \sin 2x \sin 2y = m \end{cases}$

۱۱۹- $\begin{cases} tg\, x + tg\, y = 2\sqrt{2} \\ tg\, 2x + tg\, 2y = m\sqrt{2} \end{cases}$

۱۲۰- $\begin{cases} \dfrac{tg\, x}{cotg\, y} + \dfrac{tg\, y}{cotg\, x} + \sqrt{\dfrac{tg\, x}{cotg\, y}} + \sqrt{\dfrac{tg\, y}{cotg\, x}} = 4 \\ \sin x + \sin y = a \end{cases}$

۱۲۱- $\begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 y = a \\ tg\, x\, tg\, y = 2 \end{cases}$

۱۲۲-
$$\begin{cases} tg\,x\,tg\,y = 2 \\ tg\,x + tg\,y = m\,sin\,x\,sin\,y \end{cases}$$

۱۲۳-
$$\begin{cases} cos\,2x + cos\,2y = 1 \\ sin(x+y)\,cos(x-y) = m \end{cases}$$

۱۲۴-
$$\begin{cases} cos^2 x + cos^2 y = a \\ \dfrac{tg\,x}{tg\,y} = \sqrt{3} \end{cases}$$

فصل چهارم

نامعادلات مثلثاتی*

۱- هرگاه درنامعادلهٔ $A>B$ یا ($A<B$)، A و B عبارتهایی مثلثاتی شامل توابع مثلثاتی کمان x باشند ، نامعادلهٔ $A>B$ یا ($A<B$) را نامعادلهٔ مثلثاتی می‌نامند . مقادیری از x که به ازای آنها اندازهٔ عددی A بزرگتر از اندازهٔ عددی B باشد جوابهای نامعادلهٔ $A>B$ نامیده می‌شوند. (همچنین جوابهای نامعادلهٔ $A<B$ مقادیری از x هستند که به‌ازای آنها مقدار عددی A کوچکتر از مقدار عددی B باشد) .

۲- حل نامعادلهٔ : $sin\,x - q > 0$.

این نامعادله را به صورت :

$$sin\,x > q \qquad (1)$$

می‌نویسیم و با توجه به اینکه $sin\,x$ ، به ازای هر مقدار غیرمشخص

* این فصل ، جزء برنامهٔ سال ششم ریاضی نیست ، ولی دانستن آن ، برای حل مسائل لازم است .

ازکمان x ، منحصراً مقادیر واقع در فاصلهٔ (۱+ ، ۱−) را می‌تواند اختیار کند ، برحسب مقادیر مختلف q پنج حالت تمیز می‌دهیم :

الف : $q>۱$.

در این صورت ، نامعادلهٔ (۱) ممتنع است ، یعنی هیچ مقداری ازکمان x در نامعادلهٔ (۱) صدق نمی‌کند و خلاصه اینکه نامعادلهٔ (۱) جواب ندارد .

ب : $q=۱$.

در این حالت نیز، مانند حالت الف ، نامعادلهٔ (۱) ممتنع یعنی بلاجواب است .

ج : $q<-۱$.

در این حالت ، نامعادلهٔ (۱) به ازای جمیع مقادیر کمان x محقق است ، یعنی هر مقدار غیر مشخص از کمان x جواب نامعادلهٔ (۱) است .

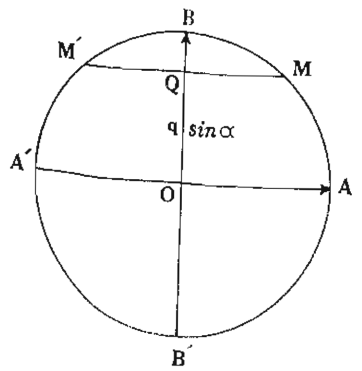
د : $q=-۱$.

در این صورت ، نامعادلهٔ (۱) به ازای جمیع مقادیر کمان x ، باستثنای کمانهایی که به صورت : $۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$ (k عدد صحیح) هستند و سینوس‌آنها برابر با ۱− است ، محقق می‌باشد ؛ یعنی تمام کمانهای x ، باستثنای کمانهای منتهی به نقطهٔ B′ (شکل ۱) ، جوابهای نامعادلهٔ (۱) هستند .

ه : $-۱<q<۱$.

در این حالت برای تعیین جوابهای نامعادلهٔ (۱)، دایرهٔ مثلثاتی

(شکل۱) را رسم کرده روی محور سینوسها پاره‌خط OQ را بطریقی جدا می‌کنیم که $\overline{OQ}=q$ باشد .



شکل۱

از نقطهٔ Q خطی موازی محور کسینوسها رسم می‌کنیم تا دایرهٔ مثلثاتی را در نقاط M و M′ قطع کند. کمانهایی که انتهای آنها روی کمان MBM′ واقعند دارای سینوسهایی بزرگتر از q هستند . بنابراین جوابهای نامعـادلهٔ مفروض $\widehat{AM}<x<\widehat{AM'}$ می‌باشند .

اگر مقدار اصلی کمان AM را برابر α فرض‌کنیم ، جوابهای نامعادلهٔ بالا درفاصلهٔ صفر و ۲π عبارتند از : $\alpha<x_0<\pi-\alpha$ ،

و جوابهای نامعادلهٔ مزبور به صورت کلی زیرند :

$$۲k\pi+\alpha<x<۲k\pi+\pi-\alpha$$

۳ـ برای حل نامعادلهٔ : $\sin x-q<0$ ، یعنی :

$$\sin x<q \qquad (۲)$$

نیز برحسب مقادیر مختلف q پنج حالت ممکن است اتفاق افتد :

الف : $q<-۱$ ، نامعادلهٔ (۲) ممتنع ، یعنی بلاجواب است .

ب : $q=-۱$ ، در این حالت نیز نامعادلهٔ (۲) جواب ندارد .

ج : $q>۱$ ، در این حالت ، تمام کمانهای غیرمشخص x جوابهای نامعادلهٔ (۲) می‌باشند .

د : $q=1$ ، در این حالت تمام کمانهای x ، باستثنای کمانهای منتهی به نقطهٔ B (شکل ۱) که به صورت :

$$2k\pi+\frac{\pi}{2} \qquad (\text{k عدد صحیح})$$

بوده و سینوس آنها برابر با ۱ است ، جوابهای نامعادلهٔ (۲) هستند .

ه : $-1<q<1$ ، در این حالت چون مانند شمارهٔ ۲ همین فصل استدلال کنیم ، بسهولت معلوم می‌شود که جوابهای نامعادلهٔ (۲) در فاصلهٔ صفر و 2π کمانهایی هستند که انتهای آنها روی کمان $M'B'M$ (شکل۱) قرار دارند ؛ بنابراین ، جوابهای نامعادلهٔ (۲) در فاصلهٔ صفر و 2π عبارتند از :

$$0<x<\alpha \qquad \text{و} \qquad \pi-\alpha<x<2\pi$$

۴ـ حل نامعادلهٔ : $\cos x-p>0$.

این نامعادله را به صورت :

$$\cos x>p \qquad (3)$$

می‌نویسیم و با توجه به اینکه $\cos x$ به‌ازای هر مقدار غیرمشخص از کمان x منحصراً مقادیر واقع در فاصلهٔ (۱+ ، ۱−) را می‌تواند اختیار کند ، بر حسب مقادیر مختلف p پنج حالت تمیز می‌دهیم :

الف : $p>1$ ، در این صورت نامعادلهٔ (۳) جواب ندارد .

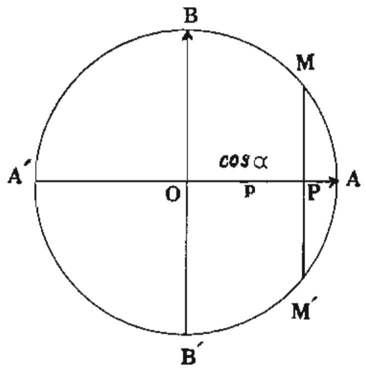
ب : $p=1$ ، در این حالت نیز نامعادلهٔ (۳) جواب ندارد .

ج : $p<-1$ ، در این حالت تمام کمانهای غیرمشخص x جواب نامعادلهٔ (۳) هستند .

د : $p=-1$ ، در این حالت تمام کمانهای x ، باستثنای کمانهای منتهی به نقطهٔ A' (شکل ۲) که به صورت :

$$(2k+1)\pi \qquad (\text{k عدد صحیح})$$

بوده وکسینوس آنها برابربا ۱− است ، جوابهای نامعادلهٔ (۳) هستند .



شکل ۲

ه : $-1<p<1$ ، در این حالت برای تعیین جوابهای نامعادلهٔ(۳)، دایرهٔ مثلثاتی(شکل ۲) را رسم کرده روی محور کسینوسها پاره‌خط OP را بطریقی جدا می‌کنیم که $\overline{OP}=p$ باشد .

از نقطهٔ P خطی موازی محورسینوسها می‌کشیم تا دایرهٔ مثلثاتی را در نقاط M و M' تلاقی کند .

کمانهایی که انتهای آنها روی کمان $M'AM$ واقعند ، دارای کسینوسهایی بزرگتر از p هستند .

اگر مقدار اصلی کمان AM را برابر α فرض کنیم ، جوابهای نامعادلهٔ مفروض در فاصلهٔ صفر و 2π عبارتند از :

$$\begin{cases} 0 \leq x_0 < \alpha \\ 2\pi - \alpha < x_0 \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{یا} \quad -\alpha < x_0 < \alpha$$

و جوابهای کلی نامعادلهٔ مزبور به صورت زیر است :

$$2k\pi - \alpha < x < 2k\pi + \alpha$$

هـ- برای حل نامعادلهٔ : $\cos x - p < 0$ ، یعنی :

$$\cos x < p \qquad (۴)$$

نیز بر حسب مقادیر مختلف p پنج حالت ممکن است اتفاق افتد :

الف : $p < -1$ ، در این صورت نامعادلهٔ (۴) جواب ندارد .

ب : $p = -1$ ، در این حالت نیز نامعادلهٔ (۴) جواب ندارد .

ج : $p > 1$ ، در این حالت تمام کمانهای غیر مشخص x جوابهای نامعادلهٔ (۴) هستند .

د : $p = 1$ ، در این حالت تمام کمانهای x ، باستثنای کمانهای منتهی به نقطهٔ A (شکل ۲) که به صورت :

$$2k\pi \qquad (\text{عدد صحیح } k)$$

بوده و کسینوس آنها برابر با ۱ است ، جوابهای نامعادلهٔ (۴) می‌باشند .

هـ : $-1 < p < 1$ ، در این حالت با توجه به شکل ۲ بسهولت معلوم می‌شود که جوابهای نامعادلهٔ (۴) در فاصلهٔ صفر و 2π عبارتند از :

$$\alpha < x < 2\pi - \alpha$$

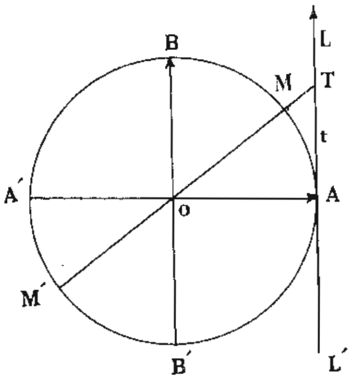
۶- حل نامعادلهٔ : $tg\, x - t > 0$.

این نامعادله که می‌توان آن را به صورت :

$$tg\, x > t$$

نوشت ، همواره دارای جواب است و برای تعیین جوابهای آن ، دایرهٔ مثلثاتی (شکل ۳) را رسم کرده روی محور تانژانتها پاره‌خط AT را بطریقی جدا می‌کنیم که $\overline{AT} = t$ باشد .

از نقطهٔ T به مرکز دایره وصل می‌کنیم ؛ خط OT و امتداد آن ، دایره را در نقاط M و M' قطع می‌کنند . کمانهایی که انتهای آنها روی کمان MB یا M'B' واقعند دارای تانژانتهایی بزرگتر از t هستند .



شکل ۳

اگر مقدار اصلی کمان AM را برابر α فرض کنیم ، جوابهای نامعادلهٔ مفروض در فاصلهٔ صفر و 2π عبارتند از :

$$\begin{cases} \alpha < x_0 < \frac{\pi}{2} \\ \pi + \alpha < x_0 < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

بسهولت معلوم می‌شود که جوابهای کلی نامعادلهٔ مزبور به صورت $k\pi+\alpha<x<k\pi+\frac{\pi}{2}$ هستند .

۷- بآسانی می‌توان دریافت که جوابهای نامعادلهٔ : $tgx-t<0$ در فاصلهٔ صفر و 2π عبارتند از :

$$\begin{cases} 0\leq x<\alpha \\ \pi\leq x<\pi+\alpha \end{cases}$$

۸- حل نامعادلهٔ : $a\sin^2x+b\sin x+c>0$.

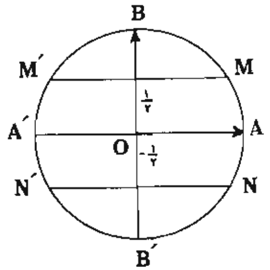
چون فرض کنیم : $\sin x=y$ ، نامعادلهٔ بالا به صورت نامعادلهٔ جبری : $ay^2+by+c>0$ در می‌آید .

جوابهای این نامعادله را بنا به قاعده‌ای که در حل نامعادلات درجهٔ دوم جبری دیده‌ایم تعیین می‌کنیم؛ به‌این ترتیب ، حدود y یعنی حدود $\sin x$ مشخص می‌شود ؛ و بنابر آنچه در شماره‌های ۲ و ۳ همین فصل دیده‌ایم ، حدود x را تعیین می‌کنیم .

مثال - نامعادلهٔ : $4\sin^2x-1<0$ را حل کنید .

$(0\leq x\leq 2\pi)$

حل - چون فرض کنیم : $\sin x=y$ ، می‌توان نوشت : $4y^2-1<0$. از حل این نامعادله حاصل می‌شود : $-\frac{1}{2}<y<\frac{1}{2}$.
بنابراین جوابهای نامعادلهٔ $4\sin^2x-1<0$ همان جوابهای مشترک دو نامعادلهٔ $-\frac{1}{2}<\sin x<\frac{1}{2}$ هستند . این دو نامعادله را بنابر



شکل ۴

آنچه در شماره‌های ۲ و ۳ همین فصل دیده‌ایم، حل کرده وجوابهای مشترك آنها را تعیین می‌کنیم .

از روی شکل ۴ معلوم می‌شود ، تمام کمانهایی که انتهای آنها روی کمان NAM یا M'A'N' واقع باشند جوابند و این کمانها عبارتند از : $0\leq x<\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}<x<\frac{7\pi}{6}$ و $\frac{11\pi}{6}<x\leq 2\pi$.

۹- حل نامعادلهٔ : $a\cos^2x+b\cos x+c>0$.

ابتدا فرض می‌کنیم : $\cos x=y$ ؛ سپس نامعادلهٔ جبری حاصل را حل کرده وبنابر آنچه در شماره‌های ۴ و ۵ همین فصل دیده‌ایم ، جوابهای نامعادله را تعیین می‌کنیم .

همچنین برای حل نامعادلهٔ : $a\,tg^2x+b\,tgx+c>0$ ، ابتدا فرض می‌کنیم : $tgx=y$ ؛ سپس نامعادلهٔ جبری حاصل را حل کرده و بنابر آنچه درشماره‌های ۶ و ۷ همین فصل دیده‌ایم ، جوابهای نامعادله را تعیین می‌کنیم .

۱۰ - بطور کلی برای حل نامعادلات مثلثاتی به طریق زیرعمل می‌کنیم :

ابتدا تمام جمله‌ها را به یك طرف نامعادله انتقال داده و عبارت حاصل را ساده می‌کنیم .

در مرحلهٔ دوم ، با استفاده از دستورهای جبری و روابط مثلثاتی عبارت مزبور را به حاصل ضرب عاملها تبدیل می‌کنیم .

در مرحلهٔ آخر ، با استفاده از قاعدهٔ حل نامعادلات جبری و مطالبی که در این فصل دیده‌ایم ، جوابهای نامعادله را تعیین می‌کنیم .

۱۱ ـ مثال ـ نامعادلهٔ $\frac{\sin x+5\cos x-2}{2\cos x-1}<2$ را حل کنید .
$(0\leq x\leq 2\pi)$

حل ـ عدد ۲ را به طرف اول نامعادله انتقال داده و طرف اول را ساده می‌کنیم حاصل می‌شود :

$$\frac{\sin x+\cos x}{2\cos x-1}<0$$

$\sin x+\cos x$ را به عوامل ضرب تبدیل می‌کنیم :

$$\sin x+\cos x=\sin x+\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$$

بنابراین ، نامعادلهٔ مفروض به این صورت در می‌آید :

$$\frac{\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})}{2\cos x-1}<0$$

یا :

$$\frac{\cos(x-\frac{\pi}{4})}{2\cos x-1}<0 \qquad (1)$$

اکنون باید علامتهای صورت و مخرج کسر طرف اول نامعادله را تعیین کنیم :

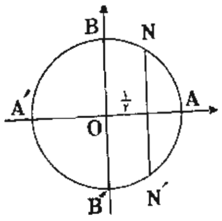
$\cos(x-\frac{\pi}{4})$ به ازای $x=\frac{3\pi}{4}$ و $x=\frac{7\pi}{4}$ برابر صفر است و علامت آن در صورتی مثبت است که $-\frac{\pi}{2}<x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$ باشد . از این

دو نامساوی حاصل می‌شود :

$$-\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$$

و بطور کلی :

$$2k\pi-\frac{\pi}{4}<x<2k\pi+\frac{3\pi}{4}$$



شکل ۵

جوابهای بین صفر و 2π عبارتند از :

$$0\leq x<\frac{3\pi}{4} \qquad و \qquad \frac{7\pi}{4}<x\leq 2\pi$$

علامت $\cos(x-\frac{\pi}{4})$ به‌ازای $\frac{3\pi}{4}<x<\frac{7\pi}{4}$ منفی است .

عبارت $2\cos x-1$ به ازای $x=\frac{\pi}{3}$ و $x=\frac{5\pi}{3}$ برابر صفر است و علامت آن در صورتی مثبت است که $\cos x>\frac{1}{2}$ باشد (شکل ۵) .

جوابهای این نامعادله عبارتند از : $0\leq x<\frac{\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{3}<x\leq 2\pi$ ؛

علامت $2\cos x-1$ به ازای $\frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{3}$ منفی است .

جدول صفحهٔ ۱۵۸ علامتهای $\cos(x-\frac{\pi}{4})$ و $2\cos x-1$ و کسر طرف اول نامساوی (۱) را نشان می‌دهد .

x	0		$\frac{\pi}{۳}$		$\frac{۳\pi}{۴}$		$\frac{۵\pi}{۳}$		$\frac{۷\pi}{۴}$		۲π
$\cos(x-\frac{\pi}{۴})$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	$+$
$۲\cos x-۱$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	$+$
کسر		$+$	∞	$-$	0	$+$	∞	$-$	0	$+$	$+$

از جدول اخیر معلوم می‌شود که جوابهای نامعادلهٔ مفروض عبارتند از :

$$\frac{\pi}{۳}<x<\frac{۳\pi}{۴} \quad و \quad \frac{۵\pi}{۳}<x<\frac{۷\pi}{۴}$$

تمرین

نامعادلات زیر را حل کنید :

-۱ $\left(-\frac{\pi}{۲}<x<\frac{\pi}{۲}\right)$ $\quad \sin x+\frac{۱}{۲}>۰$

-۲ $(۰<x<\pi)$ $\quad \operatorname{tg} x+\sqrt{۳}<۰$

-۳ $(۰<x<۲\pi)$ $\quad ۲\cos x-\sqrt{۲}>۰$

-۴ $(۰<x<۲\pi)$ $\quad ۲\sin^۲ x-۵\sin x+۲>۰$

-۵ $\left(-\frac{\pi}{۲}<x<\frac{\pi}{۲}\right)$ $\quad \operatorname{tg}^۲ x-(\sqrt{۳}-۱)\operatorname{tg} x-\sqrt{۳}<۰$

-۶ $\left(-\frac{\pi}{۲}<x<\frac{\pi}{۲}\right)$ $\quad \frac{\operatorname{tg} x(۳-\operatorname{tg}^۲ x)}{۱-\operatorname{tg}^۲ x}>۰$

-۷ $(۰<x<۲\pi)$ $\quad \frac{۲\sin^۲ x+\sin x-۱}{\sin x-۱}>۰$

-۸ $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ $\quad ۴\sin^۲ x-۲(\sqrt{۳}-۱)\sin x-\sqrt{۳}<۰$

-۹ $(\pi<x<۳\pi)$ $\quad (\sqrt{۲}\sin x+۱)(۴\cos^۲ x-۳)>۰$

-۱۰ $(۰<x<۲\pi)$ $\quad ۲\cos x+۲\sqrt{۳}\sin x<۱$

-۱۱ $(۰<x<۲\pi)$ $\quad \sin x+\sin ۲x+\sin ۳x>۰$

-۱۲ $\left(-\frac{\pi}{۲}<x<\frac{\pi}{۲}\right)$ $\quad \operatorname{tg} x-۲>\frac{۳}{\operatorname{tg} x}$

-۱۳ $(۰<x<۲\pi)$ $\quad \frac{\sin x+\cos x-\sin x\cos x+۱}{\sin x+\sin ۲x}>۰$

فصل پنجم

تعیین تغییرات و رسم منحنیهای توابع مثلثاتی

۱ـ توابع متناوب ـ تابع $f(x)$ را متناوب می‌گویند هرگاه عددی مانند P وجود داشته باشد بقسمی که با افزودن P یا مضرب صحیحی (مثبت و یا منفی) از P به متغیر x ، مقدار تابع فرق نکند.

به بیان دیگر ، تابع $f(x)$ را متناوب می‌خوانند هرگاه عددی مانند P وجود داشته باشد بقسمی که به ازای جمیع مقادیر x داشته باشیم :

$$f(x)=f(x+P)$$

و یا

$$f(x)=f(x+nP)$$

(n عدد صحیح مثبت و یا منفی)

اگر p کوچکترین عدد مثبتی باشد که در تعریف بالا صدق کند ، آن را **دورهٔ تناوب** تابع $f(x)$ می‌نامند.

۲ـ توابع مثلثاتی ـ تعریف ـ بطوری که در مقدمهٔ این کتاب دیدیم ، $\sin x$ ، $\cos x$ ، $tg\,x$ ، $cotg\,x$ ، $séc\,x$ و $cosécx$ هریك تابعی از متغیر x هستند و آنها را توابع مثلثاتی کمان x نامیدیم ؛ ولی باید دانست که بنابه تعریف ، بطور اعم هر تابعی را که لااقل شامل یکی از توابع مثلثاتی کمان x باشد نیز **تابع مثلثاتی** می‌نامند * .

* در این کتاب، توابع مثلثاتی که شامل عبارتی جبری ازخود متغیر x نیز باشند (مانندتابع : $y=1+x+\sin x-\cos x$) ، موضوع بحث نیست .

مثلا تابع : $y=f(x)=\frac{2\cos x}{1+\sin x}$ ، یك تابع مثلثاتی است.

۳ـ تناوب توابع مثلثاتی :

الف ـ اگر یکی ازدوتابع مثلثاتی $\sin x$ و $\cos x$ را $f(x)$ بنامیم ، با فرض اینکه k عدد صحیحی جبری باشد ، می‌دانید که

$$f(x)=f(x+2\pi)=f(x+2\times 2\pi)=\dots\dots=f(x+k\times 2\pi)$$

یعنی :

$$\sin x=\sin(x+2\pi)=\sin(x+4\pi)=\dots\dots=\sin(x+2k\pi)$$

و

$$\cos x=\cos(x+2\pi)=\cos(x+4\pi)=\dots\dots=\cos(x+2k\pi)$$

بنابراین : **دو تابع مثلثاتی $\sin x$ و $\cos x$ ، متناوبند ودورهٔ تناوب هریك از آنها 2π است.**

ب ـ اگر یکی از دو تابع مثلثاتی $tg\,x$ و $cotg\,x$ را $\varphi(x)$ بنامیم، با فرض اینکه k عدد صحیحی جبری باشد ، می‌دانید که

$$\varphi(x)=\varphi(x+\pi)=\varphi(x+2\times\pi)=\varphi(x+3\times\pi)=\dots=\varphi(x+k\times\pi)$$

یعنی :

$$tg\,x=tg(x+\pi)=tg(x+2\pi)=tg(x+3\pi)=\dots=tg(x+k\pi)$$

و

$$cotg\,x=cotg(x+\pi)=cotg(x+2\pi)=cotg(x+3\pi)=\dots=cotg(x+k\pi)$$

پس : **دوتابع مثلثاتی $tg\,x$ و $cotg\,x$ ، متناوبند و دورهٔ تناوب هر یك از آنها π است .**

ج ـ دو تابع مثلثاتی $\sin nx$ و $\cos nx$ (n عددمعلوم) نیزمتناوبند و دورهٔ تناوب هر یك از آنها برابر است با $\frac{2\pi}{n}$. زیرا :

$$\sin n(x+\frac{2\pi}{n})=\sin(nx+2\pi)=\sin nx$$

و

$$\cos n(x+\frac{2\pi}{n})=\cos(nx+2\pi)=\cos nx$$

مثلا دورهٔ تناوب $\sin 5x$ برابر با $\frac{2\pi}{5}$ و دورهٔ تناوب $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ برابر با π و دورهٔ تناوب $\sin\frac{x}{2}$ برابر با 4π است.

د ـ دو تابع مثلثاتی $tg\,nx$ و $cotg\,nx$ (n عدد معلوم) هم متناوبند و دورهٔ تناوب هر یك ازآنها برابر است با $\frac{\pi}{n}$. (چرا ؟)

هـ ـ توابع مثلثاتی به معنی اعم نیز متناوبند و اگر تابع مثلثاتی $f(x)$ شامل جمله‌هایی باشدکه هرکدام ازآن جمله‌ها دورهٔ تناوب مخصوصی مانند p' ، p'' ، ... داشته باشند ، دورهٔ تناوب $f(x)$ برابر خواهد بود با کوچکترین عددی که مضرب صحیح هریك از اعداد p' ، p'' ، ... باشد.

مثلا در تابع : $y=f(x)=\cos 5x+\sin 2x+tg\frac{x}{3}$ که تابعی است متناوب ، ملاحظه می‌کنیم که

دورهٔ تناوب $\cos 5x$ عبارت است از : $p'=\frac{2\pi}{5}=2\times\frac{\pi}{5}$

دورهٔ تناوب $\sin 2x$ » » » : $p''=\frac{2\pi}{2}=\pi=5\times\frac{\pi}{5}$

دورهٔ تناوب $tg\frac{x}{3}$ » » » : $p'''=\frac{\pi}{\frac{1}{3}}=3\pi=15\times\frac{\pi}{5}$

و کوچکترین عدد p که مضرب صحیح هریك از اعداد p' ، p'' و p''' باشد عبارت است از : $p=30\times\frac{\pi}{5}=6\pi$ که در آن ، عدد ۳۰ کوچکترین مضرب مشترك اعداد ۲ ، ۵ و ۱۵ است ؛ پس دورهٔ تناوب تابع مفروض y عبارت است از : $p=6\pi$.

تمرین ـ در صورتی که دورهٔ تناوب تابع مثلثاتی :

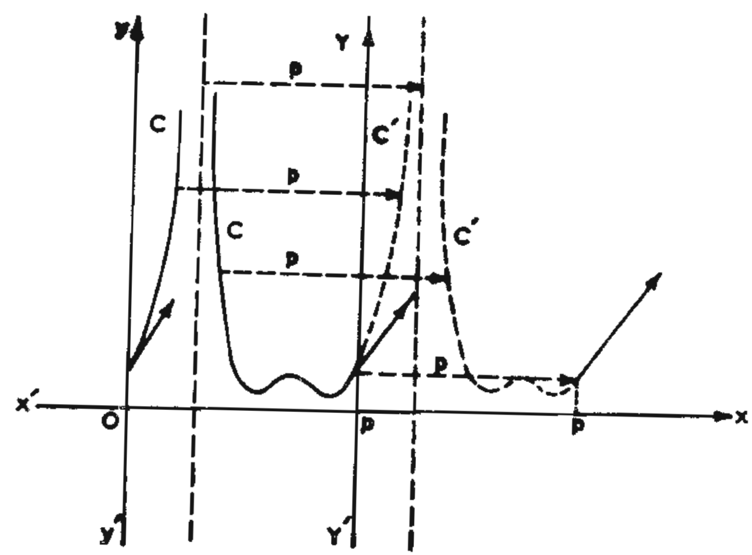
$$y=f(x)=\sin ax+\cos 2ax+tg\,3ax+cotg\,5ax$$

برابر با π باشد ، با تعیین مقدار a تابع y را مشخص کنید .

۴ـ تعیین تغییرات ورسم منحنیهای توابع مثلثاتی ـ با توجه به مطالبی که در بارهٔ تناوب توابع مثلثاتی گفته شد ، معلوم می‌شود که برای تعیین تغییرات تابعی از این قبیل ، کافی است که متغیر را در فاصله‌ای مانند فاصلهٔ (a , b) تغییر دهیم بطوری‌که $(b-a)$ ، برابر با دورهٔ تناوب آن تابع باشد وتغییرات تابع را در فاصلهٔ (a , b)، با همان روش‌که برای تعیین تغییرات توابع جبری در درس جبردیده‌ایم ، تعیین کنیم .

بدیهی است به‌کمك‌جدولی که برای این تغییرات تنظیم کنیم ، نیز می‌توان منحنی نمایش تغییرات تابع مفروض را در فاصلهٔ (a , b) رسم کرد .

همچنین ، معلوم می‌شود که اگر دورهٔ تناوب یك تابع مثلثاتی برابر با p و مثلا منحنی C (شکل ۱) ، منحنی نمایش تغییرات آن



شکل ۱

تابع در فاصلهٔ $(۰ ، p)$ باشد، برای تعیین منحنی نمایش تغییرات همان تابع در فاصلهٔ $(p ، ۲p)$، کافی است منحنی C را به اندازهٔ p به موازات محور $x'x$ و در جهت مثبت این محور انتقال دهیم تا به وضع C' در آید؛ منحنی C'، نمایش تغییرات تابع مفروض در فاصلهٔ $(p ، ۲p)$ خواهد بود.

برای نمونه، به ذکر چند مثال می‌پردازیم:

مثال ۱- جدول و منحنی نمایش تغییرات دو تابع

$$y = \sin x \quad \text{و} \quad y = \cos x$$

را رسم کنید.

جدول تغییرات این دو تابع را در سال پنجم دیده‌ایم؛ در اینجا، جدول تغییرات آنها را با بکار بردن مشتق تنظیم و منحنیهای نمایش تغییرات آنها را رسم می‌کنیم:

الف - تابع $y = \sin x$.

دورهٔ تناوب این تابع ۲π است، و x را در فاصلهٔ $(۰ ، ۲\pi)$ تغییر می‌دهیم. تابع در این فاصله معین است.

۱) مشتق تابع، $y' = \cos x$ است و به ازای $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$، مساوی صفر می‌شود؛ ریشه‌های مشتق درفاصلهٔ $(۰ ، ۲\pi)$، عبارتند از: $x = \frac{\pi}{۲}$ و $x = \frac{۳\pi}{۲}$، و به ازای آنها، مقدار تابع بترتیب:

$y = ۱$ و $y = -۱$.

مشتق تابع در فواصل $(۰ ، \frac{\pi}{۲})$ و $(\frac{۳\pi}{۲} ، ۲\pi)$ مثبت و در فاصلهٔ $(\frac{\pi}{۲} ، \frac{۳\pi}{۲})$ منفی است.

۲) تابع به‌ازای $x = k\pi$ مساوی صفر می‌شود؛ درفاصلهٔ $(۰ ، ۲\pi)$، تابع به ازای $x = ۰$ و $x = \pi$ و $x = ۲\pi$، برابر صفر است.

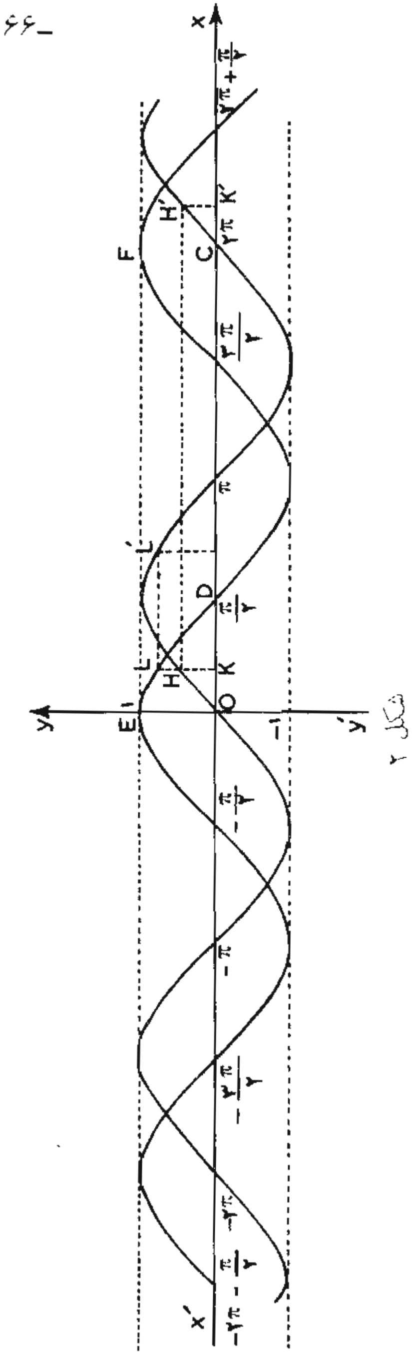
۳) جدول زیر، تغییرات تابع را در فاصلهٔ $(۰ ، ۲\pi)$ نشان می‌دهد:

x	۰		$\frac{\pi}{۲}$		π		$\frac{۳\pi}{۲}$		۲π
y'	+	+	۰	—	—	—	۰	+	+
y	۰	↗	۱	↘	۰	↘	−۱	↗	۰
			ماکزیمم				مینیمم		

۴) به‌کمک جدول بالا، منحنی نمایش تغییرات تابع $y = \sin x$ را در شکل ۲ رسم کرده‌ایم؛ این منحنی در فاصلهٔ $(۰ ، ۲\pi)$، از نقطهٔ O شروع و به نقطهٔ $C \left| {}^{۲\pi}_{۰} \right.$ منتهی می‌شود.

ب - تابع $y = \cos x$.

دورهٔ تناوب این تابع نیز ۲π است و x را در فاصلهٔ $(۰ ، ۲\pi)$ تغییر می‌دهیم. تابع دراین فاصله معین است.



۱) مشتق تابع، $y' = -\sin x$ است و به ازای $x = k\pi$ مساوی صفر می‌شود ؛ ریشه‌های مشتق در فاصلهٔ $(2\pi ، 0)$ ، عبارتند از : $x=0$ و $x=\pi$ و $x=2\pi$ ، و به ازای آنها مقدار تابع بترتیب : $y=1$ و $y=-1$ و $y=1$. مشتق تابع درفاصلهٔ $(\pi ، 0)$ منفی و در فاصلهٔ $(2\pi ، \pi)$ مثبت است .

۲) تابع به‌ازای: $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ مساوی صفر می‌شود؛ در فاصلهٔ $(2\pi ، 0)$ ، تابع به ازای $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\frac{3\pi}{2}$ برابر صفر است .

۳) جدول صفحهٔ بعد ،تغییرات تابع را در فاصلهٔ $(2\pi ، 0)$ نشان می‌دهد .

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0
y	1 ماکزیمم	↘	0	↘	-1 مینیمم	↗	0	↗	1 ماکزیمم

۴) به‌کمک جدول بالا ، منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\cos x$ را در شکل ۲ رسم کرده‌ایم ؛ این منحنی در فاصلهٔ $(2\pi ، 0)$ ، از نقطهٔ $E\left|\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right.$ شروع و به نقطهٔ $F\left|\begin{smallmatrix}2\pi\\1\end{smallmatrix}\right.$ منتهی می‌شود .

ملاحظات ـ چون دو مقدار سینوس نظیر دومقدار x و $(x+2\pi)$ ازکمان ، باهم برابرند $[\sin x = \sin(x+2\pi)]$ ، در شکل ۲ به وسیلهٔ یك حرکت انتقالی به‌اندازهٔ $\overrightarrow{OC}$ ، می‌توان نقطهٔ $H\left|\begin{smallmatrix}x\\ \sin x\end{smallmatrix}\right.$ از منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\sin x$ را بر نقطهٔ $H'\left|\begin{smallmatrix}x+2\pi\\ \sin(x+2\pi)\end{smallmatrix}\right.$ منطبق کرد . اگر همین انتقال را به منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\sin x$ مربوط به فاصلهٔ $(2\pi ، 0)$ بدهیم ، منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\sin x$ مربوط به فاصلهٔ $(4\pi ، 2\pi)$ بدست خواهد آمد ؛ و باز اگر همین انتقال را به منحنی اخیر بدهیم، منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\sin x$ در فاصلهٔ $(6\pi ، 4\pi)$ حاصل خواهد شد . همچنین ، انتقالی به‌اندازهٔ $\overrightarrow{CO}$ که به منحنی OC داده شود ، منحنی

نمایش تغییرات تابع $y=\sin x$ در فاصلهٔ $(-2\pi , 0)$ را بدست خواهد داد .

این ملاحظات که دربارهٔ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\cos x$ نیز جاری است ، مبیّن همان مطالب و خواصی است که ضمن شمارهٔ ۴ همین فصل ، در بارهٔ توابع مثلثاتی و تناوب و خواص آنها بطور کلی بیان کردیم .

علاوه بر خواص بالا ، در شکل۲ ، اگر D نقطه‌ای از محور $x'x$ به طول $+\frac{\pi}{2}$ باشد ، با یك حرکت انتقالی به‌اندازهٔ $\overrightarrow{OD}$ که به منحنی دوم داده شود ، بر منحنی اول منطبق خواهد شد (چرا ؟) .

دو منحنی دو تابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ را **سینوسُئید** (Sinusoïde) می‌نامند .

تمرین ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات دو تابع : $y=tg x$ و $y=cotg x$ را با بکار بردن مشتق درفاصلهٔ $(0 , \pi)$ رسم کنید .

مثال۲ـ جدول‌ومنحنی‌نمایش‌تغییرات‌تابع: $y=-2\cos 2x+1$ را رسم کنید .

حل ـ دورهٔ تناوب این تابع π است و x را در فاصلهٔ $(0 , \pi)$ تغییر می‌دهیم . تابع در این فاصله معین است .

۱ ـ مشتق تابع $y'=4\sin 2x$ است و به ازای $x=\frac{k\pi}{2}$ مساوی صفر می‌شود . ریشه‌های مشتق در فاصلهٔ $(0 , \pi)$ عبارتند از :

$x=0$ و $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\pi$ و به ازای آنها بترتیب $y=-1$ و $y=3$ و $y=-1$ هستند .

مشتق تابع در فاصلهٔ $(0 , \frac{\pi}{2})$ مثبت و در فاصلهٔ $(\frac{\pi}{2} , \pi)$ منفی است .

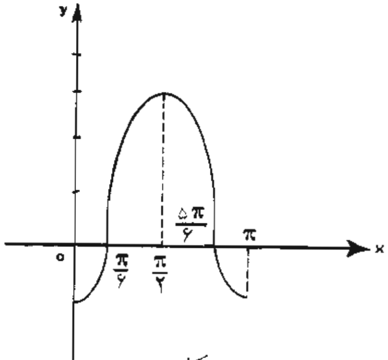
۲ـ تابع به‌ازای $x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ مساوی صفر می‌شود . در فاصلهٔ $(0 , \pi)$ تابع به‌ازای $x=\frac{\pi}{6}$ و $x=\frac{5\pi}{6}$ برابر صفر است .

۳ـ جدولی که در زیر تنظیم شده ، تغییرات تابع را در فاصلهٔ $(0 , \pi)$ نشان می‌دهد :

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
y'	0	+	+	+	0	−	−	−	0
y	-1	↗	0	↗	3	↘	0	↘	-1
	مینیمم				ماکزیمم				مینیمم

۴ـ به‌کمك جدول بالا منحنی نمایش تغییرات تابع به شکل (۳) رسم می‌شود .

مثال ۳ـ منحنی نمایش تغییرات‌تابع : $y=\sin x-\sin^2 x$ را رسم کنید .



شکل ۳

حل – دورهٔ تناوب این تابع 2π است و x را درفاصلهٔ $(0 ، 2\pi)$ تغییر می‌دهیم. تابع در این فاصله معین است.

۱– مشتق تابع $y'=\cos x-2\sin x\cos x$ است و به ازای $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ و $x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$ و $x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$ مساوی صفر می‌شود. ریشه‌های مشتق در فاصلهٔ $(0 ، 2\pi)$ عبارتند از: $x=\frac{\pi}{6}$ و $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\frac{5\pi}{6}$ و $x=\frac{3\pi}{2}$ و به ازای آنها بترتیب $y=\frac{1}{4}$ و $y=0$ و $y=\frac{1}{4}$ و $y=-2$ هستند.

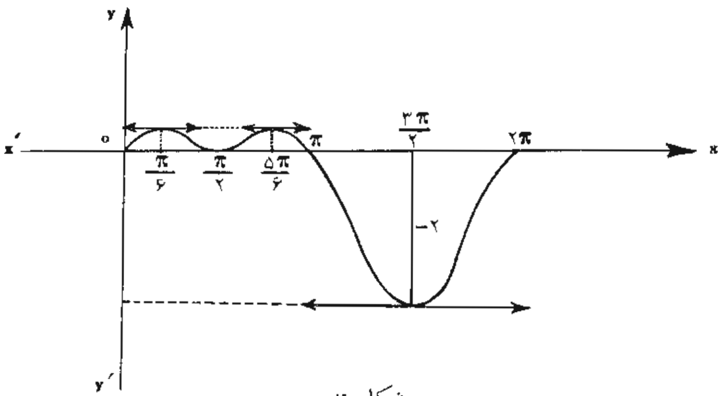
مشتق تابع در فاصله‌های $(0 ، \frac{\pi}{6})$ و $(\frac{\pi}{2} ، \frac{5\pi}{6})$ و $(\frac{3\pi}{2} ، 2\pi)$ مثبت بوده و در فاصله‌های $(\frac{\pi}{6} ، \frac{\pi}{2})$ و $(\frac{5\pi}{6} ، \frac{3\pi}{2})$ منفی است.

۲– تابع به‌ازای $x=k\pi$ و $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ مساوی صفر می‌شود. در فاصلهٔ $(0 ، 2\pi)$ تابع به ازای $x=0$ و $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\pi$ و $x=2\pi$ برابر صفر است.

۳– جدول زیر تغییرات تابع را درفاصلهٔ $(0 ، 2\pi)$ نشان می‌دهد:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$ ماکزیمم	$\searrow$	0 مینیمم	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$ ماکزیمم	$\searrow$	0	$\searrow$	-2 مینیمم	$\nearrow$	0

۴– منحنی نمایش تغییرات تابع به شکل زیر است (شکل ۴).



شکل ۴

مثال ۴– جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع:

$$y=\frac{\cos x+(2+\sqrt{3})\sin x}{\sin x+1}$$

را رسم کنید.

حل – دورهٔ تناوب این تابع 2π است و x را در فاصلهٔ $(0 ، 2\pi)$ تغییر می‌دهیم.

تابع به‌ازای جمیع کمانهای x واقع درفاصلهٔ $(0 ، 2\pi)$ باستثنای $x=\frac{3\pi}{2}$ که مخرج کسر تابع را صفر می‌کند، معین است.

۱– مشتق تابع $y'=\frac{(2+\sqrt{3})\cos x-\sin x-1}{(\sin x+1)^2}$ است.

مشتق تابع به‌ازای $x=2k\pi+\frac{\pi}{3}$، مساوی صفر است. ریشهٔ مشتق در فاصلهٔ $(0 ، 2\pi)$ عبارت است از: $x=\frac{\pi}{3}$.

به‌ازای $x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$ مشتق تابع به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ در می‌آید؛

وقتی که x به سمت $\frac{3\pi}{2}$ میل‌کند، y' به سمت بینهایت میل خواهدکرد.

علامت مشتق در فاصله‌های $(\frac{\pi}{3} ، 0)$ و $(2\pi ، \frac{3\pi}{2})$ مثبت و در فاصلهٔ $(\frac{3\pi}{2} ، \frac{\pi}{3})$ منفی است.

۲ـ تابع به‌ازای $x = k\pi + \frac{11\pi}{12}$ مساوی صفر می‌شود. در فاصلهٔ $(2\pi ، 0)$ تابع به ازای $x=\frac{11\pi}{12}$ و $x=\frac{23\pi}{12}$ برابر صفر است.

۳ـ به‌ازای $x=0$ و $x=2\pi$ حاصل می‌شود: $y=1$.

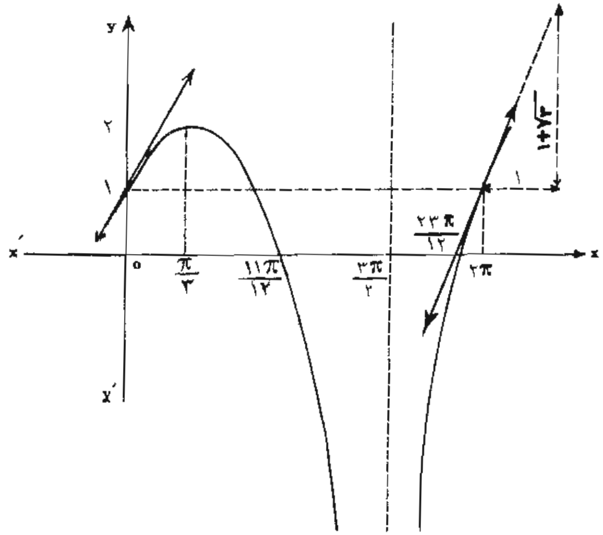
۴ـ وقتی که x به سمت جواب مخرج تابع یعنی $x=\frac{3\pi}{2}$ میل کند، y به سمت بینهایت میل می‌کند. خط $x=\frac{3\pi}{2}$ مجانبِ موازی محور $y'y$ منحنی تابع است.

۵ـ جدول زیر تغییرات تابع را در فاصلهٔ $(2\pi ، 0)$ نشان می‌دهد:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{11\pi}{12}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{23\pi}{12}$		2π
y'	+	+	0	−	−	−	|	+ +	+	+	+
y	1	↗	2 ماکزیمم	↘	0	↘	$-\infty$ | $-\infty$	↗	0	↗	1

۶ـ به‌کمك جدول بالا منحنی نمایش تغییرات تابع به شکل

زیر رسم می‌شود (شکل ۵).



شکل ۵

تمرین

جدول و منحنی نمایش تغییرات هریك از توابع زیر را رسم کنید:

۱ـ (در فاصلهٔ 2π و 0) $y=\sin x+\cos x$

۲ـ (در فاصلهٔ $+\pi$ و $-\pi$) $y=\sin x-\cos x+1$

۳ـ (در فاصلهٔ π و 0) $y=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$

۴ـ (در فاصلهٔ 2π و 0) $y=2\sin x+\cos x-1$

۵ـ (درفاصلهٔ $\frac{\pi}{2}$ و $-\frac{\pi}{2}$) $y=2\sin 2x-\sqrt{3}$

۶ـ (در فاصلهٔ 2π و 0) $y=\sin x(\cos x-1)$

۷ـ (درفاصلهٔ 2π و 0) $y=\cos^2 x-2\cos x$

۸ـ (در فاصلهٔ 2π و 0) $y=2\sin^2 x+2\sin x-1$

۹ـ (درفاصلهٔ π و 0) $y=\sin^2 x-2\sin x\cos x-\cos^2 x$

-۱۰ $۰\leq x\leq ۲\pi$ $\qquad y=\dfrac{\sin x}{۱-۲\sin x}$

-۱۱ $-\pi\leq x\leq \pi$ $\qquad y=\dfrac{\cos ۲x}{\cos x}$

-۱۲ $۰\leq x\leq ۲\pi$ $\qquad y=\dfrac{۱-\cos x}{۲+\cos x}$

-۱۳ $۰\leq x<۲\pi$ $\qquad y=\dfrac{۱+\cos x}{۱-\sin x}$

-۱۴ $-\pi\leq x<\pi$ $\qquad y=\dfrac{\sin^{۲} x}{\cos x}$

-۱۵ $۰<x<\pi$ $\qquad y=tg x+cotg x$

-۱۶ $\frac{\pi}{۴}<x\leq\frac{۵\pi}{۴}$ $\qquad y=\dfrac{\sqrt{۳}\,tg x}{۱-tg x}$

-۱۷ $۰<x<۲\pi$ $\qquad y=\sin x+\cos x+\sin x\cos x$

-۱۸ $۰<x<۲\pi$ $\qquad y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin ۲x}$

-۱۹ $۰\leq x\leq ۲\pi$ $\qquad y=\dfrac{tg x}{۱-۲\sin x}$

-۲۰ $۰<x<۲\pi$ $\qquad y=\sin^{۳} x+\cos^{۳} x$

-۲۱ $۰\leq x\leq ۴\pi$ $\qquad y=\sin\frac{x}{۲}+\cos x$

-۲۲ $۰\leq x\leq ۲\pi$ $\qquad y=\sin x+\frac{۱}{۲}\sin ۲x+\frac{۱}{۳}\sin ۳x$

-۲۳ $۰<x\leq ۲\pi$ $\qquad y=\dfrac{۱+\sin x}{\sin x(۱-\sin x)}$

-۲۴ $\frac{\pi}{۶}<x<\frac{۵\pi}{۶}$ $\qquad y=\sqrt{۲\sin x-۱}$

-۲۵ $۰<x<۲\pi$ $\qquad y=\dfrac{cotg x}{۱-\sin x}$

-۲۶ $۰\leq x\leq ۲\pi$ $\qquad y=\dfrac{\sin x}{\cos x-۴\sin ۲x}$

-۲۷ $۰\leq x\leq ۲\pi$ $\qquad y=(۲\sin x-۱)^{۳}$

-۲۸ $-\pi\leq x\leq \pi$ $\qquad y=\dfrac{۱}{۲\sin x(۱-\sin x)}$

-۲۹ $۰\leq x\leq \pi$ $\qquad y=\dfrac{\sin\frac{\pi}{۲}x}{\sin\frac{\pi}{۴}x-\cos\frac{\pi}{۴}x}$

-۳۰ $۰\leq x\leq ۲\pi$ $\qquad y=\cos x\cos(\frac{\pi}{۳}-x)$

-۳۱ $-\pi\leq x\leq \pi$ $\qquad y=\dfrac{۲\cos^{۲} x-\cos x-۱}{\cos x+۱}$

-۳۲ $۰\leq x\leq ۲\pi$ $\qquad y=\dfrac{\cos x(۱+\cos x)}{۱-\cos x}$

-۳۳ $۰\leq x\leq ۲\pi$ $\qquad y=\dfrac{\cos ۳x}{\cos ۲x}$

-۳۴ $\qquad y=\sqrt{\cos^{۲} x-\cos x}$

فصل ششم

روابط بین اجزای یك مثلث

۱ـ در مثلثات سال پنجم دیده‌ایم که در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=۹۰°$) بین‌سه‌ضلع a ، b و c وزوایای B و C روابط‌زیر برقرارند:

$$sin B = cos C = \frac{b}{a} \quad ، \quad cos B = sin C = \frac{c}{a} \quad ،$$

$$tg B = cotg C = \frac{b}{c} \quad ، \quad cotg B = tg C = \frac{c}{b}$$

۲ـ در مثلث غیر مشخص ABC اندازهٔ سه‌زاویه را با A ، B و C و اندازهٔ اضلاع مقابل به آنها را بترتیب با a ، b و c نشان می‌دهیم .

در چنین مثلث بین زوایا و اضلاع روابطی وجود دارند که در اینجا به‌ذکر دو دسته از آنها می‌پردازیم .

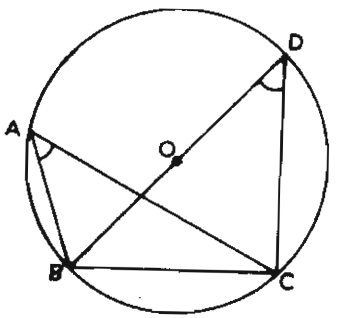
دستهٔ اول :

۳ـ قضیهٔ ۱ ـ بین زوایا و اضلاع هرمثلث سه رابطهٔ زیر برقرار است :

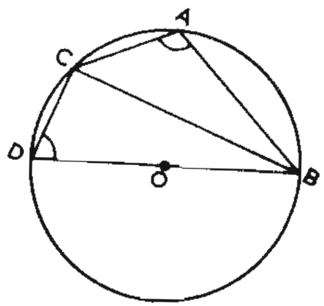
$$(E) \quad \begin{cases} A+B+C=۱۸۰° \\ \dfrac{a}{sin A}=\dfrac{b}{sin B}=\dfrac{c}{sin C} \end{cases}$$

اثبات ـ رابطهٔ $A+B+C=۱۸۰°$ درهندسه ثابت شده است .

برای اثبات دو رابطهٔ دیگر مثلث غیرمشخص ABC را در نظرگرفته دایرهٔ محیطی آن را رسم می‌کنیم (شکل ۱ یا ۲).



شکل۱



شکل۲

فرض می‌کنیم O مرکز و R شعاع این دایره باشد. قطرBOD را می‌کشیم ونقطهٔ D را به‌رأس C وصل‌می‌کنیم . زاویهٔ محاطیBCD، مقابل به قطر BD ، قائمه است و درمثلث قائم‌الزاویهٔ BCD داریم :

$$sin D=\frac{BC}{BD}$$

یا :

$$sin D=\frac{a}{۲R}$$

دو زاویهٔ A و D یا متساوی یا مکملند (شکل ۱ یا ۲) ودرهر دو حال سینوسهای این دوزاویه متساوی بوده ومی‌توان چنین نوشت :

$$\sin A=\frac{a}{2R}$$

و از آنجا :

$$\frac{a}{\sin A}=2R$$

به همین طریق ثابت می‌شود که

$$\frac{b}{\sin B}=2R$$

و

$$\frac{c}{\sin C}=2R$$

پس :

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

تبصره – از قضیهٔ بالا معلوم می‌شودکه نسبت هرضلع‌یك مثلث به سینوس زاویهٔ مقابل به آن‌ضلع مقداری ثابت وبرابر با $2R$ است.

عکس قضیهٔ ۱ – اگر سه عددمثبت a ، b و c وسه‌زاویهٔ‌مثبت A، B و C درروابط (E) صدق‌کنند ، مثلثی وجود داردکه درآن، اندازه‌های زوایا برحسب درجه A ، B و C و اندازه‌های اضلاع مقابل به این زوایا بترتیب a ، b و c است .

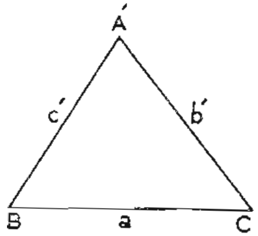
اثبات – فرض می‌کنیم سه عدد مثبت a ، b و c و سه زاویهٔ مثبت A، B و C در روابط :

$$(E)\qquad \begin{cases} A+B+C=180^\circ \\ \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C} \end{cases}$$

صدق کنند . از اولین رابطه از روابط (E) حاصل می‌شود :

$$B+C=180^\circ-A$$

و چون بنابرفرض A مثبت است ، مجموع $B+C$ از 180° کوچکتر خواهد بود ؛ پس می‌توان مثلث $A'BC$ (شکل ۱ مکرّر) را طوری رسم‌کردکه اندازهٔ ضلع BC از آن برابر a و اندازه‌های دو زاویهٔ B و C ، مجاور به ضلع BC ، ازاین مثلث بترتیب برابر B و C باشد . چون در این مثلث اندازهٔ زاویهٔ سوم را برحسب درجه با A' و اندازه‌های دو ضلع CA' و $A'B$ را بترتیب با b' و c' نمایش‌دهیم بنابرقضیهٔ مستقیم چنین خواهیم داشت :



شکل ۱ مکرر

$$(E')\qquad \begin{cases} A'+B+C=180^\circ \\ \dfrac{a}{\sin A'}=\dfrac{b'}{\sin B}=\dfrac{c'}{\sin C} \end{cases}$$

از مقایسهٔ روابط (E) که بنا بر فرض برقرار بوده‌اند با روابط (E')بدواً دیده می‌شود که

$$A'=A$$

و در نتیجه از روابط سینوسها حاصل می‌شود :

$$\frac{a}{\sin A'}=\frac{a}{\sin A}$$

و بنابراین :

$$b'=b \quad ، \quad c'=c$$

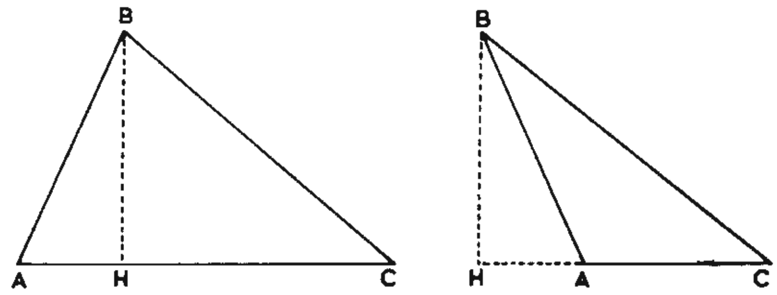
یعنی در مثلث مرسوم $A'BC$ اندازه‌های زوایا برابر با A ، B ، C و اندازه‌های اضلاع مقابل به این زوایا بترتیب برابر با a ، b و c می‌باشد .

دستهٔ دوم :

۴ ـ قضیهٔ ۲ ـ بین زوایا و اضلاع هرمثلث سه رابطهٔ زیر برقرار است :

$$(F)\qquad \begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2=a^2+c^2-2ac\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \end{cases}$$

اثبات ـ مثلث غیر مشخص ABC را در نظرمی‌گیریم وارتفاع BH آن را رسم می‌کنیم (شکل۳ ، الف یا ب ، $\hat{A}$ حاده یا منفرجه) .



(الف) (ب)

شکل ۳

در دومثلث قائم‌الزاویهٔ HBC و HBA داریم :

$$(۱)\qquad BC^2=HB^2+HC^2$$

و

$$(۲)\qquad HB^2=AB^2-AH^2$$

وچون تساویهای (۱) و (۲) را عضوبعضو با هم جمع کنیم :

$$(۳)\qquad BC^2=AB^2+HC^2-AH^2$$

اگر روی AC جهت مثبتی بدلخواه اختیار کنیم ، بنا به‌رابطهٔ شال چنین خواهیم داشت :

$$\overline{HC}=\overline{AC}-\overline{AH}$$

و در نتیجه :

$$(۴)\qquad HC^2=AC^2+AH^2-2\overline{AC}\cdot\overline{AH}$$

زیراکه‌مجذورهای مقادیرمطلق $\overline{HC}$ ، $\overline{AC}$ و $\overline{AH}$ ، یعنی مجذورهای HC ، AC و AH، بترتیب برابرند بامجذورهای $\overline{HC}$ ، $\overline{AC}$ و $\overline{AH}$.

چون در رابطهٔ (۳) به جای HC^2 مقدار مساوی آن را ازروی رابطهٔ (۴) قرار دهیم چنین خواهیم داشت :

$$BC^2=AB^2+AC^2+AH^2-2\overline{AC}.\overline{AH}-AH^2$$

یا :

$$(۵)\qquad BC^2=AB^2+AC^2-2\overline{AC}.\overline{AH}$$

حال فرض می‌کنیم جهت مثبت اختیاری بر AC جهت از A به طرف C باشد و روی AB نیز جهت از A به طرف B را جهت مثبت اختیار می‌کنیم ؛ با این قرار ، زاویهٔ A زاویهٔ دو محور AC و AB خواهد بود و چنین خواهیم داشت* :

$$(۶)\qquad \overline{AH}=\overline{AB}\ .\cos A$$

و با توجه به رابطهٔ (۶) و اینکه $\overline{AC}=b$ و $\overline{AB}=c$ ، رابطهٔ (۵) به صورت زیر در می‌آید :

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

به همین طریق می‌توان ثابت کرد که

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

و

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

* اندازهٔ جبری تصویر قائم هر حامل واقع بریك محور ، روی محور دیگر ، برابر است با حاصل ضرب اندازهٔ جبری آن حامل در کسینوس‌زاویه‌ای که دو محور با هم می‌سازند (مثلثات سال پنجم ، فصل دهم، شمارهٔ ۵) .

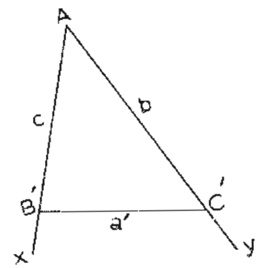
تبصره ـ اگر یکی ازسه زاویهٔ A ، B و C قائمه باشد، مثلث ABC قائم‌الزاویه خواهد بود وروابط (F) به‌صورت رابطهٔ فیثاغورث در می‌آیند .

عکس قضیهٔ ۲ـ اگر سه عدد مثبت a ، b و c وسه زاویهٔ A ، B و C واقع بین °۰ و °۱۸۰ درسه رابطهٔ (F) صدق کنند ، مثلثی وجوددارد که درآن ، اندازه‌های زوایا برحسب درجه A ، B و C و اندازه‌های اضلاع مقابل به این زوایا بترتیب a ، b و c است .

اثبات ـ فرض می‌کنیم سه عدد مثبت a ، b و c و سه زاویهٔ A ، B و C واقع بین °۰ و °۱۸۰ در سه رابطهٔ :

$$(F)\qquad \begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\end{cases}$$

صدق کنند . زاویهٔ xAy (شکل ۳ ـ ج) را با اندازهٔ A می‌سازیم و روی دو ضلع این زاویه طولهای $AC'=b$ و $AB'=c$ را نقل کرده دو نقطهٔ B′ و C′ را به هم وصل می‌کنیم. چون‌درمثلث AB′C′ اندازهٔ‌ضلع B′C′ را با a′ و اندازه‌های دو زاویهٔ B′ و C′ را برحسب درجه با B′ و C′ نمایش دهیم بنا بر قضیهٔ مستقیم چنین خواهیم داشت :



شکل ۳ ـ ج

$$(F')\qquad \begin{cases} a'^2=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2=a'^2+c^2-2a'c\cos B'\\ c^2=a'^2+b^2-2a'b\cos C'\end{cases}$$

مقایسهٔ اولین رابطه از روابط (F′) با اولین رابطهٔ از روابط (F) نشان می‌دهد که :

$$a'^2=a^2$$

و در نتیجه $a'=a$ ، زیرا a بنابرفرض مثبت بوده و a′ نیز که اندازهٔ یك طول است مثبت می‌باشد . بنابراین سه رابطهٔ (F′) را به صورت زیر می‌توان نوشت :

$$(F'')\qquad \begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2=a^2+c^2-2ac\cos B'\\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C'\end{cases}$$

حال چون رابطهٔ دوم از روابط (F″) را با رابطهٔ دوم از روابط (F) مقایسه کنیم معلوم می‌شود که

$$\cos B'=\cos B$$

اما بنابرفرض B بین °۰ و °۱۸۰ واقع بوده و B′ نیزکه اندازهٔ یك زاویه از مثلث AB′C′ است بین °۰ و °۱۸۰ واقع می‌باشد . پس این دو زاویه‌که هر دو بین °۰ و °۱۸۰ واقع بوده ودارای کسینوسهای برابرند با هم مساویند ، یعنی :

$$B'=B$$

به همین ترتیب معلوم می‌شود که C′ مساوی با C است. بنابراین در مثلث مرسوم AB′C′ اندازه‌های زوایا برابر با A ، B و C و اندازه‌های اضلاع مقابل به‌این زوایا بترتیب برابر با a ، b و c می‌باشد .

۵ـ دودسته رابطهٔ (E) و (F) ، مذکور درشماره‌های ۳ و۴ همین

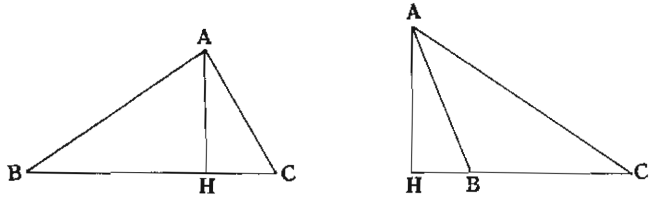
فصل ، را که بین اجزای اصلی یك مثلث (سه زاویـه و سه ضلع) برقرارند **روابط اصلی** می‌نامند .

۶- در هندسهٔ مسطحه دیده‌ایم‌که می‌توان اندازه‌های ارتفاعات و میانه‌ها و نیمسازها و شعاعهای دایره‌های محیطی‌ومحاطی وهمچنین مساحت مثلث را برحسب اندازه‌های اضلاع آن حساب کرد .

در اینجا اندازه‌های اجزای نامبرده را برحسب توابع مثلثاتی زوایای مثلث و اندازهٔ یك ضلع آن ، مثلا a ، حساب می‌کنیم .

۱) محاسبهٔ ارتفاعات :

در مثلث ABC ارتفاعات مرسوم از رأسهای A ، B و C را بترتیب با h_a ، h_b و h_c نشان می‌دهیم .



شکل ۴

محاسبهٔ h_a - در مثلث ABC ارتفاع AH را رسم می‌کنیم (شکل ۴) .

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB می‌توان نوشت :

$$\sin B = \frac{h_a}{c}$$

و از آنجا : $h_a = c\sin B$

از رابطهٔ $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ حاصل می‌شود :

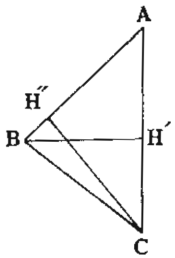
$$c = \frac{a\sin C}{\sin A}$$

در رابطهٔ $h_a = c\sin B$ به جای c مساویش $\frac{a\sin C}{\sin A}$ را قرار می‌دهیم ، حاصل می‌شود :

$$\boxed{h_a = \frac{a\sin B\sin C}{\sin A}}$$

محاسبهٔ h_b و h_c - در مثلث ABC ارتفاعات BH' و CH'' را رسم می‌کنیم (شکل۵).

در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $BH'C$ و $CH''B$ می‌توان مرتباً چنین نوشت :



شکل ۵

$$\boxed{h_b = a\sin C}$$

$$\boxed{h_c = a\sin B}$$

۲) محاسبهٔ میانه‌ها :

در مثلث ABC میانه‌های مرسوم از رأسهای A ، B و C را با m_a ، m_b و m_c نشان می‌دهیم .

محاسبهٔ m_a - در هندسهٔ سال چهارم دیده‌ایم :

$$m_a^{۲} = \frac{۲b^{۲} + ۲c^{۲} - a^{۲}}{۴} \qquad (E)$$

از رابطهٔ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ حاصل می‌شود :

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A} \quad \text{و} \quad c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

در رابطهٔ (E) به جای b و c این مقادیر را قرار می‌دهیم . پس از اختصار چنین خواهیم داشت :

$$\boxed{m_a^2=\frac{a^2(2\sin^2 B+2\sin^2 C-\sin^2 A)}{4\sin^2 A}}$$

محاسبهٔ m_b و m_c ـ با در نظر گرفتن دو رابطهٔ :

$$m_b^2=\frac{2c^2+2a^2-b^2}{4} \quad \text{و} \quad m_c^2=\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}$$

و با استفاده از رابطهٔ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ بسهولت معلوم می‌شود :

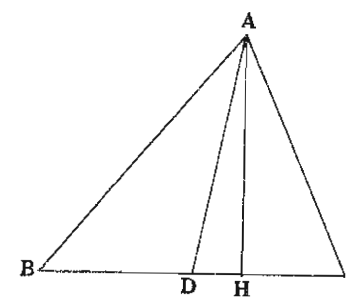
$$\boxed{m_b^2=\frac{a^2(2\sin^2 C+2\sin^2 A-\sin^2 B)}{4\sin^2 A}}$$

$$\boxed{m_c^2=\frac{a^2(2\sin^2 A+2\sin^2 B-\sin^2 C)}{4\sin^2 A}}$$

۳) محاسبهٔ نیمسازهای داخلی :

در مثلث ABC طول نیمسازهای داخلی زوایای A ، B و C را بترتیب با d_a ، d_b و d_c نشان می‌دهیم .

محاسبهٔ d_a ـ در مثلث ABC ارتفاع AH ونیمسازداخلی AD را رسم می‌کنیم (شکل۶).



شکل ۶

می‌توان نوشت :

$$\widehat{DAH}=\left|\widehat{BAH}-\widehat{BAD}\right|=\left|\frac{\pi}{2}-B-\frac{A}{2}\right|$$

$$=\left|\frac{\pi}{2}-B-\frac{\pi-B-C}{2}\right|=\left|\frac{C-B}{2}\right|$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHD داریم :

$$\cos\widehat{DAH}=\frac{AH}{AD}=\frac{h_a}{d_a}$$

ولی : $\cos\widehat{DAH}=\cos\left|\frac{C-B}{2}\right|=\cos\frac{C-B}{2}=\cos\frac{B-C}{2}$

و $h_a=\frac{a\sin B\sin C}{\sin A}$

بنابراین خواهیم داشت :

$$\boxed{d_a=\frac{a\sin B\sin C}{\sin A\cos\frac{B-C}{2}}} \qquad (L)$$

محاسبهٔ d_b و d_c ـ اگر در مثلث ABC (شکل۶) دو رأس A و B را به یکدیگر تبدیل کنیم ، دو زاویهٔ A و B به یکدیگر و در عین حال دو ضلع a و b نیز به‌هم تبدیل می‌شوند و دستور (L) به صورت زیر درمی‌آید :

$$d_b=\frac{b\sin A\sin C}{\sin B\cos\frac{A-C}{2}} \qquad (L_1)$$

همچنین با تبدیل دوراًس A و C به‌یکدیگر، دو زاویهٔ A و C به یکدیگر و درعین حال دوضلع a و c نیز به هم تبدیل می‌شوند و دستور (L) چنین می‌شود :

$$(L_2) \qquad d_c=\frac{c\sin A\sin B}{\sin C\cos\frac{A-B}{2}}$$

و چون در دستورهای (L_1) و (L_2) به جای $\frac{b}{\sin B}$ و $\frac{c}{\sin C}$ مقدار $\frac{a}{\sin A}$ را قرار دهیم ، بترتیب دو دستور (L') و (L'') به‌صورت زیر حاصل می‌شود :

$$(L') \qquad \boxed{d_b=\frac{a\sin C}{\cos\frac{A-C}{2}}}$$

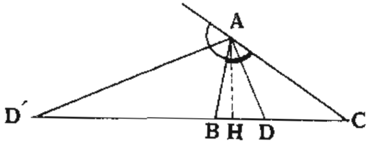
$$(L'') \qquad \boxed{d_c=\frac{a\sin B}{\cos\frac{A-B}{2}}}$$

ودستورهای اخیر (L' و L'') بترتیب مقادیر مطلوب d_b و d_c را بدست می‌دهند .

۴) محاسبهٔ نیمسازهای خارجی :

در مثلث ABC طول نیمسازهای خارجی زوایای A ، B و C را بترتیب با d'_a ، d'_b و d'_c نشان می‌دهیم .

محاسبهٔ d'_a - در مثلث ABC نیمساز داخلی AD ونیمساز خارجی AD' و ارتفاع AH را رسم می‌کنیم (شکل ۷) . چون اضلاع دوزاویهٔ $AD'H$ و DAH بر هم عمودند :



شکل ۷

$$\widehat{AD'H}=\left|\frac{B-C}{2}\right|$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHD' می‌توان چنین نوشت :

$$\sin\widehat{AD'H}=\frac{AH}{AD'}=\frac{h_a}{d'_a}$$

و از آنجا :

$$d'_a=\frac{h_a}{\sin\widehat{AD'H}}$$

یا :

$$\boxed{d'_a=\frac{a\sin B\sin C}{\sin A\sin\left|\frac{B-C}{2}\right|}}$$

محاسبهٔ d'_b و d'_c - با محاسباتی نظیر آنچه در بارهٔ d'_a انجام گردید معلوم می‌شود :

$$d'_c=\frac{c\sin A\sin B}{\sin C\sin\left|\frac{B-A}{2}\right|} \qquad \text{و} \qquad d'_b=\frac{b\sin C\sin A}{\sin B\sin\left|\frac{A-C}{2}\right|}$$

اگر در دو رابطهٔ اخیر به جای $\frac{b}{\sin B}$ و $\frac{c}{\sin C}$ مقدار $\frac{a}{\sin A}$

را قرار دهیم حاصل می‌شود :

$$\boxed{d'_c=\frac{a\sin B}{\sin\left|\frac{B-A}{2}\right|}} \quad \text{و} \quad \boxed{d'_b=\frac{a\sin C}{\sin\left|\frac{A-C}{2}\right|}}$$

۵) محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محیطی :

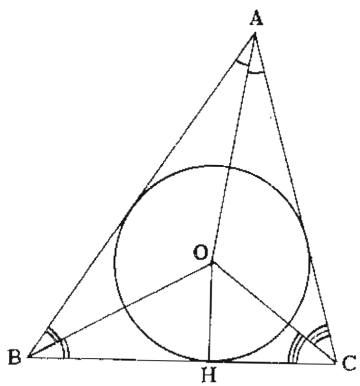
شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC را با R نشان می‌دهیم . از رابطهٔ $\frac{a}{\sin A}=2R$ حاصل می‌شود :

$$\boxed{R=\frac{a}{2\sin A}}$$

۶) محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محاطی داخلی :

شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC را با r نشان می‌دهیم .

می‌دانیم نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث، محل تلاقی نیمسازهای داخلی آن است. از نقطهٔ O عمود OH را بر ضلع BC فرود می‌آوریم (شکل ۸).



شکل ۸

در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB و OHC می‌توان چنین نوشت:

$$BH=OH\,cotg\,\widehat{OBH}=r\,cotg\frac{B}{2}$$

و

$$CH=OH\,cotg\,\widehat{OCH}=r\,cotg\frac{C}{2}$$

چون طرفین این دورابطه را عضوبعضو با یکدیگر جمع کنیم حاصل می‌شود :

$$BH+CH=a=r\left(cotg\frac{B}{2}+cotg\frac{C}{2}\right)$$

و از آنجا :

$$r=\frac{a}{cotg\frac{B}{2}+cotg\frac{C}{2}}$$

برای آنکه رابطهٔ اخیر به وسیلهٔ لگاریتم قابل محاسبه باشد، عبارت $cotg\frac{B}{2}+cotg\frac{C}{2}$ را به حاصل‌ضرب عاملها تبدیل می‌کنیم تا حاصل شود :

$$r=\frac{a}{\frac{\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}}=\frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}}$$

و چون $\sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2}$ است :

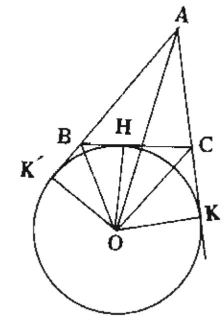
$$\boxed{r=\frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}$$

۷) محاسبهٔ شعاعهای دوایر محاطی خارجی :

در مثلث ABC شعاعهای دوایر محاطی خارجی مماس بر اضلاع BC ، CA و AB را بترتیب با r_a ، r_b و r_c نشان می‌دهیم .

محاسبهٔ r_a ـ می‌دانیم نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی خارجی مثلث مماس بر ضلع BC ، محل تلاقی نیمسازهای خارجی زوایای B و C است (شکل ۹) .

از نقطهٔ O عمود OH را بر ضلع BC فرود می‌آوریم :



شکل ۹

در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB و OHC می‌توان نوشت :

$$BH = OH\,cotg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right) = r_a\,tg\frac{B}{2}$$

$$CH = OH\,cotg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right) = r_a\,tg\frac{C}{2}$$

طرفین این دو رابطه را عضو بعضو با هم جمع می‌کنیم تا حاصل شود :

$$BH+CH = a = r_a\left(tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}\right)$$

و از آنجا :

$$r_a = \frac{a}{tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}}$$

عبارت $tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}$ را به عبارتی که قابل محاسبهٔ لگاریتمی باشد تبدیل می‌کنیم ، حاصل می‌شود :

$$r_a = \frac{a}{\dfrac{\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}} = \frac{a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}}$$

یا

$$\boxed{r_a = \frac{a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}$$

محاسبهٔ r_b و r_c ـ با محاسباتی نظیر آنچه در بارهٔ r_a انجام گردید ، معلوم می‌شود :

$$r_c = \frac{c\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$ و $$r_b = \frac{b\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$$

ولی

$$b = \frac{a\sin B}{\sin A} = \frac{a\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

و

$$c = \frac{a\sin C}{\sin A} = \frac{a\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

بنابراین r_b و r_c را به این صورتها می‌توان نوشت :

$$\boxed{r_c = \frac{a\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}}}$$ و $$\boxed{r_b = \frac{a\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}}$$

۸) محاسبهٔ مساحت مثلث :

مساحت مثلث ABC را با S نشان می‌دهیم .

می‌دانیم $S=\frac{1}{2}a\times h_a$ ؛ در این رابطه به جای h_a مساوی آن

$\frac{a\sin B\sin C}{\sin A}$ را قرار می‌دهیم حاصل می‌شود :

$$\boxed{S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}}$$

تبصره ـ اگر در رابطهٔ $S=\frac{1}{2}a\times h_a$ به‌جای h_a مساوی آن $c\sin B$ را قرار دهیم حاصل می‌شود :

$$S=\frac{1}{2}ac\sin B$$

و بسهولت معلوم می‌شود که :

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A \quad و \quad S=\frac{1}{2}ab\sin C$$

یعنی : **مساحت مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع مثلث ضرب در سینوس زاویهٔ بین این دوضلع .**

این دستور در موارد مختلف مورد استعمال دارد .

تمرین

ثابت کنید در هرمثلث روابط زیر برقرارند :

۱ـ $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{p}{R}$ (p نصف محیط مثلث است)

۲ـ $a\sin A+b\sin B+c\sin C=\frac{a^2+b^2+c^2}{2R}$

۳ـ $a=b\cos C+c\cos B$

۴ـ $a^2-b^2=ac\cos B-bc\cos A$

۵ـ $a\cos A+b\cos B+c\cos C=\frac{2S}{R}$

۶ـ $\frac{b-2a\cos C}{a\sin C}=\cot A-\cot C$

۷ـ $\frac{b-2a\cos C}{a\sin C}+\frac{c-2b\cos A}{b\sin A}+\frac{a-2c\cos B}{c\sin B}=0$

۸ـ $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$

۹ـ $4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r}{R}$

۱۰ـ $2\sin A\sin B\sin C=\frac{pr}{R^2}$

۱۱ـ ثابت‌کنید اگردرمثلثی رابطهٔ $\sin^2 B+\sin^2 C=\sin^2 A$ برقرار باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است .

نوع مثلثی را تعیین کنید که در آن ، یکی از روابط زیر برقرار باشد :

۱۲ـ $a=2b\sin\frac{A}{2}$ ۱۳ـ $\sin B=2\sin C\cos A$

۱۴ـ $\sin\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2}=\sin\frac{B}{2}\cos^3\frac{A}{2}$

۱۵ـ $\frac{\sin B}{\cos C}=\sin A+\cos A\cot B$

۱۶ـ $\sin 2B+\sin 2C=\frac{2S}{R^2}$ ۱۷ـ $\frac{b^2}{\tan B}+\frac{c^2}{\tan C}=4S$

۱۸ـ $(a^2+b^2)\sin(A-B)=(a^2-b^2)\sin C$

۱۹ـ در مثلث ABC زاویهٔ B دوبرابرزاویهٔ C است ؛ ثابت کنید:

$$b=2c\cos C \quad و \quad b^2-c^2=ac$$

۲۰ـ درمثلث ABC رابطهٔ $6A=4B=3C$ بین‌زوایابرقراراست؛ ثابت کنید :

$$\frac{a+c}{2b}=\cos\frac{A}{2}$$

۲۱ـ درمثلث ABC رابطهٔ $a+c=2b$ بین اضلاع بر قرار است ؛ ثابت کنید :

$$tg\frac{A}{2}tg\frac{C}{2}=\frac{1}{3} \quad \text{و} \quad 4(1-\cos A)(1-\cos C)=\cos A+\cos C$$

۲۲ـ طولهای اضلاع مثلثی برابرند با m^2+m+1 و $2m+1$ و m^2-1 $(m>1)$؛ ثابت‌کنیدکه‌یکی از زوایای این‌مثلث برابربا $\frac{2\pi}{3}$ است.

۲۳ـ ثابت کنید اگر در مثلث ABC زاویهٔ A برابر 120° باشد ، بین اضلاع ، رابطهٔ : $c(a^2-c^2)=b(a^2-b^2)$ برقرار است .

۲۴ـ درمثلث ABC ضلع $BC=a$ وزاویهٔ A مقادیر ثابت هستند.
اولاً ـ تعیین‌کنید چه رابطه‌ای بایدبین زوایای B و C برقرارگردد تا مساحت مثلث ماکزیمم باشد. ثانیاً ـ مقدارماکزیمم مساحت را برحسب a و توابع مثلثاتی زاویهٔ $\frac{A}{2}$ حساب کنید .

۲۵ـ ثابت‌کنید اگردر مثلث ABC دو رابطهٔ زیر محقق باشد ، مثلث متساوی‌الاضلاع است :

$$\begin{cases} \dfrac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a}=a^2 \\ \sin B\sin C=\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

۲۶ـ اگر H نقطهٔ تلاقی سه ارتفاع مثلث ABC و S مساحت مثلث باشد و فرض کنیم $HA=x$ ، $HB=y$ و $HC=z$ ، ثابت کنید :

$$x\sin A+y\sin B+z\sin C=4R\sin A\sin B\sin C$$

فصل هفتم

حل مثلث درحالات کلاسیك

۱ـ در هندسه دیده‌ایم که بطور کلی هرگاه از مثلثی سه جزء معلوم باشند بقسمی‌که هر یك ازآنها را نتوانیم به‌وسیلهٔ دوجزء دیگر تعیین کنیم ، می‌توان مثلث را حل کرد .

مقصود از حل مثلث ، محاسبهٔ اجزای مجهول مثلث برحسب معلومات آن است . برای این منظور ، از معلومات مسئله وروابط بین اجزای مثلث بطور مناسب استفاده کرده معادلاتی برحسب مجهولات مثلث تشکیل می‌دهیم و ازحل آنها اجزای مجهول را حساب می‌کنیم.

چون با معلوم بودن اجزای اصلی مثلث، محاسبهٔ اجزای فرعی آن به‌کمك روابطی که در فصل قبل دیده‌ایم بسهولت انجام می‌گیرد ، برای حل یك مثلث کافی است که اجزای اصلی آن را حساب کنیم .

حل مثلث را در حالاتی که سه جزء معلوم ، از اجزای اصلی مثلث(سه‌ضلع‌وسه‌زاویه) باشند، حل‌مثلث در**حالات کلاسیك** می‌نامند و در غیر این صورت ، حل مثلث را **غیر کلاسیك** می‌گویند .

۲۱- درمثلث ABC رابطهٔ $a+c=2b$ بین اضلاع بر قرار است ؛ ثابت کنید :

$$4(1-\cos A)(1-\cos C)=\cos A+\cos C \quad \text{و} \quad tg\frac{A}{2}tg\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$$

۲۲- طولهای اضلاع مثلثی برابرند با m^2+m+1 و $2m+1$ و m^2-1 $(m>1)$؛ ثابت‌کنیدکه‌یکی از زوایای این‌مثلث برابربا $\frac{2\pi}{3}$ است.

۲۳- ثابت کنید اگر در مثلث ABC زاویهٔ A برابر 120° باشد ، بین اضلاع ، رابطهٔ : $c(a^2-c^2)=b(a^2-b^2)$ برقرار است .

۲۴- درمثلث ABC ضلع $BC=a$ وزاویهٔ A مقادیر ثابت هستند.
اولاً ـ تعیین‌کنید چه رابطه‌ای بایدبین زوایای B و C برقرارگردد تا مساحت مثلث ماکزیمم باشد. ثانیاً ـ مقدارماکزیمم مساحت را برحسب a و توابع مثلثاتی زاویهٔ $\frac{A}{2}$ حساب کنید .

۲۵- ثابت‌کنید اگردر مثلث ABC دو رابطهٔ زیر محقق باشد ، مثلث متساوی‌الاضلاع است :

$$\begin{cases} \dfrac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a}=a^2 \\ \sin B\sin C=\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

۲۶- اگر H نقطهٔ تلاقی سه ارتفاع مثلث ABC و S مساحت مثلث باشد و فرض کنیم $HA=x$ ، $HB=y$ و $HC=z$ ، ثابت کنید :

$$x\sin A+y\sin B+z\sin C=4R\sin A\sin B\sin C$$

فصل هفتم

حل مثلث درحالات کلاسیک

۱- در هندسه دیده‌ایم که بطور کلی هرگاه از مثلثی سه جزء معلوم باشند بقسمی‌که هر یك ازآنها را نتوانیم به‌وسیلهٔ دوجزء دیگر تعیین کنیم ، می‌توان مثلث را حل کرد .

مقصود از حل مثلث ، محاسبهٔ اجزای مجهول مثلث برحسب معلومات آن است . برای این منظور ، از معلومات مسئله وروابط بین اجزای مثلث بطور مناسب استفاده کرده معادلاتی برحسب مجهولات مثلث تشکیل می‌دهیم و ازحل آنها اجزای مجهول را حساب می‌کنیم.

چون با معلوم بودن اجزای اصلی مثلث، محاسبهٔ اجزای فرعی آن به‌کمك روابطی که در فصل قبل دیده‌ایم بسهولت انجام می‌گیرد ، برای حل یك مثلث کافی است که اجزای اصلی آن را حساب کنیم .

حل مثلث را در حالاتی که سه جزء معلوم ، از اجزای اصلی مثلث(سه‌ضلع‌وسه‌زاویه) باشند، حل‌مثلث در**حالات کلاسیک** می‌نامند و در غیر این صورت ، حل مثلث را **غیر کلاسیک** می‌گویند .

حالات کلاسیك حل مثلث عبارتند از :

I- حالتی‌که دو زاویه و یك ضلع معلوم است .

II- حالتی که دو ضلع و زاویهٔ مقابل به یکی از این دو ضلع معلوم است .

III- حالتی که دو ضلع و زاویهٔ بین آنها معلوم است .

IV- حالتی که سه ضلع معلوم است .

حل مثلث در حالتی‌که دو زاویه و یك ضلع معلوم است.

۲- فرض می‌کنیم از مثلث ABC ، ضلع a و زوایای B و C معلوم باشند .

برای حل مثلث دستگاه زیر را تشکیل می‌دهیم :

$$\begin{cases} A+B+C=\pi \\ \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C} \end{cases}$$

ابتدا از معادلهٔ اول دستگاه زاویهٔ A را حساب می‌کنیم :

$$A=\pi-(B+C)$$

سپس از روابط $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ استفاده کرده و دو ضلع b و c را محاسبه می‌کنیم :

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A} \qquad c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

بحث - شرط امکان مسئله آن است که داشته باشیم :

$$0<A<\pi$$

یا

$$0<\pi-(B+C)<\pi$$

یا

$$0<B+C<\pi$$

با شرط برقراری نامساویهای اخیر ، دو ضلع :

$$(1)\quad b=\frac{a\sin B}{\sin A} \qquad \text{و} \qquad (2)\quad c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

نیز مثبت خواهند بود و مسئله همواره دارای یك جواب است .

ضمناً با توجه به روابط (۱) و (۲) ، ملاحظه می‌شودکه دوضلع b و c به وسیلهٔ لگاریتم قابل محاسبه‌اند .

مثال ۱- درمثلث ABC زاویهٔ $A=105^\circ$ وزاویهٔ $B=60^\circ$ و ضلع $BC=\sqrt{6}+\sqrt{2}$ هستند ؛ مثلث را حل‌کنید .

حل - دررابطهٔ $A+B+C=180^\circ$ به‌جای A و B مقادیرشان را قرار داده وزاویهٔ C را حساب می‌کنیم ، حاصل می‌شود $\hat{C}=15^\circ$

در روابط $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ به جای a و A و B و C مقادیرشان را قرار می‌دهیم ، حاصل می‌شود :

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sin 105^\circ}=\frac{b}{\sin 60^\circ}=\frac{c}{\sin 15^\circ}$$

یا :

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\frac{b}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{c}{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

و از آنجا خواهیم داشت : $b=2\sqrt{3}$ و $c=\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

مثال ۲- در مثلث ABC زاویهٔ $B=55^\circ 18'$ و زاویهٔ

$C=72°30'$ و ضلع AB برابر ۲۶۴/۵ متر است ؛ مثلث را حل کنید .

حل ـ در رابطهٔ $A+B+C=180°$ به جای B و C مقادیرشان را قرار داده زاویهٔ A را حساب می‌کنیم ، حاصل می‌شود $\hat{A}=52°12'$.

از رابطهٔ $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ حاصل می‌شود :

$$a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{264.5\sin 52°12'}{\sin 72°30'}$$

و از آنجا :

$$\log a=\log 264.5+\log\sin 52°12'+\operatorname{colog}\sin 72°30'$$

پس از محاسبه خواهیم داشت : $\log a=2.34072$، و از آنجا :

$$a=219.14$$

از رابطهٔ $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ حاصل می‌شود :

$$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{264.5\sin 55°18'}{\sin 72°30'}$$

و از آنجا :

$$\log b=\log 264.5+\log\sin 55°18'+\operatorname{colog}\sin 72°30'$$

پس از محاسبه خواهیم داشت : $\log b=2.35796$

و از آنجا : $b=228.015$

حل مثلث درحالتی که دوضلع و زاویهٔ مقابل به یکی از آنها معلوم است .

۳ـ فرض می‌کنیم از مثلث ABC ، دو ضلع a و b و زاویهٔ A مقابل به ضلع a معلوم باشند .

برای حل مثلث ، دستگاه :

$$(1)\qquad \begin{cases} \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \\ A+B+C=\pi \end{cases}$$

را بکار می‌بریم و زاویهٔ B را به وسیلهٔ رابطهٔ :

$$(2)\qquad \sin B=\frac{b\sin A}{a}$$

حساب می‌کنیم و از آن رو ، نتیجه می‌گیریم :

$$(3)\qquad C=\pi-A-B$$

و در آخر :

$$(4)\qquad c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

دستورهای (۲) ، (۳) و (۴) مسئله‌ای را که مطرح است حل می‌کنند . ضمناً طرف دوم دودستور (۲) و (۳) قابل محاسبه به وسیلهٔ لگاریتم هستند .

بحث ـ برای آنکه مثلثی جواب مسئله وجود داشته‌باشد، باید زاویه‌ای مانند B بااین شرط وجود داشته باشدکه درتساوی (۲) صدق کند و برای تحقق این شرط ، لازم است که طرف دوم این تساوی کوچکتر یا مساوی با یك باشد ؛ بنابراین ، اگر $\frac{b\sin A}{a}$ بزرگتر ازیك یعنی $b\sin A$ بزرگتر از a باشد ، مسئله ممتنع است و به بیان دیگر، مسئله جواب ندارد.

از حالت مذکور که بگذریم ، برحسب آنکه $b\sin A$ کوچکتر از a یا مساوی با a باشد ، دو حالت ممکن است پیش آید :

حالت اول : $b\sin A<a$.

در این صورت ، خارج قسمت $\frac{b\sin A}{a}$ بین صفر ویك واقع است و زاویه‌ای مانند α بین ۰ و $\frac{\pi}{2}$ وجود دارد بقسمی که داشته باشیم

$$\sin\alpha=\frac{b\sin A}{a} \qquad (۵)$$

و در نتیجه :

$$\sin B=\sin\alpha \qquad (۶)$$

باتوجه به رابطهٔ (۶) وهمچنین با توجه به اینکه زاویهٔ B باید یکی از زوایای مثلث بوده ولزوماً بین ۰ و π واقع باشد ، واضح می‌شودکه زاویهٔ B منحصراً می‌تواند برابر با α ویابرابر با $\pi-\alpha$ باشد ، یعنی :

یا $B=\alpha$

ویا $B=\pi-\alpha$

نظیر این دو مقدار زاویهٔ B ، برای زاویهٔ C نیز دو مقدار از روی دستور (۳) بدست می‌آید و در نتیجه برای زوایای B و C ، دو دستگاه مقادیر زیر پیدا می‌شود :

$$(۷)\quad \begin{cases} B=\alpha \\ C=\pi-A-\alpha \end{cases} \qquad\qquad (۸)\quad \begin{cases} B=\pi-\alpha \\ C=\alpha-A \end{cases}$$

و نظیر مقادیر هر یك ازاین دودستگاه ، دستور (۴) یك مقدار برای ضلع c بدست می‌دهد .

به این ترتیب ، برای دستگاه روابط (۱) که اجزای اصلی یك مثلث را به هم مربوط می‌سازند ، دو دسته جواب پیدا می‌شود . برای آنکه نظیر یك کدام از این دو دسته جواب ، یك مثلث وجود داشته باشد ، لازم و کافی است که اعداد تشکیل دهندهٔ آن دسته جواب ، همگی مثبت باشند . دو مقداری که برای زاویهٔ B پیدا شده ، دارای این شرط هستند و نظیر یك کدام از دو مقدار مثبت B ، از دستور (۳) یك مقدار کوچکتر از π برای زاویهٔ C بدست می‌آید ؛ حال اگر این مقدار زاویهٔ C مثبت نیز باشد ، سینوس آن مثبت خواهد بود و مقداری که از آن برای ضلع c نتیجه می‌شود ، مثبت است .

بطور خلاصه ، شرط آنکه یکی ازدو دستگاه مقادیر (۷) و(۸) که برای زوایای B و C پیدا شده‌اند مثلثی که جواب مسئله باشد بدست بدهد ، این است که مقدار C ، مندرج در آن دستگاه ، مثبت باشد .

الف — اگر زاویهٔ A حاده باشد ، $(A+\alpha)$کوچکتر از π و در نتیجه :

$$C=\pi-A-\alpha=\pi-(A+\alpha)$$

مثبت است و نظیرجوابهای دستگاه (۷) یك مثلث جواب مسئله وجود

خواهد داشت ؛ و جوابهای دستگاه (۸) نیز یك مثلث جواب مسئله بدست می‌دهند به‌شرط آنکه نامساوی : $\alpha > A$ و درنتیجه نامساوی : $\sin\alpha > \sin A$ برقرار باشد (زیرا زوایای A و α هر دو حاده‌اند) .

نامساوی : $\sin\alpha > \sin A$ را می‌توان چنین نوشت :

$$\frac{b\sin A}{a} > \sin A$$

یا

$$b > a$$

ب — اگر زاویهٔ A منفرجه باشد ، $(\alpha - A)$ منفی است و از جوابهای دستگاه (۸) مثلثی که جواب مسئله باشد بدست نمی‌آید ؛ جوابهای دستگاه (۷) یك مثلث جواب مسئله بدست می‌دهند به شرط آنکه نامساوی :

$$\pi - A - \alpha > 0$$

یا

$$\pi - A > \alpha$$

برقرار باشد . چون هر دو طرف نامساوی اخیر زوایای حاده هستند می‌توان نامساوی زیر را جانشین آن کرد :

$$\sin(\pi - A) > \sin\alpha$$

یا

$$\sin A > \sin\alpha$$

یا

$$\sin A > \frac{b\sin A}{a}$$

یا

$$a > b$$

ج — چنانچه زاویهٔ A قائمه باشد، فرض $b\sin A < a$ به‌صورت $b < a$ تبدیل می‌شود و در این صورت تنها از جوابهای دستگاه (۷) یك مثلث که جواب مسئله باشد بدست می‌آید ؛ زیرا $\alpha - A$ منفی است و از جوابهای دستگاه (۸) مثلثی بدست نمی‌آید .

حالت دوم : $b\sin A = a$.

در این صورت دستور (۲) چنین می‌شود : $\sin B = 1$ ، و در نتیجه : $B = \frac{\pi}{2}$ ، و از آنجا :

$$C = \frac{\pi}{2} - A \quad \text{و} \quad c = a\cot A$$

اگر نامساوی : $A < \frac{\pi}{2}$ بر قرار باشد ، یك مثلث جواب مسئله وجود خواهد داشت .

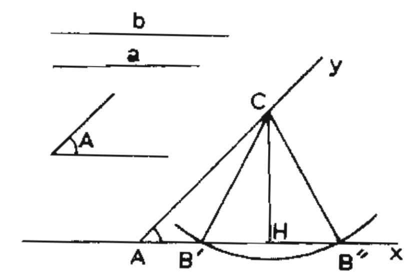
بحث بالا را به شرح زیر خلاصه می‌کنیم :

$b\sin A > a$			مسئله جواب ندارد
$b\sin A < a$	$A < \frac{\pi}{2}$	$a < b$	مسئله دو جواب دارد
		$a \geqslant b$	مسئله یك جواب دارد
	$A = \frac{\pi}{2}$		مسئله یك جواب دارد
	$A > \frac{\pi}{2}$	$a \leqslant b$	مسئله جواب ندارد
		$a > b$	مسئله یك جواب دارد
$b\sin A = a$	$A < \frac{\pi}{2}$		مسئله یك جواب دارد
	$A > \frac{\pi}{2}$		مسئله جواب ندارد

تبصرهٔ ۱ـ جدول اخیر نشان می‌دهد که وقتی a بزرگتر از b باشد، فقط یك مثلث وجود دارد که اجزای معلوم a ، b و A ، سه جزء آن باشند. از اینجا نتیجه می‌شود که **اگر دو ضلع و زاویهٔ مقابل به‌ضلع بزرگتر از مثلثی با دو ضلع و زاویهٔ مقابل به‌ضلع بزرگتر از مثلثی دیگر نظیر به نظیر مساوی باشند، آن دو مثلث متساویند.**

تبصرهٔ ۲ـ عین نتایج بالا از طریق بحث در مسئلهٔ هندسه نظیر مسئلهٔ مثلثات که در بارهٔ آن گفتگو کردیم نیز بدست می‌آیند.

فرض می‌کنیم مطلوب رسم مثلثی باشد که دو ضلع a و b و زاویهٔ A مقابل به ضلع a از آن معلوم باشند. بسهولت دیده می‌شود که مثلثهای جواب مسئله با ترسیمات زیر بدست می‌آیند:



شکل ۱

زاویهٔ xAy (شکل۱) را برابر با زاویهٔ معلوم A رسم می‌کنیم و روی یکی از دو ضلع این زاویه، مثلا Ay ، طول AC را مساوی با طول معلوم b نقل کرده به مرکز C و با شعاعی مساوی با طول معلوم a دایره‌ای می‌کشیم؛ هر نقطهٔ مشترك بین این دایره و نیم خط Ax را می‌توان رأس سوم یك مثلث جواب مسئله گرفت که دو رأس اول و دوم آن، A و C باشند.

برای آنکه مسئله جواب داشته باشد، شرط مقدم بر هر شرط دیگر این است که دایرهٔ مرسوم با خط Ax برخوردی داشته باشد

ولازمهٔ این برخورد این است که شعاع دایره لااقل مساوی با CH، فاصلهٔ C از خط Ax، باشد. با توجه به مثلث قائم‌الزاویهٔ CAH دیده می‌شود که $CH=AC\cdot\sin\widehat{CAH}$.

برحسب آنکه زاویهٔ معلوم A حاده (شکل ۱) و یا منفرجه (شکل۲) باشد، زاویهٔ CAH برابر با زاویهٔ معلوم A و یا مکمل آن خواهد بود و در هر دو حال، زوایای A و CAH دارای سینوسهای برابرند و به هر حال چنین خواهیم داشت: $CH=b\cdot\sin A$.

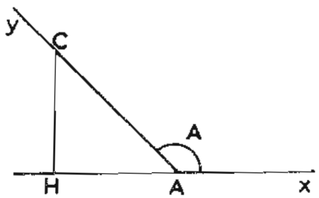
بنابراین مسئله ممکن نیست مگر آنکه داشته باشیم:

$$b\sin A\leqslant a$$

۱) $b\sin A<a$:

الف ــ اگر زاویهٔ A حاده باشد (شکل۱) مسئله دو جواب خواهد داشت به شرط آنکه دو نقطهٔ تلاقی دایره با خط Ax روی نیم‌خط Ax باشند، یعنی نقطهٔ A خارج دایره واقع باشد و این خود مستلزم آن است که داشته باشیم: $b>a$. چنانچه داشته باشیم: $b\leqslant a$، مسئله فقط یك جواب خواهد داشت.

ب ــ اگر زاویهٔ A منفرجه باشد (شکل ۲)، مسئله ممکن نیست مگر آنکه دایره نیم خط Ax را قطع کند و پیدایش این وضع میسر نیست مگر وقتی که نقطهٔ A درون دایره قرار گیرد و



شکل ۲

بنابراین وقتی که داشته باشیم : $b<a$ ، یك جواب برای مسئله پیدا می‌شود و در غیر این صورت یعنی اگر داشته باشیم : $b \geqslant a$ ، مسئله بلاجواب خواهد بود .

ج — اگر زاویهٔ A قائمه باشد ، دایرهٔ مرسوم خط Ax را در یك نقطه قطع می‌کند ، زیرا در این صورت : $\sin A = 1$ و نامساوی مفروض : $b\sin A < a$ به صورت : $b<a$ در می‌آید یعنی a ، شعاع دایره ، بزرگتر است از طول $AC=b$. پس مسئله یك جواب خواهد داشت .

۲) $b\sin A = a$:

در این صورت دایرهٔ مرسوم در نقطهٔ H بر خط Ax مماس می‌شود . اگر زاویهٔ A حاده باشد ، مسئله یك جواب خواهد داشت و رأس B از مثلث بر نقطهٔ H منطبق می‌شود .

چنانچه زاویهٔ A قائمه یا منفرجه باشد ، مسئله ممتنع است .

بطوری که ملاحظه می‌شود این نتایج عیناً همان نتایج حاصل از بحث مثلثاتی است .

این حالت از حل مثلث را به مناسبت اینکه ممکن است دو یا یك جواب داشته و یا آنکه بلاجواب باشد، **حالت مشکوك** می‌نامند.

مثال ۱ـ در مثلث ABC ، $AB=\sqrt{6}$ و $BC=2$ و $\hat{A}=45^\circ$ هستند ؛ مثلث را حل کنید .

حل ـ در رابطهٔ $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ به جای A و a و c مقادیرشان را قرار داده و $\sin C$ را حساب می‌کنیم حاصل می‌شود : $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$

و از آنجا : $C=60^\circ$ یا $C=120^\circ$

اگر $C=60^\circ$ باشد ، از رابطهٔ $A+B+C=180^\circ$ حاصل می‌شود :

$$B=75^\circ$$

و از رابطهٔ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ نتیجه می‌شود : $b=\sqrt{3}+1$.

اگر $C=120^\circ$ باشد ، از رابطهٔ $A+B+C=180^\circ$ حاصل می‌شود :

$$B=15^\circ$$

و از رابطهٔ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ نتیجه می‌شود : $b=\sqrt{3}-1$.

بنابراین اجزای اصلی مثلث ABC عبارتند از :

$$\begin{cases} \hat{C}=60^\circ \quad \text{و} \quad \hat{B}=75^\circ \quad \text{و} \quad \hat{A}=45^\circ \\ c=\sqrt{6} \quad \text{و} \quad b=\sqrt{3}+1 \quad \text{و} \quad a=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{C}=120^\circ \quad \text{و} \quad \hat{B}=15^\circ \quad \text{و} \quad \hat{A}=45^\circ \\ c=\sqrt{6} \quad \text{و} \quad b=\sqrt{3}-1 \quad \text{و} \quad a=2 \end{cases}$$

مثال ۲ـ درمثلث ABC ، $BC=145/71$ متر و $AC=137/51$ متر و $\hat{A}=64^\circ18'20''$ ؛ مثلث را حل کنید .

حل ـ در رابطهٔ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ بجای a و b و A مقادیرشان را قرار داده و $\sin B$ را حساب می‌کنیم ، حاصل می‌شود :

$$\sin B = \frac{۱۳۷/۵۱ \times \sin ۶۴°۱۸'۲۰''}{۱۴۵/۷۱}$$

و ازآنجا :

$$\log \sin B = \log ۱۳۷/۵۱ + \log \sin ۶۴°۱۸'۲۰'' + \operatorname{colog} ۱۴۵/۷۱$$

یا : $\log \sin B = ۲/۱۳۸۳۳ + \bar{۱}/۹۵۴۷۸ + \bar{۳}/۸۳۶۵۱$

یا : $\log \sin B = \bar{۱}/۹۲۹۶۲$

و ازآنجا : $B = ۵۸°۱۵'۱۵''$ یا $B = ۱۲۱°۴۴'۴۵''$

جواب $B = ۱۲۱°۴۴'۴۵''$ قابل قبول نیست زیرا دراین صورت $A+B > ۱۸۰°$ می‌شود .

در رابطهٔ $A+B+C = ۱۸۰°$ به جای A و B مقادیرشان را قرار می‌دهیم ، حاصل می‌شود : $C = ۵۷°۲۶'۲۵''$.

برای محاسبهٔ c دررابطهٔ $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ به جای a و A و C مقادیرشان را قرار می‌دهیم ، پس از ساده کردن حاصل می‌شود :

$$c = \frac{۱۴۵/۷۱ \times \sin ۵۷°۲۶'۲۵''}{\sin ۶۴°۱۸'۲۰''}$$

و از آنجا :

$$\log c = \log ۱۴۵/۷۱ + \log \sin ۵۷°۲۶'۲۵'' + \operatorname{colog} \sin ۶۴°۱۸'۲۰''$$

یا : $\log c = ۲/۱۶۳۴۹ + \bar{۱}/۹۲۵۷۴ + ۰/۰۴۵۲۲$

یا : $\log c = ۲/۱۳۴۴۵$

و از آنجا : $c = ۱۳۶/۲۸$

حل مثلث در حالتی که دوضلع و زاویهٔ بین آنها معلوم است .

۴- فرض می‌کنیم ازمثلث ABC دو ضلع b و c و زاویهٔ بین

این دو ضلع (A) معلوم باشند .

برای حل مثلث دستگاه زیر را تشکیل می‌دهیم :

$$\begin{cases} a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} - ۲bc\cos A \\ b^{۲} = a^{۲} + c^{۲} - ۲ac\cos B \end{cases}$$

ابتدا دررابطهٔ اول به‌جای b و c و A مقادیرشان را قرارداده و a راحساب می‌کنیم؛ سپس دررابطهٔ دوم به‌جای a و b و c مقادیرشان را قرار می‌دهیم و زاویهٔ B را تعیین می‌کنیم و بالاخره از رابطهٔ $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = \pi$ زاویهٔ C را بدست می‌آوریم .

مثال - درمثلث ABC زاویهٔ $A = ۱۲۰°$ واضلاع $AB = ۲\sqrt{۲}$ و $AC = \sqrt{۶} - \sqrt{۲}$ هستند؛ مثلث را حل کنید .

حل - دررابطهٔ $a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} - ۲bc\cos A$ به‌جای b و c و A مقادیرشان را قرار می‌دهیم حاصل می‌شود :

$$a^{۲} = (\sqrt{۶} - \sqrt{۲})^{۲} + ۸ - ۴\sqrt{۲}(\sqrt{۶} - \sqrt{۲})\cos ۱۲۰°$$

پس از اختصار خواهیم داشت : $a^{۲} = ۱۲$

و ازآنجا : $a = ۲\sqrt{۳}$

حال چون در رابطهٔ $b^{۲} = a^{۲} + c^{۲} - ۲ac\cos B$ به جای a و b و c مقادیرشان را قرار دهیم ، حاصل می‌شود :

$$(\sqrt{۶} - \sqrt{۲})^{۲} = ۱۲ + ۸ - ۸\sqrt{۶}\cos B$$

و ازآنجا : $\cos B = \frac{\sqrt{۶} + \sqrt{۲}}{۴}$ و $B = ۱۵°$

بالاخره دررابطهٔ $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$ به‌جای A و B مقادیرشان را قرار داده و C را تعیین می‌کنیم، خواهیم داشت : $C=۴۵^\circ$.

توجه کنید ! روابطی که در شمارهٔ ۴ برای حل مثلث بکار بردیم قابل محاسبه به‌وسیلهٔ لگاریتم نیستند. برای اینکه حل مثلث را درحالت مزبور به‌کمك دستورهای لگاریتمی و جدول لگاریتم‌انجام دهند از روابط دیگری استفاده می‌کنند که ذیلا آن روابط و طریقهٔ تعیین آنها را بیان می‌کنیم :

رابطهٔ $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ را مرتباً به‌صورتهای زیر می‌نویسیم :

$$\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{b}{c}$$

$$\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}=\frac{b-c}{b+c}$$

$$\frac{۲\cos\frac{B+C}{۲}\sin\frac{B-C}{۲}}{۲\sin\frac{B+C}{۲}\cos\frac{B-C}{۲}}=\frac{b-c}{b+c}$$

$$tg\frac{B-C}{۲}=\frac{b-c}{b+c}\,tg\frac{B+C}{۲}$$

$$\boxed{tg\frac{B-C}{۲}=\frac{b-c}{b+c}\,cotg\frac{A}{۲}} \qquad (E)$$

با فرض $b>c$ ، نتیجه می‌شود $B>C$ و بنابراین :

$$۰<\frac{B-C}{۲}<\frac{\pi}{۲}$$

حال اگر زاویهٔ α را بین صفر و $\frac{\pi}{۲}$ بقسمی اختیارکنیم که داشته باشیم :

$$tg\alpha=\frac{b-c}{b+c}\,cotg\frac{A}{۲} \qquad (۱)$$

نتیجه می‌شود :

$$\frac{B-C}{۲}=\alpha$$

و زوایای B و C از حل دستگاه :

$$\begin{cases}\frac{B+C}{۲}=\frac{\pi}{۲}-\frac{A}{۲}\\ \frac{B-C}{۲}=\alpha\end{cases}$$

به صورت زیر بدست می‌آیند :

$$B=\frac{\pi}{۲}-\frac{A}{۲}+\alpha \qquad (۲)$$

$$C=\frac{\pi}{۲}-\frac{A}{۲}-\alpha \qquad (۳)$$

از رابطهٔ : $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ نیز مقدار ضلع a به صورت :

$$a=\frac{b\sin A}{\sin B} \qquad (۴)$$

بدست می‌آید که به‌وسیلهٔ لگاریتم قابل محاسبه است .

بحث ـ شرط آنکه زوایای B و C قابل قبول باشند این است که هریك از این دو زاویه بین صفر و π واقع باشد ؛ رابطهٔ (۲) نشان می‌دهد که زاویهٔ B دارای این شرط هست ، برای آنکه زاویهٔ C قابل قبول باشد ، با توجه به رابطهٔ (۳) باید داشته باشیم :

$$\frac{\pi}{۲}-\frac{A}{۲}-\alpha>۰$$

یا

$$\frac{\pi}{۲}-\frac{A}{۲}>\alpha$$

وچون هردو طرف نامساوی اخیر زوایای حاده‌اند ، می‌توان نامساوی زیر را جانشین آن کرد :

$$cotg\frac{A}{۲}>tg\alpha$$

یا

$$cotg\frac{A}{۲}>\frac{b-c}{b+c}cotg\frac{A}{۲}$$

یا

$$۱>\frac{b-c}{b+c}$$

یا

$$c>۰$$

و چون نامساوی اخیر همواره برقرار است، مسئله همیشه یك جواب دارد .

تبصره ـ به وسیلهٔ محاسباتی نظیر آنچه ذکرش گذشت ، می‌توان ثابت کرد که

$$(E')\qquad \boxed{tg\frac{C-A}{۲}=\frac{c-a}{c+a}cotg\frac{B}{۲}}$$

و

$$(E'')\qquad \boxed{tg\frac{A-B}{۲}=\frac{a-b}{a+b}cotg\frac{C}{۲}}$$

دو رابطهٔ (E' و E'') نیز بترتیب در حالاتی بکار می‌روند که اندازه‌های (a و c و B) یا اندازه‌های (a و b و C) معلوم باشند .

مثال ـ در مثلث ABC زاویهٔ $B=۶۷^\circ۴۲'۵۴''$ و $AB=۱۵۷/۲۹$ متر و $BC=۲۳۳/۶۳۸$ متر هستند ؛ مثلث را حل کنید .

حل ـ در رابطهٔ (E') به جای a و c و B مقادیرشان را قرار می‌دهیم حاصل می‌شود :

$$tg\frac{A-C}{۲}=\frac{۷۶/۳۴۸\,cotg\,۳۳^\circ۵۱'۲۷''}{۳۹۰/۹۲۸}$$

بنابراین چنین خواهیم داشت :

$$\log tg\frac{A-C}{۲}=\log ۷۶/۳۴۸+\log cotg\,۳۳^\circ۵۱'۲۷''+colog\,۳۹۰/۹۲۸$$

یا :

$$\log tg\frac{A-C}{۲}=۱/۸۸۲۷۹+۰/۱۷۳۳۴+\bar{۳}/۴۰۷۹۰$$

یا :

$$\log tg\frac{A-C}{۲}=\bar{۱}/۴۶۴۰۳$$

و از آنجا :

$$\frac{A-C}{۲}=۱۶^\circ۱۳'۴۷''$$

و در نتیجه :

$$A-C=۳۲^\circ۲۷'۳۴''$$

از حل دستگاه :

$$\begin{cases}A+C=۱۱۲^\circ۱۷'۶''\\ A-C=۳۲^\circ۲۷'۳۴''\end{cases}$$

حاصل می‌شود :

$$A=۷۲^\circ۲۲'۲۰''$$
$$C=۳۹^\circ۵۴'۴۶''$$

برای محاسبهٔ اندازهٔ b از رابطهٔ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ استفاده‌می‌کنیم:

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{۲۳۳/۶۳۸\sin ۶۷^\circ۴۲'۵۴''}{\sin ۷۲^\circ۲۲'۲۰''}$$

و از آنجا :

$$\log b=\log ۲۳۳/۶۳۸+\log\sin ۶۷^\circ۴۲'۵۴''+\operatorname{colog}\sin ۷۲^\circ۲۲'۲۰''$$

یا : $\log b=۲/۳۶۸۵۵+\bar{۱}/۹۶۶۲۹+۰/۰۲۰۸۹$

یا : $\log b=۲/۳۵۵۷۳$

و از آنجا : $b=۲۲۶/۸۵$ متر

حل مثلث در حالتی که سه ضلع آن معلوم است .

۵- فرض می‌کنیم از مثلث ABC ،سه ضلع a و b و c معلوم باشند .

برای حل مثلث دستگاه زیر را تشکیل می‌دهیم :

$$\begin{cases} a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A \\ b^۲=a^۲+c^۲-۲ac\cos B \end{cases}$$

ابتدا درهریك از دو رابطهٔ فوق به‌جای a و b و c مقادیرشان را قرار داده و $\cos A$ و $\cos B$ راحساب کرده و از روی آنها اندازه‌های زوایای A و B را بدست می‌آوریم .

سپس از رابطهٔ $A+B+C=\pi$ زاویهٔ C را حساب می‌کنیم .

مثال - درمثلث ABC، $BC=۴$ و $AC=۲\sqrt{۳}$ و $AB=۲$؛

مثلث را حل کنید .

حل - ابتدا در رابطهٔ $a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A$ به جای a و b و c مقادیرشان را قرار می‌دهیم حاصل می‌شود :

$$۱۶=۱۲+۴-۸\sqrt{۳}\cos A$$

و از آنجا : $\cos A=۰$

و $A=۹۰^\circ$

در مرحلهٔ دوم در رابطهٔ $b^۲=a^۲+c^۲-۲ac\cos B$ به‌جای a و b و c مقادیرشان را قرار می‌دهیم حاصل می‌شود :

$$۱۲=۱۶+۴-۱۶\cos B$$

و از آنجا : $\cos B=\frac{۱}{۲}$

و $B=۶۰^\circ$

در رابطهٔ $A+B+C=۱۸۰^\circ$ به‌جای A و B مقادیرشان را قرار داده و C را حساب می‌کنیم نتیجه می‌شود : $C=۳۰^\circ$.

توجه کنید ! روابطی‌که درشمارهٔ ۵ برای حل مثلث بکاربردیم، قابل محاسبه به‌وسیلهٔ لگاریتم نیستند. درحالت مزبور ، برای محاسبهٔ زوایای مثلث به کمك جداول لگاریتمی ، ضمن استفاده از روابط نامبرده روش دیگری بکار می‌برند که ذیلا به ذکر آن می‌پردازیم :

از رابطهٔ $a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A$ حاصل می‌شود :

$$\cos A=\frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲bc}$$

رابطهٔ اخیر را می‌توان به دوصورت زیر نوشت :

$$(E)\qquad \begin{cases} ۱-\cos A = ۱-\dfrac{b^{۲}+c^{۲}-a^{۲}}{۲bc} \\[2mm] ۱+\cos A = ۱+\dfrac{b^{۲}+c^{۲}-a^{۲}}{۲bc} \end{cases}$$

روابط (E) نیز پس از اختصار چنین می‌شوند :

$$(E')\qquad \begin{cases} ۲\sin^{۲}\dfrac{A}{۲}=\dfrac{a^{۲}-b^{۲}-c^{۲}+۲bc}{۲bc} \\[2mm] ۲\cos^{۲}\dfrac{A}{۲}=\dfrac{b^{۲}+c^{۲}-a^{۲}+۲bc}{۲bc} \end{cases}$$

و چون طرفین دو رابطهٔ (E') را عضو بعضو بر یکدیگر تقسیم کنیم ، نتیجه می‌شود :

$$tg^{۲}\frac{A}{۲}=\frac{a^{۲}-b^{۲}-c^{۲}+۲bc}{b^{۲}+c^{۲}-a^{۲}+۲bc}=\frac{a^{۲}-(b-c)^{۲}}{(b+c)^{۲}-a^{۲}}$$

یا :

$$(E'')\qquad tg^{۲}\frac{A}{۲}=\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{(b+c+a)(b+c-a)}$$

درهندسه دیده‌ایم‌که محیط مثلث را با $۲p$ نشان می‌دهند یعنی :

$$a+b+c=۲p$$

ازطرفین این رابطه ، یك دفعه $۲a$ و یك دفعه $۲b$ و یك دفعه $۲c$ کم می‌کنیم حاصل می‌شود :

$$b+c-a=۲(p-a)$$
$$c+a-b=۲(p-b)$$
$$a+b-c=۲(p-c)$$

و با توجه به تساویهای اخیر ، رابطهٔ (E'') را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$tg^{۲}\frac{A}{۲}=\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}$$

و چون زاویهٔ $\frac{A}{۲}$ حاده است ، پس :

$$(E_{۱})\qquad \boxed{tg\frac{A}{۲}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}}$$

به همین طریق معلوم می‌شود که

$$(E_{۲})\qquad tg\frac{B}{۲}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

و

$$(E_{۳})\qquad tg\frac{C}{۲}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

در حالتی که a و b و c معلوم باشند به کمك این روابط که قابل محاسبه به وسیلهٔ لگاریتم هستند ، $tg\frac{A}{۲}$ و $tg\frac{B}{۲}$ و $tg\frac{C}{۲}$ را حساب کرده از روی‌آنها زاویه‌های A و B و C را بدست می‌آورند.

تبصرهٔ ۱- از رابطهٔ $۲\sin^{۲}\frac{A}{۲}=\frac{a^{۲}-b^{۲}-c^{۲}+۲bc}{۲bc}$ بسهولت

می‌توان نتیجه گرفت :

$$(E'_1) \qquad \boxed{\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}}$$

چنانچه $\sin\frac{B}{2}$ و $\sin\frac{C}{2}$ را نیز حساب کنیم چنین خواهیم داشت :

$$(E'_2) \qquad \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$$

$$(E'_3) \qquad \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

همچنین از رابطهٔ $2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{b^2+c^2-a^2+2bc}{2bc}$ نتیجه می‌شود :

$$(E''_1) \qquad \boxed{\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}}$$

چنانچه $\cos\frac{B}{2}$ و $\cos\frac{C}{2}$ را نیز حساب‌کنیم چنین خواهیم داشت :

$$(E''_2) \qquad \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$$

$$(E''_3) \qquad \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

تبصرهٔ ۲ ـ برای محاسبهٔ اندازهٔ زاویه‌های A و B و C به کمك دستورهای (E'_1) و (E'_2) و (E'_3) باید لگاریتمهای شش عامل a و b و c و $(p-a)$ و $(p-b)$ و $(p-c)$ را تعیین‌کرد وبرای

محاسبهٔ اندازهٔ زوایای مزبور به کمك دستورهای (E''_1) و (E''_2) و (E''_3) باید لگاریتمهای هفت عامل a و b و c و p و $(p-a)$ و $(p-b)$ و $(p-c)$ را حساب کنیم ؛ اما اگر برای تعیین اندازهٔ زوایای نامبرده از دستورهای (E_1) و (E_2) و (E_3) استفاده شود ، فقط محاسبهٔ لگاریتمهای چهار عامل p و $(p-a)$ و $(p-b)$ و $(p-c)$ ضرورت پیدا می‌کند ؛ از این جهت ، برای محاسبهٔ زوایای مثلث بکار بردن دستورهای (E_1) و (E_2) و (E_3) بر سایر دستورها رجحان دارد و عموماً زوایای مثلث را به‌کمك دستورهای (E_1) و (E_2) و (E_3) حساب می‌کنند .

بحث ـ تنها شرط امکان مسئله آن است که مقادیر عبارتهای واقع در زیر رادیکالها مثبت باشند و بنابراین باید داشته باشیم :

$$p(p-a)(p-b)(p-c)>0$$

یا : $$2p(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)>0$$

یا : $$(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)>0$$

چون یکی از سه ضلع مثلث ، مثلاً a ، را بزرگترین ضلع فرض کنیم ، بسهولت معلوم می‌شود که در نامساوی اخیر ، دو عامل $(a+c-b)$ و $(a+b-c)$ مثبتند و بنابراین ، تنها شرط امکان مسئله آن است که داشته باشیم :

$$b+c-a>0$$

یا $$a<b+c$$

یعنی باید بزرگترین ضلع مثلث، کوچکتر باشد از مجموع دو ضلع دیگر؛ با فرض برقراری این شرط، دستورهای نامبرده برای هر یك از زوایا یك جواب بدست می‌دهند و مسئله دارای یك جواب است.

مثال- در مثلث ABC، متر $BC=۱۹۷/۴۳$ و متر $AC=۱۸۹/۸۲$ و متر $AB=۱۵۵/۴۸$ ؛ مثلث را حل کنید.

حل- اندازه‌های p و $p-a$ و $p-b$ و $p-c$ را حساب می‌کنیم.

$$p=\frac{۱۹۷/۴۳+۱۸۹/۸۲+۱۵۵/۴۸}{۲}$$

یا $p=۲۷۱/۳۶۵$

و $p-a=۷۳/۹۳۵$

و $p-b=۸۱/۵۴۵$

و $p-c=۱۱۵/۸۸۵$

ابتدا در رابطهٔ $tg\frac{A}{۲}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ به جای p و $(p-a)$ و $(p-b)$ و $(p-c)$ مقادیرشان را قرار می‌دهیم حاصل می‌شود:

$$tg\frac{A}{۲}=\sqrt{\frac{۸۱/۵۴۵\times ۱۱۵/۸۸۵}{۲۷۱/۳۶۵\times ۷۳/۹۳۵}}$$

و از آنجا:

$$\log tg\frac{A}{۲}=\frac{۱}{۲}[\log ۸۱/۵۴۵+\log ۱۱۵/۸۸۵+colog\, ۲۷۱/۳۶۵+colog\, ۷۳/۹۳۵]$$

یا: $\log tg\frac{A}{۲}=\bar{۱}/۸۳۶۵۱$

و از آنجا: $\frac{A}{۲}=۳۴^\circ ۲۷' ۴۲''$

و در نتیجه: $A=۶۸^\circ ۵۵' ۲۴''$

همچنین از رابطهٔ $tg\frac{B}{۲}=\sqrt{\frac{۱۱۵/۸۸۵\times ۷۳/۹۳۵}{۲۷۱/۳۶۵\times ۸۱/۵۴۵}}$ حاصل می‌شود:

$$\log tg\frac{B}{۲}=\bar{۱}/۷۹۳۹۷$$

و از آنجا: $\frac{B}{۲}=۳۱^\circ ۵۳' ۳۲''$

و در نتیجه: $B=۶۳^\circ ۴۷' ۴''$

برای محاسبهٔ زاویهٔ C در رابطهٔ $A+B+C=۱۸۰^\circ$ به جای A و B مقادیرشان را قرار می دهیم تا حاصل شود:

$$C=۱۸۰^\circ-(۶۸^\circ ۵۵' ۲۴''+۶۳^\circ ۴۷' ۴'')=۴۷^\circ ۱۷' ۳۲''$$

۶- محاسبهٔ مساحت مثلث برحسب اضلاع مثلث:

می‌دانیم که $S=\frac{۱}{۲}bc\sin A$ (صفحهٔ ۱۹۴ تبصره). این رابطه‌را به صورت $S=bc\times \sin\frac{A}{۲}\cos\frac{A}{۲}$ نوشته به‌جای $\sin\frac{A}{۲}$ و $\cos\frac{A}{۲}$ مقادیرشان را که در صفحهٔ ۲۲۰ تعیین کرده‌ایم قرار می‌دهیم حاصل می‌شود:

$$S=bc\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\times\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

یا: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

(این رابطه را در هندسه نیز دیده‌ایم).

۷- محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث بر حسب اضلاع مثلث :

می‌دانیم : $r=\dfrac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$ (صفحهٔ ۱۹۱)

در این رابطه به‌جای $\sin\frac{B}{2}$ و $\sin\frac{C}{2}$ و $\cos\frac{A}{2}$ مقادیرشان را که در صفحهٔ ۲۲۰ حساب کرده‌ایم قرار داده و آن را ساده می‌کنیم حاصل می‌شود : $r=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$.

این رابطه را به‌صورت $r=\dfrac{S}{p}$ نیز می‌توان نوشت که آن را در هندسه نیز دیده‌ایم .

۸- محاسبهٔ شعاعهای دایره‌های محاطی خارجی مثلث برحسب اضلاع مثلث :

می‌دانیم : $r_a=\dfrac{a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$ (صفحهٔ ۱۹۳)

در این رابطه به جای $\cos\frac{A}{2}$ و $\cos\frac{B}{2}$ و $\cos\frac{C}{2}$ مقادیرشان را که در صفحهٔ ۲۲۰ حساب کرده‌ایم قرار داده و آن را ساده می‌کنیم حاصل می‌شود : $r_a=\sqrt{\dfrac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$.

این رابطه را به‌صورت $r_a=\dfrac{S}{p-a}$ نیز می‌توان نوشت .

به همین طریق معلوم می‌شود :

$$r_b=\frac{S}{p-b}=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}}$$

$$r_c=\frac{S}{p-c}=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}$$

این روابط را در هندسه نیز دیده‌ایم .

۹- تبصره - رابطهٔ : $r=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$ را می‌توان به این صورت نوشت :

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)^2(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

و یا : $\boxed{r=(p-a)\,tg\frac{A}{2}}$

به همین ترتیب معلوم می‌شود :

$$r=(p-c)\,tg\frac{C}{2} \qquad \text{و} \qquad r=(p-b)\,tg\frac{B}{2}$$

همچنین رابطهٔ : $r_a=\sqrt{\dfrac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$

را می‌توان به این صورت نوشت : $r_a=\sqrt{\dfrac{p^2(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

و یا : $\boxed{r_a=p\,tg\frac{A}{2}}$

به همین ترتیب معلوم می‌شود :

$$r_c=p\,tg\frac{C}{2} \qquad \text{و} \qquad r_b=p\,tg\frac{B}{2}$$

تمرین

مثلث ABC را با معلومات زیر حل کنید :

۱- $A=۴۵^\circ$ و $B=۳۰^\circ$ و $AB=\sqrt{۳}+۱$

۲- $AB=\sqrt{۶}+\sqrt{۲}$ و $AC=\sqrt{۶}-\sqrt{۲}$ و $A=۶۰^\circ$

۳- $AB=\sqrt{۳}+۱$ و $BC=\sqrt{۳}-۱$ و $AC=\sqrt{۶}$

۴- $AB=۲$ و $AC=\sqrt{۶}$ و $C=۴۵^\circ$

۵- $AB=۱$ و $AC=۲+\sqrt{۳}$ و $A=\frac{\pi}{۳}$

۶- $B=۳۸^\circ۴۰'$ و $C=۱۰۲^\circ۳۰'$ و $a=۳۸۲/۵$

۷- $a=۳۱۳/۶۵$ متر و $b=۴۰۸$ متر و $C=۴۸^\circ۲۰'$

۸- $b=۱۳۵$ متر و $c=۲۰۷/۶$ متر و $B=۷۳^\circ۱۹'$

۹- $a=۱۶۵/۸$ متر و $b=۲۱۲/۴$ متر و $c=۱۷۰/۶$ متر

۱۰- درمثلث ABC زاویهٔ $A=\frac{\pi}{۳}$ و $a=\sqrt{۳}(b-c)$؛ زوایای B و C را حساب کنید .

۱۱- در مثلث غیر متساوی‌الساقینی رابطهٔ :

$$c(a^۲-c^۲)=b(a^۲-b^۲)$$

برقرار است . اندازهٔ زاویهٔ A را حساب کنید .

۱۲- مطلوب است محاسبهٔ زوایا و اقطار ذوزنقهٔ ABCD که در آن قاعده‌ها :

$CD=۷$ و $AB=۸+\sqrt{۳}$

و ساقها : $BC=۲$ و $AD=\sqrt{۶}$ باشند .

۱۳- در مثلث ABC رابطهٔ :

$$S=p(p-a)$$

برقرار است . مطلوب است تعیین اندازهٔ زاویهٔ A .

۱۴- در مثلث ABC زاویهٔ $A=\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{b}{c}=۲$ ؛ زوایای مثلث را حساب کنید .

۱۵- محیط مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB=AC)$ را با $۲p$ و شعاع دایرهٔ محیطی‌آن را با R وشعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث را با r نشان می‌دهیم :

اولا - p را بر حسب R و توابع مثلثاتی زاویهٔ $\frac{A}{۲}$ حساب کنید .

ثانیاً - r را بر حسب R و $\sin\frac{A}{۲}$ محاسبه کنید .

ثالثاً - در حالتی که

$$\frac{r}{R}=\sqrt{۲}-۱ \quad \text{و} \quad a=۴$$ متر

باشند ، مثلث را حل کنید .

۱۶- در مثلث ABC میانهٔ CM را رسم کرده فرض می‌کنیم : $\widehat{ACM}=\alpha$ و $\widehat{BCM}=\beta$ باشند . اولا - ثابت کنید :

$$\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

ثانیاً - درحالتی‌که CM برابر ۵ متر و $\alpha=۴۵^\circ$ و $\beta=۶۰^\circ$ باشند، طولهای اضلاع مثلث را حساب کنید .

۱۷- در مثلث ABC زاویهٔ $C=۱۲۰^\circ$ و $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}$ هستند . اولا - زوایای مثلث را حساب‌کنید. ثانیاً - اگر c برابر ۳ متر باشد، طول دو ضلع دیگر مثلث و اندازهٔ مساحت مثلث را تعیین کنید .

۱۸- درمثلث ABC ضلع c برابر۴ متر و $A=۲C$ و $\cos C=\frac{۳}{۴}$ هستند ؛ اندازه‌های دو ضلع دیگر مثلث را تعیین‌کنید .

فصل هشتم

حل مثلث در حالات غیر کلاسیک

۱ــ درفصل قبل حل‌مثلث را درچهار حالت کلاسیک بیان کردیم.
در حالات غیر کلاسیک حل مثلث ، معلومات مسئله ممکن است به صورت رابطه یا روابطی بین اجزای مثلث مانند $b+c=l$ یا $\frac{h_a}{h_b}=k$ یا . . . (که در آنها l و k مقادیر معلوم فرض شده‌اند) داده شوند ، یا آنکه مقادیر معلوم مسئله شامل اجزای فرعی مثلث (از قبیل میانه‌ها و ارتفاعات و . . .) یا شامل اجزای فرعی و اصلی مثلث باشند ؛ همچنین ممکن است معلومات مسئله ترکیبی ازاجزای اصلی و فرعی و رابطه‌ای بین اجزای مثلث باشند .

در حالات غیرکلاسیک حل مثلث ، دسته بندی جالبی برای حل مثلث وجود ندارد .

چنانچه بخواهیم ابتدا اضلاع مثلث را حساب‌کنیم، عموماً حل مثلث منجر به حل معادلات جبری می‌شود و چنانچه بخواهیم ابتدا

زوایا را حساب کنیم، حل مثلث به‌حل معادلات مثلثاتی برمی‌گردد ؛ وچون بین توابع مثلثاتی زوایا روابط متعددی وجود دارد ، بهتر است حل مثلث را از محاسبهٔ زوایا شروع کنیم .

در حالت مخصوصی که مجموع دو زاویهٔ مثلث معلوم باشد ، بهتر است محاسبه را بطریقی انجام دهیم که تفاضل آن دو زاویه نیز تعیین شود وسپس دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی برحسب آن دو زاویه تشکیل داده و از حل‌آن دستگاه ، اندازهٔ زوایا را بدست آوریم .

۲ـ حل چند مسئلهٔ نمونه

مسئلهٔ ۱ــ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=۹۰^\circ$) وتر آن برابر a و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن برابر r معلومند . مثلث را حل کنید .

حل ـ طریق اول ـ دراین طریق ابتدا زوایای مثلث را حساب کرده سپس اضلاع آن را تعیین می‌کنیم .

از رابطهٔ :
$$r=\frac{a\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}}{\cos\frac{A}{۲}}$$

حاصل می‌شود :
$$\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}=\frac{r}{a}\cos\frac{A}{۲}=\frac{r}{a}\cos ۴۵^\circ=\frac{r\sqrt{۲}}{۲a}$$

اکنون دستگاه زیر را حل می‌کنیم :

$$\begin{cases} \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r\sqrt{2}}{2a} \\ B+C=90^\circ \end{cases}$$

برای حل این دستگاه به‌جای عبارت $\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ مساوی آن $\frac{1}{2}\left[\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right]$ را قرار می‌دهیم ، خواهیم داشت :

$$\frac{1}{2}\left[\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right]=\frac{r\sqrt{2}}{2a}$$

یا :

$$\cos\frac{B-C}{2}-\cos 45^\circ=\frac{r\sqrt{2}}{a}$$

و از آنجا :

$$\cos\frac{B-C}{2}=\frac{r\sqrt{2}}{a}+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

اگر زاویهٔ حاده و مثبت α را طوری اختیار کنیم که $\frac{r\sqrt{2}}{a}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\alpha$ باشد ، می‌توان چنین نوشت :

$$\cos\frac{B-C}{2}=\cos\alpha$$

و از آنجا با فرض آنکه $B>C$ باشد ، خواهیم داشت :

$$\frac{B-C}{2}=\alpha$$

و در نتیجه :

$$B-C=2\alpha$$

از حل دستگاه $\begin{cases} B+C=90^\circ \\ B-C=2\alpha \end{cases}$ زوایای B و C بدست می‌آیند:

$$C=45^\circ-\alpha \qquad \text{و} \qquad B=45^\circ+\alpha$$

طولهای اضلاع b و c را از دو رابطهٔ $b=a\sin B$ و $c=a\sin C$ حساب می‌کنیم حاصل می‌شود :

$$b=a\sin(45^\circ+\alpha)$$

و

$$c=a\sin(45^\circ-\alpha)$$

بحث ـ چون B و C مثبتند ، با فرض آنکه $B\geq C$ باشد می‌توان چنین نوشت :

$$0\leq B-C<B+C$$

یا :

$$0\leq\frac{B-C}{2}<\frac{B+C}{2}$$

و از آنجا :

$$1\geq\cos\frac{B-C}{2}>\cos\frac{B+C}{2}$$

یا :

$$1\geq\frac{r\sqrt{2}}{a}+\frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{\sqrt{2}}{2}$$

چون r و a مثبتند ، نامساوی $\frac{r\sqrt{2}}{a}+\frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{\sqrt{2}}{2}$ همواره محقق است .

از نامساوی $\frac{r\sqrt{2}}{a}+\frac{\sqrt{2}}{2}\leq 1$ حاصل می‌شود :

$$r\leq\frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}$$

بنابراین برای اینکه مسئله دارای جواب باشد باید این نامساوی محقق باشد :

$$r \leqslant \frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}$$

در حالتی که $r=\frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}$ باشد ، چنین خواهیم داشت :

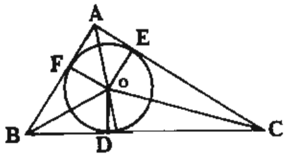
$$\frac{B-C}{2}=0$$

یا : $B=C$

یعنی در این حال مثلث متساوی‌الساقین است .

طریق دوم - در این طریق ابتدا اضلاع مثلث را حساب‌کرده سپس زوایای آن را تعیین می‌کنیم :

اگر نقطهٔ o مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC (شکل ۱) باشد و نقاط D، E و F نقاط تماس دایرهٔ مزبور با اضلاع مثلث فرض‌شوند، بسهولت معلوم می‌شود :



شکل ۱

$$AF+BF+BD+CD+CE+AE=c+a+b$$

و چون $AE=AF$ و $BF=BD$ و $CD=CE$

بنابراین چنین خواهیم داشت :

$$2AE+2BD+2CD=c+a+b$$

یا : $2AE+2(BD+CD)=a+b+c$

یا : $2AE+2a=a+b+c$

یا : $2AE+a=b+c \qquad (\mathrm{I})$

اما چون بنابرفرض مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه و oA نیمساز زاویهٔ A می‌باشد ، از این جهت چهارضلعی AEoF مربع است و $AE=AF=r$ خواهد بود ؛ و با توجه به این روابط ، رابطهٔ (I) را به صورت زیر می‌توان نوشت :

$$b+c=2r+a$$

و چون از طرفی $b^2+c^2=a^2$ می‌باشد ، اضلاع b و c جوابهای دستگاه زیر خواهند بود :

$$\begin{cases} b+c=2r+a \\ b^2+c^2=a^2 \end{cases}$$

برای حل این دستگاه ، معادلهٔ $b^2+c^2=a^2$ را به صورت $(b+c)^2-2bc=a^2$ نوشته به جای $b+c$ مساوی آن را از معادلهٔ اول دستگاه قرار می‌دهیم حاصل می‌شود :

$$(2r+a)^2-2bc=a^2$$

و از آنجا : $bc=2r(r+a)$

چون $b+c=2r+a$ و $bc=2r(r+a)$ هستند ، بنابراین b و c جوابهای این معادله می‌باشند :

$$x^2-(2r+a)x+2r(r+a)=0 \qquad (1)$$

پس از تعیین b و c اندازه‌های زوایای B و C را از دو رابطهٔ $\sin B=\frac{b}{a}$ و $\sin C=\frac{c}{a}$ حساب می‌کنیم .

بحث- چون اضلاع b و c مثبتند ، بنابراین معادلهٔ (۱) باید دارای دوجواب مثبت باشد وچون حاصل‌ضرب وحاصل جمع‌جوابهای معادلهٔ (۱) بترتیب برابر $2r(r+a)$ و $(2r+a)$ بوده و مثبتند پس تنها شرط وجود جواب این است که داشته باشیم :

$$\Delta=(2r+a)^2-8r(r+a)\geq 0$$

یا :

$$4r^2+4ar-a^2\leq 0$$

از حل این نامعادله حاصل می‌شود : $r\leq\frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}$

در حالتی که $r=\frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}$ باشد، دوریشهٔ معادلهٔ (۱) با هم برابرند و مثلث متساوی‌الساقین است .

مسئلهٔ ۲ - در مثلث ABC اندازهٔ زاویهٔ A وضلع $BC=a$ و طول نیمساز داخلی $AL=d$ معلومند ؛ مثلث را حل کنید .

حل-طریقهٔ اول- در این طریق ابتدا زوایای مثلث را حساب کرده سپس طولهای اضلاع را تعیین می‌کنیم .

از رابطهٔ $d=\frac{a\sin B\sin C}{\sin A\cos\frac{B-C}{2}}$ حاصل می‌شود :

$$a\sin B\sin C=d\sin A\cos\frac{B-C}{2}$$

اکنون دستگاه زیر را حل می‌کنیم :

$$\begin{cases} a\sin B\sin C=d\sin A\cos\frac{B-C}{2} \\ B+C=\pi-A \end{cases}$$

برای حل این دستگاه چون در رابطهٔ اول آن به جای عبارت $\sin B\sin C$ مقدار مساویش $\frac{1}{2}\left[\cos(B-C)-\cos(B+C)\right]$ را قرار دهیم حاصل می‌شود :

$$\frac{a}{2}\left[\cos(B-C)-\cos(B+C)\right]=d\sin A\cos\frac{B-C}{2}$$

یا :

$$\frac{a}{2}\left[2\cos^2\frac{B-C}{2}-1+\cos A\right]=d\sin A\cos\frac{B-C}{2}$$

یا :

$$2a\cos^2\frac{B-C}{2}-2d\sin A\cos\frac{B-C}{2}-a(1-\cos A)=0 \qquad (1)$$

و ازآنجا :

$$\cos\frac{B-C}{2}=\frac{d\sin A\pm\sqrt{d^2\sin^2 A+2a^2(1-\cos A)}}{2a}$$

چون حاصل‌ضرب دو ریشهٔ معادلهٔ (۱) عبارت است از :

$-\frac{1}{2}(1-\cos A)=-\sin^2\frac{A}{2}$ وهمواره منفی‌است بنابراین معادلهٔ (۱) دوجواب مختلف‌العلامه دارد و چون $\frac{B-C}{2}$ حاده و کسینوس آن مثبت است ، پس جواب مثبت معادلهٔ (۱) ممکن‌است قابل قبول باشد.

اگر جواب قابل‌قبول معادلهٔ (۱) را برابر کسینوس زاویهٔ حاده و مثبت α اختیار کنیم ، با فرض آنکه $B>C$ باشد چنین خواهیم داشت :

$$\cos\frac{B-C}{2}=\cos\alpha$$

و از آنجا :

$$\frac{B-C}{2}=\alpha$$

و

$$B-C=2\alpha$$

ازحل دستگاه $\begin{cases}B+C=\pi-A\\ B-C=2\alpha\end{cases}$ زوایای B و C بـدست می‌آیند :

$$B=\frac{\pi}{2}+\alpha-\frac{A}{2} \quad \text{و} \quad C=\frac{\pi}{2}-\alpha-\frac{A}{2}$$

طولهای اضلاع b و c را از دو رابطهٔ : $b=\frac{a\sin B}{\sin A}$ و $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$ حساب می‌کنیم .

بحث ـ بطوری که در مسئلهٔ (۱) گفته شد ، می‌توان نوشت :

$$0\leqslant\frac{B-C}{2}<\frac{B+C}{2}$$

در نتیجه

$$1\geqslant\cos\frac{B-C}{2}>\cos\frac{B+C}{2}$$

ویا :

$$1\geqslant\cos\frac{B-C}{2}>\sin\frac{A}{2} \qquad (2)$$

اگر فرض کنیم $\cos\frac{B-C}{2}=x$ ، معادلهٔ (۱) را به این

صورت می‌توان نوشت : $2ax^2-2dx\sin A-a(1-\cos A)=0$.

بطوری که نامساوی (۲) نشان می‌دهد جواب مثبت این معادله در صورتی قابل قبول است که آن جواب بین یك و $\sin\frac{A}{2}$ محصور باشد و برای این منظور باید داشته باشیم :

$$f(1)\times f(\sin\frac{A}{2})<0$$

ولی

$$f(1)=a-2d\sin A+a\cos A$$

یا :

$$f(1)=a-4d\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+a(2\cos^2\frac{A}{2}-1)$$

یا :

$$f(1)=2\cos\frac{A}{2}\,(a\cos\frac{A}{2}-2d\sin\frac{A}{2})$$

و

$$f(\sin\frac{A}{2})=2a\sin^2\frac{A}{2}-2d\sin A\sin\frac{A}{2}-a(1-\cos A)$$

یا :

$$f(\sin\frac{A}{2})=-4d\sin^2\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$f(1)\times f(\sin\frac{A}{2})=-8d\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}(a\cos\frac{A}{2}-2d\sin\frac{A}{2})<0$$

چون $8d\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}$ مثبت است ، باید داشته باشیم :

$$a\cos\frac{A}{2}-2d\sin\frac{A}{2}>0$$

یا :

$$2d\sin\frac{A}{2}<a\cos\frac{A}{2}$$

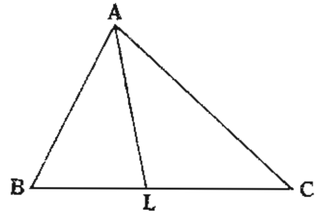
طرفین نامعادله را بر $2\sin\frac{A}{2}$ که مثبت است ، تقسیم می‌کنیم

حاصل می‌شود : $d<\frac{1}{2}a\,cotg\frac{A}{2}$.

در حالت $d=\frac{1}{2}a\,cotg\frac{A}{2}$ ، مثلث متساوی‌الساقین است .

طریقهٔ دوم ـ در این طریق ابتدا اضلاع مثلث را حساب کرده سپس اندازه‌های زوایای آن را تعیین می‌کنیم .

اگر AL نیمساز داخلی زاویهٔ A (شکل ۲) باشد می‌توان‌چنین نوشت :



شکل ۲

مساحت مثلث ACL + مساحت مثلث ABL = مساحت مثلث ABC

یا : $$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}c\,d\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}bd\sin\frac{A}{2}$$

و یا پس از اختصار خواهیم داشت : $2bc\cos\frac{A}{2}=d(b+c)$

و چون $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ است ، بنابراین b و c جوابهای دستگاه زیر هستند :

$$\begin{cases} 2bc\cos\frac{A}{2}=d(b+c) \\ a^2=(b+c)^2-2bc(1+\cos A) \end{cases}$$

از این دستگاه حاصل می‌شود :

$$b+c=d\cos\frac{A}{2}+\sqrt{d^2\cos^2\frac{A}{2}+a^2}$$

$$bc=\frac{d}{2\cos\frac{A}{2}}\left(d\cos\frac{A}{2}+\sqrt{d^2\cos^2\frac{A}{2}+a^2}\right)$$ و

چون $b+c$ و $b.c$ معلوم شدند ، اگر آنها را بترتیب برابر S و P فرض کنیم ، b و c ریشه‌های معادلهٔ $x^2-Sx+P=0$ (۱) هستند. پس از تعیین b و c اندازه‌های زوایای B و C را از دستورهای :

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a} \quad \text{و} \quad \sin C=\frac{c\sin A}{a}$$

حساب می‌کنیم .

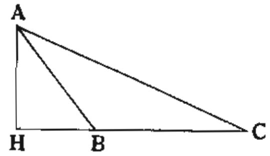
تبصره ـ ممکن است به جای یکی از دو معادلهٔ دستگاه فوق رابطهٔ هندسی $bc=d^2+\frac{a^2bc}{(b+c)^2}$ را قرار داد .

بحث ـ چون اضلاع b و c مثبتند ، باید معادلهٔ (۱) دارای دو جواب مثبت باشد . با توجه به اینکه d و a و $\cos\frac{A}{2}$ مثبتند ، $P=bc$ و $S=b+c$ مثبت بوده و تنها شرط وجود جواب این است که : $\Delta=S^2-4P\geq 0$ باشد .

از حل این نامعادله حاصل می‌شود : $d\leq\frac{1}{2}a\,cotg\frac{A}{2}$.

مسئلهٔ ۳ ـ درمثلث ABC ضلع $BC=a$ معلوم است ومی‌دانیم : $\hat{A}=2\hat{C}$ و $\overline{AB}^2=-\overline{BC}\times\overline{BH}$ (H پای ارتفاع AH است) ؛ مثلث را حل کنید .

حل ـ رابطهٔ $\overline{AB}^2=-\overline{BC}\times\overline{BH}$ نشان می‌دهد که رأس B



شکل ۳

بین نقاط H و C قرار دارد (شکل ۳) .

بنابراین زاویهٔ B منفرجه است.

در مثلث ABH داریم : $BH = AB\cos\widehat{ABH} = -c\cos B$ ؛

به جای BH مساوی آن را در رابطهٔ $\overline{AB}^2 = -\overline{BC}\times\overline{BH}$ قرار می‌دهیم حاصل می‌شود :

$$c^2 = -ac\cos B$$

یا : $$c + a\cos B = 0 \qquad (E)$$

از رابطهٔ : $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ نتیجه می‌شود :

$$a = 2R\sin A \quad \text{و} \quad c = 2R\sin C$$

در رابطهٔ (E) به جای a و c مقادیر اخیر را قرار داده رابطهٔ حاصل را ساده می‌کنیم ، معادلهٔ زیر بدست می‌آید :

$$\sin C + \sin A\cos B = 0 \qquad (1)$$

از روابط $A = 2C$ و $A+B+C=\pi$ نتیجه می‌شود :

$$B = \pi - 3C$$

در رابطهٔ (۱) به جای A و B مقادیرشان را بر حسب C قرار می‌دهیم حاصل می‌شود :

$$\sin C + \sin 2C\cos(\pi - 3C) = 0$$

یا : $$\sin C - 2\sin C\cos C\cos 3C = 0$$

طرفین معادلهٔ اخیر را بر $\sin C$ که مخالف صفر است تقسیم می‌کنیم نتیجه می‌شود :

$$1 - 2\cos 3C\cos C = 0$$

یا : $$1 - [\cos(3C+C) + \cos(3C-C)] = 0$$

یا : $$\cos 4C + \cos 2C - 1 = 0$$

یا : $$2\cos^2 2C - 1 + \cos 2C - 1 = 0$$

یا : $$2\cos^2 2C + \cos 2C - 2 = 0$$

و از آنجا : $\cos 2C = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$.

اگر $\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ برابر کسینوس زاویهٔ حاده و مثبت α باشد ، می‌توان چنین نوشت :

$$\cos 2C = \cos\alpha$$

ودرنتیجه $2C=\alpha$ واز آنجا: $C = \frac{\alpha}{2}$ و $A = \alpha$ و $B = \pi - \frac{3\alpha}{2}$؛

طولهای دو ضلع b و c عبارتند از :

$$c = \frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} \quad \text{و} \quad b = \frac{a\sin\frac{3\alpha}{2}}{\sin\alpha}$$

بحث ـ چون زاویهٔ B منفرجه است پس باید نامساویهای $90^\circ < B < 180^\circ$ یا $90^\circ < 180^\circ - 3C < 180^\circ$ بر قرار باشند .

از نامساوی $180^\circ - 3C < 180^\circ$ حاصل می‌شود $C > 0$ و این شرط همواره برقرار است .

از نامساوی $90° < 180° - 3C$ نتیجه می‌شود : $C < 30$ ؛ بنابراین باید $2C < 60°$ و $\cos 2C > \frac{1}{2}$ باشد؛ وچون $\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ بزرگتر از $\frac{1}{2}$ است ، مسئله همواره دارای جواب است .

تمرین

مطلوب است حل مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=90°$) با معلومات زیر:

۱- B و S
۲- B و p
۳- a و r
۴- B و r
۵- b و r
۶- $b+c=l$ و B
۷- $\frac{b}{c}=k$ و h
۸- $a+h=l$ و B

مطلوب است حل مثلث ABC با این معلومات :

۹- S و A و a
۱۰- r و A و a
۱۱- $b-c=l$ و A و a
۱۲- $b+c=l$ و A و a
۱۳- R و A و b
۱۴- d_a و c و b (ابتدا $\cos\frac{A}{2}$ را حساب کنید) .
۱۵- m_a و A و a
۱۶- p و h و a
۱۷- m_a و h_a و A
۱۸- h_b و A و b
۱۹- m_a و h_a و R
۲۰- h_a و $b+c=l$ و a
۲۱- $b^2+c^2=k^2$ و A و a
۲۲- $b.c=k^2$ و A و a

۲۳- d'_a و A و a
۲۴- $b^2-c^2=k^2\ (b>c)$ و A و a
۲۵- $B=2C$ و b و c
۲۶- m_a و S و a
۲۷- $B=2C$ و a و r
۲۸- $B=2C$ و a و b
۲۹- $B-C=2\alpha$ و a و S
۳۰- $B=2C$ و a و $b+c=l$
۳۱- $B-C=2\alpha$ و a و h_a
۳۲- $B-C=2\alpha$ و a و r
۳۳- $B-C=2\alpha$ و $b+c=l$ و h_a
۳۴- $B-C=2\alpha$ و $bc=k^2$ و m_a

۳۵- درمثلث ABC زاویهٔ A معلوم است و می‌دانیم که نیمسازداخلی این زاویه واسطهٔ هندسی بین دو قطعه‌ای است که روی‌ضلع مقابل‌پدیدمی‌آورد. مطلوب است محاسبهٔ زوایای B و C (بحث) .

۳۶- درمثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=90°$) طول نیمساز داخلی AD برابر d واندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی داخلی برابر r است؛ مثلث راحل کنید (بحث) .

۳۷- در مثلث ABC زوایا تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند . مثلث را در صورتی که ضلع a معلوم بوده و مساحت مثلث $S=k^2$ باشد ، حل کنید (بحث) .

۳۸- در مثلث ABC ضلع a معلوم و $b+c=2a$ و $S=mab$ می‌باشند (m عددی معلوم است) .

اولا ـ ثابت کنید رابطهٔ $tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$ برقرار است .

ثانیاً ـ مثلث را حل کنید .

۳۹- درمثلث‌قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=90°$) $c<b$. ازنقطهٔ D پای نیمساز داخلی AD عمودی برBC اخراج می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطهٔ E قطع کند .

اولا ـ طول اضلاع مثلث CDE را بر حسب a ، b و c اضلاع مثلث ABC محاسبه کرده و تحقیق کنید که $DB=DE$ می‌باشد .

ثانیا ـ ثابت کنید : $\frac{CE}{CA}=\frac{1+tg^2C}{1+tgC}$.

ثالثاً ـ منحنی نمایش تغییرات $y=\frac{CE}{CA}$ را وقتی‌که C مقادیر ممکن را اختیار کند ، رسم کنید .

۴۰ـ در مثلث ABC میانهٔ AM مساوی ضلع AB است .

اولا ـ ثابت کنید : $tgB=3tgC$ و $\sin A=2\sin(B-C)$ ،

ثانیاً ـ اگر A معلوم باشد ، زوایای B و C را حساب کنید (بحث).

۴۱ـ درمثلث ABC اضلاع a، b و c جمل متوالی یك تصاعدعددی با قدرنسبت d هستند .

اولا ـ ثابت کنید : $d^2=b^2\times\frac{2\cos B-1}{2(1+\cos B)}$.

ثانیاً ـ اگر b و B معلوم باشند ، مثلث را حل کنید .

۴۲ـ در مثلثی ضلع a واسطهٔ عددی بین اضلاع b و c است .

اولا ـ ثابت کنید که : $\cos\frac{B-C}{2}=2\cos\frac{B+C}{2}$.

ثانیاً ـ اگر A معلوم باشد، دو زاویهٔ C و B را محاسبه‌کنید (بحث).

ثالثاً ـ اگرمثلث فوق قائم‌الزاویه باشد، اندازهٔ اضلاع‌مثلث را برحسب ضلع کوچکتر حساب کنید .

۴۳ـ اولاـ ثابت‌کنیددرمثلث متساوی‌الساقین $ABC\,(AB=AC)$ رابطهٔ $r=2R\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)$ برقرار است .

ثانیاً ـ p را بر حسب R و توابع مثلثاتی زاویهٔ A حساب کنید و جدول و منحنی نمایش تغییرات p را وقتی R ثابت و A تغییر کند ، رسم کنید .

ثالثاً ـ اگر $r=mR$ باشد ، زاویهٔ A را محاسبه کنید (بحث) .

۴۴ـ در مثلث ABC داریم $a=2h_a$.

اولا ـ بین تانژانتهای دو زاویهٔ B و C چه رابطه‌ای موجود است .

ثانیاً ـ اگر A معلوم باشد ، زوایای B و C را حساب کنید .

ثالثاً ـ اگر $B=2C$ باشد، tgA، tgB و tgC را محاسبه کنید .

۴۵ـ در مثلث ABC داریم $h_a=md_a$.

اولا ـ ثابت کنید : $\frac{\sin B+\sin C}{\cos\frac{A}{2}}=2m$

و $a\sin\frac{A}{2}+2r\cos\frac{A}{2}=am$

ثانیاًـ اگر $\sin B+\sin C=2\sin A$ باشد، زوایای مثلث‌راتعیین‌کرده و در وجود جوابها بر حسب مقادیر مختلف m بحث کنید .

ثالثاًـ فرض‌کنیم $m=1$ و $S=4\sqrt{3}$ باشند؛ اندازه‌های اضلاع مثلث را حساب کنید .

۴۶ـ اولا ـ ثابت کنید اگر درمثلث ABC میانه‌های BB' و CC' بر هم عمود باشند ، رابطهٔ $\sin^2C+\sin^2B=5\sin^2A$ برقرار است .

ثانیاً ـ به فرض معلوم بودن A زوایای B و C را حساب کنید .

۴۷ـ اولاـ ثابت کنید اگر در مثلث غیرمتساوی‌الساقین ABC رابطهٔ $\frac{m_b}{m_c}=\frac{c}{b}$ برقرار باشد، رابطه‌های $\sin^2B+\sin^2C=2\sin^2A$ و $S=\frac{a^2}{4}tgA$ نیز برقرارند .

ثانیاً ـ اگر $B=\frac{2\pi}{3}$ باشد ، $\sin C$ را حساب کنید .

۴۸ـ درمثلث ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ وتر a و $c+2b=l$ معلومند.

اولا ـ مثلث را حل کنید (بحث) .

ثانیاً ـ جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع $y=c+2b$ را وقتی‌که a ثابت و B تغییرکند ، رسم کنید .

۴۹ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ زاویه‌ای را که میانهٔ BD با وتر می‌سازد α می‌نامیم .

اولا ـ ثابت کنید : $tg B = 2 tg(B-\alpha)$.

ثانیاً ـ اگر b و α معلوم باشند ، مثلث را حل کنید (بحث) .

۵۰ـ در مثلث ABC رابطهٔ $c=2b$ برقرار است .

اولا ـ ثابت کنید : $\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}=\dfrac{\sin\frac{A+C}{2}}{\sin\frac{C-B}{2}}$.

ثانیاً ـ اگر $a=1$ باشد، جدول ومنحنی نمایش تغییرات h_a را وقتی که A تغییر کند رسم کنید .

۵۱ـ درمثلث ABC ارتفاع وارد ازرأس A برابر مجموع دوارتفاع دیگر است .

اولا ـ ثابت کنید : $\dfrac{1}{\sin A}=\dfrac{1}{\sin B}+\dfrac{1}{\sin C}$.

ثانیاً ـ به فرض معلوم بودن A زوایای مثلث را حساب کنید .

ثالثاً ـ اگر $h_a=m$ باشد ، اندازه‌های اضلاع مثلث ومساحت‌آن را تعیین کنید .

۵۲ـ درمثلث ABC نقطهٔ o مرکزدایرهٔمحاطی داخلی است؛ به‌فرض آنکه $oA^2=oB.oC$ باشد ، اولا ثابت کنید :

$$\sin^2\frac{A}{2}=\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

ثانیاً ـ اگرزاویهٔ A معلوم باشد، دو زاویهٔ دیگررا حساب‌کنید (بحث).

۵۳ ـ در مثلث ABC رابطهٔ $B=90^\circ+C$ برقرار است .

اولا ـ ثابت کنید : $b^2+c^2=4R^2$

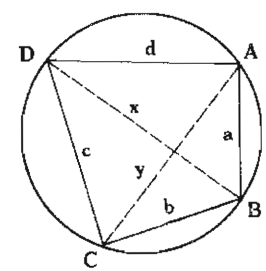
و $a^2+b^2+c^2+4h_a^2=8R^2$

ثانیاً ـ اگر $b+c=l$ و R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث معلوم باشد ، مثلث را حل کنید (بحث).

فصل نهم

محاسبهٔ زوایا و اقطار و مساحت و شعاع دایرهٔ محیطی چهار ضلعی محدّب بر حسب اضلاع آن

۱ـ چهار ضلعی محدب محاطی $ABCD$ (شکل ۱) را در نظر گرفته فرض می‌کنیم $AB=a$ و $BC=b$ و $CD=c$ و $DA=d$ و $BD=x$ و $AC=y$ باشد. می‌خواهیم زوایا واقطار و مساحت و شعاع دایرهٔ محیطی چهار ضلعی را بر حسب a ، b ، c و d حساب کنیم.



شکل ۱

الف ـ محاسبهٔ زوایا ـ در مثلث ABD می‌توان چنین نوشت.

$$x^2=a^2+d^2-2ad\cos A \qquad (1)$$

و نیز در مثلث BCD داریم:

$$x^2=b^2+c^2-2bc\cos C \qquad (2)$$

چون دو زاویهٔ A و C مکملند و $\cos C=-\cos A$ است، بنابراین رابطهٔ (۲) را به این صورت می‌نویسیم:

$$x^2=b^2+c^2+2bc\cos A \qquad (3)$$

از مقایسهٔ دو رابطهٔ (۱) و (۳) نتیجه می‌شود:

$$a^2+d^2-2ad\cos A=b^2+c^2+2bc\cos A$$

و از آنجا:

$$\cos A=\frac{a^2+d^2-(b^2+c^2)}{2(ad+bc)} \qquad (4)$$

به وسیلهٔ این رابطه می‌توان زاویهٔ A را برحسب اضلاع حساب کرد. چون رابطهٔ (۴) به‌وسیلهٔ لگاریتم قابل محاسبه نیست، بااستفاده از آن رابطهٔ دیگری تعیین می‌کنیم که قابل محاسبه به وسیلهٔ لگاریتم باشد و برای این منظور، مقدار عبارتهای $1-\cos A=2\sin^2\frac{A}{2}$ و $1+\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}$ را برحسب اضلاع تعیین کرده و از روی آنها مقدار $tg\frac{A}{2}$ را حساب می‌کنیم.

$$1-\cos A=2\sin^2\frac{A}{2}=1-\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(bc+ad)}$$

و یا:

$$2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(b+c)^2-(a-d)^2}{2(bc+ad)}$$

و از آنجا:

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(b+c+a-d)(b+c+d-a)}{4(bc+ad)}$$

همچنین:

$$1+\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}=1+\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(bc+ad)}$$

و یا:

$$2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{(a+d)^2-(b-c)^2}{2(bc+ad)}$$

$$x \cdot y = ac + bd$$

$$\frac{x}{y} = \frac{ab+cd}{ad+bc}$$

ج ـ محاسبهٔ مساحت ـ اگر مساحت چهارضلعی محاطی ABCD (شکل ۱) را با S نشان دهیم، می‌توان چنین نوشت:

$$S = \text{مساحت } ABD + \text{مساحت } CBD$$

یا:

$$S = \frac{1}{2} ad \sin A + \frac{1}{2} bc \sin C$$

چون A و C مکملند و $\sin C = \sin A$ است، پس:

$$S = \frac{1}{2} ad \sin A + \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2}(ad+bc) \sin A$$

یا:

$$S = (ad+bc) \sin\frac{A}{2} \cos\frac{A}{2}$$

به‌جای $\sin\frac{A}{2}$ و $\cos\frac{A}{2}$ مقادیرشان را که در (شمارهٔ ۱ـ قسمت الف) حساب کرده‌ایم قرار می‌دهیم، پس از اختصار حاصل می‌شود:

$$\boxed{S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}$$

د ـ محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محیطی ـ درمثلث ABD (شکل ۱) می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{x}{\sin A} = 2R$$

و از آنجا:

$$R = \frac{x}{2 \sin A} = \frac{x}{4 \sin\frac{A}{2} \cos\frac{A}{2}}$$

به جای $\sin\frac{A}{2}$ و $\cos\frac{A}{2}$ و x مقادیرشان را که بترتیب در شمارهٔ

۱ قسمتهای الف و ب حساب کرده‌ایم قرار می‌دهیم، پس از اختصار حاصل می‌شود:

$$\boxed{R = \frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}}$$

تبصره ـ با توجه به دستور مساحت (شمارهٔ ۱ قسمت ج)، رابطهٔ اخیر را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$R = \frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4S}$$

۲ـ یادآوری ـ اگر درچهارضلعی محاطی ABCD (شکل ۱)، ضلع $d = 0$ فرض شود، چهارضلعی به مثلث تبدیل می‌شود و روابطی که در این فصل بین اجزای چهار ضلعی محاطی تعیین کرده‌ایم به صورت روابط بین اجزای مثلث در می‌آیند.

تمرین

۱ـ در چهارضلعی محاطی ABCD طول اضلاع عبارتند از: $a = 2\sqrt{2}$ و $b = 4$ و $c = 2$ و $d = \sqrt{6} - \sqrt{2}$؛ مطلوب است محاسبهٔ زوایا و اقطار ومساحت وشعاع دایرهٔ محیطی و اندازهٔ زاویهٔ بین دوقطر آن.

۲ـ در چهار ضلعی ABCD طول اضلاع عبارتند از: $AB = 2$ و $BC = \sqrt{2}$ و $CD = \sqrt{6}$ و $AD = 2$ و اندازهٔ زاویهٔ $ADC = 75°$ است. ثابت‌کنیدکه‌این‌چهارضلعی محاطی است و اندازهٔ مساحت و طول اقطار آن را حساب کنید.

۳ ـ در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$ قاعدهٔ $AB=۸$ و قاعدهٔ $CD=۱۴$ و ساق $AD=۵$ هستند ؛ طول قطر و $tg\,A$ را حساب کنید .

۴ ـ در چهارضلعی‌محاطی $ABCD$ زاویهٔ $A=۹۰^\circ$ و $B=۱۰۵^\circ$ و $AB=AD=۴$ هستند. طول دوضلع دیگرومساحت‌آن را حساب‌کنید .

۵ـ در چهارضلعی محاطی $ABCD$ ضلع $a=۲\sqrt{۲}$ و $c=۲$ وقطر $AC=۲\sqrt{۲}$ وقطر $BD=۲\sqrt{۳}$ هستند؛ طول دو ضلع دیگر واندازهٔ زوایا و مساحت چهار ضلعی را تعیین‌کنید .

۶ـ در چهارضلعی‌محدب $ABCD$ضلع $AB=۱$ وضلع $BC=\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ و $\widehat{ABC}=۹۰^\circ$ و $\widehat{ADC}=۶۰^\circ$ هستند و می‌دانیم قطر BD زاویهٔ ADC را نصف می‌کند؛ طول دوضلع دیگر واندازهٔ دوزاویهٔ دیگر را حساب کنید .

۷ـ در نیمدایرهٔ به قطر $AB=۲R$ چهار ضلعی $ABCD$ بطریقی محاط شده‌است‌که $CD=R$ است. مطلوب‌است‌محاسبهٔ دوضلع‌دیگرچهارضلعی در صورتی‌که مساحت چهارضلعی برابر $m^۲$ باشد (بحث) .

۸ـدرچهارضلعی‌محدب$ABCD$ضلع$AB=a$و $AD=\frac{a(۱+\sqrt{۵})}{۴}$ و $BC=\frac{a}{۲}$ و $\hat{A}=۳۶^\circ$ و $\hat{B}=۱۰۸^\circ$ هستند ؛ طول ضلع CD و اندازهٔ زوایای C و D را حساب کنید .

۹ـ در چهار ضلعی محدب $ABCD$ زاویهٔ A قائمه و طول اضلاع عبارتند از $AB=۴a$ و $BC=۷a$ و $CD=۸a$ و $AD=۳a$. اندازهٔ زوایا و طول اقطار و مساحت چهارضلعی را حساب کنید .

۱۰ـ در چهارضلعی محاطی $ABCD$: $\hat{B}=۹۰^\circ$ و $AB=a$ و $CD=b$ و زاویهٔ حادهٔ A معلومند . مطلوب است محاسبهٔ دوضلع دیگر.

۱۱ـ در چهارضلعی محدب $ABCD$ اندازهٔ یکی اززاویه‌های بین دو قطر AC و BD را با α و مساحت چهارضلعی را با S نمایش می‌دهیم . ثابت کنید :

$$\sin\alpha=\frac{۲S}{AC.BD}$$

فصل دهم

استفاده از مثلثات در نقشه‌برداری و تعیین فواصل و ارتفاعات

۱ـ نقشهٔ قطعه زمینی‌که افقی و بقدر کافی‌کوچك باشد ، شکلی متشابه آن است که روی صفحهٔ کاغذ رسم شود . نسبت تشابه را مقیاس نقشه می‌گویند .

برای رسم نقشه قبلا باید اندازهٔ اضلاع وزوایا و ارتفاعات بعضی از نقاط قطعه زمین را تعیین کرد .

درهندسهٔ سال سوم‌طریقهٔ تعیین اندازهٔ اضلاع وزوایا وارتفاعات نقاط را به‌کمك وسایل نقشه برداری بیان کرده‌ایم. یکی از طریقه‌های اندازه‌گیری اضلاع و زوایا طریقهٔ **مثلث‌بندی** است .

در این طریق ، روی قطعهٔ زمین نقاط مشخصی (مثلا رأس برج یا ساختمان و غیره) را در نظر گرفته و این نقاط را رئوس مثلثهایی فرض می‌کنند بطوری‌که قطعه زمین به یك عده مثلث تبدیل شود ، سپس یکی از اضلاع مثلثها را به‌کمك وسایل‌نقشه‌برداری باکمال دقت

۳ـ در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$ قاعدهٔ $AB=8$ و قاعدهٔ $CD=14$ و ساق $AD=5$ هستند ؛ طول قطر و $tg\,A$ را حساب کنید .

۴ـ در چهارضلعی‌محاطی $ABCD$ زاویهٔ $A=90^\circ$ و $B=105^\circ$ و $AB=AD=4$ هستند. طول دوضلع دیگرومساحت‌آن را حساب‌کنید .

۵ـ در چهارضلعی محاطی $ABCD$ ضلع $a=2\sqrt{2}$ و $c=2$ وقطر $AC=2\sqrt{2}$ وقطر $BD=2\sqrt{3}$ هستند؛ طول دو ضلع دیگر واندازهٔ زوایا و مساحت چهار ضلعی را تعیین‌کنید .

۶ـ در چهارضلعی‌محدب $ABCD$ ضلع $AB=1$ وضلع $BC=\frac{2}{\sqrt{3}}$ و $\widehat{ABC}=90^\circ$ و $\widehat{ADC}=60^\circ$ هستند و می‌دانیم قطر BD زاویهٔ ADC را نصف می‌کند؛ طول دوضلع دیگر واندازهٔ دوزاویهٔ دیگر را حساب کنید .

۷ـ در نیمدایرهٔ به قطر $AB=2R$ چهار ضلعی $ABCD$ بطریقی محاط شده‌است‌که $CD=R$ است. مطلوب‌است‌محاسبهٔ دوضلع‌دیگرچهارضلعی در صورتی‌که مساحت چهارضلعی برابر m^2 باشد (بحث) .

۸ـ درچهارضلعی‌محدب $ABCD$ ضلع $AB=a$ و $AD=\frac{a(1+\sqrt{5})}{4}$ و $BC=\frac{a}{2}$ و $\hat{A}=36^\circ$ و $\hat{B}=108^\circ$ هستند ؛ طول ضلع CD و اندازهٔ زوایای C و D را حساب کنید .

۹ـ در چهار ضلعی محدب $ABCD$ زاویهٔ A قائمه و طول اضلاع عبارتند از $AB=4a$ و $BC=7a$ و $CD=8a$ و $AD=3a$. اندازهٔ زوایا و طول اقطار و مساحت چهارضلعی را حساب کنید .

۱۰ـ در چهارضلعی محاطی $ABCD$: $\hat{B}=90^\circ$ و $AB=a$ و $CD=b$ و زاویهٔ حادهٔ A معلومند . مطلوب است محاسبهٔ دوضلع دیگر.

۱۱ـ در چهارضلعی محدب $ABCD$ اندازهٔ یکی اززاویه‌های بین دو قطر AC و BD را با α و مساحت چهارضلعی را با S نمایش می‌دهیم . ثابت کنید :

$$\sin\alpha=\frac{2S}{AC.BD}$$

فصل دهم

استفاده از مثلثات در نقشه‌برداری و تعیین فواصل و ارتفاعات

۱ـ نقشهٔ قطعه زمینی‌که افقی و بقدر کافی‌کوچك باشد ، شکلی متشابه آن است که روی صفحهٔ کاغذ رسم شود . نسبت تشابه را مقیاس نقشه می‌گویند .

برای رسم نقشه قبلا باید اندازهٔ اضلاع وزوایا و ارتفاعات بعضی از نقاط قطعه زمین را تعیین کرد .

درهندسهٔ سال سوم‌طریقهٔ تعیین اندازهٔ اضلاع وزوایا وارتفاعات نقاط را به‌کمك وسایل نقشه برداری بیان کرده‌ایم. یکی از طریقه‌های اندازه‌گیری اضلاع و زوایا طریقهٔ **مثلث‌بندی** است .

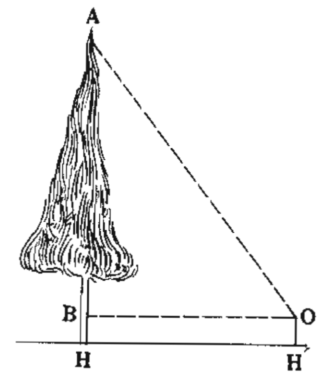
در این طریق ، روی قطعهٔ زمین نقاط مشخصی (مثلا رأس برج یا ساختمان و غیره) را در نظر گرفته و این نقاط را رئوس مثلثهایی فرض می‌کنند بطوری‌که قطعه زمین به یك عده مثلث تبدیل شود ، سپس یکی از اضلاع مثلثها را به‌کمك وسایل‌نقشه‌برداری باکمال دقت

اندازه گرفته و اندازه‌های سایر اضلاع و زوایا را به وسیلهٔ دستورهای مربوط به حل مثلث حساب می‌کنند .

در اینجا طریقهٔ تعیین ارتفاع یك نقطه یا تعیین فاصلهٔ دو نقطه را بیان می‌کنیم :

۲ـ تعیین ارتفاع یك نقطه از سطح زمین ـ فرض می‌کنیم نقطهٔ A رأس ساختمان یا درختی باشد و بخواهیم فاصلهٔ آن را تا سطح زمین ، یعنی طول AH را تعیین کنیم . برحسب آنکه به‌نقطهٔ H (پای عمود AH) دسترسی داشته یا به آن دسترسی نداشته باشیم دو حالت اتفاق می‌افتد .

حالت اول ـ به نقطهٔ H دسترسی داریم ـ زاویه‌یاب را در نقطه‌ای مانند O قرار می‌دهیم و اندازهٔ $\widehat{AOB}$ را تعیین می‌کنیم (شکل۱)، ونیز طول HH' راکه مساوی OB است ، دقیقاً اندازه می‌گیریم . در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB می‌توان چنین نوشت :



شکل ۱

$$tg\widehat{AOB}=\frac{AB}{OB}$$

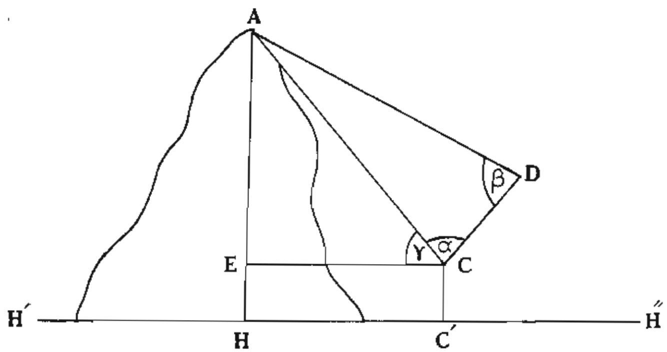
و از آنجا : $AB=OB\,tg\,\widehat{AOB}$

چون طول OB و اندازهٔ زاویهٔ AOB معلومند ، از این رابطه

طول AB حساب می‌شود وباید به‌آن اندازهٔ BH راکه مساوی ارتفاع زاویه‌یاب است بیفزاییم ، تا ارتفاع AH تعیین شود .

حالت دوم ـ به نقطهٔ H دسترسی نداریم ـ فرض می‌کنیم $H'HH''$ امتداد افقی باشد (شکل۲) .

دو نقطهٔ دلخواه C و D را بقسمی اختیار می‌کنیم که بتوانیم



شکل ۲

از آنها نقطهٔ A را مشاهده کنیم و فاصلهٔ CD را بدقت اندازه‌گیریم . به‌کمك زاویه‌یاب اندازهٔ $\widehat{ACD}=\alpha$ و $\widehat{ADC}=\beta$ را تعیین می‌کنیم . و همچنین اندازهٔ زاویه‌ای را که AC با صفحهٔ افقی می‌سازد ($\widehat{ACE}=\gamma$) ، معین می‌کنیم .

در مثلث ACD می‌توان چنین نوشت :

$$\frac{CD}{\sin\widehat{CAD}}=\frac{AC}{\sin\beta}$$

ولی $\sin\widehat{CAD}=\sin[\pi-(\alpha+\beta)]=\sin(\alpha+\beta)$

و با توجه به رابطهٔ اخیر، از تناسب مذکور حاصل می‌شود:

$$AC=\frac{CD\times \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

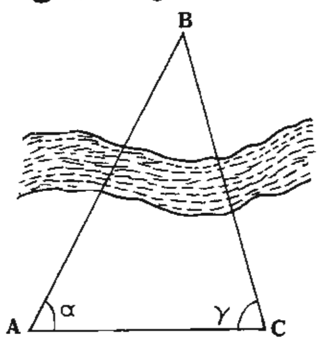
درمثلث قائم‌الزاویهٔ AEC داریم $AE=AC\sin\gamma$. دراین رابطه به‌جای AC مساوی آن را قرار می‌دهیم، حاصل می‌شود:

$$AE=\frac{CD\times \sin\beta\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)}$$

چون طول CD و اندازهٔ زوایای α، β و γ معلومند، از این رابطه طول AE محاسبه می‌شود و باید به آن اندازهٔ $EH=CC'$ را که مساوی ارتفاع زاویه‌یاب است بیفزاییم، تا ارتفاع AH بدست‌آید.

۳ـ تعیین فاصلهٔ دونقطه ـ می‌خواهیم فاصلهٔ دونقطهٔ A و B را از هم تعیین کنیم. برحسب آنکه به یکی ازاین دونقطه دسترسی نداشته یا به هر دونقطهٔ مزبور دسترسی نداشته باشیم، دوحالت درنظر می‌گیریم:

حالت اول ـ به یکی از دو نقطه دسترسی نداریم ـ فرض می‌کنیم نقاط A و B در طرفین رودخانه‌ای واقع باشند وبه نقطهٔ B دسترسی نداشته‌باشیم(شکل۳). ابتدا نقطهٔ C را در همان سمت رودخانه‌که‌نقطهٔ A قراردارد‌طوری



شکل ۳

اختیار می‌کنیم که بتوانیم طول AC را دقیقاً اندازه بگیریم؛ سپس اندازهٔ $\widehat{BAC}=\alpha$ و $\widehat{BCA}=\gamma$ را به‌وسیلهٔ زاویه‌یاب تعیین می‌کنیم.

در مثلث ABC می‌توان چنین نوشت:

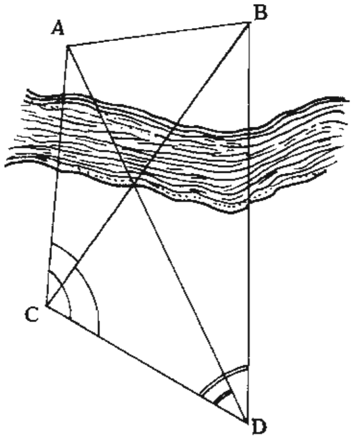
$$\frac{AB}{\sin\gamma}=\frac{AC}{\sin\widehat{ABC}}$$

ولی $\sin\widehat{ABC}=\sin[\pi-(\alpha+\gamma)]=\sin(\alpha+\gamma)$

بنابراین: $AB=\dfrac{AC\times \sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$

چون طول AC و اندازهٔ زوایای α و γ معلومند، از این رابطه AB محاسبه می‌شود.

حالت دوم ـ به‌هر دو نقطه دسترسی نداریم ـ فرض‌می‌کنیم نقاط A و B دریك طرف‌رودخانه واقع باشندوبخواهیم ازنقطهٔC‌که در طرف دیگر رودخانه است، طولAB راحساب‌کنیم(شکل۴).



شکل ۴

ابتدا نقطهٔ D را در همان سمت رودخانه که نقطهٔ C قرار دارد طوری اختیار می‌کنیم که بتوانیم طول CD را دقیقاً اندازه بگیریم.

سپس اندازهٔ $\widehat{ACD}$ و $\widehat{ADC}$ و $\widehat{BCD}$ و $\widehat{BDC}$ را به وسیلهٔ زاویه ـ یاب تعیین می‌کنیم .

چون در هر یك از مثلثهای ACD و BCD دو زاویه و ضلع CD معلومند ، بنابراین می‌توان طولهای AC و BC را حساب کرد .

عموماً نقاط A ، B ، C و D روی یك صفحه واقع نیستند و زاویهٔ ACB را نمی‌توان برابر تفاضل $(\widehat{ACD}-\widehat{BCD})$ دانست ؛ به این جهت اندازهٔ زاویهٔ ACB را به کمك زاویه‌یاب تعیین می‌کنند وبا معلوم بودن دو ضلع AC و BC وزاویهٔ ACB مثلث ABC راحل کرده و طول AB را حساب می‌کنند .

۴ـ مسئلهٔ نقشه ـ سه نقطهٔ A ، B و C مفروضند . می‌خواهیم در صفحهٔ ABC نقطه‌ای مانند M طوری تعیین کنیم که از این نقطه قطعه‌خطهای AB و BC بترتیب به زوایای معلوم α و β دیده شوند .

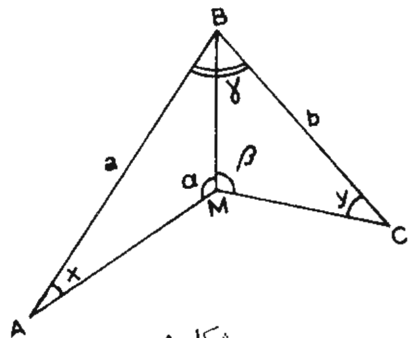
حل ـ گرچه ترسیم هندسی ، برای این مسئله راه حل ساده‌ای بدست می‌دهد :

« کمانهای درخور زوایای α و β که بترتیب بر روی قطعه خطهای AB وBC ساخته شوند ، غیر از نقطهٔ B نقطهٔ مشترك دیگری خواهند داشت که همان نقطهٔ مطلوب M است »

اما چون این راه حل جای نقطهٔ M را با دقت کافی بدست نمی‌دهد ، بهتر آن است که طولهای AM ، BM و CM از طریق محاسبه تعیین شود و به کمك این طولها جای نقطهٔ M را معین سازند

تا دقتی به مراتب بیشتر در تعیین نقطهٔ M بکار برده شده باشد .

در شکل ۵ فرض می‌کنیم اندازهٔ طولهای AB و BC بترتیب برابر با a و b باشند و زوایای ABC و MAB و MCB را بترتیب با γ و x و y نشان می‌دهیم .



شکل ۵

بدواً با توجه به اینکه مجموع زوایای دو مثلث ABM و BCM برابر با چهار قائمه است ، اولین رابطه‌ای که x و y باید در آن صدق کنند به صورت زیر حاصل می‌شود :

$$x+y+\alpha+\beta+\gamma=360^\circ \qquad (1)$$

دومین رابطه‌ای که x و y باید در آن صدق کنند از تعیین دو عبارت برای BM منتج ازملاحظهٔ دو مثلث ABM و BCM ومساوی گرفتن آن دو عبارت با هم به ترتیب زیر بدست می‌آید :

در دو مثلث نامبرده داریم :

$$BM=\frac{a\sin x}{\sin\alpha} \quad و \quad BM=\frac{b\sin y}{\sin\beta}$$

و از آنجا :

$$\frac{a\sin x}{\sin\alpha}=\frac{b\sin y}{\sin\beta}$$

یا :

$$\frac{\sin x}{b\sin\alpha}=\frac{\sin y}{a\sin\beta} \qquad (۲)$$

پس زوایای x و y باید جوابهای دستگاه متشکل از دو معادلهٔ دو مجهولی (۱) و (۲) باشند ؛ واینك حل این دستگاه :

معادلهٔ (۲) را می‌توان مرتباً به صورتهای زیر نوشت :

$$\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta}$$

$$\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}=\frac{b\sin\alpha-a\sin\beta}{b\sin\alpha+a\sin\beta}$$

$$\frac{2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}=\frac{b\sin\alpha-a\sin\beta}{b\sin\alpha+a\sin\beta}$$

$$\cot g\frac{x+y}{2}\cdot tg\frac{x-y}{2}=\frac{b\sin\alpha-a\sin\beta}{b\sin\alpha+a\sin\beta}$$

$$tg\frac{x-y}{2}=\frac{b\sin\alpha-a\sin\beta}{b\sin\alpha+a\sin\beta}\cdot tg\frac{x+y}{2} \qquad (۳)$$

از معادلهٔ (۱) حاصل می‌شود :

$$\frac{x+y}{2}=180^\circ-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \qquad (۴)$$

و از آنجا ، با فرض $90^\circ \neq \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$:

$$tg\frac{x+y}{2}=-tg\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \qquad (۵)$$

وباتوجه به رابطهٔ (۵)، رابطهٔ (۳) به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$tg\frac{x-y}{2}=\frac{a\sin\beta-b\sin\alpha}{a\sin\beta+b\sin\alpha}\cdot tg\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \qquad (۶)$$

اگر φ زاویه‌ای بین -90° و $+90^\circ$ باشد بطوری‌که $tg\varphi$ برابر با طرف دوم رابطهٔ (۶) باشد چون $\frac{x-y}{2}$ نیز بین حدود -90° و $+90^\circ$ است ، رابطهٔ زیر بر قرار خواهد بود :

$$\frac{x-y}{2}=\varphi \qquad (۷)$$

و با معلوم بودن $\frac{x+y}{2}$ و $\frac{x-y}{2}$ (روابط ۴ و ۷) مقادیر x و y را حساب می‌کنند و از آن رو طولهای AM ، BM و CM را به‌کمك دو مثلث ABM و BCM بدست می‌آورند .

توجه کنید! طرف دوم رابطهٔ (۶) قابل محاسبه به وسیلهٔ لگاریتم نیست ؛ اما اگر کسر $\frac{a\sin\beta-b\sin\alpha}{a\sin\beta+b\sin\alpha}$ را به شکل :

$$\frac{1-\frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta}}{1+\frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta}}$$

نوشته و زاویهٔ ω واقع بین °۰ و °۹۰ بقسمی اختیار شود که رابطهٔ زیر برقرار باشد :

$$tg\omega = \frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta}$$

کسر نامبرده به صورت :

$$\frac{1-tg\omega}{1+tg\omega} = tg(45^\circ-\omega)$$

در می‌آید و رابطهٔ (۶) چنین می‌شود :

$$tg\frac{x-y}{2} = tg(45^\circ-\omega).tg\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \qquad (8)$$

و به‌کمك رابطهٔ (۸) می‌توان مقدار $\frac{x-y}{2}$ را به وسیلهٔ لگاریتم حساب کرد .

حالت خاص ـ فرض‌کنیم که $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=90^\circ$ ؛ دراین صورت رابطهٔ (۴) چنین می‌شود :

$$x+y=180^\circ$$

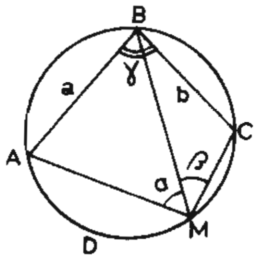
یعنی زوایای x و y مکمّل یکدیگر می‌شوند و در نتیجه $\sin x=\sin y$ ، و چون $\sin x$ برابر با صفر نیست از رابطهٔ (۲) حاصل می‌شود :

$$b\sin\alpha=a\sin\beta$$

یا

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$$

و روابط (۱) و (۲) مقادیر x و y را تعیین نمی‌کنند . علت پیدایش این وضع را بسهولت می‌توان توجیه کرد :



شکل ۶

از رابطهٔ : $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ ، معلوم می‌شود که چهارضلعی ABCM محدّب و محاطی است (شکل ۶) و نقطهٔ M در هرجای کمان ADC از دایرهٔ محیطی مثلث ABC که واقع باشد ، زوایای AMB و BMC بترتیب برابر با α و β خواهند بود و شناختن زوایای α و β بهیچ وجه برای تعیین نقطهٔ M کافی نیست . در این حالت ، کمانهای در خور α و β که در مقدمهٔ حل مسئله از آنها گفتگو کردیم متعلق به یك دایره هستند و نقطهٔ مشترك آنها ، نقطهٔ M را مشخص نمی‌کند . ضمناً رابطهٔ :

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$$

فقط این معنی را می‌رساند که قطر دایرهٔ محیطی مثلث ABM برابر است با قطر دایرهٔ محیطی مثلث BCM .

در عین حال باید دانست که این حالت خاص در موارد عملی این مسئله برای رسم نقشه‌ها پیش نمی‌آید و در موارد مزبور ، نقطهٔ M همواره در داخل مثلث ABC قرار دارد .

تمرین

۱ـ برای محاسبهٔ فاصلهٔ دونقطهٔ A و B که ازنقطهٔ C دیده‌می‌شوندولی به آنها دسترسی نداریم نقطهٔ D را در امتداد BA طوری اختیار کرده‌ایم که نقطهٔ A بین D و B قرار گرفته است ؛ در صورتی که :

$\widehat{BDC}=45^\circ$ و $\widehat{BCD}=75^\circ$ و $\widehat{DCA}=15^\circ$ و $CD=50$ متر

باشند طول AB را حساب کنید .

۲ـ برای محاسبهٔ فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ E که به آن دسترسی نداریم روی پاره‌خط AB که بر امتداد AE عموداست طول AB برابر ۲۰۰ متر را جدا می‌کنیم سپس خط AC را طوری رسم می‌کنیم که با AB زاویهٔ : $BAC=15^\circ$ بسازد؛ درصورتی‌که AC برابر ۱۷۰ مترونقطهٔ C روی BE باشد ، فاصلهٔ AE را حساب کنید .

۳ـ ارتفاع برج CH برابر ۲۵ متراست؛ ازنقطهٔ C (رأس برج) پاره‌خطافقی AB که باپای برج دریك صفحهٔ افقی‌واقع‌است ، به زاویهٔ α دیده می‌شود. درصورتی‌که $\widehat{ACH}=\beta$ و $\widehat{BCH}=۲$ باشند،طول AB راحساب کنید .

۴ـ از دو نقطهٔ o و 'o که با نقطهٔ H، پای برج AH، دریك امتداد قرار دارند، برج‌را به زوایای 60° و 30° می‌بینیم. درصورتی‌که 'oo برابر ۱۰۰ متر باشد ، ارتفاع برج را حساب کنید .

۵ـ از دو نقطهٔ o و 'o که در سطح زمین و به فاصلهٔ $oo'=d$ قرار دارند، بالون A را رصد می‌کنند؛ زوایایی‌که شعاعهای بصری واصل به‌بالون با امتداد افقی می‌سازند، برابر α می‌باشد؛ ارتفاع بالون را حساب کنید در صورتی‌که $\widehat{Aoo'}=\beta$ باشد .

۶ـ ناظری برجی را به زاویهٔ 4° می‌بیند؛ پس ازآنکه یك‌کیلومتر به طرف برج حرکت‌کرد، آن را به زاویهٔ 5° مشاهده‌کرد. تعیین‌کنید فاصلهٔ ناظر تا پای برج چقدر است ؟

۷ـ سه نقطهٔ A و B و C رئوس مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۵۰۰ مترهستند؛ ازنقطهٔ D، داخل‌مثلث، دوضلع AB و AC به‌زاویهٔ 120° دیده می‌شوند ؛ فاصلهٔ AD را حساب کنید .

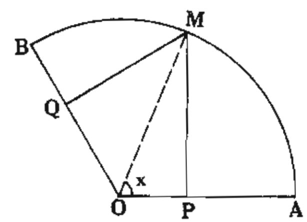
۸ـ در رأس برجی میله‌ای نصب شده است . ناظری که به فاصلهٔ d از پای برج وروی صفحهٔ افقی‌که ازپای برج می‌گذردقرار دارد، برج را به زاویهٔ α و میله را به زاویهٔ β می‌بیند ؛ ارتفاع میله چقدر است ؟

فصل یازدهم

حل بعضی از مسائل هندسی به طریق مثلثاتی

بسیاری از مسائل هندسی را به‌کمك دستورها و روابط مثلثاتی می‌توان حل کرد ، به‌این طریق که زاویه یا زوایای مناسبی را مجهول اختیار می‌کنند و در نتیجه حل و بحث مسئله به حل‌وبحث معادلات مثلثاتی منجر می‌شود .

در زیر ، چند مسئلهٔ هندسی را به طریق مثلثاتی حل و بحث می‌کنیم :



شکل ۱

مسئلهٔ ۱ـ قطاع AOB محدود به دو شعاع $OA=OB=R$ که زاویهٔ مرکزی آن $\frac{2\pi}{3}$ است ، مفروض است . نقطهٔ M را روی کمان AB طوری تعیین‌کنید که اگر تصاویر این نقطه را روی شعاعهای OA وOB بترتیب P و Q بنامیم ، داشته باشیم : $MP+MQ=l$ (l طول مثبت معلومی است) .

برحسب مقادیر l بحث کنید .

حل ـ فرض می‌کنیم نقطهٔ مطلوب نقطهٔ M باشد (شکل۱) . از نقطهٔ M به نقطهٔ O وصل کرده و زاویهٔ AOM را برابر x فرض می‌کنیم .

از مثلث قائم‌الزاویهٔ OMP نتیجه می‌شود :

$$MP=OM\sin\widehat{AOM}=R\sin x$$

از مثلث قائم‌الزاویهٔ OMQ نتیجه می‌شود :

$$MQ=OM\sin\widehat{MOQ}=R\sin(\frac{2\pi}{3}-x)$$

در رابطهٔ $MP+MQ=l$ به جای MP و MQ مقادیرشان را قرار می‌دهیم حاصل می‌شود :

$$R\sin x+R\sin(\frac{2\pi}{3}-x)=l$$

یا پس از اختصار :

$$3R\sin x+R\sqrt{3}\cos x=2l$$

این معادلهٔ کلاسیك نوع اول را حل می‌کنیم :

$$\sin x+\frac{\sqrt{3}}{3}\cos x=\frac{2l}{3R}$$

یا :

$$\sin x+tg\frac{\pi}{6}\cos x=\frac{2l}{3R}$$

پس از ساده کردن حاصل می‌شود :

$$\sin(x+\frac{\pi}{6})=\frac{l\sqrt{3}}{3R} \qquad (1)$$

اگر $\sin\alpha = \frac{l\sqrt{3}}{2R}$ باشد ، چنین خواهیم داشت :

$$\sin(x+\frac{\pi}{6}) = \sin\alpha$$

و از آنجا :

$$x = 2k\pi + \alpha - \frac{\pi}{6}$$

$$x = 2k\pi - \alpha + \frac{5\pi}{6}$$

از روی شکل ۱ معلوم می‌شود که x محصور بین صفر و $\frac{2\pi}{3}$ است . بنابراین جوابهایی قابل قبولند که بین صفر و $\frac{2\pi}{3}$ باشند .

بحث - چون $0<x<\frac{2\pi}{3}$ است پس $\frac{\pi}{6}<x+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$.

برای آنکه $x+\frac{\pi}{6}$ محصور بین $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ باشد ، باید $\sin(x+\frac{\pi}{6})$ محصور بین $\frac{1}{2}$ ویك باشد؛ بنابراین‌خواهیم داشت : $\frac{1}{2}<\sin(x+\frac{\pi}{6})<1$.

با استفاده از معادلهٔ (۱) به جای $\sin(x+\frac{\pi}{6})$ مساوی آن $\frac{l\sqrt{3}}{2R}$ را قرار می‌دهیم حاصل می‌شود :

$$\frac{1}{2}<\frac{l\sqrt{3}}{2R}<1$$

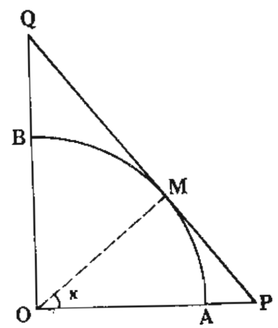
چون $R>0$ است ، می‌توان نوشت : $3R<2l\sqrt{3}<6R$،

و از آنجا : $\frac{R\sqrt{3}}{2}<l<R\sqrt{3}$

مسئلهٔ ۲- ربع دایرهٔ AOB محدود به دوشعاع $OA=OB=R$ مفروض است . نقطهٔ M را روی کمان AB بطریقی اختیار کنید که اگر در نقطهٔ M مماسی بر ربع دایره رسم کنیم و این مماس امتداد OA و OB را بترتیب درنقاط P و Q تلاقی کند، داشته باشیم : $PQ=l$

(l طول مثبت معلومی است). برحسب مقادیر l بحث کنید. به ازای چه وضعی ازنقطهٔ M طول $PQ=l$ مینیمم است؛ مقدار مینیمم PQ را تعیین کنید .

حل - فرض می‌کنیم نقطهٔ M نقطهٔ مطلوب باشد (شکل۲)؛ نقطهٔ M را به‌نقطهٔ O وصل‌کرده فرض می‌کنیم زاویهٔ AOM برابر x باشد .



شکل ۲

ازمثلث‌قائم‌الزاویهٔ OMP نتیجه می‌شود :

$$MP = OM\,tg\,\widehat{AOM} = R\,tg\,x$$

از مثلث قائم‌الزاویهٔ OMQ نتیجه می‌شود :

$$MQ = OM\,tg\,\widehat{BOM} = R\,tg(\frac{\pi}{2}-x) = R\,cotg\,x$$

از جمع طرفین این دو تساوی حاصل می‌شود :

$$MP+MQ = R\,tg\,x + R\,cotg\,x$$

یا :

$$PQ = R\,tg\,x + R\,cotg\,x$$

چون می‌خواهیم تساوی: $PQ=l$ برقرار باشد، باید داشته باشیم:

$$R\,tg\,x + R\,cotg\,x = l$$

این معادلهٔ کلاسیك نوع دوم را حل می‌کنیم :

$$R\,tg\,x + \frac{R}{tg\,x} = l$$

یا پس از اختصار : $R\,tg^2x - l\,tgx + R = 0$ (۱)

و از آنجا : $tgx = \frac{l \pm \sqrt{l^2 - 4R^2}}{2R}$

چون در معادلهٔ (۱) حاصل‌ضرب دو ریشه $\frac{R}{R} = 1$ است ، پس ریشه‌های آن عکس یکدیگرند و چنانچه فرض کنیم : $\frac{l + \sqrt{l^2 - 4R^2}}{2R} = tg\,\alpha$ باشد ، در نتیجه $\frac{l - \sqrt{l^2 - 4R^2}}{2R} = cotg\,\alpha$ خواهد بود .

بنابراین : $x = k\pi + \alpha$ و $x = k\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha$

از روی شکل ۲ معلوم می‌شود که x محصور بین صفر و $\frac{\pi}{2}$ است و بنابراین جوابهایی قابل قبولندکه بین صفر و $\frac{\pi}{2}$ باشند .

بحث- چون $0 < x < \frac{\pi}{2}$ است ، پس tgx مثبت است و معادلهٔ (۱) باید لااقل یك ریشهٔ مثبت داشته باشد .

چون حاصل‌ضرب دو ریشه $\frac{R}{R} = 1$ و مثبت است و حاصل جمع دو ریشه $\frac{l}{R}$ و آن نیز مثبت است ، بنابراین تنها شرط وجود جواب این است‌که $\Delta = l^2 - 4R^2$ منفی نباشد و این شرط در صورتی محقق می‌شود که $l \geq 2R$ باشد .

تعیین مینیمم طول PQ - رابطهٔ $PQ = R\,tgx + R\,cotgx$ را به این صورت می‌نویسیم :

$$PQ = R(tgx + cotgx) = R\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{2R}{\sin 2x}$$

طول PQ در صورتی مینیمم است که مخرج کسر $\frac{2R}{\sin 2x}$ بزرگترین مقدار خود را دارا باشد . چون ماکزیمم $\sin 2x$ برابر یك است ، پس طول PQ وقتی مینیمم می‌شودکه $\sin 2x = 1$ یعنی $2x = \frac{\pi}{2}$ ودر نتیجه $x = \frac{\pi}{4}$ باشد و در این حال طول PQ برابر $2R = \frac{2R}{1}$ خواهد بود ؛ از اینجا واضح می‌شود که طول PQ به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ مینیمم می‌شود و مقدار مینیمم PQ برابر 2R است .

مسئلهٔ ۳- نقطهٔ M داخل مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است . از این نقطه عمودهای MP و MQ و ML را بترتیب بر اضلاع AB و BC و CA فرود می‌آوریم .

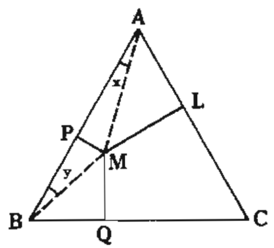
اولا - ثابت کنید $MP + MQ + ML$ مقداری ثابت است .

ثانیاً - محل نقطهٔ M را بطریقی تعیین کنید که :

$$MP : MQ : ML = 1 : 2 : 3$$

باشد .

حل - اولا - نقطهٔ M را به دو رأس A و B وصل‌کرده فرض می‌کنیم طول ضلع مثلث برابر a و $\widehat{MAB} = x$ و $\widehat{MBA} = y$ (شکل ۳) .



شکل ۳

در مثلث MAB طول اضلاع MA و MB و طول ارتفاع MP را تعیین می‌کنیم حاصل می‌شود :

$$MA=\frac{a\sin y}{\sin\widehat{AMB}}=\frac{a\sin y}{\sin(x+y)}$$

$$MB=\frac{a\sin x}{\sin\widehat{AMB}}=\frac{a\sin x}{\sin(x+y)}$$

$$MP=\frac{a\sin x\sin y}{\sin(x+y)}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ MBQ طول ضلع MQ برابر است با :

$$MQ=MB\sin\widehat{MBQ}=\frac{a\sin x\sin(60^\circ-y)}{\sin(x+y)}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ MAL طول ضلع ML برابر است با :

$$ML=MA\sin\widehat{MAL}=\frac{a\sin y\sin(60^\circ-x)}{\sin(x+y)}$$

بنابراین :

$$MP+MQ+ML=\frac{a\sin x\sin y+a\sin x\sin(60^\circ-y)+a\sin y\sin(60^\circ-x)}{\sin(x+y)}=$$

$$\frac{a\sqrt{3}\sin(x+y)}{2\sin(x+y)}=\frac{a\sqrt{3}}{2}=\text{ارتفاع مثلث ABC}=\text{مقدار ثابت}$$

ثانیاً ـ اگردر رابطهٔ $MP:MQ:ML=1:2:3$ به جای MP و MQ و ML مقادیرشان را قرار دهیم حاصل می‌شود :

$$\frac{a\sin x\sin y}{\sin(x+y)}:\frac{a\sin x\sin(60^\circ-y)}{\sin(x+y)}:\frac{a\sin y\sin(60^\circ-x)}{\sin(x+y)}=1:2:3$$

یا $\sin x\sin y:\sin x\sin(60^\circ-y):\sin y\sin(60^\circ-x)=1:2:3$

از معادلهٔ $\frac{\sin x\sin y}{\sin x\sin(60^\circ-y)}=\frac{1}{2}$ حاصل می‌شود :

$$tg\,y=\frac{\sqrt{3}}{5}$$

و از آنجا : $y=19^\circ6'23''$.

از معادلهٔ $\frac{\sin x\sin y}{\sin y\sin(60^\circ-x)}=\frac{1}{3}$ حاصل می‌شود $tg\,x=\frac{\sqrt{3}}{7}$

و از آنجا : $x=13^\circ53'52''$.

بنا براین نقطهٔ M محل تلاقی دوخطی است که از A و B در داخل مثلث رسم شوند و با ضلع AB بترتیب زوایای ($13^\circ53'52''$) و ($19^\circ6'23''$) تشکیل دهند .

تمرین

۱ـ دایره‌ای به‌مرکزO و به شعاع R ونقطهٔ A درخارج آن مفروضند. از نقطهٔ A قاطعی چنان مرور دهید که دایره را در دو نقطهٔ B و C قطع‌کند بطریقی که زاویهٔ BOC چهار برابر زاویهٔ OAB شود .

۲ـ نیمدایره‌ای به‌قطر $AB=2R$ وبه مرکز O مفروض است. شعاع OD را عمود بر قطر AB و وتر AM را رسم می‌کنیم . مطلوب است محاسبهٔ $\widehat{MAB}=x$ بطریقی که مساحت مثلث MAD برابر مقدار معلوم m^2 باشد .

۳ـ در دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R دو قطر متعامد AOB و COD رسم شده‌اند. نقطهٔ M را روی نیمدایرهٔ ACB طوری تعیین‌کنیدکه طول وتر MD برابر l باشد ؛ l طول معلومی است (بحث) .
(راهنمایی ـ زاویهٔ MAB را مجهول اختیار کنید .)

۴ـ دایره‌ای به مرکزO و به شعاع R مفروض است. نقطهٔ P را روی امتداد قطرBA و درخارج دایره به فاصلهٔ $OP=a$ اختیارمی‌کنیم. از نقطهٔ

P قاطع PCD را رسم می‌کنیم. مطلوب است محاسبهٔ $\widehat{CPA}=x$ درصورتی که زاویهٔ COD برابر اندازهٔ معلوم 2α باشد (بحث).

۵ـ نیمدایره‌ای به مرکز O و به شعاع R مفروض است. دو مماس بر این نیمدایره در دو سر قطر AB آن رسم می‌کنیم و نقطهٔ P را روی قطر AB، بین نقاط A و B، و به فاصلهٔ $BP=a$ اختیار کرده و خط PD را رسم می‌کنیم تا مماس مرسوم در نقطهٔ B را در نقطهٔ D قطع کند؛ سپس از نقطهٔ D مماس دیگری بر نیمدایره رسم می‌کنیم تا مماس مرسوم در نقطهٔ A را در نقطهٔ E قطع کند، مطلوب است محاسبهٔ $\widehat{DPB}=x$ بطریقی که DE برابر طول معلوم l باشد (بحث).

۶ـ سه نیم‌خط OA و OB و OC مفروضند بطریقی که $\widehat{AOB}=\alpha$ و $\widehat{AOC}=\beta$ و طول $OA=a$ هستند (a و α و β مقادیر معلومند). از نقطهٔ A خط ABC را طوری رسم کنید که $AB\times AC=a^2$ باشد. (راهنمایی ـ زاویهٔ OAB را مساوی x اختیار کنید).

۷ـ نیمدایره‌ای به قطر $AB=2R$ و به مرکز O مفروض است. دو شعاع OC و OD داخل نیمدایره طوری رسم شده‌اند که $\widehat{COD}=60^\circ$ است. از دو نقطهٔ C و D دو عمود CH و DF را بر قطر AB فرود می‌آوریم، زاویهٔ $DOB=x$ را طوری تعیین کنید که مساحت ذوزنقهٔ CDFH ماکزیمم باشد.

مسائل امتحانات نهایی*

۱ـ معادلهٔ $cotg\,x - tg\,x = 2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)$ را حل کنید.

۲ـ در وجود ریشه‌های معادلهٔ $2m\cos^2 y + 2\cos y - m = 0$ به ازای مقادیر مختلفهٔ m بحث کنید وهنگامی که $m=1$ است، ریشهٔ قابل قبول را با لگاریتم محاسبه کنید.

۳ـ ازمثلثی زاویهٔ A معلوم است ومی‌دانیم $S=\frac{1}{8}(b^2+c^2)$ است.

اولا ـ دو زاویهٔ دیگر را حساب کنید.

ثانیاً ـ به‌ازای چه مقادیری از A مسئله دارای جواب است.

ثالثاً ـ به ازای $A=30^\circ$ و $S=\frac{1}{4}$ زوایا و اضلاع مثلث را حساب کنید.

(خرداد ۱۳۳۵)

۱ـ اولاـ دستگاه $\begin{cases}\sin x - \sin y = 1\\ \cos x \cos y = m\end{cases}$ را به یك دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی بر حسب $\cos\frac{x+y}{2}$ و $\sin\frac{x-y}{2}$ تبدیل کنید بعد آن را حل و بحث کنید؛ خواهید دید به ازای مقادیر m بین $\frac{3}{4}$ و $-\frac{3}{4}$ دارای جواب است.

*) مسائل امتحانات نهایی عیناً به صورت اصلی دراین کتاب آورده‌می‌شود.

ثانیاً ـ در حالت مخصوصی که $m=-\frac{3}{4}$ باشد ، قوسهای x و y را حساب کنید .

۲ـ از مثلثی a و $b-c=l$ معلومند و می‌دانیم $B=2C$ است .

اولا ـ دستگاهی تشکیل دهیدکه ازحل‌آن اجزای مثلث بدست آید .

ثانیاً ـ ازروی این دستگاه معادلهٔ یك مجهولی برحسب توابع مثلثاتی C بدست آورید .

ثالثاً ـ حدود C را تعیین کرده و به‌ازای مقادیر l بحث کنید .

رابعاً ـ به ازای $l=a(\sqrt{2}-1)$ زوایا را حساب کنید و اضلاع را برحسب a حساب کنید .

(شهریور ۱۳۳۵)

۱ـ اولا ـ عبارت $\sin 75^\circ-\sqrt{3}\cos 75^\circ-1$ را قابل محاسبهٔ لگاریتمی کنید .

ثانیاً ـ علامت عبارت $\sin x-\sqrt{3}\cos x-1$ را وقتی که x از صفر تا 2π تغییر کند تعیین‌کنید .

۲ـ در مثلثی زاویهٔ $A=60^\circ$ است ونیمساز داخلی این زاویه ، m برابر ضلع b می‌باشد .

اولا ـ دوزاویهٔ دیگراین مثلث را حساب کنید (برای این‌کار معادله‌ای برحسب $tg\frac{C}{2}$ تشکیل دهید) .

ثانیاً ـ هرگاه معادله‌ای برحسب $tg\frac{C}{2}$ به صورت

$m\,tg^2\frac{C}{2}+2(2-m\sqrt{3})tg\frac{C}{2}-m=0$ باشد، به‌ازای چه‌مقادیری از m مسئله دارای جواب است .

ثالثاً ـ به ازای $m=\sqrt{3}-1$ و $S=3+\sqrt{3}$ زوایا و ضلع a را حساب کنید .

(خرداد ۱۳۳۶)

۱ـ درریشه‌های‌معادلهٔ مثلثاتی زیر برحسب مقادیر m بحث‌کرده‌وسپس به‌ازای $m=\frac{7}{2}$ جوابهای بین صفر و 2π را حساب‌کنید :

$$(m+2)\cos^2 x+2m\sin x\cos x+(m+1)\sin^2 x=m$$

۲ـ معادلهٔ $\sin x+tg\,x=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}\cos x}{2\cos x}$ را حل‌کنید .

۳ـ دستگاه زیر را حل کنید :

$$\begin{cases}\cos x+\cos y=-\frac{1}{2}\\[2ex] tg\frac{x}{2}tg\frac{y}{2}=\sqrt{3}\end{cases}$$

۴ـ جواب قابل قبول معادلهٔ $\cos^2 x+4\cos x+2=0$ را قابل محاسبهٔ لگاریتمی کنید .

۵ـ درمثلث ABC می‌دانیم $c=4$ و $A=2C$ و $\cos C=\frac{3}{4}$ هستند.

اولا ـ اضلاع این مثلث را حساب‌کنید وسپس اندازهٔ زوایا را به وسیلهٔ جدول لگاریتم حساب کنید .

ثانیاً ـ اگر $a=6$ و $b=5$ و $c=4$ باشند ، ثابت کنید :

$$tg\frac{A}{2}tg\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$$

ثالثاً ـ در مثلثی میانهٔ AM با اضلاع AB و AC بترتیب زوایای 45° و 60° می‌سازد ؛ ثابت کنید : $\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

(خرداد ۱۳۳۶)

۱ـ مطلوب است حل دستگاه زیر و بحث آن برحسب مقادیر m :

$$\begin{cases} x-y=30^\circ \\ \dfrac{\sin x\cos y}{\cos x\sin y}=m \end{cases}$$

۲ـ در مثلثی $A=60^\circ$ و $a=mr$ است .

اولا ـ دو زاویهٔ دیگر مثلث را از روی محاسبهٔ $\cos\frac{B-C}{2}$ حساب کنید .

ثانیاً ـ هرگاه $\cos\frac{B-C}{2}=\frac{2\sqrt{3}+m}{2m}$ باشد، بهازای چه‌مقادیر m زوایای B و C موجود وقابل قبولند. به وسیلهٔ اختیار زاویهٔ مُعینی عبارت $\frac{2\sqrt{3}+m}{2m}$ را قابل محاسبه با لگاریتم کنید .

ثالثاً ـ بهازای $m=2\sqrt{3}$ و $r=\sqrt{3}$ زوایا واضلاع مثلث را حساب کنید .

(شهریور ۱۳۳۶)

۱ـ هرگاه $tg3x=\frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{b}$ باشد ، به فرض $\frac{b}{a}=tg\alpha$ عبارت $tg3x$ را قابل محاسبهٔ لگاریتمی‌کنید وزاویهٔ x را برحسب α حساب کنید .

۲ـ اولاـ هرگاه در مثلثی A معلوم و $a\,cotg\frac{A}{2}=4(p-a)\sin\frac{A}{2}$ باشد ، از روی محاسبهٔ $\cos\frac{B-C}{2}$ سایر زوایا را معلوم کنید .

ثانیاًـ فرض می‌کنیم: $\cos\frac{B-C}{2}=\frac{1+4\sin^2\frac{A}{2}}{4\sin\frac{A}{2}}$ باشد ؛ به ازای چه‌مقدار A مسئله دارای‌جواب‌است؟ دراین‌حال دو زاویهٔ دیگررا حساب‌کنید.

۳ـ اولاـ مطلوب‌است‌حل‌معادلهٔ $m=\cos^2x-\sin^2x-2\sin x\cos x$ و به فرض اینکه قوس x، ریشهٔ معادلهٔ مفروض، بین صفر و $\frac{\pi}{4}$ باشد ، به ازای مقادیر m بحث‌کنید و در حالت مخصوص $m=0$ قوس x را حساب کنید.

ثانیاً ـ جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع $y=\sin x\cos x-\sin^2x$ را رسم کنید .

(خرداد ۱۳۳۷)

۱ـ در مثلث ABC نیمساز داخلی AD را رسم می‌کنیم . درصورتی که رابطهٔ $AD^2=BD\times CD$ برقرار باشد :

اولا ـ ثابت کنید که رابطهٔ $\sin^2\frac{A}{2}=\sin B\sin C$ برقرار است .

ثانیاً ـ اگر A معلوم باشد زوایای B و C را حساب کرده و بحث کنید .

ثالثاًـ فرض می‌کنیم $B=A$ باشد؛ اندازهٔ‌یکی از توابع مثلثاتی زاویهٔ A را محاسبه کنید .

۲ـ دستگاه زیر را حل و بحث کنید :

$$\begin{cases} \cos x+2\cos y=1 \\ \sin x=m\sin y \end{cases}$$

(خرداد ۱۳۳۷)

۱ـ در مثلث ABC زاویهٔ A دو برابر زاویهٔ B می‌باشد .

اولا ـ هرگاه دراین مثلث ارتفاع وارد برضلع a نصف ضلع a باشد، زوایای این مثلث را حساب کنید . مسئله چند جواب دارد .

ثانیاً ـ هرگاه در مثلث مفروض زاویهٔ $B=22^\circ{,}5$ باشد، ثابت‌کنید $\sin C=\cos B$ و در این‌حال مطلوب است محاسبهٔ سینوس هریك از زوایای این مثلث و همچنین مساحت مثلث برحسب a .

۲ـ اولا ـ معادلهٔ $\cos 3x - 4m\sin 2x + 4m\cos x = \cos x$ را به یك معادلهٔ درجهٔ اول و یك معادلهٔ یك مجهولی درجهٔ دوم بر حسب یکی از توابع مثلثاتی قوس x تبدیل کنید .

ثانیاً ـ مطلوب است بحث در ریشه‌های معادلهٔ : $\sin^2 x + 2m\sin x - m = 0$ به ازای مقادیر m . در حالت مخصوصی‌که $m = \frac{1}{8}$ باشد، قوسهای x را حساب کنید. (درصورت لزوم برحسب زاویهٔ مُعین) .

ثالثاً ـ جدول‌ومنحنی نمایش‌تغییرات تابع $y = \frac{\sin^2 x}{1 - 2\sin x}$ را وقتی که قوس x از $\frac{\pi}{6}$ دریك دورهٔ تناوب تغییرکند، رسم کنید. (شهریور ۱۳۳۷)

مسئلهٔ ۱ـ اگر x و y دو زاویهٔ حاده فرض شوند، دستگاه زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{6} \\ \sin x \sin y = \frac{\sqrt{2}}{10} \end{cases}$$

و تحقیق کنید که : $\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 2y = 1$ و $\sin 4x = \sin 4y$

مسئلهٔ ۲ـ درمثلث ABC به فرض $\hat{B} = 2\hat{C}$ ، اولا ثابت‌کنید : $b^2 = ac + c^2$ و $r = (b-c)\sin C$ (r شعاع‌دایرهٔ محاطی داخلی است).

ثانیاً ـ به فرض‌آنکه ضلع c و زاویهٔ C معلوم باشند، دوضلع a و b را پیدا کنید و تحقیق‌کنید برای‌آنکه a و b قابل‌قبول‌باشند، باید نامعادلهٔ $2\cos^2 C + \cos C - 1 > 0$ محقق باشد و حدود $\hat{C}$ را پیدا کنید .

ثالثاً ـ منحنی نمایش‌تغییرات تابع $y = 2\cos^2 x + \cos x - 1$ را بین صفر و 2π رسم کنید . (خرداد ۱۳۳۸)

مسئلهٔ ۱ـ در مثلث ABC ضلع a و ارتفاع h_a با هم برابرند.

اولا ـ ثابت کنید که رابطهٔ زیر محقق است :

$$\sin A + 2\cos A = \frac{b^2 + c^2}{bc}$$

ثانیاً ـ به فرض $a = 2\sqrt{3}$ و $\hat{B} = 60^\circ$ مثلث را حل کنید .

ثالثاً ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y = \sin x + 2\cos x$ را بین صفر و 2π رسم کنید .

مسئلهٔ ۲ـ دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را حل‌کنید :

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = a \operatorname{tg} 2y \\ \operatorname{tg} y = a \operatorname{tg} 2x \end{cases}$$

(شهریور ۱۳۳۸)

۱ ـ در مثلث ABC دو نیمساز داخلی و خارجی زاویهٔ A مساوی یکدیگرند .

اولا ـ ثابت کنید که $B - C = \frac{\pi}{2}$ و از این رابطه نتیجه بگیرید :

$$\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = -1$$

ثانیاً ـ زوایای A و B را تعیین‌کنید و حدود C را برای‌آنکه مسئله ممکن باشد پیدا کنید و تحقیق کنید :

$$\cos 2C = \frac{a^2}{b^2 - c^2} = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}$$

و ازآن نتیجه بگیریدکه بین اضلاع مثلث رابطهٔ زیر برقرار است :

$$\frac{a^2}{(b+c)^2} = \frac{(b-c)^2}{b^2 + c^2}$$

ثالثاً ـ به فرض آنکه $AH = h_a$ و $b + c = k$ در دست باشد ، زوایای مثلث را پیدا کنید .

رابعاً ـ به‌ازای $h=1$ و $k=2\sqrt{6}$ اضلاع و زوایای مثلث را حساب کنید .

خامساً ـ در قسمت سوم داریم : $\frac{k}{h}=\frac{\sin C+\cos C}{\sin C\cos C}$.

منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}$ را بین صفرو π رسم کنید .

(خرداد ۱۳۳۹)

مسئلهٔ ۱ـ معادلهٔ $\cos 5x+a\cos 3x+b\cos x=0$ مفروض است .

۱ـ چه رابطه‌ای‌باید بین a و b موجود باشد تا یك ریشهٔ معادلهٔ فوق، $\frac{\pi}{6}$ باشد ؟

۲ـ چه رابطه‌ای باید بین a و b موجودباشد تا یك‌ریشهٔ معادلهٔ فوق، $\frac{\pi}{3}$ باشد ؟

۳ـ به‌ازای چه مقادیر a و b دو ریشهٔ معادلهٔ فوق، یکی $\frac{\pi}{6}$ و دیگری $\frac{\pi}{3}$ است ؛ در این حالت معادله را کاملا حل کنید .

مسئلهٔ ۲ـ در مثلث ABC ضلع $BC=a$ و ارتفاع وارد برضلع a برابراست با $h=ma$.

اولا ـ ثابت‌کنید $\sin B\sin C=m\sin A$ و $\cot g B+\cot g C=\frac{1}{m}$

ثانیاً ـ به فرض‌آنکه زاویهٔ A معلوم باشد ، به ازای $m=\frac{1}{2}$ زوایای B و C را حساب کنید (بحث) .

مسئلهٔ ۳ـ منحنی نمایش تغییرات تابع زیررا رسم کنید :

$$y=\sin x+\cos 2x$$

(شهریور ۱۳۳۹)

مسئلهٔ ۱ـ اولاـ معادلهٔ زیر راحل‌کنید و تمام جوابهای‌آن را بدست آورید :

$$\sin\frac{x}{2}+\cos x=1$$

ثانیاً ـ منحنی نمایش تغییرات تابع زیر را بین صفر و 2π رسم‌کنید:

$$y=\sin\frac{x}{2}+\cos x-1$$

مسئلهٔ ۲ـ دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x+y=\frac{2\pi}{3} \\ \sin x\sin y=\frac{1}{2} \end{cases}$$

مسئلهٔ ۳ـ درمثلث ABC ضلع a و زاویهٔ A وارتفاع h_a معلومند.

اولا ـ ثابت کنید : $\frac{\sin A}{\sin B\sin C}=\frac{a}{h_a}$

ثانیاً ـ طول نیمساز AD را برحسب h_a وتوابع مثلثاتی دو زاویهٔ A و B بدست آورید .

ثالثاً ـ به فرض $A=60°$ و $h_a=\sqrt{3}$ و $a=2$ مثلث راحل کنید.

(خرداد ۱۳۴۰)

مسئلهٔ ۱ـ در مثلثی $B-C=90°$ و $a=12$ و $h_a=2\sqrt{3}$ هستند ؛ مثلث را حل کنید .

مسئلهٔ ۲ـ این دستگاه را حل کنید :

$$\begin{cases} x+y=\frac{3\pi}{4} \\ 2\sin x+\cos y=\sqrt{2} \end{cases}$$

مسئلهٔ ۳ـ منحنی نمایش تغییرات تابع زیر را رسم کنید :

$$y=\cos^{2}x-\sin x$$

(شهریور ۱۳۴۰)

مسئلهٔ ۱ـ معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$1-\sqrt{2}\sin x=2\sin x-\frac{2\sqrt{2}}{1+\cot^{2}x}$$

مسئلهٔ ۲ـ دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=3-2\sqrt{2} \end{cases}$$

مسئلهٔ ۳ـ منحنی نمایش تغییرات تابع زیر را رسم کنید .

$$y=\frac{2\sin x+1}{\cos x}\qquad 0<x<2\pi$$

مسئلهٔ ۴ـ درمثلث ABC بهفرض $B>C$ نیمسازداخلی $AD=l$ و ارتفاع $AH=h_a$ را رسم می‌کنیم .

اولا ـ ثابت کنید : $h_a=l\cos\frac{B-C}{2}$

ثانیاً ـ با استفاده از دستورهای مربوط به سطح مثلث و رابطهٔ مذکور نتیجه بگیرید که : $l=\frac{a\sin B\sin C}{\sin A\cos\frac{B-C}{2}}$

ثالثاً ـ به فرض معلوم بودن a ، l و A مثلث را حل‌کنید . (مجهول مسئله را $\cos\frac{B-C}{2}$ انتخاب کرده و بحث کنید)

رابعاً ـ در حالت خاص $a=2$ و $A=30^\circ$ و $l=\frac{2(3+\sqrt{3})}{2}$ اجزای مثلث را حساب کنید .

(خرداد ۱۳۴۱)

مسئلهٔ ۱ـ معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\sin 2x-\cos 2x=1-\sin 4x$$

مسئلهٔ ۲ـ اولا ـ درستی تساوی زیر را نشان دهید :

$$\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}=\operatorname{tg}3x$$

ثانیاً ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\operatorname{tg}3x$ را در ازای مقادیر $-\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{3}$ رسم کنید .

مسئلهٔ ۳ـ در مثلث ABC به فرض $b>c$ میانهٔ AM و نیمساز AD' زاویهٔ خارجی A را رسم می‌کنیم وفرض می‌کنیم که : $AM=AD'$ باشد .

اولا ـ ثابت کنید بین اجزای اصلی چنین مثلثی دو رابطهٔ زیر موجود است :

$$(1)\quad a=(b-c)\sqrt{2}\qquad \text{و}\qquad (2)\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=(\sqrt{2}+1)^{2}$$

ثانیاً ـ به فرض آنکه زاویهٔ A معلوم باشد، دو زاویهٔ دیگرمثلث را با استفاده از رابطهٔ (۲) بدست آورید (بحث) .

ثالثاً ـ به فرض $A=90^\circ$ و $a=2\sqrt{2}$ ، دو ضلع دیگر مثلث را با استفاده ازرابطهٔ (۱) پیداکنید وسپس مقادیرزوایای B و C را بدست‌آورید.

(شهریور ۱۳۴۱)

مسئلهٔ اول ـ در مثلث ABC شعاع دایرهٔ محاطی r و ضلع $BC=mr$ و ارتفاع $h_a=4r$ مفروض هستند :

۱ ـ مقدار p نصف محیط مثلث و $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ را به حسب m و r بدست آورید .

۲ـ اضلاع b و c را به حسب معلومات مسئله پیدا کنید (بحث) .

۳ـ در ازای $m=3$ دو ضلع b و c وسینوس زوایای مثلث را حساب کنید.

مسئلهٔ دوم ـ اولا ـ دوعبارت $x=\cos a\cos b\cos c$ و $y=\sin a\sin b\sin c$ را به صورت حاصل جمع بنویسید وبعد در دو حالت زیر، مقادیر هریك را بدست آورید:

$$a+b+c=\frac{\pi}{2} \qquad \text{و} \qquad a+b+c=\pi$$

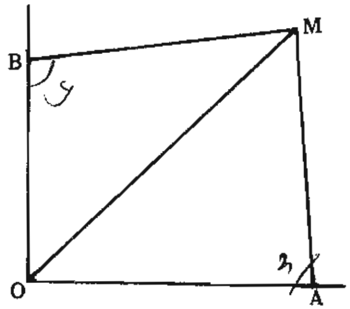
ثانیاً ـ اگر $a=\frac{\alpha}{3}$ و $b=\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{3}$ و $c=\frac{\alpha}{3}+\frac{2\pi}{3}$ فرض شوند، مقادیر tga و tgb و tgc را حساب کنید و نشان دهید که:

$$tga+tgb+tgc=3tg\alpha$$

مسئلهٔ سوم ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\sin x-\sin 5x=\sqrt{3}\cos 3x$$

(شهریور ۱۳۴۲)



۱ ـ در روی اضلاع زاویهٔ قائمهٔ O دونقطهٔ A و B را مطابق شکل انتخاب می‌کنیم بقسمی که $\frac{OA}{OB}=m$ باشد؛ بعد، از نقطهٔ M واقع بر روی منصف زاویهٔ O به‌نقاط A و B وصل‌می‌کنیم وفرض می‌کنیم $\widehat{OAM}=x$ و $\widehat{OBM}=y$ باشد.

اولا ـ ثابت کنید بین زوایای x و y رابطهٔ زیر برقرار است:

$$tgy(1+tgx)=m\,tgx(1+tgy)$$

ثانیاً ـ به فرض برقرار بودن این رابطه وبا فرض $y=2x$ این رابطه

را برحسب tgx مرتب‌کرده به ازای مقادیرمختلف m در جوابهای‌آن بحث کنید.

ثالثاً ـ درمعادلهٔ درجهٔ دومی‌که به‌این‌ترتیب برای tgx بدست‌آورده‌اید به فرض $m=2+\sqrt{3}$ ریشه‌های آن را حساب کنید و از دو جوابی که برای tgx بدست می‌آید، آن راکه زاویه‌اش بین صفرو $\frac{\pi}{2}$ است انتخاب کنید و به فرض

$$OM+MA+AO=2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{6}$$

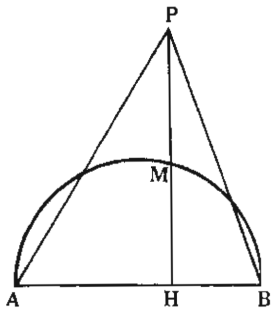
اضلاع و زوایا و مساحت مثلث OMA را حساب کنید.

۲ـ معادلهٔ یك مجهولی زیر راحل‌کرده جوابهای آن را که بین صفر و π هستند، بنویسید:

$$(6+3\sqrt{3})\sin x\cos x-2\sin^2 x+\cos^2 x=\frac{3\sqrt{3}+5}{2}$$

۳ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\cos 2x+\sin x$ را رسم‌کنید.

(اردیبهشت ۱۳۴۳)



۱ ـ نیمدایره‌ای به قطر $AB=10(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ مفروض است. نقطهٔ M را روی این نیمدایره فرض‌کرده عمود MH را بر AB فرود می‌آوریم و در امتداد MH نقطهٔ P را طوری تعیین می‌کنیم که $\frac{PH}{MH}=m$ باشد و از نقطهٔ P به نقاط A و B وصل می‌کنیم.

الف ـ رابطه‌ای بین زوایای A ، B و m موجود است، این رابطه را بنویسید.

ب ـ به فرض اینکه $tgA \times tgB = \sqrt{3}$ بوده و $R = 20$ باشد (R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث PAB می‌باشد) ، اضلاع و زوایا و مساحت مثلث PAB را حساب کنید .

۲ـ عبارت زیر را قابل محاسبه به وسیلهٔ لگاریتم بنمایید .

$$\sin^2 a + \sin^2 b - \sin^2(a+b)$$

۳ـ دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را حل و بحث کنید و به ازای $m = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ جوابهای x و y را بدست آورید .

$$\begin{cases} \cos x = m \cos 2y \\ \cos x + \cos y = -\frac{1}{2m} \end{cases}$$

۴ـ منحنی نمایش تغییرات تابع زیر را رسم کنید :

$$y = \frac{\cos x + (2+\sqrt{3})\sin x}{\sin x + 1}$$

(خرداد ۱۳۴۳)

۱ـ عبارت زیر را بدون استفاده ازجدول قابل‌محاسبهٔ لگاریتمی‌کنید :

$$S = tg 55^\circ - tg 20^\circ + 2$$

۲ـ معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 2\sqrt{2}$$

۳ـ دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x - y = 60^\circ \\ cotg\, x + cotg\, y = 4 \end{cases}$$

۴ـ تابع $y = \cos x - \cos 3x$ مفروض است :

اولاـ تحقیق‌کنید خط $x = \pi$ یکی از محورهای تقارن منحنی نمایش تغییرات تابع مفروض است .

ثانیاً ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع مفروض را در یك دورهٔ تناوب رسم کنید .

۵ـ در مثلث غیرمشخص ABC مجموع دو ضلع AB و AC مساوی است با k برابر ارتفاع AH .

اولا ـ ثابت کنید که : $\frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} = k$.

ثانیاً ـ به فرض $B > C$ و $B - C = \alpha$ زوایای A ، B و C را محاسبه نمایید (بحث) .

ثالثاًـ به ازای $k = 3$ و $AH = 1$ و $\alpha = 60^\circ$ زوایا و اضلاع مثلث مفروض را حساب کنید .

(شهریور ۱۳۴۳)

مسئلهٔ اول ـ عبارت زیر را قابل محاسبهٔ لگاریتمی‌کنید وحاصل را به ساده‌ترین صورت ممکن درآورید :

$$S = a^2 tg\, x - b^2 cotg\, x$$

مسئلهٔ دوم ـ منحنی نمایش تغییرات تابع زیر را دریك دورهٔ تناوب رسم کنید :

$$y = \frac{\sin 2x}{1 + 2\cos 2x}$$

مسئلهٔ سوم ـ معادلهٔ $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = m$ که درآن $-\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{4}$ می‌باشد ، مفروض است .

۱ـ در تعداد ریشه‌های معادلهٔ مفروض برحسب مقادیرمختلفهٔ m بحث کنید .

۲ـ به‌ازای $m = 2\sqrt{2}$ جواب قابل قبول معادله را تعیین نمایید .

مسئلهٔ چهارم ـ در مثلث غیرمشخص ABC داریم $b + c = 2a$

۱ـ ثابت کنید بین زوایای مثلث مفروض رابطهٔ زیر برقرار است :

$$\sin\frac{A}{2} = 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

۲ـ به‌فرض $B>C$ و معلوم بودن زاویهٔ A زوایای B و C را محاسبه کنید (بحث).

۳ـ اگر $A=60^\circ$ و طول AD نیمساز داخلی زاویهٔ A برابر $\sqrt{3}$ باشد ، اندازهٔ زوایای B و C و اضلاع a ، b و c را بدست آورید .

(آبان ۱۳۴۳)

مسئلهٔ اول ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که در آن $A=\frac{\pi}{2}$ و $B<\frac{\pi}{4}$ و $AB=2$ می‌باشد ، میانهٔ AM و ارتفاع AH را رسم می‌کنیم:

۱ـ پاره‌خط HM را به‌حسب $\cos B$ بدست آورید .

۲ـ به فرض $HM=m$ معادلهٔ حاصل را بحث کنید و حدود m را برای آنکه مسئله ممکن باشد ، بیابید .

۳ـ معادلهٔ $2x^2-mx-1=0$ را حل کنید و ریشه‌های آن را به عبارت قابل محاسبهٔ لگاریتمی تبدیل نمایید .

۴ـ خط AD نیمساز زاویهٔ A را بکشید و تحقیق کنید که مساحت مثلث ADM برابر است با :

$$S=\operatorname{tg}B\,\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-B\right)$$

۵ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\operatorname{tg}x\,\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-x)$ را بین صفر و $\frac{\pi}{4}$ رسم کنید .

مسئلهٔ دوم ـ دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را حل کنید :

$$(a>b>0)\qquad \begin{cases} a\sin x=\sin y\\ b\cos x=\cos y\end{cases}$$

در حالت خاص $a=\sqrt{2}$ و $b=\sqrt{\frac{2}{3}}$ جوابهای حادهٔ x و y را بدست آورید . (شهریور ۱۳۴۴)

مسئلهٔ ۱ـ معادلهٔ $4\cos^3x-3\cos x-m=0$ مفروض است .

۱ـ در صورتی‌که x زاویه‌ای حاده فرض شود ، معادله را حل و بحث کنید .

۲ ـ به فرض $m=\frac{1}{2}$ معادله را حل کنید. جوابهای کلی وجوابهای بین صفر و 2π را تعیین نمایید ودراین‌حالت با استفاده ازروابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم فوق مقدار عددی هریك ازعبارات زیر را نتیجه بگیرید :

$$\begin{cases} A=\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}+\cos\frac{13\pi}{9}\\ B=\cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{7\pi}{9}+\cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{13\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}\cdot\cos\frac{13\pi}{9}\\ C=\cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{7\pi}{9}\cdot\cos\frac{13\pi}{9}\end{cases}$$

مسئلهٔ ۲ـ دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را حل کنید :

$$\begin{cases}\operatorname{tg}x+\operatorname{cotg}y=2\sqrt{3}\\ \operatorname{cotg}x+\operatorname{tg}y=\frac{2}{\sqrt{3}}\end{cases}$$

مسئلهٔ ۳ـ جدول تغییرات و منحنی نمایش تابع زیر را رسم کنید :

$$y=\frac{\sin x-\cos x+1}{\cos x-\sin x+1}\qquad 0\leq x\leq 2\pi$$

مسئلهٔ ۴ـ در مثلث غیرمشخص ABC رابطهٔ $b=a\sqrt{2}$ بین اضلاع برقرار است . در این مثلث :

۱- ثابت‌کنید رابطهٔ $\cos^2 B = \cos 2A$ برقراراست وبزرگترین مقدار قابل قبول زاویهٔ A را تعیین کنید .

۲ - به فرض معلوم بودن زاویهٔ A وضلع a اضلاع b و c را محاسبه کنید .

۳- اگر $A = 45^\circ$ و $a = 2\sqrt{2}$ باشد اندازهٔ زوایای B و C واضلاع b و c را بدست آورید . (خرداد ۱۳۴۵)

مسئلهٔ اول ـ الف ـ هر يك از عبارات :

$$\cos 2x + tg\alpha \cdot \sin 2x \quad \text{و} \quad 1 + tg\alpha$$

را قابل محاسبهٔ لگاریتمی کنید و به ساده‌ترین صورت درآورید .

ب ـ معادلهٔ زیررا درصورتی‌که x مجهول و α متغیر بین صفرو π باشد حل و بحث کنید :

$$\cos 2x + tg\alpha \cdot \sin 2x = 1 + tg\alpha$$

مسئلهٔ دوم ـ دستگاه معادلات دو مجهولی زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{x}{2} \\ tg x + tg y + tg x \cdot tg y = 5 \end{cases}$$

مسئلهٔ سوم ـ جدول تغییرات و منحنی نمایش تابع :

$$\begin{cases} y = 2\cos^4 x - 3\cos^2 x + 1 \\ 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

را رسم کنید .

مسئلهٔ چهارم ـ در مثلث غیرمشخص ABC بین شعاعهای دوایر محاطی خارجی رابطهٔ :

$$r_b + r_c = 2r_a$$

برقرار است ؛ در این مثلث :

الف ـ ثابت کنید رابطهٔ :

$$tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2} = 2\,tg\frac{A}{2}$$

نیز برقرار است .

ب ـ اگر زاویهٔ A معلوم باشد، به فرض $B \geqslant C$ ، زوایای B و C را تعیین کرده بحث نمایید .

ج- درحالتی‌که $A = 60^\circ$ و $r_a = 3$ باشد،زوایای B ، C و اضلاع مثلث را حساب کنید . (شهریور ۱۳۴۵)

مسئلهٔ اول ـ معادلهٔ زیر راحل‌کنیدجوابهای‌کلی و بین صفر و 2π را بنویسید :

$$\sqrt{3}\sin 2x + 2\sin^2 x = 1$$

مسئلهٔ دوم ـ دستگاه‌دومعادلهٔدومجهولی‌زیرمفروض‌است ($\hat{A}$ و $\hat{B}$ و $\hat{C}$ زوایای مثلثی‌فرض شده‌اند که زاویهٔ C معلوم و $\hat{A} \geqslant \hat{B}$ است) $\hat{A}$ و $\hat{B}$ را در حالت‌کلی بدست‌آورید ـ **تعیین‌کنید** در ازای چه‌مقدارزاویهٔ C دستگاه جواب دارد ـ سپس $\hat{A}$ و $\hat{B}$ را حساب کنید :

$$\begin{cases} A + B = \pi - C \\ \cos A + \cos B = \dfrac{3 - 2\cos C}{2} \end{cases}$$

مسئلهٔ سوم ـ جدول تغییرات و منحنی (C) نمایش تابع $y = \dfrac{tg x}{1 - 8\sin x}$ را بین صفر و 2π رسم کنید .

مسئلهٔ چهارم ـ مطلوب است محاسبهٔزوایای مثلثی‌که اندازهٔ اضلاع‌آن برابر باشند با :

$$a = 3\sqrt{2} \qquad b = 2\sqrt{3} \qquad c = 3 + \sqrt{3}$$

مسئلهٔ پنجم ـ ثابت‌کنید درهرمثلث‌غیرمشخص رابطهٔ زیر برقراراست (a ، b و c اضلاع A ، B و C زوایای مثلثند).

$$\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)\cdot\cos A + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)\cdot\cos B + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\cdot\cos C = 3$$

مسئلهٔ ششم ـ صحت برقراری دستور زیر را تحقیق کنید (k عددی است صحیح و مثبت).

$$\cos\frac{\pi}{2k+1}\cdot\cos\frac{2\pi}{2k+1}\cdot\cos\frac{3\pi}{2k+1}\cdots\cdots\cos\frac{k\pi}{2k+1}=\frac{1}{2^k}$$

سپس با استفاده از دستور فوق یا به طریقهٔ دیگر مقدار عددی عبارت زیر را حساب کنید:

$$A=\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{3\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}$$

(خرداد ۱۳۴۶)

مسئلهٔ اول ـ معادلهٔ مثلثاتی:

$$\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+\sin 2x=-1$$

را حل کنید.

مسئلهٔ دوم ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع:

$$y=\frac{\cos^2 x-\cos x}{2\cos x-1}$$

را در فاصلهٔ $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ رسم کنید.

مسئلهٔ سوم ـ دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases}\cos^2 x-\cos^2 y=\sin^2(x+y)-\frac{3}{2}\\ x-y=\frac{\pi}{6}\end{cases}$$

مسئلهٔ چهارم ـ به فرض اینکه $0<x<\frac{\pi}{4}$ باشد، بهازای مقادیر مثبت k معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل و بحث کنید:

$$k\cos x\cdot\sin(\frac{\pi}{4}-x)=\sqrt{2}$$

مسئلهٔ پنجم ـ ثابت کنید در هر مثلث رابطهٔ:

$$\frac{a^2}{4S}=\frac{1}{2}(\mathrm{cotg}\,B+\mathrm{cotg}\,C)$$

برقرار است.

مسئلهٔ ششم ـ نوع مثلثی را تعیین کنید که در آن، رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$2\sqrt{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\sqrt{2}\frac{h_a}{d_a}+1$$

(h_a ارتفاع وارد از رأس A و d_a نیمساز داخلی رأس A می‌باشد).

مسئلهٔ هفتم ـ درمثلثی $a=kr_a$ (r_a شعاع دایرهٔ محاطی خارج A و k عددی است مثبت).

الف ـ ثابت کنید: $\qquad tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}=k \qquad (1)$

ب ـ به فرض اینکه $\hat{B}+\hat{C}=2\alpha$ باشد $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$، با استفاده از رابطهٔ (۱) زوایای B و C را تعیین کنید (بهتر است $\cos\frac{B-C}{2}$ را مجهول مسئله اختیار کنید).

ج ـ اگر $\cos\frac{B-C}{2}=\frac{2\sin\alpha-k\cos\alpha}{k}$ باشد، ثابت کنید زوایای B و C وقتی قابل قبولند که $2\,tg\frac{\alpha}{2}\leqslant k<tg\alpha$ باشد.

د ـ به فرض اینکه $\alpha=30°$ و $k=2(2-\sqrt{3})$ و طول شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC: $R=2\sqrt{3}$ باشد، اضلاع و زوایای مثلث را حساب کنید.

(هر قسمت از مسئله را می‌توانید بدون دخالت دادن درسایرقسمتها نیز حل کنید.)

(شهریور ۱۳۴۶)

مسئلهٔ اول ـ معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید :

$$(۲+\sqrt{۲})\sin x\cos x-\sqrt{۲}\cos^{۲}x=۱$$

مسئلهٔ دوم ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع :

$$y=\frac{\cos x}{۲\cos x+۱}$$

را در فاصلهٔ $۰\leqslant x\leqslant ۲\pi$ رسم کنید .

مسئلهٔ سوم ـ دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیر راحل‌کنید وجوابهای حادهٔ x و y را تعیین کنید :

$$\begin{cases}\cos ۲x+\cos ۲y+۲\cos(x+y)=-۲\\ ۲\sin x\sin y=\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

$\cos(x\pm y)$ را مجهولات مسئله اختیار کنید .

مسئلهٔ چهارم ـ در مثلثی : $۴r\cos\frac{A}{۲}=a(\sqrt{۲}-۲\sin\frac{A}{۲})$ (r شعاع دایرهٔ محاطی داخل و $A<\frac{\pi}{۲}$) ؛ ثابت کنید :

$$B-C=\frac{\pi}{۲}$$

زوایای A و B را برحسب C تعیین کرده حدود زاویهٔ C را تعیین‌کنید.

مسئلهٔ پنجم ـ در مثلثی $B-C=\frac{\pi}{۲}$ و بین اضلاع b و c و R شعاع دایرهٔ محیطی ، رابطهٔ :

$$\frac{b+c}{bc}=\frac{k}{R}$$

برقرار است .

الف ـ نتیجه بگیرید :

$$\sin C+\cos C=k\sin ۲C \qquad (۱)$$

ب ـ به وسیلهٔ حل معادلهٔ (۱)، زاویهٔ C را تعیین‌کرده بادرنظرگرفتن حدود زاویهٔ C به ازای مقادیر مثبت k بحث کنید .

ج ـ ریشهٔ مثبت معادلهٔ درجهٔ دوم زیررا قابل محاسبه با لگاریتم‌کنید:

$$۲kx^{۲}-\sqrt{۲}x-k=۰$$

بهتر است ($۲k=tg\varphi$) اختیار کنید .

مسئلهٔ ششم ـ در مثلثی زاویهٔ $A=۶۰^{\circ}$ ، و بین d_a و d'_a و h_a نیمسازهای داخلی‌وخارجی وارتفاع وارد ازرأس A، رابطهٔ زیر برقراراست:

$$\frac{\sqrt{۳}}{d_a}+\frac{۱}{d'_a}=\frac{۲}{h_a} \qquad B>C$$

زوایای B و C را تعیین‌کنید وبه فرض اینکه مساحت مثلث $S=۶\sqrt{۳}$ باشد ، ضلع a را حساب کنید .

(خرداد ۱۳۴۷)

مسئلهٔ اول ـ معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید :

$$\sin ۳x+\sin x=\sqrt{۳}(\cos ۳x+\cos x)$$

مسئلهٔ دوم ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع :

$$y=\frac{۱}{۲\sin x(۱-\sin x)}$$

را در فاصلهٔ $۰\leqslant x\leqslant ۲\pi$ رسم کنید .

مسئلهٔ سوم ـ دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را حل کنید :

$$\begin{cases}x-y=\frac{\pi}{۴}\\ tg x+tg y=۲\end{cases}$$

مسئلهٔ چهارم ـ نوع مثلثی را تعیین‌کنید که درآن رابطهٔ :

$$r_a-r+a=\frac{a\sqrt{۲}}{\cos\frac{A}{۲}}$$

برقرارباشد (r_a شعاع‌دایرهٔ محاطی‌خارج A و r شعاع دایرهٔ محاطی‌داخل).

مسئلهٔ پنجم ـ درمثلثی بین h_a و h_b ارتفاعات وارد ازرئوس A و B رابطهٔ :

$$h_a+h_b=k\frac{c^2}{2R}$$

برقراراست؛ R شعاع‌دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌باشد (k عددی است‌مثبت).

الف ـ نتیجه بگیرید : $\sin A+\sin B=k\sin C$ (۱)

ب ـ ازرابطهٔ (۱) نتیجه بگیرید : $tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}=\frac{k-1}{k+1}$ (۲)

ج ـ به فرض اینکه $\hat{B}=2\hat{C}$ باشد، معادلهٔ درجهٔ دومی‌برحسب $\cos C$ تشکیل دهید که از آنجا زاویهٔ C بدست‌آید (بهتر است برای این منظور از رابطهٔ ۱ نیز استفاده کنید) .

د ـ اگر معادلهٔ درجهٔ دوم برحسب $\cos C$ به صورت :

$$4\cos^2C+2\cos C-(1+k)=0 \qquad k>0$$

باشد ، حدود k راچنان تعیین‌کنید تا زاویهٔ C درفاصله‌ای که تعیین می‌کنید قابل قبول باشد .

هـ ـ به ازای $k=\sqrt{2}+1$ زوایای مثلث را تعیین‌کنید .

(شهریور ۱۳۴۷)

مسئلهٔ اول ـ معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید :

$$2\sin^3x+2\cos^3x=\sin x+\cos x$$

مسئلهٔ دوم ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع :

$$y=\frac{\sin^2x-\sin x}{2\sin x-1}$$

را در فاصلهٔ $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ رسم کنید .

مسئلهٔ سوم ـ دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} tg(x+y)+tg(x-y)=1 \\ \cos^2x+\cos^2y=1+\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

(بهتراست نخست معادلهٔ دوم دستگاه را به $\cos 2x$ و $\cos 2y$ تبدیل کنید).

مسئلهٔ چهارم ـ به فرض اینکه $\frac{5\pi}{12}<x<\frac{13\pi}{12}$ باشد ، معادلهٔ مثلثاتی زیر را **حل** و بحث کنید :

$$k\sin 2x+4\sin(x-\frac{\pi}{4})=4-k \qquad k>0$$

مسئلهٔ پنجم ـ ثابت‌کنید در هر مثلث رابطهٔ :

$$(b+c)tg\frac{A}{2}=2R(\cos B+\cos C)$$

برقرار است (R شعاع دایرهٔ محیطی) .

مسئلهٔ ششم ـ درمثلثی: $2R(\cos B+\cos C)=kh_a$ ؛(h_a ارتفاع وارد از رأس A) ، $k>0$.

الف ـ نتیجه بگیرید : $\cos B+\cos C=k\sin B\sin C$ (۱).

ب ـ به‌فرض‌اینکه $B+C=2\alpha$ باشد، بااستفاده‌ازرابطهٔ (۱) زوایای B و C را تعیین کنید ؛ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ($\cos\frac{B-C}{2}$ را مجهول مسئله اختیار کنید) $B>C$.

ج ـ ثابت‌کنید زوایای B و C وقتی موجود وقابل قبولند که بین k و α نامساوی زیر برقرار باشد :

$$k\cos^2\alpha+2\cos\alpha-k\leqslant 0$$

د ـ به فرض $k=2$ و $\alpha=60^\circ$ زوایای A و B و C را برحسب درجه تعیین کنید .

مسئلهٔ هفتم ـ زوایا و نوع مثلثی را تعیین‌کنیدکه درآن روابط زیر برقرار باشند $(B>C)$:

$$\begin{cases} \frac{d_a}{d'_a}=\frac{1}{a}(r_a-r) \\ ac=R^2\sqrt{3} \end{cases}$$

d_a ، d'_a نیمسازهای داخلی وخارجی‌زاویهٔ A و r_a شعاع دایرهٔ‌محاطی‌خارج $\hat{A}$ و r شعاع دایرهٔ محاطی داخل مثلث ABC می‌باشند .

(خرداد ۱۳۴۸)

مسئلهٔ اول ـ معادلهٔ مثلثاتی :

$$tg\,x+(2\sqrt{3}-3)cotg\,x=2$$

را حل کنید .

مسئلهٔ دوم ـ اولا ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع :

$$y=\frac{1-2\cos 2x}{1-\cos 2x}$$

را درفاصلهٔ $0\leqslant x\leqslant \pi$ رسم کنید .

ثانیاً ـ سطح واقع بین منحنی و محور x ها و خطوط $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\frac{\pi}{4}$ را محاسبه کنید (می‌توانید به جای محاسبهٔ سطح مسئلهٔ آخر را حل کنید) .

مسئلهٔ سوم ـ دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x+y=\varphi \\ \sin^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{y}{2}=1-\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2} \end{cases}$$

(φ قوسی است معلوم)

مسئلهٔ چهارم ـ درمثلثی $\hat{A}=18^\circ$ و بین‌نیمسازهای داخلی‌وخارجی و ارتفاع وارد از رأس A بترتیب رابطهٔ زیر برقرار است :

$$d_a+d'_a=2\sqrt{6}\,h_a \qquad B>C$$

زوایای B و C را تعیین‌کنید (برحسب درجه)؛ مسئله دوجواب دارد.

مسئلهٔ پنجم ـ درمثلثی $\hat{A}=60^\circ$ و بین اضلاع b و c و R شعاع دایرهٔ محیطی رابطهٔ زیر برقرار است :

$$\frac{1}{R}(b^2+c^2)=k(b-c)$$

اولاً ـ نتیجه بگیرید :

$$(1) \qquad 2+\cos(B-C)=k\sin\frac{B-C}{2}$$

ثانیاً ـ به وسیلهٔ حل معادلهٔ (۱) زوایای B و C را تعیین نموده (بحث‌کنید) ، $k>0$.

مسئلهٔ ششم ـ عبارت :

$$S=(1-q)\cos x+2\sqrt{q}\sin x+1+q$$

را قابل محاسبه بالگاریتم نمایید (بهتر است $q=tg^2\frac{\varphi}{2}$ اختیار کنید) .

هرقسمت از مسائل را می‌توانید مستقلا نیز حل کنید .

(شهریور ۱۳۴۸)

مسئلهٔ اول ـ معادلهٔ مثلثاتی :

$$3\sqrt{3}\cos^3 x+\sin x=\sin x\cos^2 x$$

را حل کنید .

مسئلهٔ دوم ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات دو تابع :

$$y=\pm\frac{\sin^2 x}{2-\sin x}$$

را دقیقاً درفاصلهٔ $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ روی یك دستگاه مختصات رسم‌کنید(کافی است فقط برای یکی از دو منحنی جدول تغییرات بکشید).

مسئلهٔ سوم ـ بدون حل معادلهٔ مثلثاتی زیر قوس معلوم φ را چنان تعیین کنید تا معادله دارای جواب باشد .

$$4tg\frac{\varphi}{2}\sin x+4tg^2\frac{\varphi}{2}\cos x=5tg^2\frac{\varphi}{2}+1$$

مسئلهٔ چهارم ـ دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را حل‌کنید :

$$\begin{cases} \sin(x+y)+\sin(x-y)=\frac{3}{2} \\ \cos^2\frac{x+y}{2}+\sin^2\frac{x-y}{2}=1-\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

مسئلهٔ پنجم ـ درمثلثی بین اضلاع a و b و c و d_a نیمساز داخلی رأس A رابطهٔ :

$$\frac{b^2-c^2}{bc}=\frac{a}{d_a}$$

مفروض است ؛ نتیجه بگیرید :

$$B-C=\frac{\pi}{3}$$

مسئلهٔ ششم ـ در مثلثی $B-C=\frac{\pi}{3}$ و بین h_b و h_c ارتفاعات رئوس B و C رابطهٔ :

$$\frac{h_c}{h_b}=2+\sqrt{3}$$

برقرار است ؛ زوایای A و B و C را تعیین کنید .

مسئلهٔ‌هفتم ـ در مثلثی $\hat{A}=60^\circ$ و بین h_a و d_a ارتفاع‌ونیمساز داخلی $\hat{A}$ و r شعاع دایرهٔ محاطی داخل رابطهٔ :

$$k\frac{h_a}{d_a}=1+\frac{r}{d_a}\ ,\ B>C$$ (k عددی است مثبت)

مفروض است .

اولا ـ معادلهٔ درجهٔ دومی برحسب $\cos\frac{B-C}{2}$ تشکیل دهید که ازحل آن زوایای مثلث بدست آید .

ثانیاً ـ ثابت کنید زوایا وقتی قابل قبولند که $\frac{4}{3}\leqslant k<\frac{5}{2}$ باشد .

مسئلهٔ هشتم ـ در مثلثی غیر قائم‌الزاویه از رأس A عمودهایی بر اضلاع AB و AC اخراج می‌کنیم تا BC یا امتداد آن را در M و N قطع کنند ؛ ثابت کنید :

$$MN=a\,tgB\,tgC$$

(خرداد ۱۳۴۹)

مسئلهٔ اول ـ معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید :

$$\sqrt{6}(\sin x+\cos x)+2\sin 2x=4$$

مسئلهٔ دوم ـ اولاً ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع :

$$y=tgx+tg^3x$$

را که به ازای بعضی ازمقادیر x منفصل است درفاصلهٔ $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ رسم کنید .

ثانیاً ـ سطح واقع‌بین منحنی ومحور xها وخطوط $x=\frac{\pi}{3}$ و $x=-\frac{\pi}{3}$ را حساب کنید .

مسئلهٔ سوم ـ دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} \sin^2x+\sin^2y=\frac{5}{4} \\ tg^2x=tg^2y-2 \end{cases}$$

مسئلهٔ چهارم ـ در مثلثی رابطهٔ :

$$h_c-h_b=a\sqrt{2}\sin\frac{B-C}{2}$$

برقرار است‌که درآن h_c و h_b ارتفاعات رئوس C و B می‌باشند. ثابت‌کنید مثلث متساوی‌الساقین یا قائم‌الزاویه است .

مسئلهٔ پنجم ـ در مثلثی بین d_a نیمساز داخلی رأس A و r شعاع دایرهٔ محاطی داخل ، رابطهٔ :

$$ad_a=kr^2\cot g\frac{A}{2}\qquad k>0\ ,\ B>C$$

مفروض است .

اولا ـ نتیجه بگیرید :

$$\frac{2}{\cos\frac{B-C}{2}} = k\,tg\frac{B}{2}\,tg\frac{C}{2} \qquad (1)$$

ثانیاً ـ به فرض معلوم بودن A بااستفاده ازرابطهٔ (۱) معادله‌ای درجهٔ دوم برحسب $\cos\frac{B-C}{2}$ تشکیل دهید و زوایا را حساب کنید .

ثالثاً ـ ثابت کنید برای اینکه زوایا قابل قبول باشند لازم است $k\geqslant 2\cot g^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{4}\right)$ باشد .

(شهریور ۱۳۴۹)

۱/۵) **مسئلهٔ اول** ـ معادلهٔ مثلثاتی :

$$\sin 2x+\cos 2x-\sin 2x\cos 2x=1$$

را حل کنید .

مسئلهٔ دوم ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع :

$$y=\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}$$

را در فاصلهٔ $0<x<2\pi$ رسم‌کنید ؛ توجه داشته باشید که تابع دارای انفصال مضاعف بوده و y و y' در ازای ریشه‌های مخرج بینهایت است .

مسئلهٔ سوم ـ در معادلهٔ مثلثاتی :

$$2k\sin^2 x-(2+k)\sin x+k=0$$

اولاً ـ حدود k را چنان تعیین کنید تا معادله دارای یك جواب قابل قبول باشد .

ثانیاً ـ به فرض اینکه x' و x'' کوچکترین قوسهایی باشند که در معادلهٔ فوق صدق کنند ، مقادیر x' و x'' و k را چنان تعیین کنید که $x'-x''=\frac{\pi}{3}$ باشد ؛ (از روابط بین ضرایب و ریشه‌ها استفاده کنید) x' و $x''>0$.

مسئلهٔ چهارم ـ دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} 4(\sin^3 x+\sin^3 y)-9\cos\frac{x-y}{2}=1 \\ x+y=\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$\cos\frac{x-y}{2}$ را مجهول بگیرید و بخاطر داشته باشید که از دستور :

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

هم می‌توانید استفاده کنید .

مسئلهٔ پنجم ـ درمثلثی بین h_b و h_c ارتفاعات رئوس B و C رابطهٔ :

$$b+c=2(h_b+h_c)$$

مفروض است ؛ زاویهٔ A را تعیین کرده وبه فرض $B=120°$ وشعاع دایرهٔ محیطی $R=2\sqrt{2}$ مثلث را حل کنید .

مسئلهٔ ششم ـ در مثلثی $\hat{B}=2\hat{C}$ و رابطهٔ :

$$\sqrt{3}\,\frac{r}{r_a}=(2+\sqrt{3})\frac{d_a^2}{d'^2_a}$$

مفروض است ؛ زوایای A، B و C را تعیین کنید . d_a و d'_a نیمسازهای داخلی و خارجی A و r_a شعاع دایرهٔ محاطی خارج A و r شعاع دایرهٔ محاطی داخل هستند.

مسئلهٔ هفتم ـ در مثلثی بین r_b و r_c اشعهٔ دوایر محاطی‌خارج B و C رابطهٔ :

$$k\frac{bc}{b+c}=r_b+r_c$$

مفروض است .

اولاً ـ نتیجه بگیرید :

$$k\frac{\sin B\sin C}{2(\sin B+\sin C)}=\cos^2\frac{A}{2} \qquad (1)$$

ثانیاً ـ به فرض $B>C$ و معلوم بودن A، با استفاده از رابطهٔ (۱) معادله‌ای برحسب مجهول $\cos\frac{B-C}{2}$ تشکیل دهید که زوایا تعیین بشود .

ثالثاً ـ در مسئله بحث کنید و نشان دهید که به ازای $k=4\cos\frac{A}{2}$ مثلث متساوی‌الساقین است .

مسئلهٔ هشتم ـ در مثلثی ضلع BC را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم ؛ از نقاط تقسیم به رأس A وصل می‌کنیم تا زاویهٔ A به سه قسمت α و β و γ تقسیم شود ؛ ثابت کنید :

$$\sin A=\frac{3\sin\alpha\sin\gamma}{\sin\beta}$$

(خرداد ۱۳۵۰)

مسئلهٔ اول ـ معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید:

$$2\sin^2x-\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2x=2$$

مسئلهٔ دوم ـ جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع:

$$y=\frac{\sin^2x}{2\cos x-1}$$

را در فاصلهٔ $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ رسم کنید .

مسئلهٔ سوم ـ به فرض اینکه $\frac{\pi}{2}$ و $x\neq 0$ باشد، دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیر را حل کنید وجوابهای حادهٔ yox را تعیین کنید :

$$\begin{cases}4\sin^3x\cos y=\sqrt{2}\sin 3x\\ 4\cos^3x\cos y=-\sqrt{2}\cos 3x\end{cases}$$

مسئلهٔ چهارم ـ اولا ـ اگر در مثلثی رابطهٔ :

$$b+c=4R\cos\frac{A}{2}$$

مفروض باشد، ثابت کنید مثلث متساوی‌الساقین است (R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است) .

ثانیاً ـ به‌کمك رابطهٔ :

$$h_b^2-h_a^2=\frac{c^2}{2}$$

زوایای مثلث فوق را تعیین‌کنید(h_a و h_b ارتفاعات وارد از رئوس A و B می‌باشند) (مسئله دو جواب دارد) .

مسئلهٔ پنجم ـ درمثلثی $\hat{B}=2\hat{C}$ وبین d_a و d'_a نیمسازهای‌داخلی و خارجی A و h_a ارتفاع وارد از رأس A رابطهٔ زیر مفروض است :

$$k>0 \qquad d'^2_a-d^2_a=kh^2_a$$

اولا ـ نتیجه بگیرید :

$$\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}-\frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}=k \qquad (1)$$

ثانیاً ـ معادلهٔ(۱)را به‌صورت يك معادلهٔ قابل‌حل تبدیل‌کنید و ازآنجا زوایا را تعیین کنید (بهتر است معادلهٔ قابل حل را برحسب $\cos C$ تشکیل دهید).

ثالثاً ـ حدود $\hat{C}$ را تعیین نموده بحث‌کنید.

رابعاً ـ بەازای $k=4\sqrt{2}$ زوایای مثلث را تعیین‌کنید.

مسئلهٔ ششم ـ عبارت زیر را قابل محاسبه با لگاریتم نمایید:

$$S=\frac{1-\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin x+\cos x+2}$$

(شهریور ۱۳۵۰)

مسئلهٔ اول ـ معادلهٔ مثلثاتی:

$$2\sin^2 x-\sqrt{3}\cos^2 x-\sin x\cos x=-\sqrt{3}$$

را حل کنید.

مسئلهٔ دوم ـ اولا ـ در تابع:

$$y=\frac{a}{\cos^2 x-\cos x}$$

مقدار a را چنان تعیین کنید که منحنی نمایش آن بر خط $y=-4$ مماس باشد.

ثانیاً ـ به ازای $a=1$ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع فوق را در فاصلهٔ $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ رسم کنید.

مسئلهٔ سوم ـ دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases}\dfrac{tg\, x}{tg\, y}=\sin(x+y)+2\\[2mm] x-y=\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$$

$\sin(x+y)$ را مجهول بگیرید.

مسئلهٔ چهارم ـ اولا ـ اگر در مثلثی رابطهٔ:

$$b^3+c^3=a^2(b+c)$$

بین اضلاع برقرار باشد، ثابت کنید $A=60^\circ$ است.

ثانیاً ـ به فرض اینکه دراین مثلث داشته باشیم:

$$4h_a^2=d_a\cdot d'_a$$

زوایای B و C را تعیین کنید (d_a و d'_a نیمسازهای داخلی وخارجی A و h_a ارتفاع وارد از رأس A هستند). $B>C$.

مسئلهٔ پنجم ـ نوع مثلثی را تعیین کنید که درآن رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$(b+c)\,tg^2\frac{A}{2}=h_b+h_c$$

مسئلهٔ ششم ـ درمثلثی رابطهٔ:

$$\frac{1}{R}(b^2 tg\, C-c^2 tg\, B)=kh_a$$

مفروض است (R شعاع دایرهٔ محیطی).

اولا ـ نتیجه بگیرید:

$$(1)\qquad \frac{\sin 2B-\sin 2C}{\cos B\cdot\cos C}=k$$

ثانیاً ـ به‌فرض معلوم بودن A بااستفاده ازرابطهٔ (۱) معادله درجهٔ دوم برحسب $tg\frac{B-C}{2}$ تشکیل دهید که زوایای B و C به‌دست آید.

ثالثاً ـ اگر معادلهٔ درجهٔ دوم برحسب $tg\frac{B-C}{2}$ به‌صورت:

$$k\cos^2\frac{A}{2}\,tg^2\frac{B-C}{2}-4\cos A\,tg\frac{B-C}{2}-k\sin^2\frac{A}{2}=0$$

باشد، حدود k را تعیین کنید که زوایای B و C قابل قبول باشند (بحث کنید).

$B>C$ و $k>0$.

تمام قسمتهای مسئله را می‌توانید مستقلا حل کنید. (خرداد ۱۳۵۱)

مسئلهٔ اول ـ معادلهٔ مثلثاتی:

$$tg\, x+cotg\, x=2\sqrt{2}$$

را حل کنید.

مسئلهٔ دوم ــ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع :

$$y = \sin^{3} x + 2\sin^{2} x$$

را در فاصلهٔ $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ رسم کنید .

مسئلهٔ سوم ــ دستگاه دومعادلهٔ دو مجهولی زیررا حل کنید :

$$\begin{cases} tg\,x + tg\,y = 2 \\ cotg\,x + cotg\,y = 2 \end{cases}$$

مسئلهٔ چهارم ــ به فرض اینکه $-\frac{\pi}{9} < x < \frac{\pi}{9}$ باشد، معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل و بحث کنید :

$$\sin 4x - \sin 2x = k \sin x$$

مسئلهٔ پنجم ــ در مثلثی $B = 2C$ ورابطهٔ :

$$b^{2} + c^{2} = 8R^{2} \cos B$$

مفروض است . زوایا و نوع مثلث را تعیین کنید (R شعاع دایرهٔ محیطی) .

مسئلهٔ ششم ــ در مثلثی بین r_a شعاع دایرهٔ محاطی خارج A و r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی رابطهٔ زیر مفروض است:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r} = \frac{k}{2a}$$

اولا ــ به فرض‌اینکه $B - C = \alpha$ باشد و $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ، نتیجه‌بگیرید:

$$(1) \qquad 8\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{A}{2} = k \sin B \,.\, \sin C$$

ثانیاً ــ به‌کمک رابطهٔ (۱) معادلهٔ درجهٔ دومی برحسب $\cos\frac{A}{2}$ تشکیل دهید و زوایای B و C را تعیین‌کنید.

ثالثاً ــ در مسئله بحث کنید و حدود k را برحسب α تعیین‌کنید.

رابعاً ــ به‌ازای $k = 8\sqrt{6}$ و $\alpha = 60^\circ$ زوایا را تعیین کنید.

(شهریور ۱۳۵۱)

پایان

	۰	۰	۱	۰	∞
$\frac{\pi}{6}$	۳۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	۴۵	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	۶۰	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	۹۰	1	0	∞	0
$\frac{2\pi}{3}$	۱۲۰	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$	۱۳۵	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
$\frac{5\pi}{6}$	۱۵۰	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
π	۱۸۰	0	-1	0	∞
$\frac{7\pi}{6}$	۲۱۰	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	[illegible]
$\frac{5\pi}{4}$	۲۲۵	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{4\pi}{3}$	۲۴۰	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{3\pi}{2}$	۲۷۰	-1	0	∞	0
$\frac{5\pi}{3}$	۳۰۰	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{7\pi}{4}$	۳۱۵	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	1
$\frac{11\pi}{6}$	۳۳۰	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
2π	۳۶۰	0	1	0	∞