۲۶۰۰ مسئله

مثلثات

با حل و جواب

برای دانش آموزان پنجم ریاضی دبیرستانها

شامل:

۱- کلیه قواعد و فرمولهای مثلثات پنجم ریاضی

۲- حل کلیه مسائل کتاب درسی

۳- حل مسائل امتحانات دبیرستانهای مختلف کشور

۴- تمرین و مسائل با جواب در آخر هر فصل

۵- حل مسائل مثلثات کنکور دانشکده‌های ایران و چند کشور خارجی

تألیف: محمد دهخدا

دبیر دبیرستانهای تهران

مسئله

مثلثات

با ... جواب

...نجم ریاضی دبیرستانها

شامل :

۱- کلیه قواعد و فرمولهای مثلثات پنجم ریاضی
۲- حل کلیه مسائل کتاب درسی
۳- حل مسائل امتحانات دبیرستانهای مختلف کشور
۴- تمرین و مسائل با جواب درآخر هرفصل
۵- حل مسائل مثلثات کنکور دانشکده‌های ایران و چند کشورخارجی

تألیف : محمد دهخدا

دبیر دبیرستانهای تهران

محمد محمدی ششلو

کلاس سوم پنج دبستان چمران

سازمان چاپ و انتشارات جاویدان

ناشر: محمد حسن علمی

چاپ چهارم این کتاب بسرمایه سازمان انتشارات جاویدان بطبع رسید

بنام پروردگار مهربان

دبیران و دانش آموزان ارجمند ، جای تردید نیست که اساتید مسلم و ریاضی دانان براستی گرانقدر ، در کشور ما از حدود انگشت شمار افزون هستند و نیز باید اذعان داشت که تا کنون در زمینهٔ بطور کلی ـ حل‌المسائل و کتاب های تقویتی ، خصوصاً برای دانش آموزان دوره دوم دبیرستانها، کتابهای زیادی تألیف وانتشار یافته است که اغلب آنها بدلیل اینکه بر اصول و قواعد آموزشی و علمی تدوین شده صد در صد مفید ممتنی و منظور بوده و پژوهشگر کنجکاو وعلاقمند را بخوبی به مسائل گوناگون رهنمون میشوند.
قبلا این مؤلف وظیفه خود میداند که از کار پر ارزش جملگی این همکاران و مؤلفان ارجمند به نیکی یاد کند ، و حق این مهم را در این مختصر بجای آورد.

اما این کتاب محتوی بخش‌ها و قسمت‌های گوناگون است که برای آگاهی دبیران ودانش آموزان . به آنها اشاره می‌کنیم :

۱ـ کلیه‌قواعد وفرمولهای مثلثات پنجم‌ریاضی دبیرستانها باحل مسائل مربوط به هر قاعده جمع‌آوری و تدوین گردیده که نه تنها مروری است ازقواعد مثلثات، بلکه دانش‌آموز را از مراجعهٔ به کتب‌درسی و یا کتابهای دیگر کاملا بی نیاز میکند.

۲ـ کلیه مسائل کتاب درسی مثلثات سال پنجم ریاضی دبیرستانها بطور کامل حل شده است .

۳ـ تعدادی مسائل انتخاب شده از امتحانات گوناگون دبیرستانهای مختلف سراسر کشور ، جهت تمرین بیشتر و آگاهی از نحوهٔ امتحانات دبیران مختلف دبیرستانها گردآوری و حل شده است.

۴ـ مقداری مسائل کنکور دانشکده‌های مختلف ایران و خارج نیز در این کتاب ضمیمه و حل گردیده و بچاپ رسیده است .

۵ـ مجموعاً ۲۶۰۰ مسأله با حل و جوابدر این کتاب تدوین شده و بطور تقریب میتوان گفت از انواع ممکن و مختلف مسائلی است که دانش پژوه در خلال درس کلاس خود و یا آمادگی برای کنکور حتماً به آنها برخورد خواهد نمود.

مجموعاً کوشیده‌ایم کتابی تألیف نمائیم تا از هر جهت پاسخگوی سؤالات مختلف دانش‌آموزان بوده ومجموعه کاملی از درس مثلثات باشد ودانش پژوهان را با انواع گوناگون مسائل آشنا نماید.

امید است که خدمت کوچك ما مقبول خاطر دبیران و پژوهشگران ارجمند قرار گیرد و با همه دقتی که در تصحیح اوراق چاپی آن شده اگر اشتباهی بنظر صاحبنظران میرسد ، باابذل لطف ما را به نشانی «ناشر» آگاه سازند . تا درچاپهای بعدی اشتباهات احتمالی برطرف گردد .

قبلا از این همکاری صمیمانه آنان سپاسگزاریم .

« محمد دهخدا »

فهرست کتاب

مثلثات

بنجم رباضی

فصل اول

قاعده۱	محیط هردایره ۳۶۰ درجه است .
قاعده۲	محیط هردایره ۴۰۰ گراد است .
قاعده۳	محیط هردایره ۲π رادیان است.
قاعده۴	هر رادیان برابر قوسی است از دایره که اندازه طول آن برابر شعاع دایره باشد .
قاعده۵	برای تبدیل درجه به‌گراد ورادیان وبرعکس ازفرمول‌های زیر استفاده می‌نمائیم . $\frac{G}{200}=\frac{R}{\pi}$ و $\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}$ و $\frac{D}{180}=\frac{G}{200}$
قاعده۶	عقربه دقیقه شمار دریکساعت یعنی در ۶۰ دقیقه زمانی کمانی برابر ۳۶۰ درجه یا ۲π رادیان یا ۴۰۰ گراد را طی میکند.
قاعده۷	عقربه ثانیه شمار درهر دقیقه زمانی کمانی مساوی ۳۶۰ درجه یا ۲π رادیان یا ۴۰۰ گراد را طی میکند .
قاعده۸	عقربه ساعت‌شمار در۱۲ساعت یعنی در $12 \times 60 = 720$ دقیقه زمانی کمانی برابر ۳۶۰درجه یا۲π رادیان یا ۴۰۰ گراد راطی میکند .

حل مسائل صفحه ۵ کتاب درسی

۱ ك ـ کمانهای π و $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ رادیان را بر حسب درجه و گراد حساب کنید.

حل : الف : π رادیان

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\Longrightarrow\frac{D}{۱۸۰}=\frac{\pi}{\pi}\Longrightarrow\frac{D}{۱۸۰}=۱\Longrightarrow D=۱۸۰^\circ$$

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{G}{۲۰۰}\Longrightarrow\frac{۱۸۰}{۱۸۰}=\frac{G}{۲۰۰}\Longrightarrow G=۲۰۰g$$

ب : $\frac{\pi}{۲}$ رادیان

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{\frac{\pi}{۲}}{\pi}\Longrightarrow\frac{D}{۱۸۰}=\frac{۱}{۲}\Longrightarrow D=۹۰^\circ$$

$$\frac{۹۰}{۱۸۰}=\frac{G}{۲۰۰}\Longrightarrow G=۱۰۰g$$

ج: $\frac{۳\pi}{۲}$ رادیان

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{\frac{۳\pi}{۲}}{\pi}\Longrightarrow\frac{D}{۱۸۰}=\frac{۳}{۲}\Longrightarrow D=۲۷۰^\circ$$

$$\frac{۲۷۰}{۱۸۰}=\frac{۲۰۰}{G}\Longrightarrow G=۳۰۰g$$

۲ ك ـ کمان ۵۸/۶۴۲ گراد را برحسب درجه و رادیان حساب کنید.

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{G}{۲۰۰}\Longrightarrow\frac{D}{۱۸۰}=\frac{۵۸/۶۴۲}{۲۰۰}\Longrightarrow D=۵۲^\circ \text{ و } ۴۶' \text{ و } ۴۰''$$

$$\frac{G}{۲۰۰}=\frac{R}{\pi}\Longrightarrow\frac{۵۸/۶۴۲}{۲۰۰}=\frac{R}{\pi}\Longrightarrow R=\frac{۵۸/۶۴۲\pi}{۲۰۰}=۰/۲۹۳۲۱\pi$$

۳ ك ـ کمان ′۳۲ و °۱۶۸ را برحسب گراد ورادیان حساب کنید.

$$۱۶۸^\circ \text{ و } ۳۲'=۱۶۸^\circ+\frac{۳۲^\circ}{۶۰}=\frac{۱۶۸^\circ}{۱}+\frac{۸^\circ}{۱۵}=\frac{۲۵۲۸}{۱۵} \text{ درجه}$$

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{G}{۲۰۰}\Longrightarrow\frac{\frac{۲۵۲۸}{۱۵}}{۱۸۰}=\frac{G}{۲۰۰}\Longrightarrow G=\frac{۵۰۵۶}{۲۷}\#۱۸۷/۲۵۹$$

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\Longrightarrow\frac{\frac{۲۵۲۸}{۱۵}}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\Longrightarrow R=\frac{۲۵۲۸\pi}{۲۷۰۰}\#۰/۹۳۶۲R$$

۴ ک ـ کمان $\frac{3\pi}{11}$ رادیان را برحسب درجه و گراد حساب کنید.

$$\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}\Longrightarrow\frac{D}{180}=\frac{3\pi}{11\pi}\Longrightarrow D=\frac{540^\circ}{11}=49^\circ\ \text{و}\ 5'\ \text{و}\ 27''$$

$$\frac{G}{200}=\frac{R}{\pi}\Longrightarrow\frac{G}{200}=\frac{3\pi}{11\pi}\Longrightarrow G=\frac{600}{11}=54/545^{g}$$

۵ ک ـ اندازه های کمان های °۱۲۰، °۱۳۵، °۱۵۰، °۲۱۰، °۲۲۵، °۲۴۰، °۳۰۰، °۳۱۵، °۳۳۰ را برحسب رادیان حساب کنید.

حل: الف: °۱۲۰
$$\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}\Longrightarrow\frac{120}{180}=\frac{R}{\pi}\Longrightarrow R=\frac{2\pi}{3}$$

ب: °۱۳۵
$$\frac{135}{180}=\frac{R}{\pi}\Longrightarrow R=\frac{135\pi}{180}=\frac{3\pi}{4}$$

ج: °۱۵۰
$$\frac{150}{180}=\frac{R}{\pi}\Longrightarrow R=\frac{15\pi}{18}=\frac{5\pi}{6}$$

د: °۲۱۰
$$\frac{210}{180}=\frac{R}{\pi}\Longrightarrow R=\frac{210\pi}{180}=\frac{7\pi}{6}$$

ه: °۲۲۵
$$\frac{225}{180}=\frac{R}{\pi}\Longrightarrow R=\frac{225\pi}{180}=\frac{45\pi}{36}=\frac{5\pi}{4}$$

و: °۲۴۰
$$\frac{240}{180}=\frac{R}{\pi}\Longrightarrow R=\frac{240\pi}{180}=\frac{4\pi}{3}$$

ز: °۳۰۰
$$\frac{300}{180}=\frac{R}{\pi}\Longrightarrow R=\frac{300\pi}{180}=\frac{5\pi}{3}$$

ح: °۲۱۵
$$\frac{315}{180}=\frac{R}{\pi}\Longrightarrow R=\frac{315\pi}{180}=\frac{7\pi}{4}$$

ط: ۳۳۰
$$\frac{330}{180}=\frac{R}{\pi}\Longrightarrow R=\frac{330\pi}{180}=\frac{11\pi}{6}$$

۶ـ ک ـ مجموع سه زاویه ۱۵۰ گراد و اندازه‌های آنها به نسبت اعداد ۲ و۳ و ۴ میباشد مطلوب است تعیین اندازه‌های هریک ازآنها برحسب درجه و رادیان .

حل :

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{G}{۲۰۰}\Longrightarrow\frac{D}{۱۸۰}=\frac{۱۵۰}{۲۰۰}\Longrightarrow D=۱۳۵^\circ$$

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\Longrightarrow\frac{۱۳۵}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\Longrightarrow R=\frac{۳\pi}{۴}$$

مجموع نسبتها $۲+۳+۴=۹$

اندازه یك نسبت برحسب درجه $۱۳۵^\circ\div۹=۱۵^\circ$

اندازه یك زاویه برحسب درجه $۱۵^\circ\times۲=۳۰^\circ$

اندازه یك زاویه دیگر برحسب درجه $۱۵^\circ\times۳=۴۵^\circ$

اندازه زاویه سوم برحسب درجه $۱۵^\circ\times۴=\quad^\circ$

اندازه یك نسبت بر حسب رادیان $\frac{۳\pi}{۴}\div۹=\frac{\pi}{۱۲}$

اندازه یك زاویه برحسب رادیان $\frac{\pi}{۱۲}\times۲=\frac{\pi}{۶}$

اندازه یك زاویه دیگر برحسب رادیان $\frac{\pi}{۱۲}\times۳=\frac{\pi}{۴}$

اندازه زاویه سوم برحسب رادیان $\frac{\pi}{۱۲}\times۴=\frac{\pi}{۳}$

۷ـ ك ــ تعیین کنید درمدت ۴۸ دقیقه عقربه ساعت شمار چند رادیان‌را طی میکند.

حل :

رادیان	دقیقه‌زمانی
۲π	۱۲×۶۰
$x=\frac{۲\pi\times۴۸}{۱۲\times۶۰}=\frac{۲\pi}{۱۵}$	۴۸

۸ـ ك ــ دردایره‌ای‌بشعاع ۲/۵ سانتیمترطول کمانی برابر ۸/۷۵ سانتمتراست اندازه این کمان چند رادیان است.

حل : میدانیم یك رادیان برابراست با طول کمانی که اندازه‌اش برابر شعاع دایره میباشد پس تحقیق میکنیم که طول این‌کمان چند برابر شعاع دایره‌است.

$۸/۷۵\div۲/۵=۳/۵$ رادیان

۹ـ ك ــ در ۲۴ دقیقه بعدازظهر زاویه‌ای‌که دو عقربه ساعت با یکدیگرمیسازند چند رادیان است .

حل:

	درجه کمانی	دقیقه زمانی
	۳۶۰	۶۰
کمان پیموده شده بوسیله دقیقه شمار	$x=۱۴۴°$	۲۴

درجه کمانی	دقیقه زمانی
۳۶۰°	۱۲×۶۰
x	۲۴

ساعت شمار $x=\dfrac{۲۴\times۳۶۰}{۱۲\times۶۰}=۱۲°$

زاویه نیمه دقیقه شمار و ساعت شمار برحسب درجه $۱۴۴°-۱۲°=۱۳۲°$

$$\frac{D}{۱۸۰°}=\frac{R}{\pi}\Longrightarrow\frac{۱۳۲°}{۱۸۰°}=\frac{R}{\pi}\Longrightarrow R=\frac{۱۱\pi}{۱۵}$$

زاویه بین دو عقربه ساعت برحسب رادیان

۱۰- چه قوسی است که اندازه‌اش برحسب رادیان برابر است با خارج قسمت ۵π بر عده درجات آن.

حل: اگر اندازه قوس مطلوب x رادیان فرض شود داریم.

اندازه قوس برحسب درجه $\dfrac{D}{۱۸۰}=\dfrac{R}{\pi}\Longrightarrow\dfrac{D}{۱۸۰}=\dfrac{x}{\pi}\Longrightarrow D=\dfrac{۱۸۰x}{\pi}$

$$\frac{۵\pi}{\dfrac{۱۸۰x}{\pi}}=x\Longrightarrow ۱۸۰x^۲=۵\pi^۲\Longrightarrow x^۲=\frac{\pi^۲}{۳۶}\Longrightarrow x=\frac{\pi}{۶}$$

۱۱- زوایای چهارضلعی ABCD را برحسب درجه حساب کنید که در آن:

$A+B=\dfrac{\pi}{۲}$ و $B+C=۲۰۰g$ و $D+B=۲۱۰°$ باشد.

حل: ابتداء $\dfrac{\pi}{۲}$ رادیان و ۲۰۰ گراد را برحسب درجه بدست میآوریم.

$$\frac{R}{\pi}=\frac{D}{۱۸۰}\Longrightarrow\frac{\frac{\pi}{۲}}{\pi}=\frac{D}{۱۸۰}\Longrightarrow D=۹۰°\Longrightarrow\boxed{A+B=۹۰°}$$

$$\frac{G}{۲۰۰}=\frac{D}{۱۸۰}\Rightarrow\frac{۲۰۰}{۲۰۰}=\frac{D}{۱۸۰}\Rightarrow D=۱۸۰^\circ\Rightarrow\boxed{C+B=۱۸۰^\circ}$$

برای بدست آوردن زوایای چهارضلعی باید دستگاه زیر را حل کنیم .

$$\begin{cases} A+B=۹۰^\circ \\ B+C=۱۸۰^\circ \\ D+B=۲۱۰^\circ \\ A+B+C+D=۳۶۰^\circ \end{cases} \xRightarrow[\text{سه رابطه}]{\text{از جمع}} \begin{cases} \underbrace{A+B+C+D}+۲B=۴۸۰^\circ \\ ۳۶۰^\circ+۲B=۴۸۰^\circ \\ ۲B=۱۲۰^\circ\Rightarrow B=۶۰^\circ \end{cases}$$

$$A+B=۹۰^\circ\Rightarrow A+۶۰^\circ=۹۰^\circ\Rightarrow A=۳۰^\circ$$

$$B+C=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۶۰^\circ+C=۱۸۰^\circ\Rightarrow C=۱۲۰^\circ$$

$$B+D=۲۱۰^\circ\Rightarrow ۶۰^\circ+D=۲۱۰^\circ\Rightarrow D=۱۵۰^\circ$$

تمرین با جواب

۱۲ـ مجموع دو زاویه ۸۰ گراد و تفاضل آنها ۳۶° درجه میباشد اندازه هریك چند درجه‌است . جواب: ۵۴° و ۱۸°

۱۳ـ مطلوبست تعیین سه قوس برحسب گراد درصورتیکه مجموع اولی و دومی ۷۲° ومجموع دومی وسومی ۱۱۰ گرادومجموع اولی وسومی $\frac{۷\pi}{۲۰}$ رادیان است .

جواب : ۲۰ و ۴۰ و ۵۰ گراد

۱۴ـ مطلوبست اندازه زوایای مثلثی بر حسب درجه درصورتیکه یکی $9x$ درجه و دیگری $۲۲x$ گرادو سومی $\frac{\pi x}{۲۵}$ رادیان باشد. جواب ۹۹° و ۴۵° و ۳۶°

۱۵ـ اندازه زاویه‌ای را بر حسب درجه بدست‌آوریدکه تفاضل عکس اندازه آن بر حسب گراد از عکس اندازهٔ آن بر حسب درجه برابر نسبت اندازه آن برحسب رادیان بر ۸π باشد . (جواب ۱۸°)

۱۶ـ ″۱۰′۱۹°۱۵ چند گراد است. (جواب: ۱۷/۰۲۵)

۱۷ـ ۳۴/۰۵ گراد چند درجه‌است. (جواب : ″۴۲′۲۸°۳۰)

۱۸ــ تعیین کنید درمدت ۴۸ دقیقه عقربه‌ساعت شمار چند درجه کمان را طی می‌کند.
(جواب : °۲۴)

۱۹ــ معین کنید عقربه دقیقه شمار پس از ۲۷ دقیقه چه کمانی را برحسب گراد طی می‌کند . (جواب : ۱۸۰g)

۲۰ــ مجموع دو زاویه ۸۰ گراد وتفاضل آنها ۱۸ درجه است مقدار زوایا را برحسب درجه حساب کنید . (جواب : °۴۵ و °۲۷)

۲۱ــ درمثلث قائم‌الزاویه ($A = ۹۰°$) زاویه B برحسب گراد و زاویه C برحسب درجه اندازه‌گیری شده‌اند و بین قدر مطلق مقادیر آنها رابطه $B = ۵C$ ۱۸ بر قرار است زوایای B و C را برحسب رادیان حساب کنید جواب : $\frac{۲\pi}{۵}$ و $\frac{\pi}{۱۰}$

۲۲ــ زوایای مثلثی بترتیب x درجه و $\frac{\pi x}{۶۰}$ رادیان و $\frac{۵۰x}{۹}$ گراد است مطلوبست محاسبه زوایا برحسب درجه . (جواب : °۲۰ و °۶۰ و °۱۰۰)

۲۳ــ طول قوسی از دایره ۱۶ متر واندازهٔ آن برحسب درجه ′۲۴ °۲۵ است شعاع دایره را حساب کنید . (جواب: ۳۶/۰۹۱ متر)

۲۴ــ سطح دایره‌ای ۱۵۴ مترمربع است مطلوبست طول قوسی از این دایره که‌زاویهٔ مرکزی مقابل آن °۵۰ باشد (جواب : ۵۵/۹ متر)

۲۵ــ در مثلث غیر مشخص ABC زاویه B برحسب درجه و زاویه C برحسب گرادو زاویه A برحسب درجه اندازه‌گیری شده است و بین قدر مطلق اندازه‌آنها رابطه $۱۲A = ۳B = ۴C$ برقراراست مقدارزوایای A و B و C را برحسب درجه‌بدست‌آورید .

(جواب :

۲۶ ــ مطلوبست اندازه زاویه‌ای که عقربه‌های ساعت شمار و دقیقه شمار در یک ربع بعدازظهر با هم میسازند (برحسب درجه و گراد و رادیان) .

جواب : ′۳۰ °۸۲ و ۹۱/۶۶g و ۲۴ ÷ ۱۱π رادیان

۲۷ــ مجموع دو زاویه °۱۷ وتفاضل آنها ۱۷ گراد استآندو زاویه را برحسب‌درجه بدست آورید . (جواب : ′۹ °۱۶ ′۵۱)

۲۸ـ بنابر آنکه شعاع زمین ۴۰۰۰ میل باشد مطلوبست تعیین فاصله دو نقطه از سطح زمین که 22° اختلاف عرض جغرافیائی باهم دارند . (جواب : ۱۵۳۷ میل)

۲۹ـ سه زاویه x و y و z را برحسب درجه چنان تعیین کنید که مجموع x و y برابر 12° و مجموع x و z مساوی $\frac{\pi}{12}$ و مجموع y و z مساوی ۱۰ گراد باشد .

(جواب : $x=9^\circ$ و $y=3^\circ$ و $z=6^\circ$)

۳۰ـ درچهارضلعی محاطی ABCD زاویه C از زاویه B باندازه $\frac{\pi}{6}$ بیشتر است وزاویه B چهار برابر زاویه A میباشد اندازه زوایا را برحسب درجه بدست آورید .

(جواب: $A=60^\circ$ و $B=120^\circ$ و $C=150^\circ$ و $D=60^\circ$)

۳۱ـ در مثلث ABC زاویه A از زاویه C باندازه 63° بیشتر است واندازه زاویه B برحسب گراد از نصف زاویه A برحسب گراد ۵ گراد کمتر است اندازه زوایای مثلث را برحسب گراد بدست آورید . (جواب : $A=110g$ و $B=50g$ و $C=40g$)

فرمول‌های زیر بخاطر بسپارید

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \\[2ex] \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \\[2ex] 1+\operatorname{cotg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x} \\[2ex] \dfrac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1}{\sin^2 x} \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x = 1 \\[2ex] \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\operatorname{cotg} x} \\[2ex] \operatorname{cotg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} \end{cases}$$

قاعده ۹	خطوط مثلثاتی کمانی که انتهای آن در ربع اول میباشد همگی مثبت میباشند .
قاعده ۱۰	اگر انتهای کمانی در ربع دوم واقع باشد سینوس‌ش مثبت و سایر خطوط مثلثاتی آن منفی میباشند.
قاعده ۱۱	اگر انتهای کمانی در ربع سوم واقع باشد سینوس و کسینوس آن کمان منفی و tg و $cotg$ آن کمان مثبت میباشند.
قاعده ۱۲	اگر انتهای کمانی در ربع چهارم واقع باشد فقط کسینوس آن کمان مثبت است ولی سایر خطوط مثلثاتی آن منفی می‌باشند.

حل مسائل صفحه ۳۰ کتاب درسی

مطلوبست محاسبه خطوط مثلثاتی کمانهای زیر که یکی از خطوط مثلثاتی آنها داده شده و محل انتهای هر یك نیز معین شده است:

۳۲ـ ك ۱ـ $\sin m = \frac{۵}{۷}$ و انتهای کمان m در ربع اول است .

حل : چون انتهای کمان در ربع اول است پس تمام خطوط مثلثاتی کمان m مثبت است.

$$\cos^۲ m = ۱ - \sin^۲ m$$

$$\cos m = \sqrt{۱ - \sin^۲ m} = \sqrt{۱ - \frac{۲۵}{۴۹}} = \sqrt{\frac{۲۴}{۴۹}} = \frac{۲\sqrt{۶}}{۷}$$

$$tg\, m = \frac{\sin m}{\cos m} = \frac{\frac{۵}{۷}}{\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}} = \frac{۵}{۲\sqrt{۶}} = \frac{۵\sqrt{۶}}{۱۲}$$

$$cotg\, m = \frac{\cos m}{\sin m} = \frac{\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}}{\frac{۵}{۷}} = \frac{۲\sqrt{۶}}{۵}$$

۳۳- ك ۲ - ۲ $\sin m = -0/3$ و انتهای کمان m در ربع سوم است .

حل : میدانیم در ربع سوم $\sin m$ و $\cos m$ منفی بوده و $tg\,m$ و $cotg\,m$ مثبت می باشند .

$$\cos^2 m = 1 - \sin^2 m$$

$$\cos m = -\sqrt{1-\sin^2 m} = -\sqrt{1-0/09} = -\sqrt{\frac{91}{100}} = \frac{-\sqrt{91}}{10}$$

$$tg\,m = \frac{\sin m}{\cos m} = \frac{3\sqrt{91}}{91} \text{ و } cotg\,m = \frac{\cos m}{\sin m} = \frac{\sqrt{91}}{3}$$

۳۴- ك ۳- $\cos P = \frac{\sqrt{8}}{3}$ و انتهای کمان P در ربع چهارم است .

حل : میدانیم در ربع چهارم $\sin P$ و $cotg\,P$ و $tg\,P$ منفی میباشند و $\cos P$ مثبت‌است.

$$\sin P = -\sqrt{1-\cos^2 P} = -\sqrt{1-\frac{8}{9}} = -\frac{1}{3}$$

$$tg\,P = \frac{\sin P}{\cos P} = -\frac{1}{\sqrt{8}} = -\frac{\sqrt{8}}{8} = -\frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{-\sqrt{2}}{4}$$

$$cotg\,P = \frac{\cos P}{\sin P} = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$$

۳۵- ك ۴- $\cos q = -\frac{8}{11}$ و انتهای کمان q در ربع دوم است .

حل : میدانیم در ربع دوم $\cos q$ و $tg\,q$ و $cotg\,q$ منفی می‌باشند و $\sin q$ مثبت‌است.

$$\sin^2 q = 1 - \cos^2 q$$

$$\sin q = \sqrt{1-\cos^2 q} = \sqrt{1-\frac{64}{121}} = \frac{\sqrt{57}}{11}$$

$$tg\,q = \frac{\sin q}{\cos q} = -\frac{\sqrt{57}}{8} \text{ و } cotg\,q = \frac{\cos q}{\sin q} = \frac{-8}{\sqrt{57}} = \frac{-8\sqrt{57}}{57}$$

۳۶- ك ۵ - $tg\,\alpha = \sqrt{5}$ و انتهای کمان α در ربع سوم است .

حل : در ربع سوم $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ منفی و $cotg\,\alpha$ مثبت است .

$$cotg\alpha = \frac{۱}{\sqrt{۵}} = \frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

$$۱ + tg^۲\alpha = \frac{۱}{cos^۲\alpha} \Rightarrow ۱ + ۵ = \frac{۱}{cos^۲\alpha} \Rightarrow cos^۲\alpha = \frac{۱}{۶} \Rightarrow cos\alpha = \frac{-\sqrt{۶}}{۶}$$

$$sin^۲\alpha = ۱ - cos^۲\alpha = ۱ - \frac{۱}{۶} = \frac{۵}{۶} \Rightarrow sin\alpha = -\sqrt{\frac{۵}{۶}} = \frac{-\sqrt{۳۰}}{۶}$$

۳۷ ـ ۶ك ـ $cotg\beta = -۲/۴$ و انتهای کمان β در ربع چهارم است.

حل : در ربع چهارم $tg\beta$ و $sin\beta$ منفی و $cos\beta$ مثبت است.

$$tg\,\beta = \frac{۱}{cotg\beta} = \frac{-۱}{۲/۴} = \frac{-۱۰}{۲۴} = \frac{-۵}{۱۲}$$

$$\frac{۱}{cos^۲\beta} = ۱ + tg^۲\beta = ۱ + \frac{۲۵}{۱۴۴} = \frac{۱۶۹}{۱۴۴} \Rightarrow cos^۲\beta = \frac{۱۴۴}{۱۶۹}$$

$$cos\beta = \frac{۱۲}{۱۳}$$

$$sin\beta = -\sqrt{۱ - cos^۲\beta} = -\sqrt{۱ - \frac{۱۴۴}{۱۶۹}} = -\sqrt{\frac{۲۵}{۱۶۹}} = -\frac{۵}{۱۳}$$

۳۸ ك ۷ ـ $tgz = \frac{a}{b} > ۰$ و انتهای کمان z :

الف: در ربع سوم ب: در ربع اول :

(در هریك از حالات الف و ب، سایر خطوط مثلثاتی z برحسب a و b حساب شود).

حل : در هر دو حالت $cotg\,z = \frac{۱}{tgz} = \frac{b}{a}$

$$\frac{۱}{cos^۲z} = ۱ + tg^۲z = ۱ + \frac{a^۲}{b^۲} = \frac{a^۲+b^۲}{b^۲}\quad cos^۲z = \frac{b^۲}{a^۲+b^۲}$$

ب: $cosz = \frac{b}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ و الف : $cosz = \frac{-b}{\sqrt{b^۲+a^۲}}$

$$sin^۲z = ۱ - cos^۲z = ۱ - \frac{b^۲}{b^۲+a^۲} = \frac{a^۲}{a^۲+b^۲}$$

ب: $\sin z = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و الف: $\sin z = \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

۳۹ـ ك ۸ـ $\sin y = \frac{a-b}{a+b}$ و $a > b > 0$ و انتهای کمان y در ربع دوم است.

حل: $\cos y = -\sqrt{1-\sin^2 y} = -\sqrt{\frac{4ab}{(b+a)^2}} = -\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$

$$tg\, y = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{a-b}{-2\sqrt{ab}} = \frac{-(a-b)\sqrt{ab}}{+2ab}$$

$$cotg\, y = \frac{1}{tg\, y} = -\frac{2ab}{(a-b)\sqrt{ab}} = \frac{-2ab\sqrt{ab}}{(a-b)ab} = -\frac{2\sqrt{ab}}{(a-b)}$$

۴۰ـ ك ۹ـ عبارت زیر را فقط برحسب $\sin x$ بنویسید: $5\cos^2 x - 7\, tg\, x \cos x$

حل: $5(1-\sin^2 x) - \frac{7\sin x \cos x}{\cos x} = -5\sin^2 x - 7\sin x + 5$

۴۱ـ ك ۱۰ـ عبارت $A = \frac{9\sin x}{tg\, x + cotg\, x}$ را فقط برحسب $\cos x$ بنویسید.

حل: $A = \frac{9\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{9\sin^2 x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x}$

$$A = 9\sin^2 x \cos x = 9\cos x(1-\cos^2 x) = 9\cos x - 9\cos^3 x$$

۴۲ـ ك ۱۱ـ عبارت $A = \frac{2}{\sin^2 x} + \frac{2}{\cos^2 x}$ را برحسب $tg\, x$ بنویسید.

حل: $A = \frac{2(1+tg^2 x)}{tg^2 x} + 2(1+tg^2 x)$

$$A = \frac{2(1+tg^2 x) + 2(1+tg^2 x)tg^2 x}{tg^2 x}$$

$$A = \frac{2(1+tg^2 x)(1+tg^2 x)}{tg^2 x} = \frac{2(1+tg^2 x)^2}{tg^2 x}$$

۴۳ـ ك ۱۲ـ $\sin x$ را یکدفعه برحسب $\cos x$ و یکدفعه برحسب $tg\, x$ حساب کنید

حل :
$$\sin^2 x = 1-\cos^2 x \Longrightarrow \sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$$

$$1+\operatorname{cotg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \Longrightarrow 1+\frac{1}{tg^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\frac{1+tg^2 x}{tg^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} \Longrightarrow \sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x}$$

$$\sin x = \pm\frac{tg\,x}{\sqrt{1+tg^2 x}}$$

۴۴ ـ ک ۱۳ ـ $\cos x$ را یکدفعه برحسب $\sin x$ و یکدفعه برحسب $\operatorname{cotg} x$ بنویسید .

حل :
$$\cos^2 x = 1-\sin^2 x \Longrightarrow \cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$$

$$1+tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Longrightarrow 1+\frac{1}{\operatorname{cotg}^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{cotg}^2 x+1}{\operatorname{cotg}^2 x} \Longrightarrow \cos^2 x = \frac{\operatorname{cotg}^2 x}{1+\operatorname{cotg}^2 x} \Longrightarrow \cos x = \frac{\pm\operatorname{cotg} x}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 x}}$$

۴۵ ـ ک ۱۴ ـ $tg\,x$ رایکدفعه برحسب $\sin x$ و یکدفعه برحسب $\cos x$ حساب کنید .

حل :
$$tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\mp\sqrt{1-\sin^2 x}}$$

$$tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$$

۴۶ ـ ک ۱۵ ـ مطلوبست محاسبه $y = \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}$ در صورتیکه $tg\,x = \frac{5}{12}$ و انتهای کمان x در ربع سوم باشد .

حل : چون انتهای کمان x در ربع سوم است پس $\sin x$ و $\cos x$ منفی میباشد و برای محاسبه y ابتداء $\sin x$ و $\cos x$ را حساب می‌کنیم و سپس y را بدست میآوریم .

$$1+tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Longrightarrow 1+\frac{25}{144} = \frac{1}{\cos^2 x} \Longrightarrow \frac{169}{144} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\cos x^2 = \frac{144}{169} \Longrightarrow \cos x = \frac{-12}{13}$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \Longrightarrow \sin x = \frac{-5}{13}$$

$$y = \frac{\frac{-5}{13} \times \frac{-12}{13}}{\frac{-5}{13} - \frac{12}{13}} = \frac{\frac{60}{13 \times 12}}{\frac{-17}{13}} = \frac{-60}{221}$$

۴۷ـ ك ۱۶ـ : مطلوب است محاسبهٔ $y = (tg x + cotg x)\,(\cos x^2 - \sin^2 x)$

درصورتی‌که $\sin x = \frac{7}{25}$ و انتهای کمان x در ربع دوم باشد .

$$y = \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right)(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$y = \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x}\right)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x \sin x}$$

برای محاسبه y ابتداء باید $\cos x$ را بدست‌آورد و چون انتهای کمان x در ربع‌دوم است پس $\cos x$ منفی میباشد.

$$\sin x = \frac{7}{25} \quad \text{و} \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{49}{625} = \frac{576}{625} \Longrightarrow \cos x = \frac{-24}{25}$$

$$y = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x \sin x} = \frac{\frac{576}{625} - \frac{49}{625}}{\frac{-24}{25} \times \frac{7}{25}} = \frac{\frac{527}{625}}{\frac{-168}{625}} = \frac{-527}{168}$$

۴۸ـ ك ۱۷ـ در صورتی‌که داشته‌باشیم : $\sin x - \cos x = \frac{1}{5}$ ، خطوط‌مثلثاتی کمان x را حساب‌کنید .

حل :
$$\sin x - \cos x = \frac{1}{5} \Longrightarrow \sin x = \frac{1}{5} + \cos x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Longrightarrow \left(\frac{1}{5} + \cos x\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\frac{۱}{۲۵}+\cos^۲ x+\frac{۲}{۵}\cos x+\cos^۲ x=۱\Longrightarrow ۲\cos^۲ x+\frac{۲}{۵}\cos x-\frac{۲۴}{۲۵}=۰$$

$$۵۰\cos^۲ x+۱۰\cos x-۲۴=۰\Longrightarrow ۲۵\cos^۲ x+۵\cos x-۱۲=۰$$

$$\boxed{\cos x=\frac{۳}{۵} \text{ و } \frac{-۴}{۵}} \qquad \sin x=\frac{۱}{۵}+\cos x$$

$$\cos x=\frac{۳}{۵}\Longrightarrow \sin x=\frac{۱}{۵}+\frac{۳}{۵}=\frac{۴}{۵} \text{ و } tg x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{۴}{۳} \text{ و } cotg x=\frac{۳}{۴}$$

$$\begin{cases} \sin x=\frac{۱}{۵}+\cos x \quad \text{و} \quad \cos x=\frac{-۴}{۵} \\ \sin x=\frac{۱}{۵}-\frac{۴}{۵}=\frac{-۳}{۵} \text{ و } \quad tg x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{۳}{۴} \text{ و } cotg x=\frac{۴}{۳} \end{cases}$$

۴۹ـ ك ۱۸ : درصورتی که داشته باشیم: $tg x-cotg x=\frac{۷}{۱۲}$ خطوط مثلثاتی کمان x را حساب کنید . (انتهای کمان x در ربع اول است) .

حل :
$$tg x-cotg x=\frac{۷}{۱۲}\Longrightarrow tg x-\frac{۱}{tg x}=\frac{۷}{۱۲}$$

$$۱۲ tg^۲ x-۷ tg x-۱۲=۰$$

$$tg x=-\frac{۳}{۴} \quad \text{قابل قبول نیست} \qquad \text{و} \quad tg x=\frac{۴}{۳}$$

چون انتهای کمان x در ربع اول است همه خطوط مثلثاتی x مثبت است .

$$\begin{cases} tg x=\frac{۴}{۳} \qquad cotg x=\frac{۱}{tg x}=\frac{۳}{۴} \\ ۱+tg^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}\Longrightarrow ۱+\frac{۱۶}{۹}=\frac{۱}{\cos^۲ x}\Longrightarrow \frac{۲۵}{۹}=\frac{۱}{\cos^۲ x} \\ \cos^۲ x=\frac{۹}{۲۵}\Longrightarrow \cos x=\frac{۳}{۵} \end{cases}$$

$$\sin^۲ x=۱-\cos^۲ x=۱-\frac{۹}{۲۵}=\frac{۱۶}{۲۵}\Longrightarrow \sin x=\frac{۴}{۵}$$

قاعده ۴۱	sin و cos هر کمان همواره بین دو عدد ۱ و ۱ — قراردارد. یعنی‌همیشه $-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$ میباشد ولی tg و cotg مقادیر $\pm\infty$ را اختیار می‌کند .

چند مسأله خارج از کتاب درسی

۵هـ اگر a و b دوعدداختیاری‌باشند ثابت‌کنیدهمواره : $\cos\alpha \leqslant \frac{a^2+b^2}{2ab}$.

حل: اگر a و b متحدالعلامه باشند خواهیم داشت .

$$\frac{a^2+b^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-2ab+2ab}{2ab}=\frac{(a-b)^2+2ab}{2ab}$$

$$\frac{a^2+b^2}{2ab}=\frac{(a-b)^2}{2ab}+\frac{2ab}{2ab}=\frac{(a-b)^2}{2ab}+1$$

چون aو b متحدالعلامه‌اندپس حاصل عبارت بالابزرگتر از یك میشود وجون‌همواره $\cos\alpha \leqslant 1$ میباشد پس اگرaو b متحدالعلامه باشند $\cos\alpha \leqslant \frac{a^2+b^2}{2ab}$ میباشد .

اگر a و b مختلف‌العلامه باشند میتوان نوشت :

$$\frac{a^2+b^2}{2ab}=\frac{(a+b)^2-2ab}{2ab}=\frac{(a+b)^2}{2ab}-1$$

اگر a و b مختلف العلامه باشند حاصل عبارت بالا همواره کوچکتر از ۱ — و یا مساوی ۱ — می‌شود پس قدر مطلق بزرگتر از یك است و در این‌حالتهم‌می‌توان نوشت:

$$\cos\alpha \leqslant \left|\frac{a^2+b^2}{2ab}\right|$$

۶هـدر صورتیکه $\alpha \leqslant 90$ باشد ثابت‌کنیدنامساوی $\sin\alpha+\cos\alpha \geqslant 1$ همواره‌برقرار میباشد .

حل :میدانیم خطوط. مثلثاتی زوایای حاده همه مثبت میباشند پس‌می‌توان نوشت :

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=1+2\sin\alpha\cos\alpha$$

چون $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ بزرگتراز صفراند پس $1+2\cos\alpha\sin\alpha \geqslant 1$

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 \geqslant 1 \Longrightarrow \sin\alpha+\cos\alpha \geqslant 1$$

۵۲ـ اگر انتهای کمان α در ربع اول باشد ثابت کنید نامساوی $\sin\alpha\cos\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ همواره برقرار است.

حل: می‌توانیم بنویسیم $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 \geqslant 0$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha \geqslant 0 \Longrightarrow 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha \geqslant 0$$

$$-2\sin\alpha\cos\alpha \geqslant -1 \Longrightarrow \sin\alpha\cos\alpha \leqslant \frac{1}{2}$$

۵۳ـ اگر $0 < \alpha < 90^\circ$ باشد ثابت کنید همواره $tg\alpha + cotg\alpha \geqslant 2$ میباشد

حل:
$$tg\alpha + cotg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$tg\alpha + cotg\alpha = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

چون $\sin\alpha\cos\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ است پس $\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} \geqslant 2$ میشود پس $tg\alpha + cotg\alpha \geqslant 2$ میگردد

۵۴. در صورتیکه $cotg\,x = \frac{8}{15}$ و انتهای کمان x در ربع سوم واقع باشد سایر خطوط مثلثاتی x را بدست آورید.

جواب: $\cos x = \frac{-8}{17}$ و $\sin x = \frac{-15}{17}$ و $tg\,x = \frac{15}{8}$

۵۵ـ در صورتیکه $\sin x = \frac{-4}{5}$ و انتهای کمان x در ربع چهارم واقع باشد سایر خطوط مثلثاتی x را بدست آورید.

جواب: $cotg\,x = \frac{-3}{4}$ و $tg\,x = \frac{-4}{3}$ و $\cos x = \frac{3}{5}$

۵۶ـ در چه صورت تساوی $\sin^2\alpha = \frac{(a+b)^2}{4ab}$ برقرار میباشد

جواب: $a = \pm b$

۵۷ـ اگر α زاویه حاده باشد ثابت کنید $\sin\alpha + \cos\alpha \leqslant \sqrt{2}$ میباشد

۵۸ ـ اولاً تحقیق کنید که عبارت $\frac{۲m}{m^{۲}+۱}$ بازاء جمیع‌مقادیر m می‌تواند سینوس یک کمان باشد ثانیاً: اگر انتهای این کمان در ربع چهارم واقع باشد سایر خطوط مثلثاتی این کمان را بدست آورید

۵۹ ـ اگر a عددی مثبت باشد بازاء چه مقادیر a رابطه $\cos x=\frac{۲a-۲}{۲a}$ می‌تواند صحیح باشد .

۶۰ـ بازاء چه مقدار a نامساوی $۴\leqslant\frac{۵\sin^{۲}a+۶\sin a}{\sin^{۲}a}$ برقرار میباشد.

(جواب : $۳۶۰^{\circ}>a>۱۸۰^{\circ}$)

۶۱ـ درصورتیکه $tg\,x=\frac{۳}{۴}$ وانتهای کمان x در ربع سوم واقع باشد حاصل عبارت:

$A=\frac{۳\sin x+۲\cos x}{۱۷-۲۵\sin x\cos x}$ را بدست آورید. (جواب: $A=-۱$)

۶۲ـ درصورتیکه $\sin x=\frac{۵}{۱۳}$ و انتهای کمان x در ربع دوم واقع باشد حاصل عبارت $B=۶tg\,x+۵\cot g\,x+۱۳\sin x$ را حساب کنید .

(جواب : $B=-۹/۵$)

۶۳ ـ اگر انتهای کمان x در ربع سوم واقع باشد و $tg\,x=\frac{۷}{۲۴}$ باشدحاصل‌عبارت $C=(tg\,x+\cot g\,x)(\cos^{۴}x-\sin^{۴}x)$ را بدست آورید .

(جواب : $\frac{۵۲۷}{۱۶۸}$)

۶۴ـ درصورتیکه $\frac{tg\,x-۳}{۲tg\,x+۱}=\frac{۱۵}{۲}$ باشد و انتهای کمان x در ربع چهارم واقع باشد حاصل عبارت $y=۲\cot g\,x-۲\sin x+\cos x$ را بدست آورید .

(جواب : $y=-۲$)

۶۵ـ درصورتیکه $\cot g\,x=m+\frac{۱}{m}$ و انتهای کمان x درربع‌اول باشد دراینصورت سایر خطوط مثلثاتی x را بدست آورید .

جواب: $\sin x = \frac{m}{\sqrt{(m^2+1)^2+m^2}}$ و $tg\, x = \frac{m}{m^2+1}$

$$\cos x = \frac{m^2+1}{\sqrt{(m^2+1)^2+m^2}}$$

۶۶- درصورتیکه $\cos x = -\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ و انتهای کمان x در ربع چهارم واقع باشد ، سایر خطوط مثلثاتی x را بدست آورید .

$$\sin x = \sqrt{2}\,(\sqrt{2}+1)\sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{3}-1}$$

$$tg\, x = \sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{3}-1}$$

۶۷- درصورتیکه $tg\, x = \frac{a^2-1}{2a}$ و انتهای کمان x در ربع اول باشد سایر خطوط مثلثاتی x را بدست آورید .

جواب: $\sin x = \frac{a^2-1}{a^2+1}$ و $\cos x = \frac{2a}{a^2+1}$ و $cotg\, x = \frac{2a}{a^2-1}$

۶۸- درصورتیکه $tg\, x = \frac{24}{7}$ وانتهای کمان x در ربع سوم باشد سایر خطوط مثلثاتی x را بدست آورید .

جواب : $\sin x = \frac{-24}{25}$ و $\cos x = \frac{-7}{25}$ و $cotg\, x = \frac{7}{24}$

۶۹- درصورتیکه $\cos x = \frac{12}{13}$ وانتهای کمان x در ربع چهارم باشد سایر خطوط مثلثاتی x را بدست آورید .

جواب : $cotg\, x = \frac{-12}{5}$ و $tg\, x = \frac{-5}{12}$ و $\sin x = \frac{-5}{13}$

۷۰- درصورتیکه $tg\, x = \frac{-2\sqrt{2}}{7}$ و انتهای کمان x در ربع دوم واقع باشد سایر

خطوط مثلثاتی x را بدست آورید .

جواب : $\sin x = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ و $\cos x = \frac{-7}{9}$ و $\cot g\, x = \frac{-7}{4\sqrt{2}}$

جدول مثلثاتی

a	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
a	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin a$	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$+1$
$\cos a$	$+1$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0
$tg\, a$	0	$2-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+1$	$\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\pm\infty$
$cotg\, a$	$\pm\infty$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$+1$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$2-\sqrt{3}$	0

قاعده ۱۳	سینوس کمان مضرب صحیحی از π برابر صفر میباشد $\sin\pi = \sin 2\pi = \sin 3\pi = \sin 4\pi = \cdots = 0$
قاعده ۱۴	tg کمان مضرب صحیحی از π برابر صفر میباشد $tg\,\pi = tg\,2\pi = tg\,3\pi = tg\,4\pi = \cdots = 0$
قاعده ۱۵	$cotg$ کمان مضرب صحیحی از π برابر ∞ میباشد $cotg\,\pi = cotg\,2\pi = cotg\,3\pi = cotg\,4\pi = \cdots = \infty$
قاعده ۱۶	$\cos$ مضرب زوج π برابر یك میباشد $\cos 2\pi = \cos 4\pi = \cos 6\pi = \cdots = 1$

قاعده ۱۷

cos مضرب فرد π برابر ۱ — میباشد

$$\cos\pi = \cos 3\pi = \cos 5\pi = \cos 7\pi = \cdots = -1$$

قاعده ۱۸

cos و cotg مضرب فردی از $\frac{\pi}{2}$ برابر صفر میباشد

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2} = \cos\frac{5\pi}{2} = \cos\frac{7\pi}{2} = \cdots = 0$$

$$\cot g\frac{\pi}{2} = \cot g\frac{3\pi}{2} = \cot g\frac{5\pi}{2} = \cot g\frac{7\pi}{2} = \cdots = 0$$

قاعده ۱۹

tg مضرب فردی از $\frac{\pi}{2}$ برابر ∞ میباشد

$$tg\frac{\pi}{2} = tg\frac{3\pi}{2} = tg\frac{5\pi}{2} = tg\frac{7\pi}{2} = \cdots = \infty$$

قاعده ۲۰

سینوس مضرب زوج و نیم π (۲/۵π و ۴/۵π و ۶/۵π) برابر یک میباشد

$$\sin\frac{5\pi}{2} = \sin\frac{9\pi}{2} = \sin\frac{13\pi}{2} = \sin\frac{17\pi}{2} = \cdots = 1$$

$\frac{5}{2}\pi = 2/5\pi$ و $\frac{9\pi}{2} = 4/5\pi$ و $\frac{13\pi}{2} = 6/5\pi$

قاعده ۲۱

سینوس مضرب فرد و نیم π (۱/۵π و ۳/۵π و ۵/۵π) برابر ۱ — میباشد

$$\sin\frac{3\pi}{2} = \sin\frac{7\pi}{2} = \sin\frac{11\pi}{2} = \sin\frac{15\pi}{2} = \cdots = -1$$

$\frac{3\pi}{2} = 1/5\pi$ و $\frac{7\pi}{2} = 3/5\pi$ و $\frac{11\pi}{2} = 5/5\pi$ و ...

تذکر مهم: جدول و قواعد بالا برای حل مسائل محاسباتی بسیار لازم است وجدول مثلثاتی درحل معادلات نیز بکار بردمیشود ودر کلاس پنجم وششم ودر هر کلاسی که بامثلثات سروکار داشته باشید لازم است که آنها را خوب بدانید.

حل مسائل صفحه ۳۶ کتاب درسی

تمرین: اگر $x=\frac{\pi}{6}$ و $y=\frac{\pi}{4}$ و $Z=\frac{\pi}{3}$ باشد. مطلوبست محاسبه مقدار عددی A و B و C و E و F درصورتیکه داشته باشیم:

۷۱- ك ۱:

$$A=\frac{\sin x+tg Z-\sin x\cos\frac{\pi}{2}}{\cos Z+\cos x\sin\pi+cotg\, x}$$

حل:

$$A=\frac{\sin\frac{\pi}{6}+tg\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6}\sin\pi+cotg\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{1}{2}+\sqrt{3}-\frac{1}{2}(0)}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times 0+\sqrt{3}}=1$$

۷۲- ك ۲:

$$B=\frac{2\sin\frac{3\pi}{2}(tg\, y-\cos^2 x)}{cotg\, y+\cos^2 Z+\cos\pi}$$

حل:

$$B=\frac{2\times -1(tg\frac{\pi}{4}-\cos^2\frac{\pi}{6})}{cotg\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{3}-1}=\frac{-2\,(1-\frac{3}{4})}{1+\frac{1}{4}-1}$$

$$B=\frac{-2\,(\frac{4-3}{4})}{\frac{1}{4}}=\frac{-2(\frac{1}{4})}{\frac{1}{4}}=-2$$

۷۳- ك ۳:

$$C=\frac{3\sin x(6\sin^2 y-\cos^2\frac{\pi}{2}+2tg\, y)}{tg\, x\, tg\,\pi+\cos^2 x+4\cos^2 Z}$$

حل :

$$C=\frac{3\sin\frac{\pi}{6}\left(6\sin^2\frac{\pi}{4}-0+2tg\frac{\pi}{4}\right)}{\left(tg\frac{\pi}{6}\right)\times 0+\cos^2\frac{\pi}{6}+4\cos^2\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{3}{2}\left(6\times\frac{2}{4}+2\right)}{0+\frac{3}{4}+4\times\frac{1}{4}}$$

$$C=\frac{1/5(3+2)}{\frac{7}{4}}=\frac{7/5}{\frac{7}{4}}=\frac{30}{7}$$

۷۴- ک ۴-

$$D=\frac{6\sin^2x\sin z\left(tg^2z\sin\frac{\pi}{2}-cotg\frac{\pi}{2}-tg^2x\right)}{cotg\,z-\cos y\,cotg\frac{3\pi}{2}}$$

حل :

$$D=\frac{6\sin^2\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}\left(tg^2\frac{\pi}{3}\times 1-0-tg^2\frac{\pi}{6}\right)}{cotg\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{4}\times 0}$$

$$D=\frac{6\times\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\left(3-\frac{1}{3}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{3}-0}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(\frac{9-1}{3}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=6$$

۷۵- ک ۵-

$$E=\frac{\sin\frac{\pi}{2}\sin x\,tg^2y+\sin z\,cotg\,x}{2\cos\pi\left(2cotg^2y-2\cos z-tg^2z\right)}$$

حل :

$$E=\frac{1\times\sin\frac{\pi}{6}tg^2\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\,cotg\frac{\pi}{6}}{2\times-1\left(2cotg^2\frac{\pi}{4}-2\cos\frac{\pi}{3}-tg^2\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$E=\frac{1\times\frac{1}{2}\times 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}}{-2\left(2\times 1-2\times\frac{1}{2}-3\right)}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{-2(2-1-3)}=\frac{\frac{4}{2}}{+4}=\frac{1}{2}$$

۷۶ـ ك ۶ـ

$$F=\frac{\cos x\,tg\,z\sin\frac{\pi}{۲}-۶\cos^۲ x\cos ۰}{۲\cot g^۲\frac{\pi}{۴}\sin y(۲\sin z\,tg^۲ y+\cos y\sin ۰)}$$

حل :

$$F=\frac{\cos\frac{\pi}{۶}tg\frac{\pi}{۳}\times ۱-۶\cos^۲\frac{\pi}{۶}\times ۱}{۲\cot g^۲\frac{\pi}{۴}\sin\frac{\pi}{۴}(۲\sin\frac{\pi}{۳}tg^۲\frac{\pi}{۴}+\cos\frac{\pi}{۴}\times ۰)}$$

$$F=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\sqrt{۳}\times ۱-۶\times\frac{۳}{۴}\times ۱}{۲\times ۱\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times ۰)}$$

$$F=\frac{\frac{۳}{۲}-\frac{۹}{۲}}{\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}}=\frac{-\frac{۶}{۲}}{\sqrt{۶}}=\frac{-۳}{\sqrt{۶}}=\frac{-۳\sqrt{۶}}{۶}=\frac{-\sqrt{۶}}{۲}$$

قاعده۲۲

طول ضلع n ضلعی منتظم محاطی از فرمول زیر $C_n=۲R\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}$ بدست میآید .

۷۷ـ ك ۷ : طول ضلع‌هشت ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای بشعاع R برابر است با $C_۸=R\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$ ؛ با استفاده از این دستور ، خطوط مثلثاتی کمان °۲۲/۵ را حساب کنید.

حل :

$$C_n=۲R\sin\frac{۱۸۰}{n}\Longrightarrow C_۸=۲R\sin\frac{۱۸۰^\circ}{۸}$$

$$R\sqrt{۲-\sqrt{۲}}=۲R\sin ۲۲/۵^\circ\Longrightarrow\sin ۲۲/۵^\circ=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$$

$$\cos^۲ ۲۲/۵^\circ=۱-\sin^۲ ۲۲/۵^\circ=۱-\frac{۲-\sqrt{۲}}{۴}=\frac{۲+\sqrt{۲}}{۴}$$

$$\cos ۲۲/۵^\circ=\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$$

$$tg\,۲۲/۵^\circ = \frac{\sin ۲۲/۵^\circ}{\cos ۲۲/۵^\circ} = \sqrt{\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲+\sqrt{۲}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{۲}(\sqrt{۲}-۱)}{\sqrt{۲}(\sqrt{۲}+۱)}}$$

$$tg\,۲۲/۵^\circ = \sqrt{\frac{(\sqrt{۲}-۱)^۲}{۲-۱}} = \sqrt{۲}-۱$$

$$cotg\,۲۲/۵^\circ = \frac{۱}{tg\,۲۲/۵^\circ} = \frac{۱}{\sqrt{۲}-۱} = \sqrt{۲}+۱$$

۷۸ـ ك ۸ : طول ضلع ده ضلعی محاط در دایره‌ای بشعاع R برابراست با :

$C_{۱۰} = \frac{R}{۲}(\sqrt{۵}-۱)$. بااستفاده‌از این‌دستور خطوط مثلثاتی کمان °۱۸ راحساب‌کنید.

حل :
$$C_n = ۲R\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n} \Longrightarrow C_{۱۰} = ۲R\sin\frac{۱۸۰^\circ}{۱۰} = ۲R\sin ۱۸^\circ$$

$$\frac{R}{۲}(\sqrt{۵}-۱) = ۲R\sin ۱۸^\circ \Longrightarrow \sin ۱۸^\circ = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۴}$$

$$\cos^۲ ۱۸^\circ = ۱-\sin^۲ ۱۸^\circ = ۱-\frac{۵+۱-۲\sqrt{۵}}{۱۶} = \frac{۱۰+۲\sqrt{۵}}{۱۶}$$

$$\cos ۱۸^\circ = \frac{\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}}{۴} \quad \text{و} \quad cotg\,۱۸^\circ = \frac{\cos ۱۸^\circ}{\sin ۱۸^\circ} = \frac{\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}}{\sqrt{۵}-۱}$$

$$cotg\,۱۸^\circ = \frac{\sqrt{(۱۰+۲\sqrt{۵})}\times(\sqrt{۵}+۱)}{۴}$$

۷۹ـ ك ۹ : طول ضلع دوازده‌ضلعی منتظم محاط دردایره‌ای بشعاع R ، برابر است

با $C_{۱۲} = \frac{R}{۲}(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})$. با استفاده از این دستور ، خطوط مثلثاتی کمان °۱۵ را حساب

کنید .

حل :
$$C_n=2R\sin\frac{180^\circ}{n}\Longrightarrow C_{12}=2R\sin\frac{180^\circ}{12}=2R\sin 15^\circ$$

$$\frac{R}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})=2R\sin 15^\circ \Longrightarrow \sin 15^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ=\sqrt{1-\sin^2 15^\circ}=\sqrt{1-\frac{6+2-2\sqrt{12}}{16}}$$

$$\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{8+2\sqrt{12}}}{4}=\frac{\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$tg\,15^\circ=\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{6-2}$$

$$tg\,15^\circ=\frac{6+2-2\sqrt{12}}{4}=2-\sqrt{3}$$

$$cotg\,15^\circ=\frac{1}{tg\,15^\circ}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$$

حل مسائل صفحه ۴۱ کتاب درسی

تمرین ـ عبارات زیر را ساده کنید:

۸۰ـ ك ۱:
$$A=\frac{(\sin a+\cos a+1)(\sin a+\cos a-1)}{2\sin a}$$

حل :
$$A=\frac{\sin^2 a+\sin a\cos a-\sin a+\sin a\cos a+\cos^2 a-\cos a+}{2\sin a}$$

$$+\frac{\sin a+\cos a-1}{2\sin a}$$

$$A=\frac{1+2\sin a\cos a-1}{2\sin a}=\frac{2\sin a\cos a}{2\sin a}=\cos a$$

۸۱- ک۲.

$$B=\frac{\sin^4 a}{tg^2 a-\sin^2 a}-1$$

حل :

$$B=\frac{\sin^4 a}{\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}-\sin^2 a}-1=\frac{\sin^4 a}{\frac{\sin^2 a-\sin^2 a\cos^2 a}{\cos^2 a}}-1$$

$$B=\frac{\sin^4 a\cos^2 a}{\sin^2 a(1-\cos^2 a)}-1=\frac{\sin^2 a\cos^2 a}{\sin^2 a}-1=\cos^2 a-1$$

$$B=-(1-\cos^2 a)=-\sin^2 a$$

۸۲- ک۲:

$$C=1+\frac{\cos^2 y-\sin^2 x}{\sin^2 x\sin^2 y}$$

حل :

$$C=\frac{\sin^2 x\sin^2 y+\cos^2 y-\sin^2 x}{\sin^2 x\sin^2 y}=\frac{-\sin^2 x(1-\sin^2 y)+\cos^2 y}{\sin^2 x\sin^2 y}$$

$$C=\frac{-\sin^2 x\cos^2 y+\cos^2 y}{\sin^2 x\sin^2 y}=\frac{\cos^2 y(1-\sin^2 x)}{\sin^2 x\sin^2 y}$$

$$C=\frac{\cos^2 y\cos^2 x}{\sin^2 x\sin^2 y}=cotg^2 x\,cotg^2 y$$

۸۳- ک۲ :

$$D=\frac{1}{\cos^4 a}-\frac{3tg^2 a}{\cos^2 a}$$

حل :

$$D=\left(\frac{1}{\cos^2 a}\right)^2-3tg^2 a(1+tg^2 a)$$

$$D=(1+tg^2a)^3-3tg^2a-3tg^4a$$

$$D=1+tg^6a+3tg^2a+3tg^4a-3tg^2a-3tg^4a$$

$$D=1+tg^6a$$

۸۴- ک ۵ :

$$E=\frac{(1+\cos b)(tg\,b-\sin b)}{\sin^3 b}$$

حل :

$$E=\frac{(1+\cos b)(\frac{\sin b}{\cos b}-\sin b)}{\sin^3 b}=\frac{(1+\cos b)[\sin b(\frac{1-\cos b}{\cos b})]}{\sin^3 b}$$

$$E=\frac{(1+\cos b)(1-\cos b)}{\sin^2 b\cos b}=\frac{1-\cos^2 b}{\sin^2 b\cos b}=\frac{\sin^2 b}{\sin^2 b\cos b}=\frac{1}{\cos b}$$

۸۵- ک ۶ :

$$F=\sin^2 x+\frac{\sin^4 x}{1-\sin^2 x}$$

حل :

$$F=\frac{\sin^2 x-\sin^4 x+\sin^4 x}{1-\sin^2 x}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=tg^2x$$

۸۶- ک ۷ :

$$G=\frac{(\sin x+\cos x)^2-tg\,x\,cotg\,x}{\sin x\cos x}$$

حل :

$$G=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x-1}{\cos x\sin x}=\frac{1+2\sin x\cos x-1}{\sin x\cos x}$$

$$G=\frac{2\sin x\cos x}{\sin x\cos x}=2$$

۸۷- ک ۸ :

$$H=\sin^6 a+\cos^6 a+3\sin^2 a\cos^2 a$$

حل :

$$H=(\sin^2 a)^3+\cos^6 a+3\cos^2 a\sin^2 a$$

$$H=(1-\cos^2 a)^3+\cos^6 a+3\cos^2 a(1-\cos^2 a)$$

$$H=1-\cos^6 a-3\cos^2 a+3\cos^4 a+\cos^6 a+3\cos^2 a-3\cos^4 a=1$$

قاعده۲۴

قاعده خیلی مهم

برای اثبات درستی اتحادها **اولاً** ـ باید فرمولهای مثلثاتی را خوب یادگرفت **ثانیاً** ـ باید دقت کرد که در طرف دوم تساوی کدام یك از خطوط مثلثاتی موجود است و در نتیجه خطوط مثلثاتی طرف اول را با استفاده از فرمولها به خطوط مثلثاتی طرف دوم تبدیل نمود **ثالثاً** ـ باید دقت کرد که در طرف دوم تساوی اگر پرانتز وجود ندارد و در طرف اول تساوی پرانتز موجود است باید پرانتز طرف اول را از بین برد **رابعاً** ـ اگر درطرف دوم تساوی یك کسر و در طرف اول تساوی چند کسر موجود باشد باید از طرف اول تساوی مخرج مشترك گرفت و **برعکس** اگر طرف اول تساوی یك کسر و درطرف دوم تساوی چند کسر موجود باشد باید کسر طرف اول را تفکیك نمود **خامساً** ـ اگر جملات طرف دوم تساوی کمتر از جملات طرف اول تساوی باشد باید دراثر ساده کردن یا فاکتور گیری تعداد جملات طرف اول تساوی را کم نمود .

تذکر : ابتداء فرمولهای صفحه (۱۲) را دوباره مطالعه فرمائید

۸۸ ـ درستی اتحاد زیر را تحقیق کنید .

$$(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$$

حل: چون درطرف دوم تساوی پرانتز وجود ندارد طرف اول تساوی را بتوان (۲) میرسانیم

طرف اول $= \sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=1+2\sin x\cos x\equiv$ طرف دوم

۸۹ـ درستی تساوی $3-4\sin^2 x=4\cos^2 x-1$ را ثابت کنید.

حل: چون طرف دوم تساوی $\cos^2 x$ موجود است پس بجای $\sin^2 x$ مساویش $1-\cos^2 x$ را قرار میدهیم.

طرف اول $=3-4(1-\cos^2 x)=3-4+4\cos^2 x=4\cos^2 x-1\equiv$ طرف دوم

۹۰ ـ درستی اتحاد $\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}$ را تحقیق کنید .

حل : جون طرف دوم تساوی یك کسر و طرف اول تساوی دو کسر موجود است پس

در طرف اول تساوی مخرج‌مشترك میگیریم:

$$\text{طرف اول} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \text{طرف دوم}$$

۹۱ـ درستی اتحاد زیر را تحقیق کنید .

$$\cos^2 x \cos^2 y - \sin^2 x \sin^2 y = \cos^2 x - \sin^2 y$$

حل : چون در طرف دوم تساوی فقط $\cos^2 x$ و $\sin^2 y$ موجود است پس در طرف اول بجای $\sin^2 x$ مساویش $1 - \cos^2 x$ و بجای $\cos^2 y$ مساویش $1 - \sin^2 y$ را قرارمیدهیم

$$\text{طرف اول} = \cos^2 x(1 - \sin^2 y) - (1 - \cos^2 x)\sin^2 y =$$

$$\cos^2 x - \cos^2 x \sin^2 y - \sin^2 y + \cos^2 x \sin^2 y = \cos^2 x - \sin^2 y = \text{طرف دوم}$$

۹۲ـ صحت اتحاد زیر را تحقیق کنید.

$$\cot g^2 x - tg^2 x = \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos^2 x \sin^2 x}$$

حل: چون در طرف دوم تساوی $\sin x$ و $\cos x$ موجود است پس بجای $\cot g x$ و $tg x$ مساویشان را قرار میدهیم و سپس مخرج مشترك میگیریم تا بیك كسر تبدیل‌شود .

$$\text{طرف اول} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\cos^2 x \sin^2 x}$$

چون در طرف دوم‌تساوی در صورت مسأله فقط $\cos^2 x$ موجود است‌پس بجای $\sin^2 x$ مساویش $1 - \cos^2 x$ راقرار میدهیم

$$\text{طرف اول} = \frac{\cos^4 x - (1 - \cos^2 x)^2}{\cos^2 x \sin^2 x} = \frac{\cos^4 x - 1 - \cos^4 a + 2\cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} = \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos^2 x \sin^2 x}$$

حل مسائل صفحه ۱٤ کتاب‌درسی ازمسأله ۹

۹۳ـك ۹ ـ $(1 + \cos x)(1 + tg x) = 1 + \sin x + \cos x + tg x$

حل : $\text{طرف اول} = 1 + tg x + \cos x + tg x \cos x$

$$\text{طرف اول} = 1 + tg x + \cos x + \frac{\sin x}{\cos x} \times \cos x$$

$$\text{طرف اول} = 1 + tg\,x + \cos x + \sin x$$

۹۴ـك ۱۰ـ

$$tg\,x + cotg = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

حل :

$$\text{طرف اول} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

۹۵ـك ۱۱ـ

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$$

حل: صورت و مخرج را در $(1-\cos x)$ ضرب می‌کنیم :

$$\text{طرف اول} = \frac{\sin x(1-\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \frac{\sin x(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

$$\text{طرف اول} = \frac{\sin x(1-\cos x)}{\sin^2 x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$$

۹۶ـك ۱۲ـ

$$\frac{1}{\cos^2 x} + tg^2 y = \frac{1}{\cos^2 y} + tg^2 x$$

حل :میدانیم $1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ پس :

$$\text{طرف اول} = 1 + tg^2 x + tg^2 y = (1 + tg^2 y) + tg^2 x$$

$$\text{طرف اول} = \frac{1}{\cos^2 y} + tg^2 x$$

۹۷ـك ۱۳ـ

$$tg^2 x - \sin^2 x = tg^2 x \sin^2 x$$

حل :

$$\text{طرف اول} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \sin^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)$$

$$\text{طرف اول} = \sin^2 x(1 + tg^2 x - 1) = \sin^2 x\, tg^2 x$$

۹۸ـك ۱۴ـ

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$$

حل:

$$\text{طرف اول} = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)$$

$$\text{طرف اول} = 1 \times (\sin^2 x - \cos^2 x) = \sin^2 x - \cos^2 x$$

۹۹ـك ۱۵ ـ

$$\frac{tg\,x + tg\,y}{cotg\,x + cotg\,y} = tg\,x\, tg\,y$$

حل : طرف اول $\dfrac{tg\,x+tg\,y}{\dfrac{1}{tg\,x}+\dfrac{1}{tg\,y}}=\dfrac{tg\,x+tg\,y}{\dfrac{tg\,x+tg\,y}{tg\,x\,tg\,y}}=tg\,x\,tg\,y$

۱۰۰-ك۱۶- $\dfrac{1}{1+tg^2x}+\dfrac{1}{1+cotg^2x}=1$

حل: طرف اول $=\dfrac{1}{\dfrac{1}{\cos^2x}}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{\sin^2x}}=\cos^2x+\sin^2x=1$

۱۰۱-ك۱۷- $(\sin x+\cos x)\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\cos x}\right)=cotg\,x-tg\,x$

حل : طرف اول $=\dfrac{\sin x}{\sin x}-\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\sin x}-\dfrac{\cos x}{\cos x}$

طرف اول $=cotg\,x-1+1-tg\,x=cotg\,x-tg\,x$

۱۰۲-ك۱۸- $(\sin x+\cos x)(tg\,x+cotg\,x)=\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}$

حل :

طرف اول $=(\sin x+\cos x)\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)=(\sin x+\cos x)\left(\dfrac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin x\cos x}\right)$

طرف اول $=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}=\dfrac{\sin x}{\sin x\cos x}+\dfrac{\cos x}{\sin x\cos x}=\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{1}{\sin x}$

۱۰۳-ك۱۹- $\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}-\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}=\dfrac{4\,tg\,x}{\cos x}$

حل : طرف اول $=\dfrac{(1+\sin x)^2-(1-\sin x)^2}{1-\sin^2x}$

طرف اول $=\dfrac{1+\sin^2x+2\sin x-1-\sin^2x+2\sin x}{\cos^2x}=\dfrac{4\sin x}{\cos^2x}$

طرف اول $=\dfrac{4}{\cos x}\times\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{4\,tg\,x}{\cos x}$

۱۰۴-ك۲۰- $(\sin x+tg\,x)(\cos x+cotg\,x)=(1+\sin x)(1+\cos x)$

حل : $\text{طرف اول} = (\sin x + \frac{\sin x}{\cos x})(\cos x + \frac{\cos x}{\sin x})$

$$\text{طرف اول} = (\frac{\sin x\cos x + \sin x}{\cos x})(\frac{\cos x\sin x + \cos x}{\sin x})$$

$$\text{طرف اول} = \sin x(\frac{\cos x + 1}{\cos x})\cos x(\frac{\sin x + 1}{\sin x}) = (\cos x + 1)(\sin x + 1)$$

۱۰۵ـ ك۲۱ـ $(1 + tg\, x + cotg\, x)(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x}) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}$

حل : $\text{طرف اول} = (1 + \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x})(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x})$

اگر پرانتزها رادرهم ضرب کنیم نتیجه میشود:

$$\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\sin x\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x\cos x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$\text{طرف اول} = \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$\text{طرف اول} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \text{طرف دوم}$$

۱۰۶ـ ك۲۲ـ $(\frac{1}{\sin x} - \sin x)(\frac{1}{\cos x} - \cos x) = \frac{tg\, x}{1 + tg^2 x}$

حل : $\text{طرف اول} = (\frac{1 - \sin^2 x}{\sin x})(\frac{1 - \cos^2 x}{\cos x}) = \frac{\cos^2 x\sin^2 x}{\sin x\cos x}$

$$\text{طرف اول} = \cos x\sin x = \frac{\frac{\cos x\sin x}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{tg\, x}{1 + tg^2 x}$$

۱۰۷ـ ك۲۳ـ $\sin^2 x\, tg^2 x + \cos^2 x\, cotg^2 x = tg^2 x + cotg^2 x - 1$

حل: $\text{طرف اول} = (1 - \cos^2 x)tg^2 x + (1 - \sin^2 x)cotg^2 x$

$$\text{طرف اول} = tg^2 x - tg^2 x\cos^2 x + cotg^2 x - cotg^2 x\sin^2 x$$

$$\text{طرف اول} = tg^2 x - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\times\cos^2 x + cotg^2 x - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\times\sin^2 x$$

طرف اول $= tg^2x - \underline{\sin^2x} + cotg^2x - \underline{\cos^2x}$

طرف اول $= tg^2x + cotg^2x - (\sin^2x + \cos^2x) = tg^2x + cotg^2x - 1$

۱۰۸- ک ۲۴- $\frac{\sin^4x - \cos^4x}{\cos^2x} = (tg\,x + 1)(tg\,x - 1)$

حل : طرف اول $= \frac{\sin^2x - \cos^2x}{\cos^2x} = \frac{\sin^2x}{\cos^2x} - \frac{\cos^2x}{\cos^2x}$

طرف اول $= tg^2x - 1 = (tg\,x + 1)(tg\,x - 1)$

۱۰۹- ک۲۵- $\sin^3x(1 + cotg\,x) + \cos^3x(1 + tg\,x) = \sin x + \cos x$

حل : طرف اول $= \sin^3x(1 + \frac{\cos x}{\sin x}) + \cos^3x(1 + \frac{\sin x}{\cos x})$

طرف اول $= \sin^3x(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}) + \cos^3x(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x})$

طرف اول $= \sin^2x(\underline{\sin x + \cos x}) + \cos^2x(\underline{\sin x + \cos x})$

طرف اول $= (\sin x + \cos x)(\sin^2x + \cos^2x) = \sin x + \cos x$

۱۱۰- ک۲۶- $\frac{1}{\sin^4x} + \frac{1}{tg^4x} = 1 + \frac{2cotg^2x}{\sin^2x}$

حل: طرف اول $= (\frac{1}{\sin^2x})^2 + cotg^4x = (1 + cotg^2x)^2 + cotg^4x$

طرف اول $= 1 + cotg^4x + 2cotg^2x + cotg^4x = 1 + 2cotg^4x + 2cotg^2x$

طرف اول $= 1 + 2cotg^2x(cotg^2x + 1) = 1 + \frac{2cotg^2x}{\sin^2x} =$ طرف دوم

۱۱۱- ک۲۷- $1 - cotg^4x = \frac{1}{\sin^2x} - \frac{\cos^4x}{\sin^4x}$

حل : طرف اول $= 1 - \frac{\cos^4x}{\sin^4x} = \frac{\sin^4x - \cos^4x}{\sin^4x}$

طرف اول $= \frac{(\sin^2x + \cos^2x)(\sin^2x - \cos^2x)}{\sin^4x} = \frac{\sin^2x - \cos^2x}{\sin^4x}$

طرف اول $= \frac{\sin^2x}{\sin^4x} - \frac{\cos^2x}{\sin^4x} = \frac{1}{\sin^2x} - \frac{\cos^2x}{\sin^4x} =$ طرف دوم

۱۱۲ـک۲۸ـ
$$\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}-\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}=2tg\,x$$

حل :

$$\text{طرف اول}=\frac{\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1-\sin x}}-\frac{\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}}=\frac{1+\sin x-1+\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$$

$$\text{طرف اول}=\frac{2\sin x}{\cos x}=2tg\,x$$

۱۱۳ـک۲۹ـ
$$\frac{a\,tg^2 b+c}{a\sin^2 b+c\cos^2 b}=1+tg^2 b$$

حل :

$$\text{طرف اول}=\frac{a\,tg^2 b+c}{\cos^2 b\left(\frac{a\sin^2 b}{\cos^2 b}+\frac{c\cos^2 b}{\cos^2 b}\right)}=\frac{a\,tg^2 b+c}{\cos^2 b(a\,tg^2 b+c)}$$

$$\text{طرف اول}=1+tg^2 b$$

۱۱۴ـک۳۰ـ
$$\frac{\sin^2 x\,tg^2 x}{1+tg^2 x}+\frac{\cos^2 x\,cotg^2 x}{1+cotg^2 x}=1-2\sin^2 x\cos^2 x$$

حل :
$$\text{طرف‌اول}=\frac{\sin^2 x\times\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}+\frac{\frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}}{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

$$\text{طرف اول}=\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$$

$$\text{طرف اول}=1-2\sin^2 x\cos^2 x\equiv\text{طرف دوم}$$

دو اتحاد زیر را بخاطر بسپارید.

$$\boxed{\begin{aligned}&a^2+b^2=(a+b)^2-2ab\\&a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)\end{aligned}}$$

۱۱۵ ک ۳۱ ـ درستی اتحاد زیرا تحقیق کنید.

$$2(\sin^6 x+\cos^6 x)-3(\sin^4 x+\cos^4 x)=-1$$

حل :
$$2[(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)]-3$$
$$[(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x]$$

$$\text{طرف‌اول}=2(1-3\sin^2 x\cos^2 x)-3(1-2\sin^2 x\cos^2 x)]=-1$$

۱۱۶ـك۲۲ـ۳ـثابت کنید که عبارت : $2(1+\sin x)(1+\cos x)$ مربع کامل است

حل :
$$A=2+2\cos x+2\sin x+2\sin x\cos x$$
$$A=1+1+2\sin x+2\cos x+2\sin x\cos x$$
$$A=1+\sin^2x+\cos^2x+2\sin x+2\cos x+2\sin x\cos x$$
پس مربع کامل است
$$A=(1+\sin x+\cos x)^2$$

۱۱۷ـ ۳۲: مطلوبست تعیین اعداد A و B و C بطریقی که به ازای جمیع مقادیر x رابطهٔ زیر برقرار باشد.

$$\frac{1}{\sin x\cos x(\sin x+\cos x)}=\frac{A}{\sin x}+\frac{B}{\cos x}+\frac{C}{\sin x+\cos x}$$

حل :

$$\text{طرف دوم}=\frac{A\sin x\cos x+A\cos^2x+B\sin^2x+B\sin x\cos x+C\sin x\cos x}{\sin x\cos x(\sin x+\cos x)}=$$

چون مخرجهای کسرهای دو طرف تساوی باهم برابرند پس باید صورت آنها نیز باهم متحد باشند .

$$1\equiv A\cos^2x+B\sin^2x+(A+B+C)\sin x\cos x$$
$$1\equiv A\cos^2x+B(1-\cos^2x)+(A+B+C)\sin x\cos x$$
$$1\equiv A\cos^2x+B-B\cos^2x+(A+B+C)\sin x\cos x$$
$$1\equiv(A-B)\cos^2x+B+(A+B+C)\sin x\cos x$$

برای اینکه این اتحاد همواره برقرار باشد باید ضریب $\cos^2x$ و ضریب $\sin x\cos x$ مساوی صفر ومقدار B مساوی یك باشد.

$$\begin{cases}B=1\\ A-B=0\Longrightarrow A-1=0\Longrightarrow A=1\\ A+B+C=0\Longrightarrow 1+1+C=0\Longrightarrow C=-2\end{cases}$$

۱۱۸ـ ك ۲۴ : اگر $\operatorname{tg}x=\sqrt{\frac{a}{b}}$ و $\frac{1}{\cos x}=\sqrt{1+\frac{b}{a}}$ باشد چه رابطه‌ای بین a و b برقراراست.

حل : رابطه $\frac{1}{\cos^2x}=1+\operatorname{tg}^2x$ همواره برقرار است که اگر بجای $\operatorname{tg}x$ و $\frac{1}{\operatorname{cotg}x}$ مساویشان را قرار دهیم نتیجه میشود :

$$1+\frac{a}{b}=1+\frac{b}{a}\Longrightarrow\frac{a}{b}=\frac{b}{a}\Longrightarrow b^2=a^2\Longrightarrow b=a$$

۱۱۹ـ ك ۳۵: اعداد a و b را بقسمی تعیین کنید که به ازای جمیع مقادیر x رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$4tg^2x=\sin x\left(\frac{a}{1-\sin x}+\frac{b}{1+\sin x}\right),$$

حل :

$$4tg^2x=\frac{\sin x(a+a\sin x+b-b\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$

$$\frac{4\sin^2x}{\cos^2x}=\frac{\sin x[(a-b)\sin x+(a+b)]}{\cos^2x}$$

چون مخرج دو کسر باهم برابرند پس صورت آنها با هم برابراست.

$$4\sin^2x=\sin x[(a-b)\sin x+a+b]$$

$$4\sin x=(a-b)\sin x+a+b$$

$$\begin{cases}a-b=4\\a+b=0\end{cases}\xrightarrow[\text{دورابطه}]{\text{از جمع}}\begin{cases}2a=4\\a=2\end{cases}\qquad\begin{cases}a+b=0\\2+b=0\Longrightarrow b=-2\end{cases}$$

۱۲۰ـ ك ۲۶ـ مقدار عددی a را بقسمی تعیین کنید که مقدار عبارت زیر به x بستگی نداشته باشد :

$$\frac{(2a+1)\sin x+(a+2)\cos x}{(a+2)\sin x+(2a+1)\cos x}$$

حل: باید بازاء جمیع مقادیر x مقدار کسر تغییر نکند یعنی اگر بجای x یکمرتبه °۰ و یکبار °۹۰ و یک بار °۴۵ و . . . . . را قرار دهیم مقدار کسرها با هم برابر باشند.

$$x=0\Longrightarrow\frac{(2a+1)\sin 0^\circ+(a+2)\cos 0^\circ}{(a+2)\sin 0^\circ+(2a+1)\cos 0}=\frac{a+2}{2a+1}$$

$$x=90^\circ\Longrightarrow\frac{(2a+1)\sin 90^\circ+(a+2)\cos 90^\circ}{(a+2)\sin 90^\circ+(2a+1)\cos 90^\circ}=\frac{2a+1}{a+2}$$

$$\frac{a+2}{2a+1}=\frac{2a+1}{a+2}\Longrightarrow(2a+1)^2=(a+2)^2\Longrightarrow a=\pm 1$$

حل: بطریقه‌دوم: اگر ضریب $\sin x$ صورت K برابر ضریب‌سینوس‌مخرج‌وضریب

$\cos x$ صورت K برابر ضریب $\cos x$ مخرج باشد دراینصورت مقدار کسر مساوی K میشود که به x بستگی ندارد .

$$\begin{cases}(2a+1)=K(a+2)\\ (a+2)=K(2a+1)\end{cases} \quad \text{از تقسیم دو رابطه} \quad \left\{\frac{2a+1}{a+2}=\frac{a+2}{2a+1}\Longrightarrow a=\pm 1\right.$$

۱۳۱- ۳۷ : اگر $\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}=\frac{1}{a+b}$ باشد، مقدار عبارت: $\frac{\sin^8 x}{a^3}+\frac{\cos^8 x}{b^3}$ را برحسب a و b حساب کنید.

حل : از تساوی $\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}=\frac{1}{a+b}$ نتیجه میشود

$$\frac{b\sin^4 x+a(1-\sin^2 x)^2}{ab}=\frac{1}{a+b}$$

پس از به قوه رسانیدن و طرفین وسطین کردن و همه جملات را بیك طرف آوردن و خلاصه و مرتب نمودن نتیجه میشود .

$$(a+b)^2\sin^4 x-2a(a+b)\sin^2 x+a^2=0$$

$$[(a+b)\sin^2 x-a]^2=0\Longrightarrow(a+b)\sin^2 x-a=0$$

$$\sin^2 x=\frac{a}{a+b} \quad \text{و} \quad \cos^2 x=1-\sin^2 x=\frac{b}{a+b}$$

حال برای محاسبه عبارت فوق‌می‌توان‌نوشت :

$$\frac{\sin^8 x}{a^3}+\frac{\cos^8 x}{b^3}=\frac{(\sin^2 x)^4}{a^3}+\frac{(\cos^2 x)^4}{b^3}$$

$$=\frac{\frac{a^4}{(a+b)^4}}{a^3}+\frac{\frac{b^4}{(a+b)^4}}{b^3}=\frac{a}{(a+b)^4}+\frac{b}{(a+b)^4}=\frac{a+b}{(a+b)^4}$$

$$=\frac{1}{(a+b)^3}=\text{مقدار ثابت}$$

مسائل خارج از کتاب درسی

۱۲۲ـ ثابت کنید $\frac{1}{\sin^4 x}-\frac{1}{tg^2 x}=1+\frac{cotg^2 x}{\sin^2 x}$

حل : طرف اول $=(\frac{1}{\sin^2 x})^2-cotg^2 x=(1+cotg^2 x)^2-cotg^2 x$

طرف اول $=1+cotg^4 x+2cotg^2 x-cotg^2 x=1+cotg^4 x+cotg^2 x$

طرف اول $=1+cotg^2 x(cotg^2 x+1)=1+cotg^2 x(\frac{1}{\sin^2 x})=1+\frac{cotg^2 x}{\sin^2 x}$

۱۲۳ـ ثابت کنید $1-cotg^4 x=\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{\sin^4 x}$

حل : طرف اول $=1-\frac{\cos^4 x}{\sin^4 x}=\frac{\sin^4 x-\cos^4 x}{\sin^4 x}$

طرف‌اول $=\frac{(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^4 x}=\frac{\sin^2 x-(1-\sin^2 x)}{\sin^4 x}$

طرف اول $=\frac{\sin^2 x+\sin^2 x-1}{\sin^4 x}=\frac{2\sin^2 x-1}{\sin^4 x}$

طرف اول $=\frac{2\sin^2 x}{\sin^4 x}-\frac{1}{\sin^4 x}=\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{\sin^4 x}$

۱۲۴ـ ثابت کنید $\sin^2 x\cos^2 x\, tg^2 x+\frac{\cos^2 x\, cotg^2 x}{1+cotg^2 x}=1-2\sin^2 x\cos^2 x$

حل :

طرف اول $=\sin^2 x\cos^2 x\times\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\cos^2 x\times\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\times\sin^2 x$

طرف اول $=\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$

طرف اول $=1-2\sin^2 x\cos^2 x$

۱۲۵ـ معادله $x^2+(tg\alpha-cotg\alpha)x-1=0$ را حل کنید

حل :
$$x=\frac{-tg\alpha+cotg\alpha\pm\sqrt{(tg\alpha-cotg\alpha)^{۲}+۴}}{۲}$$

$$x=\frac{-tg\alpha+cotg\alpha\pm(tg\alpha+cotg\alpha)}{۲}=-tg\alpha \text{ و } cotg\alpha$$

۱۲۶ـ معادله زیر را حل کنید .

$$x^{۲}\sin\alpha+۲(\sin\alpha+\cos\alpha)x+۲\cos\alpha=۰$$

$$x=\frac{-(\sin\alpha+\cos\alpha)\pm\sqrt{\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha+۲\sin\alpha\cos\alpha-۲\sin\alpha\cos\alpha}}{\sin\alpha}$$

$$x=\frac{-\sin\alpha-\cos\alpha+۱}{\sin\alpha} \text{ و } -\frac{\sin\alpha+\cos\alpha+۱}{\sin\alpha}$$

۱۲۷ـ معادله $(x\cos\alpha+۱)^{۲}-x^{۲}=۲-\sin^{۲}\alpha$ را حل کنید.

حل :
$$x^{۲}\cos^{۲}\alpha+۱+۲x\cos\alpha-x^{۲}-۲+\sin^{۲}\alpha=۰$$

$$-x^{۲}(۱-\cos^{۲}\alpha)+۲x\cos\alpha-۱+\sin^{۲}\alpha=۰$$

$$-x^{۲}\sin^{۲}\alpha+۲x\cos\alpha-۱+\sin^{۲}\alpha=۰$$

$$x^{۲}\sin^{۲}\alpha-۲x\cos\alpha+۱-\sin^{۲}\alpha=۰$$

$$x^{۲}\sin^{۲}\alpha-۲x\cos\alpha+\cos^{۲}\alpha=۰$$

$$x=\frac{\cos\alpha\pm\sqrt{\cos^{۲}\alpha-\sin^{۲}\alpha\cos^{۲}\alpha}}{\sin^{۲}\alpha}$$

$$x=\frac{\cos\alpha\pm\sqrt{\cos^{۲}\alpha(۱-\sin^{۲}\alpha)}}{\sin^{۲}\alpha}$$

$$x=\frac{\cos\alpha\pm\cos^{۲}\alpha}{۱-\cos^{۲}\alpha}=\frac{\cos\alpha(۱\pm\cos\alpha)}{(۱+\cos\alpha)(۱-\cos\alpha)}$$

$$x=\frac{\cos\alpha}{۱-\cos\alpha} \text{ و } \frac{\cos\alpha}{۱+\cos\alpha}$$

تمرین با جواب

معادلات زیر را حل کنید

۱۲۸- $x^2+(tg\alpha+cotg\alpha)x+1=0$

جواب $x=-tg\alpha$ و $-cotg\alpha$

۱۲۹- $x^2\sin\alpha+2x+\sin\alpha=0$

جواب : $x=\frac{-1\pm\cos\alpha}{\sin\alpha}$

۱۳۰- $x^2-2x\,tg\alpha+tg^2\alpha=cotg^2\alpha$

جواب : $x=tg\alpha+cotg\alpha$ و $tg\alpha-cotg\alpha$

۱۳۱- $(x\sin\alpha+1)^2-x^2-\sin^2\alpha-1=0$

جواب : $x=\frac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$ و $\frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$

۱۳۲- $x^2tg^2a-x\,cotg\,a-1-cotg^2a=0$

جواب : $x=-cotg\,a$ و $cotg^2a+cotg\,a$

۱۳۳- $x^2-5x-(\sin^2\alpha+\sin\alpha-6)=0$

جواب : $x=3+\sin\alpha$ و $2-\sin\alpha$

۱۳۴- $x^2+(tg\,a+cotg\,a+2)x+tg\,a+cotg\,a+2=0$

جواب : $x=-tg\,a-1$ و $-cotg\,a-1$

طریقه حذف پارامتر بین دو رابطه

قاعده ۳۵

اگر مطابق مسائل زیر دو رابطه بدهند که دریکی $\sin\alpha$ یا $\sin 2a$ یا $\sin 3\alpha$ یا .... ودر رابطه دیگر $\cos\alpha$ یا $\cos 2\alpha$ یا $\cos 3\alpha$ یا .... موجود باشد برای حذف پارامتر راه حل اینستکه ابتداء اعداد معلوم را بیک طرف برده و سپس دوطرف تساوی را به قوه ۲ رسانیده وبعد عملی انجام میدهیم تا ضریب $\sin^2\alpha$ با ضریب $\cos^2a$ برابر شود و سپس دو رابطه را باهم جمع می‌نمائیم .

۱۳۵- بین دو رابطه $x=2\sin\alpha+1$ و $y=3\cos\alpha-2$ پارامتر α را حذف کنید.

حل :

$$\begin{cases}x=2\sin\alpha+1\\ y=3\cos\alpha-2\end{cases}\quad \begin{cases}x-1=2\sin\alpha\\ y+2=3\cos\alpha\end{cases}\quad \begin{cases}(x-1)^2=4\sin^2\alpha\\ (y+2)^2=9\cos^2\alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases}9(x-1)^2=36\sin^2\alpha\\ 4(y+2)^2=36\cos^2\alpha\end{cases}\xrightarrow[\text{دو رابطه}]{\text{از جمع}}9(x-1)^2+4(y+2)^2=36$$

۱۳۶- از دو رابطه زیر رابطه مستقلی از α بین x و y بدست آورید.

$x=3\sin2\alpha-2$ و $y=4\cos2\alpha-3$

$$\begin{cases}x+2=3\sin2\alpha\\ y+3=4\cos2\alpha\end{cases}\qquad \begin{cases}(x+2)^2=9\sin^2 2\alpha\\ (y+3)^2=16\cos^2 2\alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases}16(x+2)^2=144\sin^2 2\alpha\\ 9(y+3)^2=144\cos^2 2\alpha\end{cases}$$

از جمع دو رابطه $\Longrightarrow 16(x+2)^2+9(y+3)^2=144$

قاعده ۴۶ - اگر طبق مسائل زیر دو رابطه بدهند که در یک رابطه $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ بصورت مجموع و در رابطه دیگر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ بصورت تفاضل باشند برای حذف α راه حل اینستکه : اعداد معلوم را طرفی که x یا y هست برده و سپس دوطرف تساوی را بقوه دو رسانیده و سپس دو رابطه را باهم جمع می‌کنیم.

۱۳۷- $x=\sin\alpha+\cos\alpha$ و $y=\sin\alpha-\cos\alpha-2$

حل :

$$\begin{cases}\sin\alpha+\cos\alpha=x\\ \sin\alpha-\cos\alpha-2=y\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\sin\alpha+\cos\alpha=x\\ \sin\alpha-\cos\alpha=y+2\end{cases}$$

طرفین معادله‌ها را مجذور می‌کنیم .

$$\begin{cases}(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=x^2\\(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=(y+2)^2\end{cases}\to\begin{cases}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=x^2\\\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=(y+2)^2\end{cases}$$

$$(y+2)^2+x^2=2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\to(y+2)^2+x^2=2$$

۱۳۸- $y=2\sin2\alpha+5\cos2\alpha-2$ و $x=5\sin2\alpha-2\cos\alpha-1$

حل :

$$\begin{cases}x=5\sin2\alpha-2\cos2\alpha-1\\y=2\sin2\alpha+5\cos2\alpha-2\end{cases}\to\begin{cases}x+1=5\sin2\alpha-2\cos2\alpha\\y+2=2\sin2\alpha+5\cos2\alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x+1)^2=(5\sin2\alpha-2\cos2\alpha)^2\\(y+2)^2=(2\sin2\alpha+5\cos2\alpha)^2\end{cases}\Longrightarrow(x+1)^2+(y+2)^2=29$$

قاعده ۳۷

اگر طبق مسائل زیر دو رابطه بدهند که در یکی $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ بصورت مجموع و یا بصورت تفاضل باشند و در رابطه دیگر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ بصورت حاصلضرب باشند برای حذف پارامتر راه حل اینستکه ابتداء اعداد معلوم را بطرفیکه x یا y هست برده وسپس رابطه‌ای که $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ بصورت جمع یا تفریق میباشد بقوه دو رسانیده و سپس ضریب $\sin\alpha\cos\alpha$ را در دو رابطه قرینه یکدیگر نموده و بعد دو رابطه را باهم جمع می‌نمائیم .

۱۳۹- بین دو رابطه زیر α را حذف نمائید :

$$x=\sin\alpha+\cos\alpha-8 \quad \text{و} \quad y=3\sin\alpha\cos\alpha-2$$

حل :

$$\begin{cases}x+8=\sin\alpha+\cos\alpha\\y+2=3\sin\alpha\cos\alpha\end{cases}\quad\begin{cases}(x+8)^2=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2\\y+2=3\sin\alpha\cos\alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x+8)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha\\y+2=3\sin\alpha\cos\alpha\end{cases}\quad\begin{cases}3(x+8)^2=3+6\sin\alpha\cos\alpha\\-2y-4=-6\sin\alpha\cos\alpha\end{cases}$$

$4(x+8)^2 - 2y = 7 \longleftarrow$ از جمع دو رابطه

۱۴۰ـ از دو رابطه زیر رابطه مستقلی از α بین x و y بدست آورید

$x = \sin 2\alpha - \cos 2\alpha - 4$ و $y = 3 - 4\sin 2\alpha \cos 2\alpha$

$$\begin{cases} x+4 = \sin 2\alpha - \cos 2\alpha \\ y = 3 - 4\sin 2\alpha\cos 2\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} (x+4)^2 = (\sin 2\alpha - \cos 2\alpha)^2 \\ y = 3 - 4\sin 2\alpha\cos 2\alpha \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 2 \\ - \end{matrix}\begin{cases} (x+4)^2 = \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha - 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha \\ y = 3 - 4\sin 2\alpha\cos 2\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x+4)^2 = 2 - 4\sin 2\alpha\cos 2\alpha \\ -y = -3 + 4\sin 2\alpha\cos 2\alpha \end{cases}$$

$2(x+4)^2 - y = -1 \longleftarrow$ از جمع دو رابطه

قاعده ۲۸

> اگر طبق مسائل زیر دو رابطه بدهند که دریکی $tg\alpha$ یا $tg^2\alpha$ و در دیگری $cotg\alpha$ یا $cotg^2\alpha$ موجود باشد برای حذف پارامتر راه حل اینستکه اعداد معلوم را بطرفیکه x یا y هست برده و سپس دو رابطه را درهم ضرب نموده و بعد بجای $cotg\alpha tg\alpha$ یا $tg^2\alpha \times cotg^2\alpha$ مساویش عدد یك را قرار میدهیم .

۱۴۱ـ از دورابطه زیر رابطه مستقلی از α بین x و y بدست‌آورید.

$x = 2tg\alpha - 3$ و $y = 3cotg\alpha - 2$

حل :

$$\begin{cases} (x+3) = 2tg\alpha \\ (y+2) = 3cotg\alpha \end{cases}$$

$(y+2)(x+3) = 6tg\alpha cotg\alpha$

$xy + 3y + 2x + 6 = 6 \longrightarrow xy + 3y + 2x = 0$

۱۴۲ـ با استفاده از دو رابطه $y = 2cotg\alpha - 3$ و $x = 3tg^2\alpha - 1$

رابطه مستقلی از α بین x و y بدست‌آورید.

حل :

$$\begin{cases} x+1=2tg^2\alpha \\ (y+3)^2=4cotg^2\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x+1=2tg^2\alpha \\ y+3=2cotg\alpha \end{cases}$$

$$(y+3)^2(x+1)=12tg^2\alpha cotg^2\alpha \Longrightarrow (y+3)^2(x+1)=12$$

۱۴۴ـ از دو رابطه $x+2ytg\alpha=3$ و $2y+xcotg\alpha=5$ رابطهٔ مستقلی از α بین x و y بدست آورید .

حل :

$$\begin{cases} (2y-5)=-xcotg\alpha \\ (x-3)=-2ytg\alpha \end{cases}$$

$$(2y-5)(x-3)=2xytg\alpha cotg\alpha$$

$$2xy-6y-5x+15=2xy \longrightarrow 6y+5x=15$$

تذکر : دو فرمول زیر را بخاطر بسپارید

$$\frac{1}{cos^2\alpha}=1+tg^2\alpha \quad \text{و} \quad \frac{1}{sin^2\alpha}=1+cotg^2\alpha$$

قاعده ۲۹

اگر درمسأله دو رابطه بدهند که در یکی $cos\alpha$ یا $cos^2\alpha$ و در دیگری $tg\alpha$ یا $tg^2\alpha$ موجود باشد و یا دریکی $sin\alpha$ یا $sin^2\alpha$ و دردیگری $cotg\alpha$ یا $cotg^2\alpha$ موجود باشد وبخواهیم بین آنها پارا متر را حذف‌کنیم راه حل اینستکه ابتدا اگر بصورت کسر باشدکسر را تفکیك نموده وبعد اعداد را بطرفیکه x یا y می‌باشد برده و $tg^2\alpha$ را ازیك رابطه و $\frac{1}{cos^2\alpha}$ را از رابطه دیگر بدست آورده و بجای $\frac{1}{cos^2\alpha}$ مساویش $1+tg^2\alpha$ قرار داده و از هم کم نموده و یا $cotg^2\alpha$ را از یك رابطه و $\frac{1}{sin^2\alpha}$ را از رابطهٔ دیگر بدست‌آورده و بجای $\frac{1}{sin^2\alpha}$ مساویش $1+cotg^2\alpha$ قرارداده و سپس ازهم‌کم میکنیم .

۱۴۴- بین دو رابطه $x=\cot g\alpha+1$ و $y=\frac{2}{\sin\alpha}$ پارامتر α را حذف کنید

حل :

$$\begin{cases} x=\cot g\alpha+1 \\ y=\frac{2}{\sin\alpha} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x-1=\cot g\alpha \\ \frac{y}{2}=\frac{1}{\sin\alpha} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} (x-1)^2=\cot g^2\alpha \\ \frac{y^2}{4}=\frac{1}{\sin^2\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(x-1)^2=-\cot g^2\alpha \\ \frac{y^2}{4}=1+\cot g^2\alpha \end{cases} \xrightarrow[\text{دو رابطه}]{\text{ازجمع}} \frac{y^2}{4}-(x-1)^2=1$$

[illegible]- بین دو رابطه زیر رابطهٔ مستقل از α بین x و y بدست آورید

$$x=2tg\alpha-3 \quad \text{و} \quad y=\frac{\cos\alpha-2}{\cos\alpha}$$

حل :

$$\begin{cases} x=2tg\alpha-3 \\ y=\frac{\cos\alpha-2}{\cos\alpha} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x+3=2tg\alpha \\ y=\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}-\frac{2}{\cos\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} tg\alpha=\frac{x+3}{2} \\ \frac{-2}{\cos\alpha}=y-1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} tg\alpha=\frac{x+3}{2} \\ \frac{-1}{\cos\alpha}=\frac{y-1}{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} tg^2\alpha=\frac{(x+3)^2}{4} \\ \frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{(y-1)^2}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -tg^2\alpha=-\frac{(x+3)^2}{4} \\ 1+tg^2\alpha=\frac{(y-1)^2}{4} \end{cases} \xrightarrow[\text{دورابطه}]{\text{ازجمع}} \frac{(y-1)^2}{4}-\frac{(x+3)^2}{4}=1$$

قاعده ۴۰

برای حذف α در مسائلی نظیر ۱۴۶ و ۱۴۷ و ۱۴۸ راه‌حل اینستکه که $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ یا $tg\alpha$ و $cotg\alpha$ را مجهول فرض‌کرده و بقیه را معلوم‌وسپس $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ یا $tg\alpha$ و $cotg\alpha$ را برحسب x و y بدست آورده و بعد از دو رابطه $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ یا $tg\alpha cotg\alpha=1$ استفاده کرده α را حذف می‌نمائیم.

۱۴۶ـ رابطه مستقل از α بین x و y بدست‌آورید.

$$x=a\sin\alpha+b\cos\alpha \quad \text{و} \quad y=m\sin\alpha+n\cos\alpha$$

جواب: $(ay-mx)^2+(nx-by)^2=(an+mb)^2$

۱۴۷ـ رابطه مستقلی از α بین x و y بدست آورید.

$$x\sin\alpha+y\cos\alpha=m \quad \text{و} \quad x\cos\alpha+y\sin\alpha=n$$

جواب: $(mx-ny)^2+(nx-my)^2=(x^2-y^2)^2$

۱۴۸ـ رابطه مستقل از α بین x و y بدست آورید

$$x=a\,tg\alpha+b\,cotg\alpha \quad \text{و} \quad y=m\,tg\alpha+n\,cotg\alpha$$

جواب: $(nx-by)^2+(ay-mx)^2=(an-bm)^2$

۱۵۰ـ رابطهٔ مستقل از α بین x و y بدست آورید

$$x=tg^4\alpha+cotg^4\alpha \quad \text{و} \quad y=tg^2\alpha+cotg^2\alpha$$

حل:

$$\begin{cases} y^2=tg^4\alpha+cotg^4\alpha+2tg^2\alpha cotg^2\alpha \\ -x=-tg^4\alpha-cotg^4\alpha \end{cases}$$

از جمع دورابطه $\Longrightarrow y^2-x=2$

۱۵۱ـ رابطهٔ مستقل از α بین x و y بدست آورید

$$x=\frac{1}{\sin\alpha}-\sin\alpha \quad \text{و} \quad y=\frac{1}{\cos\alpha}-\cos\alpha$$

جواب: $x^2y^2(x^2+y^2+3)=1$

راهنمائی: اگر طرف دوم هریك از روابط را مخرج مشترك گرفته و سپس دو رابطه را درهم ضرب‌کنیم $\sin\alpha\cos\alpha=xy$ بدست میآید و اگر یکبار دیگر دو رابطه‌را به توه ۲ رسانیده‌و باهم جمع نمائیم‌رابطهٔ $x^2+y^2=\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}-3$ بدست‌میآید که‌اگر در این رابطه بجای $\sin\alpha\cos\alpha$ مساویش xy را قرار دهیم نتیجه میشود.

$$x^2+y^2=\frac{1}{x^2y^2}-2$$

تمرین با جواب

در هریك از مسائل زیر رابطه مستقلی از α بین x و y بدست آورید

۱۵۲- $x=2\sin\alpha-1$ و $y=4\cos^2\alpha+3$

جواب : $(x+1)^2+y=7$

۱۵۳- $x=2\sin\alpha-1$ و $y=3\cos\alpha-2$

جواب : $9(x+1)^2+4(y+2)^2=36$

۱۵۴- $x=3tg^2\alpha-4$ و $y=cotg^2\alpha+2$

جواب : $(y-2)(x+4)=3$

۱۵۵- $x=tg^2\alpha-1$ و $y=cotg\alpha+1$

جواب : $(y-1)^2(x+1)=1$

۱۵۶- $x=3cotg\alpha+1$ و $y=\dfrac{\sin\alpha-1}{\sin\alpha}$

جواب : $9(y-1)^2-(x-1)^2=9$

۱۵۷- $x=2\cos^2 2\alpha+2$ و $y=\sin 2\alpha-2$

جواب : $2y^2+12y+x+7=0$

۱۵۸- $x=3\sin 2\alpha-2\cos 2\alpha+3$ و $y=3\cos 2\alpha+2\sin 2\alpha+2$

جواب: $(x-3)^2+(y-2)^2=13$

۱۵۹- $x=\sin 2\alpha-\cos 2\alpha+0.4$ و $y=6+6\sin 2\alpha\cos 2\alpha$.

جواب : $y=9-3(x-4)^2$

چند مسأله مهم

۱۶۰ ـ از سه رابطه زیر رابطه‌ای بین x و y بدست آورید که به α و β بستگی نداشته باشد .

$$x\sin^2\alpha+y\cos^2\alpha=1 \quad \text{و} \quad y\sin^2\beta+x\cos^2\beta=1 \quad \text{و} \quad x\,tg\alpha-y\,tg\beta=0$$

حل :

$$\begin{cases} x(1-\cos^2\alpha)+y\cos^2\alpha=1 \Longrightarrow \cos^2\alpha=\dfrac{1-x}{y-x} \\ y(1-\cos^2\beta)+x\cos^2\beta=1 \Longrightarrow \cos^2\beta=\dfrac{1-y}{x-y} \\ x\,tg\alpha=y\,tg\beta \Longrightarrow x^2tg^2\alpha=y^2tg^2\beta \end{cases}$$

$$x^2(1+tg^2\alpha-1)=y^2(1+tg^2\beta-1)$$

$$x^2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\right)=y^2\left(\frac{1}{\cos^2\beta}-1\right)$$

$$x^2\left(\frac{y-x}{1-x}-1\right)=y^2\left(\frac{x-y}{1-y}-1\right)\Longrightarrow\frac{x^2(y-1)}{1-x}=\frac{y^2(x-1)}{1-y}$$

$$x^2(y-1)^2-y^2(x-1)^2=0$$

۱۶۱ـ رابطه‌ای مستقل از α و β بدست‌آورید.

$$x\cos\alpha+y\sin\beta=a \quad \text{و} \quad x\sin\beta-y\cos\alpha=b$$

$$(x^2+y^2)(\sin^2\alpha+\cos^2\beta)=2ab$$

جواب: $2(x^2+y^2)=(a+b)^2$.

۱۶۲ـ رابطه مستقل از α بین x و y بدست آورید

$$x=\sin\alpha+\cos\alpha \quad \text{و} \quad y=\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$$

جواب: $x^3-3x+2y=0$

۱۶۳ـ مطلوبست حذف x و y بین معادلات زیر.

$$a\sin^2x+b\cos^2x=m \quad \text{و} \quad b\sin^2y+a\cos^2y=n$$

$$a\,tg\,x=b\,tg\,y$$

جواب: $a^2\left(\frac{b-m}{m-a}\right)=b^2\left(\frac{a-n}{n-b}\right)$

درستی اتحادهای زیر را تحقیق کنید.

۱۶۴ـ $1-\cos^2x\,tg^3x\,cotg\,x=\cos^2x$

۱۶۵ـ $(1+\cos^2a)(1+tg^2a)=2+tg^2a$

۱۶۶ـ $1+\sin a\cos a(1-tg\,a)(1-cotg\,a)=2\sin a\cos a$

۱۶۷ـ $\frac{1}{\cos^4a}-1=2tg^2a+tg^4a$

۱۶۸ـ $\cos^2x\cos^2y-\sin^2x\sin^2y=\cos^2y-\sin^2x$

۱۶۹ـ $\frac{1}{\sin^4a}-1=2cotg^2a+cotg^4a$

۱۷۰ـ $\frac{1-2\cos^2a}{\sin a\cdot\cos a}=tg\,a-cotg\,a$

۱۷۱ـ $\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta-\cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$

$$\frac{tg\alpha + cotg\beta}{cotg\alpha + tg\beta} = tg\alpha\, cotg\beta$$ -۱۷۲

$$\frac{\sin x - \sin y}{\cos x + \cos y} + \frac{\cos x - \cos y}{\sin x + \sin y} = 0$$ -۱۷۳

$$\left(\sqrt{\frac{1}{\cos a} + tg a} + \sqrt{\frac{1}{\cos a} - tg a}\right)^2 = \frac{2}{\cos a} + 2$$ -۱۷۴

$$\frac{tg^2 x + cotg^2 x}{tg^2 x - cotg^2 x} = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$$ -۱۷۵

$$(1 + cotg x + tg x)(\sin x - \cos x) = \frac{\sin^2 x}{\cos x} - \frac{\cos^2 x}{\sin x}$$ -۱۷۶

$$\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} + \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x} = 2$$ -۱۷۷

$$(tg x + \sin x)^2 - (tg x - \sin x)^2 = 4\sqrt{tg^2 x - \sin^2 x}$$ -۱۷۸

$$\left(\frac{1}{\cos A} - 2\sin A\right)\left(\frac{1}{\sin A} + 2\cos A\right)\sin A \cos A = (\cos^2 A - \sin^2 A)^2$$ -۱۷۹

$$\sin^2 A\, tg^2 A + \cos^2 A\, cotg^2 A = tg^2 A + cotg^2 A - 1$$ -۱۸۰

$$\cos^2 A \cos^2 B + \sin^2 A \sin^2 B + \sin^2 A \cos^2 B + \cos^2 A \sin^2 B - 1$$ -۱۸۱

$$\frac{1}{\cos^4 A} - tg^4 A = 1 + \frac{2tg^2 A}{\cos^2 A}$$ -۱۸۲

$$\cos\alpha\left(\frac{2}{\cos\alpha} + tg\alpha\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 2tg\alpha\right) = 2\cos\alpha - 3tg\alpha$$ -۱۸۳

$$(1 - 2\cos^2\beta)(tg\beta + cotg\beta) = (\sin\beta - \cos\beta)\left(\frac{1}{\cos\beta} + \frac{1}{\sin\beta}\right)$$ -۱۸۴

$$\frac{1 - cotg y}{1 - tg y} = -cotg y$$ -۱۸۵

$$\frac{(\sin z + \cos z)^2 - 1}{cotg z - \sin z \cdot \cos z} = 2tg^2 z$$ -۱۸۶

$$\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}} = -2cotg\alpha \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$$ -۱۸۷

$$\sin^2 x \sin^2 y(cotg^2 x\, cotg^2 y - 1) = \cos^2 x - \sin^2 y$$ -۱۸۸

$(1+\sec 2\alpha+\text{tg}\,2\alpha)(1-\sec 2\alpha+\text{tg}\,2\alpha)=2\,\text{tg}\,2\alpha$ ۱۸۹-

$\text{cotg}^2\alpha-\text{cotg}^2\beta=\dfrac{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}$ ۱۹۰-

$\dfrac{(\text{tg}\,\alpha+\sec\alpha)(\cos\alpha-\text{cotg}\,\alpha)}{(\cos\alpha+\text{cotg}\,\alpha)(\text{tg}\,\alpha-\sec\alpha)}=1$ ۱۹۱-

$\dfrac{\text{tg}\,\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha-\text{cotg}\,\alpha}=\text{tg}^2\alpha\times\dfrac{-1+\cos\alpha}{-1+\sin\alpha}$ ۱۹۲-

$\cos x=\sin x\,\text{tg}^1 x\,\text{cotg}^2 x$ ۱۹۳-

$\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}+\dfrac{1}{\sin\alpha}\right)(\sin\alpha+\cos\alpha)=\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}+2$ ۱۹۴-

$\dfrac{\sin A+\cos A}{\sin A-\cos A}=\dfrac{1+2\sin A\cos A}{1-2\cos^2 A}$ ۱۹۵-

$\left(\text{cotg}\,x+\dfrac{1}{\sin x}\right)^2=\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$ ۱۹۶-

$\dfrac{\text{tg}^2 x-\text{cotg}^2 x}{1+\text{cotg}^2 x}=\dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos^2 x}$ ۱۹۷-

$\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+\dfrac{1+\cos x}{\sin x}=\dfrac{2}{\sin x}$ ۱۹۸-

$\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}-\dfrac{1}{\sin\alpha}\right)(\text{tg}\,\alpha+\text{cotg}\,\alpha)=\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$ ۱۹۹-

$1+\sin\alpha+\cos\alpha+\text{cotg}\,\alpha=(1+\sin\alpha)\cdot(1+\text{cotg}\,\alpha)$ ۲۰۰-

$\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}=\dfrac{\text{tg}^2\alpha-\text{tg}^2\beta}{\text{tg}^2\alpha\cdot\text{tg}^2\beta}$ ۲۰۱-

$\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ ۲۰۲-

$\sqrt{\dfrac{1-\sin y}{1+\sin y}}=\dfrac{1}{\cos y}-\text{tg}\,y\quad(\cos y>0)$ ۲۰۳-

-۲۰۴ $\frac{cotg\alpha}{tg\alpha + cotg\alpha} = cos^2\alpha$

-۲۰۵ $(1 + \frac{1}{cos\alpha} + tg\alpha)(1 + \frac{1}{sin\alpha} + cotg\alpha) =$

$2(1 + tg\alpha + cotg\alpha + \frac{1}{sin\alpha} + \frac{1}{cos\alpha})$

-۲۰۶ $\frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha} = 2cos^2\alpha - 1$

-۲۰۷ $\frac{1}{cos^4\alpha} - tg^4\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha} + tg^2\alpha$

-۲۰۸ $sin^4x + sin^2x = 2 - 3cos^2x + cos^4x$

-۲۰۹ $\frac{sin^2x}{cosx} + \frac{tgx}{cotgx} = \frac{sin^2x(1 + cosx)}{cos^2x}$

-۲۱۰ $1 + 2sinxcosx = sinxcosx(1 + tgx)(1 + cotgx)$

-۲۱۱ $2(1 + siny)(1 + cosy) = (1 + siny + cosy)^2$

-۲۱۲ $\frac{sin^2\alpha - tg^2\alpha}{cos^2\alpha - cotg^2\alpha} = tg^6\alpha$

-۲۱۳ $\frac{tg^2x}{1 + tg^2x} + \frac{cotg^2x}{1 + cotg^2x} = \frac{1 - 2sin^2xcos^2x}{sinxcosx}$

۲۱۴ $tgx\,sinx + cosx = \frac{1}{cosx}$

[illegible] $cotg^4x + cotg^2x = \frac{1}{sin^4x} - \frac{1}{sin^2x}$

[illegible] $sin^4x(3 - 2sin^2x) + cos^4x(3 - 2cos^2x)$

-۲۱۷ $cos^2x + sin^2xcos^2y = cos^2y + sin^2ycos^2x$

-۲۱۸ $cos^2x - sin^2y = sin^2xsin^2y(cotg^2xcotg^2y - 1)$

-۲۱۹ $sin^6x + cos^6x = 1 - 3sin^2xcos^2x$

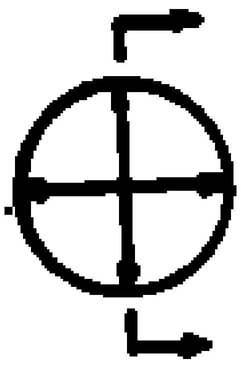
-۲۲۰ $cos^2x = cotg^2x - cotg^2x \cdot cos^2x$

-۲۲۱ $cotg^2x = cos^2x + \frac{cos^4x}{1 - cos^2x}$

قاعده ۳۱

> خطوط مثلثاتی مضرب صحیحی از π یا از ۱۸۰°
> (π و ۲π و ۳π و ۴π و ... یا ۱۸۰° و ۳۶۰° و ۵۴۰° و ...)
> باضافه یامنهای α با خطوط مثلثاتی α جور متشابه باهم برابرند
> (یعنی sin با sin و cos با cos و tg با tg و cotg با cotg) و
> علامت آنرا از روی دایره مثلثاتی بدست میآورند. مانند مثالهای زیر

۶/۵π و ۴/۵π و ۲/۵π و ۰/۵π
۰۰ و ۸π و ۶π و ۴π و ۲π و ۰
۷/۵π و ۵/۵π و ۳/۵π و ۱/۵π



π و ۳π و ۵π و ۷π

$$\begin{cases} \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha \\ \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha \\ \cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha \\ \cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha \\ \cos(2k\pi\pm\alpha)=\cos\alpha \\ \cos(2K\pi\pm\pi\pm\alpha)=-\cos\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha \\ \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha \\ \sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha \\ \sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha \\ \sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha \\ \sin(2k\pi-\alpha)=-\sin\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cot g(\pi+\alpha)=\cot g\alpha \\ \cot g(\pi-\alpha)=-\cot g\alpha \\ \cot g(2\pi-\alpha)=-\cot g\alpha \\ \cot g(2\pi+\alpha)=\cot g\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} tg(\pi+\alpha)=tg\alpha \\ tg(\pi-\alpha)=-tg\alpha \\ tg(2\pi-\alpha)=-tg\alpha \\ tg(2\pi+\alpha)=tg\alpha \end{cases}$$

حل مسائل صفحه ۵۳ و ۵٤ کتاب درسی

تمرین ـ مطلوبست محاسبه خطوط مثلثاتی کمانهای زیر:

۲۳۲ ـ الف ۱۲۰° ۲۱۵° و ۲۱۰° و $\frac{۳\pi}{۴}$ و $\frac{۱۱\pi}{۶}$ و $\frac{۴\pi}{۳}$

حل :

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \cos(180 - 60^\circ) = -\cos 60 = -\frac{1}{2}$$

$$tg\,120^\circ = tg(180^\circ - 60^\circ) = -tg\,60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$cotg\,120^\circ = cotg(180^\circ - 60^\circ) = -cotg\,60 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۲۲۳- ب : °۲۱۵

حل :

$$\sin 315^\circ = \sin(360^\circ - 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 315^\circ = \cos(360^\circ - 45^\circ) = +\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\,315^\circ = tg(360^\circ - 45) = -tg\,45^\circ = -1$$

$$cotg\,315^\circ = cotg(360^\circ - 45^\circ) = -cotg\,45^\circ = -1$$

۲۲۴- ج : °۲۱۰

حل :

$$\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\,210^\circ = tg(180^\circ + 30^\circ) = tg\,30^\circ = +\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$cotg\,210^\circ = cotg(180^\circ + 30^\circ) = cotg\,30^\circ = \sqrt{3}$$

۲۲۵ - د : $\frac{3\pi}{4}$ رادیان

حل :

$$\sin\frac{3\pi}{4} = \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{3\pi}{4} = \cos(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\frac{3\pi}{4} = tg(\pi - \frac{\pi}{4}) = -tg\frac{\pi}{4} = -1$$

$$cotg\ \frac{3\pi}{4} = cotg(\pi - \frac{\pi}{4}) = -cotg\ \frac{\pi}{4} = -1$$

۲۲۶ ك ــ هـ : $\frac{11\pi}{6}$ رادیان

حل :

$$sin\frac{11\pi}{6} = sin(2\pi - \frac{\pi}{6}) = -sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$cos\frac{11\pi}{6} = cos(2\pi - \frac{\pi}{6}) = cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\ \frac{11\pi}{6} = tg(2\pi - \frac{\pi}{6}) = -tg\ \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$cotg\ \frac{11\pi}{6} = cotg(2\pi - \frac{\pi}{6}) = -cotg\ \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

۲۲۷ ك ــ و : $\frac{4\pi}{3}$ رادیان

$$sin\frac{4\pi}{3} = sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\frac{4\pi}{3} = cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = -cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$tg\ \frac{4\pi}{3} = tg\ (\pi + \frac{\pi}{3}) = tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$cotg\ \frac{4\pi}{3} = cotg(\pi + \frac{\pi}{3}) = cotg\ \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

قاعده ۲۳

خطوط مثلثاتی منهای هر زاویه بامنهای خطوط مثلثاتی همان زاویه برابر است بجزکسینوس که منهای زاویه تأثیری ندارد و علامت را تغییر نمیدهد ، مانند مثالهای زیر

$sin(-\alpha) = -sin\alpha$ و $cotg(-\alpha) = -cotg\alpha$

$tg(-\alpha) = -tg\alpha$ و $cos(-\alpha) = cos\alpha$

$$\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2} \quad و \quad \cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg(-120^\circ) = -tg 120^\circ = -tg(180^\circ - 60^\circ) = -(-tg 60^\circ) = \sqrt{3}$$

۲۲۸ ـ مطلوبست محاسبه عبارت زیر :

$$A = \frac{\sin 150^\circ \cos 30^\circ - 2\sin 30^\circ tg 120^\circ}{2\cot g 60^\circ - tg 210^\circ + \cot g 330^\circ}$$

حل:

$$A = \frac{\sin(180^\circ - 30^\circ)\cos 30^\circ - 2\sin 30^\circ tg(180^\circ - 60^\circ)}{2\cot g 60^\circ - tg(180^\circ + 30^\circ) + \cot g(360^\circ - 30^\circ)}$$

$$A = \frac{\sin 30^\circ \cos 30^\circ - 2\sin 30^\circ(-tg 60^\circ)}{2\cot g 60^\circ - tg 30^\circ - \cot g 30^\circ}$$

$$A = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{4}}{\frac{-2\sqrt{3}}{3}} = \frac{-15}{8}$$

خطوط مثلثاتی مضرب فردی از $\frac{\pi}{2}$ یا 90° باضافه یا منهای α با خطوط مثلثاتی α بطور ناجور برابر است (یعنی sin با cos و cos با sin و tg با cotg و cotg با tg برابراست)و علامت آنرا از روی دایره مثلثاتی بدست میآورند مانند مثالهای زیر .	قاعده ۳۳
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$ و $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$ $tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot g\alpha$ و $\cot g\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = tg\alpha$	قاعده ۳۴

قاعده ۳۵	$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$ و $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$ $tg(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-cotg\alpha$ و $cotg(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-tg\alpha$
قاعده ۳۶	$\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\cos\alpha$ و $\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\sin\alpha$ $tg(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=cotg\alpha$ و $cotg(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=tg\alpha$
قاعده ۳۷	$\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cos\alpha$ و $\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=\sin\alpha$ $tg(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-cotg\alpha$ و $cotg(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-tg\alpha$

حل مسائل صفحه ۵٤ و ۵۵ کتاب درسی

درستی تساویهای زیر را تحقیق کنید :

۲۲۹ ك ۳ –

$$\sin 200^\circ+2\sin 160^\circ-\cos 70^\circ+3\sin 340^\circ-4\cos 110^\circ=\sin 20^\circ$$

$$\sin(180^\circ+20^\circ)+2\sin(180^\circ-20^\circ)-\cos(90^\circ-20^\circ)+3\sin(360^\circ-20^\circ)-4\cos(90^\circ+20^\circ)=$$

$$-\sin 20^\circ+2\sin 20^\circ-\sin 20^\circ-3\sin 20^\circ+4\sin 20^\circ=\sin 20^\circ$$

۲۳۰ ك ۴ –

$$3tg 130^\circ+cotg 40^\circ-tg 230^\circ-5tg 310^\circ-2cotg 140^\circ=4tg 50^\circ$$

$$3tg(180^\circ-50^\circ)+cotg(90^\circ-50^\circ)-tg(180^\circ+50^\circ)-5tg(360^\circ-50^\circ)-2cotg(90^\circ+50^\circ)=$$

$$-3tg 50^\circ+tg 50^\circ-tg 50^\circ+5tg 50^\circ+2tg 50^\circ=4tg 50^\circ$$

۲۳۱ ك ۵ –

$$2\cos 75^\circ\cos 80+3\cos 105^\circ\sin 170^\circ+4\sin 165^\circ\sin 190^\circ=$$

$$= -5\sin 15^\circ \sin 10^\circ$$

$$2\cos(90^\circ-15^\circ)\cos(90^\circ-10^\circ)+3\cos(90^\circ+15^\circ)\sin(180^\circ-10^\circ)+$$
$$+4\sin(180^\circ-15^\circ)\sin(180^\circ+10^\circ)$$
$$=2\sin 15^\circ \sin 10^\circ-3\sin 15^\circ \sin 10^\circ-4\sin 15^\circ \sin 10^\circ=-5\sin 15^\circ \sin 10^\circ$$

۲۳۲ـ ک ۶ـ
$$\frac{2\sin 18^\circ-\sin(-18^\circ)+\sin 162^\circ-2\sin 198^\circ}{\cos 72^\circ+2\cos 108^\circ+\sin 342^\circ}=-2$$
$$\frac{2\sin 18^\circ+\sin 18^\circ+\sin(180^\circ-18^\circ)-2\sin(180^\circ+18^\circ)}{\cos(90^\circ-18^\circ)+2\cos(90^\circ+18^\circ)+\sin(360^\circ-18^\circ)}=$$
$$\frac{3\sin 18^\circ+\sin 18^\circ+2\sin 18^\circ}{\sin 18^\circ-2\sin 18^\circ-\sin 18^\circ}=\frac{6\sin 18^\circ}{-2\sin 18^\circ}=-2$$

اتحادهای زیر را ثابت کنید :

۲۳۳ـ ک ۷ـ
$$\sin(\pi-\alpha)\sin(2\pi+\alpha)+\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)+\cos^2(\pi+\alpha)=\cos^2\alpha$$

حل: طرف اول $=\sin\alpha\times\sin\alpha+\sin\alpha(-\sin\alpha)+(-\cos\alpha)^2$

طرف اول $=\sin^2\alpha-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\cos^2\alpha=$ طرف دوم

۲۳۴ـ ک ۸ـ $tg(\pi+\alpha)cotg(\alpha-\pi)-\cos(2\pi-\alpha)\cos(2\pi+\alpha)=\sin^2\alpha$

طرف اول $=tg\alpha\left\{cotg[-(\pi-\alpha)]\right\}-\cos\alpha\times\cos\alpha$

طرف اول $=tg\alpha[-cotg(\pi-\alpha)]-\cos^2\alpha=tg\alpha(+cotg\alpha)-\cos^2\alpha$

طرف اول $=tg\alpha\, cotg\alpha-\cos^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha\equiv$ طرف دوم

۲۳۵ـ ک ۹ـ $\sin(\pi-x)\sin(\frac{\pi}{2}-x)[tg(\pi+x)-cotg(2\pi-x)]=1$

حل: طرف اول $=\sin x\cos x(tg x+cotg x)$

طرف اول $=\sin x\cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\sin x\cos x\left(\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}\right)$

طرف اول $=\sin^2 x+\cos^2 x=1\equiv$ طرف دوم

۲۳۶ ک ۱۰ $\sin(\frac{\pi}{2}+x)\cos(\frac{\pi}{2}-x)+\sin(x-\pi)\cos(x-2\pi)+$

$tg(\pi-x)tg(\frac{\pi}{2}+x)=1$

طرف اول $= \cos x \sin x + \sin[-(\pi - x)]\cos(2\pi - x) - tg\, x(-cotg\, x)$

طرف اول $= \cos x \sin x - \sin(\pi - x)\cos(2\pi - x) + tg\, x\, cotg\, x$

طرف اول $= \sin x \cos x - \sin x \cos x + 1 = 1 =$ طرف دوم

۲۳۷ـ ك ۱۱ ــ درصورتیکه $tg\alpha = \frac{5}{12}$ وانتهای کمان α در ربع سوم باشد مقدار عبارت زیر را بدست آورید:

$$y = \sin(2\pi - \alpha) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + tg(2\pi + \alpha) + cotg(-\alpha)$$

حل: $y = -\sin\alpha - \sin\alpha + tg\alpha - cotg\alpha = -2\sin\alpha + tg\alpha - cotg\alpha$

حال ابتداء $cotg\alpha$ و $\sin\alpha$ را بدست میآوریم و سپس y را حساب می‌کنیم.

$$cotg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{12}{5} \qquad 1 + cotg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$1 + \frac{144}{25} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Longrightarrow \sin^2\alpha = \frac{25}{169} \Longrightarrow \sin\alpha = -\frac{5}{13}$$

$$y = -2\sin\alpha + tg\alpha - cotg\alpha = -2 \times \frac{-5}{13} + \frac{5}{12} - \frac{12}{5}$$

$$y = \frac{10}{13} + \frac{5}{12} - \frac{12}{5} = \frac{600 + 325 - 1872}{780} = \frac{-947}{780}$$

۲۳۸ـ ك ۱۲ ــ درصورتیکه $\sin 22/5° = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$ باشد مقدار عبارت زیر را بدست آورید:

$$y = \frac{\cos 202/5° + \cos 112/5°}{\cos 337/5° - \cos 67/5°}$$

حل:

$$\cos 202/5° = \cos(180 + 22/5) = -\cos 22/5°$$

$$\cos 112/5° = \cos(90 + 22/5) = -\sin 22/5°$$

$$\cos 337/5° = \cos(360 - 22/5) = \cos 22/5°$$

$$\cos 67/5° = \cos(90 - 22/5) = \sin 22/5°$$

$$\cos^2 22/5 = 1 - \sin^2 22/5 = 1 - \frac{2 - \sqrt{2}}{4} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ و } y=\frac{-\cos 22/5^\circ - \sin 22/5^\circ}{\cos 22/5^\circ - \sin 22/5^\circ}$$

اگر بجای $\cos 22/5^\circ$ و $\sin 22/5^\circ$ مقادیرشان را قرار دهیم $y=-\sqrt{2}-1$ می‌شود

چند مسأله خارج از کتاب درسی

۲۳۹ـ در صورتیکه $\sin\alpha=\frac{-3}{5}$ و انتهای کمان α در ربع سوم واقع باشد مطلوبست خطوط مثلثاتی $(\pi+\alpha)$.

حل : ابتدا خطوط مثلثاتی α را حساب کرده و سپس خطوط مثلثاتی $(\pi+\alpha)$ را حساب می‌کنیم :

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}\rightarrow\cos\alpha=-\frac{4}{5}$$

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{4} \text{ و } cotg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{4}{3}$$

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha=\frac{+3}{5} \text{ و } \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha=\frac{4}{5}$$

$$tg(\pi+\alpha)=tg\alpha=\frac{3}{4} \text{ و } cotg(\pi+\alpha)=cotg\alpha=\frac{4}{3}$$

۲۴۰ـ در صورتیکه $tg\alpha=\frac{-5}{12}$ و انتهای کمان α در ربع دوم واقع باشد خطوط مثلثاتی کمان $(-\alpha)$ را حساب کنید .

حل : ابتداء خطوط مثلثاتی α را حساب کرده و سپس خطوط مثلثاتی $(-\alpha)$ را بدست میآوریم :

$$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Longrightarrow 1+\frac{25}{144}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Longrightarrow\cos\alpha=\frac{-12}{13}$$

$$\cos(-\alpha)=\frac{-12}{13}$$

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{144}{169}=\frac{25}{169} \text{ و } \sin\alpha=\frac{5}{13} \text{ و } \sin(-\alpha)=\frac{-5}{13}$$

$$tg\alpha = \frac{-5}{12} \text{ و } tg(-\alpha) = -tg\alpha = \frac{5}{12}$$

$$cotg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = -\frac{12}{5} \text{ و } cotg(-\alpha) = -cotg\alpha = \frac{12}{5}$$

۲۴۱- در صورتیکه $\cos\alpha = \frac{-5}{13}$ وانتهای کمان α درربع سوم واقع باشدخطوط مثلثاتی $(\pi+\alpha)$ را حساب کنید.

جواب : $\frac{5}{12}$ و $\frac{12}{5}$ و $\frac{5}{13}$ و $\frac{12}{13}$

قاعده ۳۸	خطوط مثلثاتی کمانیکه انتهای آن در ربع اول واقع می‌باشد همگی مثبت می‌باشد .
قاعده ۳۹	اگر انتهای کمانی در ربع دوم واقع باشد سینوسش مثبت و سایر خطوط مثلثاتی آن منفی می‌باشد .
قاعده ۴۰	اگر انتهای کمانی در ربع سوم واقع باشد سینوس و کسینوس آن کمان منفی و tg و $cotg$ آن کمان مثبت می‌باشد .
قاعده ۴۱	اگرانتهای کمانی در ربع چهارم واقع باشدفقط کسینوس آن کمان مثبت است ولی سایر خطوط مثلثاتی آن منفی می‌باشد.

تذکر ــ قواعد بالا از روی دایره مثلثاتی بهتر درك می‌شود .

قاعده ۴۲	اندازه قدر مطلق خطوط مثلثاتی کمانهای : $\frac{7\pi}{6}$ و $\frac{11\pi}{6}$ و $\frac{13\pi}{6}$ و $\frac{17\pi}{6}$ و ... مساوی اندازه خطوط مثلثاتی $\frac{\pi}{6}$ می‌باشد و علامت آن‌از روی دایره مثلثاتی بدست می‌آید .

$$\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2} \text{ و } \cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } tg\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ و } cotg\frac{5\pi}{6}=-\sqrt{3}$$

$$\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{1}{2} \text{ و } \cos\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } tg\frac{7\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ و } cotg\frac{7\pi}{6}=\sqrt{3}$$

$$\sin\frac{11\pi}{6}=-\frac{1}{2} \text{ و } \cos\frac{11\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } tg\frac{11\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ و } cotg\frac{11\pi}{6}=-\sqrt{3}$$

قاعده ۴۳

اندازه قدر مطلق خطوط مثلثاتی $\frac{2\pi}{3}$ و $\frac{4\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{3}$ و $\frac{7\pi}{3}$ مساوی اندازه خطوط مثلثاتی $\frac{\pi}{3}$ می‌باشد و علامت آن از روی دایره مثلثاتی بدست می‌آید.

$$\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } \cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2} \text{ و } tg\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3} \text{ و } cotg\frac{2\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } \cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2} \text{ و } tg\frac{4\pi}{3}=\sqrt{3} \text{ و } cotg\frac{4\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{-\sqrt{3}}{2} \text{ و } \cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2} \text{ و } tg\frac{5\pi}{3}=-\sqrt{3} \text{ و } cotg\frac{5\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

قاعده ۴۴

اندازه قدر مطلق خطوط مثلثاتی $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ و $\frac{7\pi}{4}$ مساوی اندازه خطوط مثلثاتی $\frac{\pi}{4}$ می‌باشد و علامت آنها از روی دایره مثلثاتی بدست می‌آید

قاعده ۴۵

اندازه قدر مطلق خطوط مثلثاتی $\frac{11\pi}{12}$ و $\frac{13\pi}{12}$ و $\frac{23\pi}{12}$ مساوی اندازه خطوط مثلثاتی $\frac{\pi}{12}$ وهمچنین اندازه قدر مطلق خطوط مثلثاتی $\frac{7\pi}{12}$ و $\frac{17\pi}{12}$ و $\frac{19\pi}{12}$ مساوی خطوط مثلثاتی $\frac{5\pi}{12}$ می‌باشد وعلامت آنها از روی دایره مثلثاتی بدست می‌آید.

۲۴۲ـ حاصل عبارت زیر را بازاء $x=\frac{5\pi}{3}$ بدست آورید:

$$y = 8\sin^2 x + 4\cos x - 2\sin\frac{x}{2} - 1$$

حل:

$$y=8\sin^2\frac{5\pi}{3}+4\cos\frac{5\pi}{3}-2\sin\frac{5\pi}{6}-1$$

$$y=8\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)-2\left(\frac{1}{2}\right)-1=8\left(\frac{3}{4}\right)+2-1-1$$

$$y=6$$

۲۴۳ـ حاصل عبارت $y=\sin^2 2x+5\cos x-1$ را بازاء $x=\frac{\pi}{2}$ بدست آورید.

حل:

$$y=\sin^2 2\left(\frac{\pi}{2}\right)+5\cos\frac{\pi}{2}-1$$

$$y=\sin^2\pi+5\times 0-1=0+0-1=-1$$

۲۴۴ ـ حاصل عبارت $y = 2\sin 3x-\sin x-\cos 2x$ را بازاء $x=\frac{\pi}{2}$ بدست آورید .

حل :

$$y=2\sin 3\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin\frac{\pi}{2}-\cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y=2\sin\frac{3\pi}{2}-1-\cos\pi=2\times -1-1+1=-2$$

۲۴۵ـ حاصل عبارت $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x+2$ را بازاء $x=\frac{11\pi}{6}$ بدست آورید .

$$y=\sin\frac{11\pi}{6}+\sqrt{3}\cos\frac{11\pi}{6}+2=\frac{-1}{2}+\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2$$

$$y=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+2=3$$

۲۴۶ ـ حاصل عبارت $y=\sin^2 x-\cos 2x+3$ را بازاء $x=\frac{7\pi}{6}$ بدست آورید.

$$y=\sin^2\frac{7\pi}{6}-\cos\frac{7\pi}{3}+2=(-\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})+2$$

$$y=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+2=\frac{11}{4}$$

۲۴۷ـحاصل عبارت $y=\sin^2\frac{3x}{2}-2\cos 2x+4$ را بازاء $x=\pi$ بدست آورید.

حل :
$$y=\sin^2\frac{3\pi}{2}-2\cos 2\pi+4=(-1)^2-2(-1)+4$$

$$y=-1+2+4\Longrightarrow y=5$$

۲۴۸ـحاصل عبارت $y=2\sin 2x-4\cos 2x+3$ را بازاء $x=\frac{5\pi}{6}$ بدست آورید.

$$y=2\sin\frac{5\pi}{3}-4\cos\frac{5\pi}{3}+3=2(-\frac{\sqrt{3}}{2})-4(\frac{1}{2})+3$$

$$y=-\sqrt{3}-2+3=1-\sqrt{3}$$

۲۴۹ـحاصل عبارت $y=\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}+\cos x$ را بازاء $x=\frac{4\pi}{3}$ بدست آورید.

$$y=\sin\frac{2\pi}{3}-\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{4\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}-(\frac{-1}{2})+(\frac{-1}{2})$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۲۵۰ـحاصل عبارت $y=\sin\frac{11x}{3}-\cos\frac{5x}{2}+3\sin 3x$ را بازاء $x=\frac{\pi}{2}$ بدست آورید.

$$y=-\sin\frac{\pi}{6}-\cos\frac{5\pi}{4}+3\sin\frac{3\pi}{2}$$

$$y=\frac{-1}{2}-(\frac{-\sqrt{2}}{2})+3(-1)=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-3=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{7}{2}=\frac{\sqrt{2}-7}{2}$$

۲۵۱ـحاصل عبارت زیر را بازاء $x=\frac{7\pi}{3}$ بدست آورید.

حل:

$$y=2\sin^2 x-3\cos x+\sin x$$

$$y=2\sin^2\frac{7\pi}{3}-3\cos\frac{7\pi}{3}+\sin\frac{7\pi}{3}$$

$$y=2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-3\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y=2\times\frac{3}{4}-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۲۵۲ـ حاصل عبارت $y=2\sin^2 x-3\cos 2x-\sin x+tg\,x$ را بازاء $x=\frac{11\pi}{4}$ محاسبه کنید .

حل :

$$y=2\sin^2 x-3\cos 2x-\sin x+tg\,x$$

$$y=2\sin^2\frac{11\pi}{4}-3\cos 2\left(\frac{11\pi}{4}\right)-\sin\frac{11\pi}{4}+tg\,\frac{11\pi}{4}$$

$$y=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-3\times 0-\frac{\sqrt{2}}{2}-1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲۵۳ـ حاصل عبارت $y=2\sin 2x\cos 3x-tg\,x+2\,cotg\,\frac{x}{2}$ را بازاء $x=\frac{11\pi}{3}$ محاسبه کنید .

حل :

$$y=2\sin 2x\cos 3x-tg\,x+2\,cotg\,\frac{x}{2}$$

$$y=2\sin 2\left(\frac{11\pi}{3}\right)\cos 3\left(\frac{11\pi}{3}\right)-tg\frac{11\pi}{3}+2\,cotg\,\frac{11\pi}{6}$$

$$y=2\sin\frac{22\pi}{3}\cos 11\pi-tg\frac{11\pi}{3}+2\,cotg\,\frac{11\pi}{6}$$

$$y=2\times-\frac{\sqrt{3}}{2}\times-1+\sqrt{3}-2\sqrt{3}=0$$

حاصل هر یک از عبارات زیر را بازاء مقادیری که در جلوی آنها داد شده است بدست آورید .

۲۵۴ـ بازاء $x=-\frac{\pi}{3}$ $\quad y=\sqrt{3}\sin x-\cos x-2$

$$y=\sqrt{3}\sin(-\frac{\pi}{3})-\cos(-\frac{\pi}{3})-2=-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}-2=-4$$

۲۵۵- بازاء $x=\frac{-5\pi}{6}$ $\quad y=\sin x-\sqrt{3}\cos x+1$

$$y=\sin(\frac{-5\pi}{6})-\sqrt{3}\cos(\frac{-5\pi}{6})+1=-\sin\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6}+1=2$$

۲۵۶- بازاء $x=\frac{-5\pi}{6}$ $\quad y=tg2x-cotg\,x+3$

$$y=tg(\frac{-5\pi}{3})-cotg(\frac{-5\pi}{6})+3=-tg\frac{5\pi}{3}+cotg\frac{5\pi}{6}+3$$

$$y=-(-\sqrt{3})+(-\sqrt{3})+3=3$$

۲۵۷- بازاء $x=\frac{-\pi}{4}$ $\quad y=\sin^2x-2\sin x\cos x$

حل : $y=\sin^2(\frac{-\pi}{4})-2\sin(\frac{-\pi}{4})\cos(\frac{-\pi}{4})$

$$y=(\frac{-\sqrt{2}}{2})^2-2(\frac{-\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{3}{2}$$

حل مسائل صفحه ۷۴ کتاب درسی

خطوط مثلثاتی کمانهای زیر را حساب کنید:

۲۵۸- $a=42^\circ$

حل: با توجه بجدول موجود در متن کتاب داریم .

$\sin 42^\circ=0/6820$ و $tg42^\circ=0/9325$

$\cos 42^\circ=0/7314$ و $cotg42^\circ=1/072$

۲۵۹- ۱۳۰ گراد

حل : اول بدرجه تبدیل میکنیم سپس از جدول استفاده میکنیم .

$$\frac{D}{180}=\frac{G}{200}\Longrightarrow\frac{D}{180}=\frac{130}{200}\Longrightarrow D=117^\circ$$

$$\cos117^\circ=\cos(90^\circ+27^\circ)=-\sin27^\circ=-0/4540$$

$$\sin117^\circ=\sin(90^\circ+27^\circ)=\cos27^\circ=0/8910$$

$$tg۱۱۷^\circ = tg(۹۰^\circ + ۲۷^\circ) = -cotg۲۷^\circ = -۱/۹۶۳$$

$$cotg(۱۱۷^\circ) = cotg(۹۰^\circ + ۲۷^\circ) = -tg۲۷^\circ = -۰/۵۰۹۵$$

۲۶۰ـ۳ـ رادیان $\frac{۱۰\pi}{۹}$

$$\frac{R}{\pi} = \frac{D}{۱۸۰} \Longrightarrow \frac{\frac{۱۰\pi}{۹}}{\pi} = \frac{D}{۱۸۰} \Longrightarrow \frac{۱۰\pi}{۹\pi} = \frac{D}{۱۸۰}$$

$$D = ۲۰۰^\circ \text{ و } \sin۲۰۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ + ۲۰^\circ) = -\sin۲۰^\circ = -۰/۳۴۲۰$$

$$\cos۲۰۰^\circ = \cos(۱۸۰^\circ + ۲۰^\circ) = -\cos۲۰^\circ = -۰/۹۳۹۷$$

$$tg۲۰۰^\circ = tg(۱۸۰^\circ + ۲۰^\circ) = tg۲۰^\circ = ۰/۳۶۴۰$$

$$cotg۲۰۰^\circ = cotg(۱۸۰^\circ + ۲۰^\circ) = cotg۲۰^\circ = ۲/۷۴۷$$

۲۶۱ـ۴ـ

$$b = ۳۹۸۱^\circ$$

$$\begin{array}{r|l} ۳۹۸۱ & ۳۶۰ \\ \underline{۳۶۰} & \overline{۱۱} \\ ۳۸۱ & \\ \underline{۳۶۰} & \\ ۲۱ & \end{array} \Longrightarrow d = ۱۱ \times ۳۶۰^\circ + ۲۱$$

$$\sin(۳۹۸۱^\circ) = \sin۲۱^\circ$$

$$\cos(۳۹۸۱^\circ) = \cos۲۱^\circ$$

۲۶۲ـ۵ـ

$\alpha = ۳۰۷۰$ گراد

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{G}{۲۰۰} \Longrightarrow \frac{D}{۱۸۰} = \frac{۳۰۷۰}{۲۰۰} \Longrightarrow D = ۲۷۶۳^\circ$$

$$\begin{array}{r|l} ۲۷۶۳ & ۳۶۰^\circ \\ \underline{۲۵۲۰} & \overline{۷} \\ ۰۲۴۳ & \end{array}$$

$$\sin(۳۰۷۰g) = \sin(۲۷۶۳^\circ) = \sin(۷ \times ۳۶۰^\circ + ۲۴۳^\circ)$$

$$= \sin۲۴۳^\circ = \sin(۲۷۰^\circ - ۲۷^\circ) = -\cos۲۷^\circ = -۰/۸۹۱۰$$

$$\cos\alpha = -۰/۴۵۴۰ \text{ و } tg\alpha = ۰/۵۰۹۵ \quad \text{و} \quad cotg\alpha = ۱/۹۶۳$$

۲۶۳ـ۶ـ $\beta = ۲/۹\pi$ رادیان

$$\frac{R}{\pi}=\frac{D}{۱۸۰}\Longrightarrow\frac{۳/۹\pi}{\pi}=\frac{D}{۱۸۰}\Longrightarrow D=۷۰۲^\circ$$

$$\sin\beta=\sin۷۰۲^\circ=\sin(۳۶۰^\circ+۳۴۲^\circ)=\sin۳۴۲^\circ$$

$$\sin\beta=\sin(۳۶۰^\circ-۱۸^\circ)=-\sin۱۸^\circ=-۰/۳۰۹۰$$

$$\cos\beta=\cos۱۸^\circ=۰/۹۵۱۱ \text{ و } tg\beta=۰/۳۲۴۹$$

چند قاعده برای حل معادلات

قاعده ۴۶

منهای کسینوس هر زاویه باکسینوس مکمل همان زاویه برابر است مانند مثالهای زیر :

$$-\cos۳۰^\circ=\cos(۱۸۰^\circ-۳۰^\circ)=\cos۱۵۰^\circ$$

$$-\cos x=\cos(\pi-x)$$

$$-\cos۶۰^\circ=\cos(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)=\cos۱۲۰^\circ$$

$$-\cos۲x=\cos(\pi-۲x)$$

$$\cos(۱۲۰^\circ-x)=\cos(۱۸۰^\circ-۱۲۰^\circ+x)=$$

$$\cos(۶۰^\circ+x)\quad\Rightarrow$$

قاعده ۴۷

منهای خطوط مثلثاتی هر زاویه با خطوط مثلثاتی منهای همان زاویه برابر است بجز کسینوس که قاعده آن ذکر شد و بر عکس مانند مثالهای زیر :

$$-\sin۳۰^\circ=\sin(-۳۰^\circ) \text{ و } -tg x=tg(-x)$$

$$-cotg۶۰^\circ=cotg(-۶۰^\circ)$$

$$-\sin(x-۶۰^\circ)=\sin(۶۰^\circ-x)$$

$$-tg(۴۵^\circ-۲x)=tg(۲x-۴۵^\circ)$$

$$-cotg(۳۰^\circ+x)=cotg(-۳۰^\circ-x)$$

$$-\sin(۲x-۱۵۰^\circ)=\sin(۱۵۰^\circ-۲x)$$

قاعده ۴۸

خطوط مثلثاتی هر زاویه با خطوط مثلثاتی متمم همان زاویه بطور ناجور برابرند یعنی سینوس با کسینوس و کسینوس با سینوس و تانژانت با کتانژانت و کتانژانت با تانژانت برابر است . مانند مثالهای زیر :

$$\sin 30^\circ = \cos(90^\circ - 30^\circ) = \cos 60^\circ$$

$$\cos x = \sin(90^\circ - x)$$

$$tg(-x) = cotg(90^\circ + x) \quad \text{و} \quad \sin(60^\circ - x) = \cos(90^\circ - 60^\circ + x) = \cos(30^\circ + x)$$

$$cotg(45^\circ + x) = tg(90^\circ - 45^\circ - x) = tg(45^\circ - x)$$

تذکر ۱ ـ لطفاً ابتداء جدول صفحه ([illegible]) را خوب مطالعه کرده و آنرا خوب بخاطر بسپارید .

تذکر ۲ ـ معادلات کتاب درسی از صفحه ([illegible]) بیعد چاپ شده است .

قاعده ۴۹

هر گاه کسینوس دو زاویه با هم برابر باشند زاویه یك طرف برابر است با $2K\pi$ باضافه زاویه طرف دیگر همچنین زاویه یك طرف مساوی است با $2K\pi$ منهای زاویه طرف دیگر (K عدد صحیح است) ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ... و ۱ ــ و ۲ ــ و ۳ ــ ...

$$\cos x = \cos\alpha \rightarrow \begin{cases} x = 2K\pi + \alpha \\ x = 2K\pi - \alpha \end{cases}$$

تمرین : معادلات زیر را حل کرده و جوابهای کلی آنها را بدست آورید

۲۶۴ ــ $\cos(2x + 15^\circ) = \cos(x + 45^\circ)$

حل : $2x + 15^\circ = 2K\pi + x + 45^\circ \Longrightarrow x = 2K\pi + 30^\circ$

$$2x + 15^\circ = 2K\pi - (x + 45^\circ) \Longrightarrow 2x + 15^\circ = 2K\pi - x - 45^\circ$$

$$3x = 2K\pi - 60^\circ \Longrightarrow x = (2K\pi \div 3) - 20^\circ$$

۲۶۵ ــ $\cos 3x = -\cos x$

حل : با استفاده از قاعده (۴۶) $\cos 3x = \cos(180 - x)$

$$3x = 2K\pi + 180^\circ - x \Longrightarrow 4x = 2K\pi + 180^\circ \Longrightarrow x = \left(\frac{K\pi}{2}\right) + 45^\circ$$

$$2x = 2K\pi - (180^\circ - x) \Longrightarrow 2x = 2K\pi - 180^\circ + x$$

$$2x = 2K\pi - 180^\circ \Longrightarrow x = K\pi - 90^\circ$$

-۲۶۶ $\quad 2\cos 2x - 1 = 0$

حل: $\quad 2\cos 2x = 1 \Longrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$

$$2x = 2K\pi \pm 60^\circ \Longrightarrow x = K\pi \pm 30^\circ$$

-۲۶۷ $\quad 2\cos(2x + 15^\circ) - \sqrt{2} = 0$

حل: $\quad 2\cos(2x + 15^\circ) = \sqrt{2} \Longrightarrow \cos(2x + 15^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ$

$$2x + 15^\circ = 2K\pi + 45^\circ \Longrightarrow 2x = 2K\pi + 30^\circ \Longrightarrow x = K\pi + 15^\circ$$

$$2x + 15^\circ = 2K\pi - 45^\circ \Longrightarrow 2x = 2K\pi - 60^\circ \Longrightarrow x = K\pi - 30^\circ$$

-۲۶۸ $\quad 2\cos(x + 45^\circ) + 1 = 0$

حل: $\quad 2\cos(x + 45^\circ) = -1 \Longrightarrow \cos(x + 45^\circ) = \frac{-1}{2}$

$$\cos(x + 45^\circ) = -\cos 60^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = \cos 120^\circ$$

$$x + 45^\circ = 2K\pi + 120^\circ \Longrightarrow x = 2K\pi + 75^\circ$$

$$x + 45^\circ = 2K\pi - 120^\circ \Longrightarrow x = 2K\pi - 165^\circ$$

-۲۶۹ $\quad 4\cos(x + 20^\circ) + \sqrt{6} + \sqrt{2} = 0$

$$4\cos(x + 20^\circ) = -(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \Longrightarrow \cos(x + 20^\circ) = \frac{-(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4}$$

$$\cos(x + 20^\circ) = -\cos 15^\circ = \cos(180^\circ - 15^\circ) = \cos 165^\circ$$

$$x + 20^\circ = 2K\pi + 165^\circ \Longrightarrow x = 2K\pi + 145^\circ$$

$$x + 20^\circ = 2K\pi - 165^\circ \Longrightarrow x = 2K\pi - 185^\circ$$

-۲۷۰ $\quad 4\cos^2\frac{x}{2} - 1 = 0$

حل:

$$4\cos^2\frac{x}{2} = 1 \Longrightarrow \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{4} \Longrightarrow \cos\frac{x}{2} = \pm\frac{1}{2} = \pm\cos 60^\circ$$

$$\cos\frac{x}{2}=\cos 60^\circ \Rightarrow \frac{x}{2}=2K\pi\pm 60^\circ \Rightarrow \boxed{x=4k\pi\pm 120^\circ}$$

$$\cos\frac{x}{2}=-\cos 60^\circ=\cos 120^\circ \Rightarrow \frac{x}{2}=2K\pi\pm 120^\circ \Rightarrow x=4K\pi\pm 240^\circ$$

۲۷۱- $4\cos^2(x-15^\circ)-3=0$

حل :

$$\cos^2(x-15^\circ)=\frac{3}{4}\Rightarrow\cos(x-15^\circ)=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}=\pm\cos 30^\circ$$

$$\cos(x-15^\circ)=\cos 30^\circ\Rightarrow x-15^\circ=2K\pi+30^\circ$$

$x=2K\pi+45^\circ$ و $x-15^\circ=2K\pi-30^\circ\Rightarrow x=2K\pi-15^\circ$

$$\cos(x-15^\circ)=-\cos 30^\circ=\cos(180^\circ-30^\circ)=\cos 150^\circ$$

$x-15^\circ=2K\pi\pm 150^\circ\Rightarrow x=2K\pi+165^\circ$ و $2K\pi-135^\circ$

۲۷۲- $2\cos^2 2x+\cos 2x=0$

حل : $\cos 2x(2\cos 2x+1)=0\Rightarrow\cos 2x=0=\cos 90^\circ$

$$2x=2K\pi\pm 90^\circ\Rightarrow x=K\pi\pm 45^\circ$$

$$2\cos 2x+1=0\Rightarrow\cos 2x=-\frac{1}{2}=-\cos 60^\circ=\cos 120^\circ$$

$$2x=2K\pi\pm 120^\circ\Rightarrow x=K\pi\pm 60^\circ$$

۲۷۳- $2\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x=0$

حل : $\cos x(2\cos x-\sqrt{3})=0\Rightarrow\cos x=0=\cos 90^\circ$

$x=2K\pi\pm 90^\circ$ و $2\cos x-\sqrt{3}=0\Rightarrow 2\cos x=\sqrt{3}$

$$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30^\circ\Rightarrow x=2K\pi\pm 30^\circ$$

۲۷۴- $\cos(2x+30^\circ)\cos(x-45^\circ)=0$

حل : هرکدام را مساوی صفر قرار میدهیم

$$\cos(2x+30^\circ)=0=\cos 90^\circ\Rightarrow 2x+30^\circ=2K\pi+90^\circ$$

$$2x=2K\pi+60^\circ\Rightarrow x=K\pi+30^\circ$$

$$2x+30^\circ=2K\pi-90^\circ\Rightarrow 2x=2K\pi-120\Rightarrow x=K\pi-60^\circ$$

$$\cos(x-45^\circ)=0=\cos 90^\circ\Rightarrow x-45^\circ=2K\pi\pm 90^\circ$$

$x = 2K\pi + 135^\circ$ و $2K\pi - 45^\circ$ α

قاعده ۵۰

ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2+bx+C=0$ از یکی ازدو فرمول زیر بدست میآید.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4aC}}{2a} \quad \text{یا} \quad x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

b' نصف b می‌باشد.

۲۷۵- $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$

$a=2$ و $b=-3$ و $c=-2$

حل: $\cos x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = 2$ غیر ممکن و $\frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

$\cos x = \frac{-1}{2} = -\cos 60^\circ = \cos 120^\circ \Longrightarrow x = 2K\pi \pm 120^\circ$

۲۷۶- $2\cos^2 \frac{x}{2} + 5\cos\frac{x}{2} + 2 = 0$

$\cos\frac{x}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = -2$ وغیرممکن و $-\frac{1}{2}$

$\cos\frac{x}{2} = \frac{-1}{2} = -\cos 60^\circ = \cos 120^\circ \Longrightarrow \frac{x}{2} = 2k\pi \pm 120^\circ$

$x = 4k\pi \pm 240^\circ$

تمرین با جواب

صورت	جواب	
$\cos 2x = \cos x$	$x = 2k\pi$ و $\frac{2k\pi}{3}$	۲۷۷-
$\cos(3x - 45^\circ) = \cos(x - 15^\circ)$		۲۷۸-

$x = K\pi + 15^\circ$ و $\frac{k\pi}{2} + 15^\circ$

۲۷۹- $\cos(2x + 15^\circ) = -\cos x$

$x = \frac{2k\pi}{3} + 55^\circ$ و $2k\pi - 195^\circ$

۲۸۰- $2\cos 2x-\sqrt{3}=0$ $x=k\pi\pm 15^\circ$

۲۸۱- $2\cos x-1=0$ $x=2k\pi\pm 60^\circ$

۲۸۲- $\cos 2x+1=0$ $x=k\pi\pm 90^\circ$

۲۸۳- $4\cos(x+25^\circ)+\sqrt{6}-\sqrt{2}=0$

جواب: $x=2k\pi+80^\circ$ و $2k\pi-130^\circ$

۲۸۴- $2\cos^2 x+\cos x=0$ $x=2k\pi\pm 90^\circ$ و $2k\pi\pm 120^\circ$

۲۸۵- $4\cos 2x+\sqrt{6}+\sqrt{2}=0$ $x=k\pi\pm 82/5^\circ$

۲۸۶- $2\cos^2\frac{x}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}=0$

جواب: $x=4k\pi\pm 180^\circ$ و $4k\pi\pm 300^\circ$

۲۸۷- $4\cos^2 x-1=0$ $x=2k\pi\pm 120^\circ$ و $2k\pi\pm 60^\circ$

۲۸۸- $2\cos^2 x-1=0$ $x=2k\pi\pm 45^\circ$ و $2k\pi\pm 125^\circ$

۲۸۹- $4\cos^2\frac{x}{2}-3=0$ $x=4k\pi\pm 60^\circ$ و $4k\pi\pm 300^\circ$

۲۹۰- $2\cos^2 2x+\sqrt{3}\cos 2x=0$ $x=k\pi\pm 45^\circ$ و $k\pi\pm 75^\circ$

۲۹۱- $\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{3}=0$ $x=6k\pi\pm 270^\circ$ و $6k\pi\pm 405^\circ$

۲۹۲- $2\cos^2 x-3\cos x-2=0$ $x=2k\pi\pm 120^\circ$

۲۹۳- $2\cos^2 x+5\cos x=-2$ $x=2k\pi\pm 120^\circ$

۲۹۴- $4\cos^2 2x-4\cos 2x-3=0$ $x=k\pi\pm 60^\circ$

۲۹۵- $2\cos^2 x-3\cos x+1=0$ $x=2k\pi$ و $2k\pi\pm 120^\circ$

۲۹۶- $2\cos^2\frac{2x}{3}+3\cos\frac{2x}{3}-2=0$ $x=3k\pi\pm 90^\circ$

قاعده ۵

هرگاه سینوس دو زاویه با هم برابر باشند زاویه یک طرف برابر است با $2k\pi$ + زاویه طرف دیگر. هم چنین زاویه یک طرف برابر است با $(2k+1)\pi$ منهای زاویه طرف دیگر.

$\sin x=\sin\alpha \Longrightarrow x=2k\pi+\alpha$ و $x=(2k+1)\pi-\alpha$

معادلات زیر را حل کرده و جوابهای کلی آنها را بدست آورید

۲۹۷- $\sin 5x+\sin 3x=0$

حل: $\sin 5x=-\sin 3x=\sin(-3x)\Longrightarrow 5x=2K\pi-3x$

$x=\frac{K\pi}{4}$ و $5x=2K\pi+\pi+3x\Longrightarrow x=K\pi+\frac{\pi}{2}$

۲۹۸- $\sin(x+25^\circ)\sin(2x-10^\circ)=0$

حل: $\sin(x+25^\circ)=0=\sin 0^\circ\Longrightarrow x+25^\circ=2K\pi$

$x=2K\pi-25^\circ$ و $x+25^\circ=2K\pi+\pi\Longrightarrow x=2K\pi+155^\circ$

$\sin(2x-10^\circ)=0=\sin 0^\circ\Longrightarrow 2x-10^\circ=2K\pi$

$2x=2K\pi+10^\circ\Longrightarrow x=K\pi+5^\circ$

$2x-10^\circ=2K\pi+\pi\Longrightarrow x=K\pi+95^\circ$

۲۹۹- $2\sin^2(x-15^\circ)-1=0$

حل:

$\sin^2(x-15^\circ)=\frac{1}{2}\Longrightarrow\sin(x-15^\circ)=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}=\pm\sin 45^\circ$

$\sin(x-15^\circ)=\sin 45^\circ\Longrightarrow x-15^\circ=2K\pi+45^\circ$

$x=2K\pi+60^\circ$

$x-15^\circ=2K\pi+\pi-45^\circ\Longrightarrow x=2K\pi+150^\circ$

۳۰۰- $2\sin^2 2x+\sqrt{3}\sin 2x=0$

حل: $\sin 2x(2\sin 2x+\sqrt{3})=0\Longrightarrow\sin 2x=0=\sin 0^\circ$

$2x=2K\pi\Longrightarrow x=K\pi$ و $2x=2K\pi+\pi\Longrightarrow x=K\pi+90^\circ$

$2\sin 2x+\sqrt{3}=0\Longrightarrow\sin 2x=\frac{-\sqrt{3}}{2}=-\sin 60^\circ=\sin(-60^\circ)$

$\sin 2x=\sin(-60^\circ)\Longrightarrow 2x=2K\pi-60^\circ\Longrightarrow x=K\pi-30^\circ$

$2x=2K\pi+\pi+60^\circ\Longrightarrow x=K\pi+120^\circ$

۳۰۱- $2\sin^2 x+3\sin x+1=0$

$\sin x=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{4}=-\frac{1}{2}$ و -1

حل :

$$\sin x = -1 = -\sin 90^\circ = \sin(-90^\circ) \Longrightarrow x = 2k\pi - 90^\circ \text{ و } 2k\pi + 270^\circ$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} = \sin(-30^\circ) \Longrightarrow x = 2k\pi - 30^\circ \text{ و } 2k\pi + 210^\circ$$

خودرا امتحان کنید

۳۰۲- $2\sin x + 1 = 0$ جواب $x = 2k\pi - 30^\circ \text{ و } 2k\pi + 210^\circ$

۳۰۳- $\sin 2x \sin x + \sin 2x = 0$

جواب $x = k\pi \text{ و } k\pi + 90^\circ \text{ و } 2k\pi - 90^\circ \text{ و } 2k\pi + 270^\circ$

۳۰۴- $4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 0$

جواب : $x = 4k\pi \pm 60^\circ \text{ و } 4k\pi + 300^\circ \text{ و } 4k\pi + 420^\circ$

۳۰۵- $4\sin^2(x + 15^\circ) - 1 = 0$

$x = 2k\pi + 15^\circ \text{ و } 2k\pi + 125^\circ \text{ و } 2k\pi - 45^\circ$

$x = 2k\pi + 195^\circ$

۳۰۶- $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x = 0$

جواب $x = 2k\pi \text{ و } 2k\pi + \pi \text{ و } 2k\pi - 60^\circ \text{ و } 2k\pi + 24^\circ$

۳۰۷- $2\sin^2 2x + \sin 2x = 0$

جواب : $x = k\pi \text{ و } k\pi + 90^\circ \text{ و } k\pi + 105^\circ \text{ و } k\pi - 15^\circ$

۳۰۸- $4\sin^2\left(\frac{x}{2} - 75^\circ\right) - 3 = 0$

$x = 4k\pi + 270^\circ \text{ و } 4k\pi + 390^\circ \text{ و } 4k\pi + 620^\circ \text{ و } 4k\pi + 30^\circ$

۳۰۹- $4\sin(x + 25^\circ) + \sqrt{2} - \sqrt{6} = 0$

جواب. $x = 2k\pi - 10^\circ \text{ و } 2k\pi + 140^\circ$

۳۱۰- $4\sin(x - 35^\circ) + \sqrt{2} + \sqrt{6} = 0$

جواب : $x = 2k\pi - 40^\circ \text{ و } 2k\pi + 260^\circ$

۳۱۱- $4\sin^2 x \cos x - 3\cos x = 0$

$$\begin{cases} x = 2k\pi \pm 90^\circ \text{ و } 2k\pi \pm 60^\circ \text{ و } 2k\pi + 120^\circ \text{ و} \\ x = 2k\pi + 240^\circ \end{cases}$$ جواب

-۲۱۲ $2\sin 2x\cos^2 x+\sqrt{3}\sin 2x\cos x=0$

جواب : $x=k\pi$ و $k\pi+90^\circ$ و $2k\pm 90^\circ$ و $2k\pi\pm 150^\circ$

-۲۱۳ $2\sin^2\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}-1=0$

جواب : $\begin{cases} x=4k\pi+60^\circ \text{ و } 4k\pi+200^\circ \text{ و } 4k\pi-180^\circ \\ x=4k\pi+540^\circ \end{cases}$

-۲۱۴ $3\sin^2 x-2\sin x-5=0$

جواب : $x=2k\pi-90^\circ$ و $2k\pi+270^\circ$

-۲۱۵ $4\sin^2 x-3\sin x-1=0$

جواب: $x=2k\pi+90^\circ$ و $2k\pi-\operatorname{Arcsin}\frac{1}{4}$ و $2k\pi+\pi+\operatorname{Arcsin}\frac{1}{4}$

این‌دوفرمول‌را بخاطر بسپارید

$$\begin{cases} \sin^2 mx=1-\cos^2 mx \\ \cos^2 mx=1-\sin^2 mx \end{cases}$$

قاعده ۵۲

در حل مسائل زیر ابتداء باید خط مثلثاتی را که‌توان آن دو میباشد از جنس جمله‌ای که توان آن یك است تبدیل نموده و سپس ساده ومرتب کرده و ازفرمول حل معادله درجه دوم استفاده‌کرده وآنرا حل می‌نمائیم

-۲۱۶ $2\cos^2 x-\sqrt{3}\sin x-2=0$

حل: $2(1-\sin^2 x)-\sqrt{3}\sin x-2=0$

$$2-2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x-2=0\Longrightarrow -\sin x(2\sin x+\sqrt{3})=0$$

$$\sin x=0=\sin 0^\circ\Longrightarrow x=2k\pi \text{ و } 2k\pi+90^\circ$$

$$2\sin x+\sqrt{3}=0\Longrightarrow \sin x=\frac{-\sqrt{3}}{2}=\sin(-60^\circ)$$

$$x=2k\pi-60^\circ \text{ و } 2k\pi+240^\circ$$

-۲۱۷ $2\sin^2 x+5\cos x+1=0$

حل : $2(1-\cos^2 x)+5\cos x+1=0$

$$2-2\cos^2 x+5\cos x+1=0$$

$$۲\cos^۲ x - ۵\cos x - ۳ = ۰$$

$$\cos x = \frac{۵ \pm \sqrt{۲۵+۲۴}}{۴} = ۳$$ غیر ممکن و $$\cos x = \frac{-۱}{۲} = -\cos ۶۰^\circ$$

$$\cos x = \cos(۱۸۰ - ۶۰^\circ) = \cos ۱۲۰^\circ \Longrightarrow x = ۲k\pi \pm ۱۲۰^\circ$$

خود را امتحان کنید

۳۱۸- $\cos^۲ ۲x - \sin ۲x + ۱ = ۰ \qquad x = k\pi + ۴۵^\circ$

۳۱۹- $-۲\cos^۲(x - ۳۰^\circ) + \sin(x - ۳۰^\circ) + ۱ = ۰$

جواب: $x = ۲K\pi + ۳۰^\circ + \mathrm{Arcsin}\frac{۲}{۳}$ و $۲k\pi + ۲۱۰^\circ - \mathrm{Arcsin}\frac{۲}{۳}$

$x = ۲k\pi - ۶۰^\circ$ و $۲k\pi + ۳۰۰^\circ$

۳۲۰- $۲\sin^۲ x + \cos x = -۱ \qquad x = ۲k\pi \pm \pi$

۳۲۱- $\sin^۲ ۲x + ۳\cos ۲x + ۲ = ۰ \qquad x = k\pi \pm ۹۰^\circ$

۳۲۲- $۲\cos^۲(x + ۶۰^\circ) - ۳\cos(x + ۶۰^\circ) = ۲$

$x = ۲k\pi + ۶۰^\circ$ و $۲k\pi - ۱۸۰^\circ$

۳۲۳- $\cos ۲x \cos(x + ۶۰^\circ) = ۰$

جواب: $x = k\pi \pm ۴۵^\circ$ و $۲k\pi + ۳۰^\circ$ و $۲k\pi - ۱۵۰^\circ$

۳۲۴- $\cos^۲(x + ۱۵^\circ) + \cos(x + ۱۵^\circ) = ۰$

$x = ۲k\pi + ۷۵^\circ$ و $۲k\pi - ۱۰۵^\circ$ و $۲k\pi + ۱۶۵^\circ$ و $۲k\pi - ۱۹۵^\circ$

قاعده ۵۳

هر گاه تانژانت یا کتانژانت دو زاویه باهم برابر باشند زاویه یکطرف برابر است با $K\pi$ باضافه زاویه طرف دیگر

$tg x = tg\alpha \Longrightarrow x = K\pi + \alpha$ و

$cotg x = cotg\alpha \Longrightarrow x = K\pi + \alpha$

معادلات زیر را حل کرده و جوابهای کلی آنها را بدست آورید.

۳۲۵- $tg(x + ۴۵^\circ) + \sqrt{۳} = ۰$

حل: $tg(x + ۴۵^\circ) = -\sqrt{۳} = -tg ۶۰ = tg(-۶۰)$

$x + ۴۵^\circ = k\pi - ۶۰^\circ \Longrightarrow x = k\pi - ۱۰۵^\circ$

-۳۲۶ $2tg^2(x+15^\circ)-1=0$

$2tg^2(x+15^\circ)=1 \Longrightarrow tg^2(x+15^\circ)=\frac{1}{2}$

$tg(x+15^\circ)=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}=\pm tg30^\circ$

$tg(x+15^\circ)=tg30^\circ \Longrightarrow x+15^\circ=k\pi+30^\circ \Longrightarrow x=k\pi+15^\circ$

$tg(x+15^\circ)=-tg30^\circ=tg(-30^\circ) \Longrightarrow x=k\pi-45^\circ$

-۳۲۷ $cotg^2x+\sqrt{3}cotg\,x=0$

حل: $cotg\,x(cotg\,x+\sqrt{3})=0 \Longrightarrow cotg\,x=0=cotg90^\circ$

$x=k\pi+90^\circ$ و $cotg\,x+\sqrt{3}=0 \Longrightarrow cotg\,x=-\sqrt{3}$

$cotg\,x=-cotg30^\circ=cotg(-30^\circ) \Longrightarrow x=k\pi-30^\circ$

-۳۲۸ $cotg^2x-3cotg\,x-4=0$

حل: $cotg\,x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=4$ و -1

$cotg\,x=4=cotg\,a \Longrightarrow x=k\pi+a=k\pi+Arccotg4$

$cotg\,x=-1=cotg(-45^\circ) \Longrightarrow x=k\pi-45^\circ$

-۳۲۹ $tg^2 2x-2\sqrt{3}tg2x+3=0$

$tg2x=\sqrt{3}\pm\sqrt{3-3}=\sqrt{3}=tg60^\circ$

$2x=K\pi+60^\circ \Longrightarrow x=\frac{K\pi}{2}+30^\circ$

-۳۳۰ $tg(2x+15^\circ)+cotg(x-45^\circ)=0$

حل: $tg(2x+15^\circ)=-cotg(x-45^\circ)=cotg(-x+45^\circ)$

$tg(2x+15^\circ)=tg(90^\circ+x-45^\circ)=tg(45^\circ+x)$

$2x+15^\circ=K\pi+45^\circ+x \Longrightarrow x=k\pi+30^\circ$

خود را امتحان کنید

-۳۳۱ $x=K\pi+60^\circ$ $\qquad tg\,x-\sqrt{3}=0$

-۳۳۲ $x=K\pi-30^\circ$ $\qquad 3tg\,x+\sqrt{3}=0$

-۳۳۳ $x=2K\pi+60^\circ$ $\qquad \sqrt{3}tg\frac{x}{2}-1=0$

-۳۳۴ $x=2K\pi-135^\circ$ $\qquad cotg\frac{x}{2}+1=0$

۳۳۵- $\operatorname{cotg} x+۲-\sqrt{۳}=۰$ $\qquad x=K\pi-۷۵^\circ$

۳۳۶- $\operatorname{tg}\frac{x}{۲}+۲+\sqrt{۳}=۰$ $\qquad x=۲K\pi-۱۳۵^\circ$

۳۳۷- $\operatorname{tg}x\operatorname{cotg}۲x=۰$ $\qquad x=K\pi$ و $\frac{K\pi}{۲}+۴۵^\circ$

۳۳۸- $\operatorname{tg}\frac{x}{۲}\operatorname{cotg}(x+۱۵^\circ)=۰$ $\qquad x=۲K\pi$ و $K\pi+۷۵^\circ$

۳۳۹- $\operatorname{tg}^۲x+\operatorname{tg}x=۰$ $\qquad x=K\pi$ و $K\pi-۴۵^\circ$

۳۴۰- $\operatorname{tg}^۲x\operatorname{cotg}\frac{x}{۲}-\operatorname{cotg}\frac{x}{۲}=۰$

جواب: $x=K\pi\pm۴۵^\circ$ و $۲K\pi+۱۸۰^\circ$

۳۴۱- $\operatorname{tg}^۲(x-۱۵^\circ)-۳=۰$ $\qquad x=K\pi+۷۵^\circ$ و $K\pi-۴۵^\circ$

۳۴۲- $۳\operatorname{tg}^۲\frac{x}{۲}-۱=۰$ $\qquad x=۲K\pi\pm۶۰$

۳۴۳- $\operatorname{tg}^۲\frac{x}{۲}-۲\operatorname{tg}\frac{x}{۲}=-۱$ $\qquad x=۲K\pi+۹۰^\circ$

۳۴۴- $\operatorname{cotg}^۲\frac{x}{۲}-۲\operatorname{cotg}\frac{x}{۲}=۳$ $\qquad \begin{cases}x=۲K\pi-۱۳۵^\circ\\ x=۲K\pi+۲\operatorname{Arccotg}۳\end{cases}$

۳۴۵- $۳\operatorname{cotg}^۲x-۲\sqrt{۳}\operatorname{cotg}x+۱=۰$ $\qquad x=K\pi+۶۰^\circ$

۳۴۶- $\operatorname{tg}^۲۲x+۲\sqrt{۳}\operatorname{tg}۲x+۳=۰$ $\qquad x=\frac{K\pi}{۲}-۳۰^\circ$

فرمول

$$\begin{cases}\operatorname{tg}mx\operatorname{cotg}mx=۱\\ \operatorname{tg}mx=\frac{۱}{\operatorname{cotg}mx} \text{ و } \operatorname{cotg}mx=\frac{۱}{\operatorname{tg}mx}\end{cases}$$

تذکر: لطفاً قاعده(۵۳) را بخاطر بسپارید

۳۴۷- $\operatorname{tg}(۳x+۱۵^\circ)\operatorname{cotg}(۲x-۴۵^\circ)-۱=۰$

$$\operatorname{tg}(۳x+۱۵^\circ)\operatorname{cotg}(۲x-۴۵^\circ)=۱\Longrightarrow\operatorname{tg}(۳x+۱۵^\circ)=\frac{۱}{\operatorname{cotg}(۲x-۴۵^\circ)}$$

$$\operatorname{tg}(۳x+۱۵^\circ)=\operatorname{tg}(۲x-۴۵^\circ)$$

حل [illegible]

$[illegible] - ۲۵ \Rightarrow [illegible] - ۶۰°$

۳۴۸-

[illegible] $۲۲/۵°$ [illegible]

$[illegible](x+۲۲/۵°) = \frac{-۱}{tg(x+۲۲/۵°)} = -cotg(x+۲۲/۵°)$

$[illegible]۲x - [illegible]/۵°) = -cotg(-x-۲۲/۵°) = tg(۹۰°+x+۲۲/۵°)$

$[illegible]x+۷/۵°) = tg(۱۱۲/۵°+x)$

$[illegible]x+۷/۵° = K\pi+۱۱۲/۵°+x \Rightarrow x = K\pi+۱۰۵°$

قاعده ۵۴

معادله کلاسیک نوع اول حالت خاص

$a\sin mx + b\cos mx = ۰$

راه حل معادلاتیکه بصورت فوق میباشند اینستکه هر یک از جملات را بر $\cos mx$ یا بر $\sin mx$ تقسیم نموده، سپس بجای $\frac{\sin mx}{\cos mx}$ مساویش $tg\,mx$ و یا بجای $\frac{\cos mx}{\sin mx}$ مساویش $cotg\,mx$ را قرار میدهیم.

معادله درجه اولی از جنس $tg\,mx$ یا $cotg\,mx$ بدست میآید آنرا حل میکنیم (بهتر است به خط مثلثاتی که ضریب آن رادیکالی است تقسیم کنیم).

معادلات زیر را حل کنید:

۳۴۹ $\sin ۲x + \sqrt{۳}\cos ۲x = ۰$

حل: $\frac{\sin ۲x}{\cos ۲x} + \frac{\sqrt{۳}\cos ۲x}{\cos ۲x} = ۰ \Rightarrow tg۲x = -\sqrt{۳} = -tg۶۰°$ ۱

$tg۲x = tg(-۶۰°) \Rightarrow ۲x = K\pi - ۶۰° \Rightarrow x = (K\pi \div ۲) - ۳۰°$

۳۵۰ $\sqrt{۳}\sin(x+۱۵°) - ۳\cos(x+۱۵°) = ۰$

حل: $\frac{\sqrt{۳}\sin(x+۱۵°)}{\sin(x+۱۵°)} - \frac{۳\cos(x+۱۵°)}{\sin(x+۱۵°)} = ۰$

$$\sqrt{۳}-۲\,cotg(x+۱۵^\circ)=۰ \Longrightarrow -۲\,cotg(x+۱۵^\circ)=-\sqrt{۳}$$

$$cotg(x+۱۵^\circ)=\frac{\sqrt{۳}}{۳}=cotg\,۶۰^\circ \Longrightarrow x+۱۵^\circ=k\pi+۶۰^\circ$$

$$x=k\pi+۴۵^\circ$$

۳۵۱- $\sin(x+۴۵^\circ)+\cos(x+۴۵^\circ)=۰$

$$\frac{\sin(x+۴۵^\circ)}{\cos(x+۴۵^\circ)}+\frac{\cos(x+۴۵^\circ)}{\cos(x+۴۵^\circ)}=۰ \Longrightarrow tg(x+۴۵^\circ)=-۱$$

$$tg(x+۴۵^\circ)=-tg\,۴۵^\circ \Longrightarrow x=k\pi-۹۰^\circ$$

خودرا امتحان کنید

۳۵۲- $tg\,۳x\,tg\,۲x=۱$ $\qquad x=\frac{k\pi}{۵}+\frac{\pi}{۱۰}$

۳۵۳- $tg(x+۳۰^\circ)\,tg\frac{x}{۲}+۱=۰$ $\qquad x=۲k\pi+۱۲۰^\circ$

۳۵۴- $tg(۲x+۱۵^\circ)\,cotg(x+۷۵^\circ)+۱=۰$

جواب $x=\frac{k\pi}{۲}-۳۰^\circ$

۳۵۵- $۳\sin(\frac{x}{۲}+۳۵^\circ)+\sqrt{۳}\cos(\frac{x}{۲}+۳۵^\circ)=۰$

جواب $x=۲k\pi-۱۳۰^\circ$

۳۵۶- $\sqrt{۳}\sin(x+۱۵^\circ)+\cos(x+۱۵^\circ)=۰$ $\qquad x=k\pi-۴۵^\circ$

۳۵۷- $\sin x+(۲+\sqrt{۳})\cos x=۰$ $\qquad x=k\pi-۷۵^\circ$

۳۵۸- $(۲-\sqrt{۳})\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲}=۰$ $\qquad x=۲K\pi-۱۵۰^\circ$

۳۵۹- $\sin(x+۲۵^\circ)=\sqrt{۳}\cos(x+۲۵^\circ)$

جواب $x=k\pi+۳۵^\circ$

۳۶۰- $۲\sin^۲\frac{x}{۲}-۵\sin\frac{x}{۲}+۲=۰$

جواب : $x=۴k\pi+۶۰^\circ$ و $۴k\pi+۳۰۰^\circ$

۳۶۱- $\sin ۴x+\sqrt{۳}\cos ۲x=۰$

جواب : $x = k\pi \pm 45^\circ$ و $k\pi - 30^\circ$ و $k\pi + 120^\circ$

-۳۶۲ $4\cos 2x - 6\sin x + 1 = 0$

جواب $x = 2k\pi + 30^\circ$ و $2k\pi + 105^\circ$

-۳۶۳ $tg(2x + 30^\circ)\,cotg(x - 15^\circ) = 0$

جواب $x = \frac{k\pi}{2} - 15^\circ$ و $k\pi + 105^\circ$

-۳۶۴ $tg(2x + 30^\circ)\,tg(80^\circ - x) - 1 = 0$

جواب $x = k\pi - 20^\circ$

قاعده ۵۵	راه حل معادلاتیکه بصورت $a\,tg\,mx + b\,cotg\,mx = c$ میباشند اینستکه هریك از جملات را در $tg\,mx$ یا $cotg\,mx$ ضرب نموده وسپس بجای $tg\,mx\,cotg\,mx$ مساویش عدد یك را قرارداده معادله درجه دومی ازجنس $tg\,mx$ یا $cotg\,mx$ بدست می‌آید آنرا حل مینمائیم .

معادلات زیررا حل کرده وجوابهای کلی آنرا بدست آورید :

-۳۶۵ $tg\,x + cotg\,x = 2$

حل : $tg^2 x + tg\,x\,cotg\,x = 2tg\,x \Longrightarrow tg^2 x - 2tg\,x + 1 = 0$

$(tg\,x - 1)^2 = 0 \Longrightarrow tg\,x = 1 = tg\,45^\circ \Longrightarrow x = k\pi + 45^\circ$

-۳۶۶ $tg\,x + cotg\,x = \frac{4}{\sqrt{3}}$

حل : $\sqrt{3}\,tg\,x + \sqrt{3}\,cotg\,x = 4 \Longrightarrow \sqrt{3}\,tg^2 x + \sqrt{3} = 4\,tg\,x$

$\sqrt{3}\,tg^2 x - 4\,tg\,x + \sqrt{3} = 0 \Longrightarrow tg\,x = \sqrt{3}$ و $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$tg\,x=\sqrt{3}=tg\,60^\circ\Longrightarrow x=K\pi+60^\circ$$

$$tg\,x=\frac{\sqrt{3}}{3}=tg\,30^\circ\Longrightarrow x=K\pi+30^\circ$$

-۳۶۷ $tg\,x-\sqrt{3}\,cotg\,x=1-\sqrt{3}$

حل:

$$tg^2x-\sqrt{3}\,tg\,x\,cotg\,x=(1-\sqrt{3})tg\,x$$

$$tg^2x-(1-\sqrt{3})tg\,x-\sqrt{3}=0$$

$tg\,x=1$ و $-\sqrt{3}\Longrightarrow tg\,x=1=tg\,45^\circ\Longrightarrow x=k\pi+45^\circ$

$$tg\,x=-\sqrt{3}=tg(-60^\circ)\Longrightarrow x=K\pi-60^\circ$$

قاعده ۵۶

راه حل معادلاتیکه بصورت :

$$a\sin^2x+b\cos x^2+c\sin x\cos x=d$$

می‌باشند اینست که هریك‌ازجملات دوطرف تساوی را بر $\cos^2x$ یا بر $\sin^2x$ تقسیم نموده وبجای $\frac{d}{\cos^2x}$ مساویش $d(1+tg^2x)$ وبجای $\frac{d}{\sin^2x}$ مساویش $d(1+cotg^2x)$ را قرارداده وسپس تمام جملات را بیك طرف‌آورده ، ساده‌ومرتب نموده ومعادلهٔ درجه دومی از جنس $tg\,x$ ویا $cotg\,x$ بدست‌میآید آنرا حل میکنیم .

تذکر ۱ـ اگرضریب $\cos^2x$ یعنی b با مقدارثابت‌یعنی d برابر باشد ($d=b$ باشد) فقط می‌توانیم جملات دو طرف تساوی را بر $\cos^2x$ تقسیم‌کنیم یعنی دراینصورت نباید بر $\sin^2x$ تقسیم‌کنیم .

تذکر ۲ـ اگر ضریب $\sin^2x$ یعنی a با مقدارثابت‌یعنی d برابر باشد ($d=a$ باشد) فقط مـی‌توانیم جملات دو طرف تساوی را بر $\sin^2x$ تقسیم‌کنیم .

معادلات زیررا حل‌کرده وجوابهای کلی‌آنها را بدست آورید .

-۳۶۸ $\sin^2x-2\cos^2x+3\sin x\cos x=1$

حل: چون ضریب $\sin^2 x$ بامقدار ثابت برابر است پس جملات دو طرف تساوی را بر $\sin^2 x$ تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}-\frac{2\cos^2 x}{\sin^2 x}+\frac{3\sin x\cos x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$1-2\operatorname{cotg}^2 x+3\operatorname{cotg} x-1-\operatorname{cotg}^2 x=0\Longrightarrow -3\operatorname{cotg}^2 x+3\operatorname{cotg} x=0$$

$$\operatorname{cotg}^2 x-\operatorname{cotg} x=0\Longrightarrow \operatorname{cotg} x(\operatorname{cotg} x-1)=0\Longrightarrow \operatorname{cotg} x=0=\operatorname{cotg} 90^\circ$$

$$x=K\pi+90^\circ \text{ و } \operatorname{cotg} x-1=0\Longrightarrow \operatorname{cotg} x=1=\operatorname{cotg} 45^\circ$$

$$x=K\pi+45^\circ$$

۳۶۹- $2\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x=3$

حل:
$$\frac{2\sin^2 x}{\sin^2 x}+\frac{2\sqrt{3}\sin x\cos x}{\sin^2 x}=\frac{3}{\sin^2 x}$$

$$2+2\sqrt{3}\operatorname{cotg} x=3(1+\operatorname{cotg}^2 x)\Longrightarrow 3\operatorname{cotg}^2 x-2\sqrt{3}\operatorname{cotg} x+1=0$$

$$\operatorname{cotg} x=\frac{\sqrt{3}}{3}=\operatorname{cotg} 60^\circ\Longrightarrow x=K\pi+60^\circ$$

۳۷۰- $\sin x+2\cos x=\dfrac{1}{\cos x}$

حل:
$$2\cos^2 x+\sin x\cos x=1$$

$$\frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}\Longrightarrow 2+\operatorname{tg} x-1-\operatorname{tg}^2 x=0$$

$$\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x-1=0\Longrightarrow \operatorname{tg} x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ و } -\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\operatorname{tg} x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\operatorname{tg}\alpha\Longrightarrow x=K\pi+\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$\operatorname{tg} x=-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=-\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}(-\beta)\Longrightarrow x=K\pi-\beta$$

$$x=K\pi-\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

۳۷۱- $5\sin^2 x-2\cos^2 x-3\sin x\cos x=0$

حل:
$$\frac{5\sin^2 x}{\sin^2 x}-\frac{2\cos^2 x}{\sin^2 x}-\frac{3\sin x\cos x}{\sin^2 x}=0$$

توجه داشته . شیمی توانیم دردرجیبید معادلاتی از فرمول زیر استفاده کرد.

 $(a-b)\cos 2x - c\sin 2x = a+b-2d$

$$5 - 2\operatorname{cotg}^2 x - 3\operatorname{cotg} x = 0$$

$$2\operatorname{cotg}^2 x + 3\operatorname{cotg} x - 5 = 0 \Longrightarrow \operatorname{cotg} x = 1 \text{ و } -\frac{5}{2}$$

$$\operatorname{cotg} x = 1 = \operatorname{cotg} 45^\circ \Longrightarrow x = K\pi + 45^\circ$$

$$\operatorname{cotg} x = -\frac{5}{2} = -\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{cotg}(-\alpha) \Longrightarrow x = K\pi - \alpha$$

$$x = K\pi - \mathrm{Arctg}\frac{5}{2}$$

-۳۷۲ $$(\sqrt{2}+1)\sin^2 x + (\sqrt{2}-1)\cos^2 x + 2\sin x\cos x = \sqrt{2}$$

حل: $$\frac{(\sqrt{2}+1)\sin^2 x}{\sin^2 x} + \frac{(\sqrt{2}-1)\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{\sin^2 x}$$

$$(\sqrt{2}+1) + (\sqrt{2}-1)\operatorname{cotg}^2 x + 2\operatorname{cotg} x = \sqrt{2}(1+\operatorname{cotg}^2 x)$$

$$\operatorname{cotg}^2 x - 2\operatorname{cotg} x - 1 = 0 \Longrightarrow \operatorname{cotg} x = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$\operatorname{cotg} x = (\sqrt{2}+1) = \operatorname{cotg} 22/5^\circ \Longrightarrow x = K\pi + 22/5^\circ$$

$$\operatorname{cotg} x = -(\sqrt{2}-1) = \operatorname{cotg}(-67/5^\circ)$$

$$x = K\pi - 67/5^\circ$$

-۳۷۳ $$2\sqrt{3}\sin x\cos x + 2\sin^2 x - 1 = 0$$

حل: $$\frac{2\sin^2 x}{\sin^2 x} + \frac{2\sqrt{3}\sin x\cos x}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} = 0$$

$$2 + 2\sqrt{3}\operatorname{cotg} x - 1 - \operatorname{cotg}^2 x = 0 \Longrightarrow \operatorname{cotg}^2 x - 2\sqrt{3}\operatorname{cotg} x - 1 = 0$$

$$\operatorname{cotg} x = \sqrt{3} \pm 2 \Longrightarrow \operatorname{cotg} x = \sqrt{3} + 2 = \operatorname{cotg} 15^\circ \Longrightarrow x = K\pi + 15^\circ$$

$$\operatorname{cotg} x = -(2-\sqrt{3}) = \operatorname{cotg}(-75^\circ) \Longrightarrow x = K\pi - 75^\circ$$

قاعده ۵۷

اگر درمسائل زیر دقت نمائید می‌بینید که بعضی اززوایا قرینه یکدیگرند یعنی یك زاویه برابرمنهای زاویه دیگر است برای حل این نوع مسائل ازقاعده (۳۲) استفاده کرده وزوایا را یکی می‌نمائیم وسپس معادله را حل می‌کنیم .

معادلات زیررا حل کنید وجوابهای کلی آنها را بدست آورید.

۳۷۴- $\sin(x-15^\circ)-\sin(15^\circ-x)=1$

حل : $\sin(x-15^\circ)+\sin(x-15^\circ)=1 \Longrightarrow 2\sin(x-15^\circ)=1$

$$\sin(x-15^\circ)=\frac{1}{2}=\sin 30^\circ \Longrightarrow x=2K\pi+45^\circ \text{ و } 2K\pi+165^\circ$$

۳۷۵- $tg(x-30^\circ)-cotg(30^\circ-x)=2$

حل : $tg(x-30^\circ)+cotg(x-30^\circ)=2$

$$tg^2(x-30^\circ)-2tg(x-30^\circ)+1=0 \Longrightarrow tg(x-30^\circ)=1$$

$$tg(x-30^\circ)=tg45^\circ \Longrightarrow x=K\pi+75^\circ$$

قاعده ۵۸	اگر درمسائل زیر دقت نمائید میبینید که زوایا با هم برابر نیستند ولی مجموع یا تفاضل آنها 90° میشود پس بجای سینوس یك زاویه می‌توان کسینوس متمم آنرا قرار داد و بر عکس و همچنین بجای tg یك زاویه می‌توان $cotg$ متمم آنرا قرارداد ومعادله را حل نمود .(با درنظر داشتن علامت)

۳۷۶- $tg\left(x+\frac{\pi}{7}\right)+tg\left(\frac{5\pi}{14}-x\right)=2$

حل : $tg\left(x+\frac{\pi}{7}\right)+cotg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{14}+x\right)=2$

$$tg\left(x+\frac{\pi}{7}\right)+cotg\left(\frac{\pi}{7}+x\right)-2=0$$

$$tg^2\left(x+\frac{\pi}{7}\right)+tg\left(x+\frac{\pi}{7}\right)cotg\left(x+\frac{\pi}{7}\right)-2tg\left(x+\frac{\pi}{7}\right)=0$$

$$tg^2\left(x+\frac{\pi}{7}\right)-2tg\left(x+\frac{\pi}{7}\right)+1=0 \Longrightarrow tg\left(x+\frac{\pi}{7}\right)=1=tg45^\circ$$

$$x=K\pi+\frac{3\pi}{28}$$

۳۷۷- $tg(۲x-۱۵^\circ)+tg(۲x+۷۵^\circ)=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

حل: $۲tg(۲x-۱۵^\circ)+۲tg(۲x+۷۵^\circ)=۲\sqrt{۳}$

$۲tg(۲x-۱۵^\circ)+۲cotg(۹۰^\circ-۲x-۷۵^\circ)-۲\sqrt{۳}=۰$

$۲tg(۲x-۱۵^\circ)-۲cotg(۲x-۱۵^\circ)-۲\sqrt{۳}=۰$

$۲tg^۲(۲x-۱۵^\circ)-۲cotg(۲x-۱۵^\circ)tg(۲x-۱۵^\circ)-۲\sqrt{۳}tg(۲x-۱۵^\circ)=۰$

$۲tg^۲(۲x-۱۵^\circ)-۲\sqrt{۳}tg(۲x-۱۵^\circ)-۲=۰$

$tg(۲x-۱۵^\circ)=\sqrt{۳}$ و $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Longrightarrow tg(۲x-۱۵^\circ)=\sqrt{۳}=tg۶۰^\circ$

$۲x-۱۵^\circ=K\pi+۶۰^\circ\Longrightarrow x=K\times۹۰^\circ+۳۷/۵^\circ$

$tg(۲x-۱۵^\circ)=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}=-tg۳۰^\circ=tg(-۳۰^\circ)$

$۲x-۱۵^\circ=K\pi-۳۰^\circ\Longrightarrow x=K\times۹۰^\circ-۷/۵^\circ$

۳۷۸ $tg(x-۳۰^\circ)-cotg(۳۰^\circ-x)=۲\sqrt{۲}$

ج: $x=K\pi+۵۲/۵^\circ$ و $K\pi+۹۷/۵^\circ$

۳۷۹- $tg(x-۴۵^\circ)+۳tg(۴۵^\circ+x)=۰$

ج: $x=K\pi-۷۵^\circ$ و $K\pi-۱۵^\circ$

۳۸۰- $tg(x+۱۵^\circ)+۳cotg(۱۶۵^\circ-x)=۲$

تعیین a و b و c مثلثاتی

چند قاعده برای بدست آوردن پارامتر درمثلثات

قاعده ۵۹- ریشه هرمعادله درآن معادله صدق میکند

۳۸۱- a را چنان تعیین کنید که یکی ازریشه‌های معادله :

$۴sin^۲x+cos۳x+a-۳=۰$ برابر $\frac{\pi}{۳}$ باشد.

حل: $۴sin^۲\frac{\pi}{۳}+cos۳(\frac{\pi}{۳})+a-۳=۰\Longrightarrow۴(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲+cos\pi+a-۳=۰$

$$3-1+a-2=0\Longrightarrow a=1$$

۲۸۱ـ معادله $\sin x-\cos x+(m+1)\sin x\cos x=1$ مفروض است m را چنان تعیین کنید که $x=\frac{\pi}{4}$ یکی از جوابهای معادله باشد .

حل:

$$\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}+(m+1)\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}=1$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+(m+1)\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1\Longrightarrow\frac{1}{2}(m+1)=1$$

$$m+1=2\Longrightarrow m=1$$

۲۸۲ـ معادله $(2a-1)\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=a$ مفروض است a را چنان تعیین کنید که $x=\frac{7\pi}{12}$ یکی ازجوابهای معادله باشد .

حل :

$$(2a-1)\sin\frac{7\pi}{6}-\sqrt{3}\cos\frac{7\pi}{6}=a$$

$$(2a-1)\left(\frac{-1}{2}\right)-\left(\sqrt{3}\right)\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)=a$$

$$-2a+1+3=2a\Longrightarrow a=1$$

۲۸۳ـ مقدار a را درمعادله $(a+1)\sin(x-30^\circ)=a$ بقسمی پیداکنید که یکی ازجوابهای معادله $x=75^\circ$ باشد .

حل :

$$(a+1)\sin(75^\circ-30^\circ)=a$$

$$(a+1)\sin 45^\circ=a\Longrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}(a+1)=a$$

$$\sqrt{2}(a+1)=2a\Longrightarrow a\sqrt{2}+\sqrt{2}=2a\rightarrow a=\sqrt{2}+1$$

۲۸۴ ـ معادله $\sqrt{3}\sin x+2\cos\frac{x}{2}+m=0$ مفروض است m را چنان تعیین کنید که یکی ازریشه‌های معادله برابر $\frac{4\pi}{3}$ باشد

جواب :

$$m=\frac{5}{2}$$

۳۸۵- معادله $۴\sin^۲ x + \cos ۴x + m = ۰$ مفروض است m را چنان تعیین کنید که $x = ۹۰^\circ$ یکی از ریشه‌های معادله باشد.

جواب : $m = -۵$

۳۸۶- معادله $\sin x + m\cos x = \sqrt{۳}$ مفروض است m را چنان تعیین کنید که $tg\frac{x}{۲}$ برابر بینهایت شود.

حل : $tg\frac{x}{۲} = \infty = tg\frac{\pi}{۲} \Longrightarrow \frac{x}{۲} = K\pi + \frac{\pi}{۲} \Longrightarrow x = ۲K\pi + \pi$

$x = \pi$ و $۳\pi \Longrightarrow \sin x + m\cos x = \sqrt{۳}$

$\sin\pi + m\cos\pi = \sqrt{۳} \Longrightarrow ۰ - m = \sqrt{۳} \Longrightarrow m = -\sqrt{۳}$

۳۸۷- معادله $m\sin^۲ x - ۲\cos^۲ x + \sin x\cos x = m - ۲$ مفروض است m را چنان تعیین کنید که $tg\,x$ برابر ۲ شود.

حل: $\frac{m\sin^۲ x}{\cos^۲ x} - \frac{۲\cos^۲ x}{\cos^۲ x} + \frac{\cos x\sin x}{\cos^۲ x} = \frac{m-۲}{\cos^۲ x}$

$m\,tg^۲ x - ۲ + tg\,x = (m-۲)(۱ + tg^۲ x)$

$m(۲)^۲ - ۲ + ۲ = (m-۲)(۱+۴) \Longrightarrow ۵m - ۱۰ = ۴m \Longrightarrow m = ۱۰$

۳۸۸- معادله $m\,tg\,x + ۳\cot g\,x = (۲m+۴)$ مفروض است m را چنان تعیین کنید که $tg\,x$ برابر (-۳) باشد.

حل : $m\,tg\,x + ۳\cot g\,x = (۲m+۴) \Longrightarrow m\,tg^۲ x + ۳ = (۲m+۴)tg\,x$

$m\,tg^۲ x - (۲m+۴)tg\,x + ۳ = ۰ \Longrightarrow m(-۳)^۲ - (۲m+۴)(-۳) + ۳ = ۰$

$۹m + ۶m + ۱۲ + ۳ = ۰ \Longrightarrow m = -۱$

۳۸۹- معادله $۳m\,tg\,x - ۴\cot g\,x = m - ۲$ مفروض است m را چنان تعیین کنید که $\cos x = \frac{-۳}{۵}$ باشد. (وانتهای کمان x در ربع دوم واقع باشد).

حل: $۱ + tg^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x} \Longrightarrow ۱ + tg^۲ x = \frac{۲۵}{۹} \Longrightarrow tg^۲ x = \frac{۲۵}{۹} - ۱$

$tg^۲ x = \frac{۱۶}{۹} \Longrightarrow tg\,x = \frac{-۴}{۳}$ و $\cot g\,x = \frac{۱}{tg\,x} = \frac{-۳}{۴}$

$۳m\,tg\,x - ۴\cot g\,x = m - ۲ \Longrightarrow ۳m \times \frac{-۴}{۳} - ۴ \times \frac{-۳}{۴} = m - ۲$

$$-4m+3=m-2 \Longrightarrow -5m=-5 \Longrightarrow m=1$$

۳۹۰ ـ معادله $2\sin 4x=m$ مفروض است m راچنان تعیین کنید که x' یکی از ریشه‌های معادله فوق بوده و $\cos 4x'=\frac{3}{5}$ بوده و انتهای کمان $4x'$ در ربع چهارم واقع باشد .

حل :
$$\sin^2 4x=1-\cos^2 4x=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25} \Longrightarrow \sin 4x=\frac{-4}{5}$$

$$2\sin 4x=m \Longrightarrow 2\times\frac{-4}{5}=m \Longrightarrow m=\frac{-8}{5}$$

حل و بحث معادلات

معادلات زیر را حل و بحث کنید :

۳۹۱
$$(2m-1)\sin x-m=0$$

حل :
$$(2m-1)\sin x=m \Longrightarrow \sin x=\frac{m}{2m-1}$$

اگر کسر فوق بین ۱ و ۱ــ واقع باشد معادله دارای جواب است و نتیجه زیر بدست میاید .

$$\sin x=\sin\alpha \Longrightarrow x=2K\pi+\alpha \text{ و } 2K\pi+\pi-\alpha$$

بحث : چون $-1\leqslant \sin x\leqslant 1$ میباشد پس $\sin^2 x\leqslant 1$ خواهد بود وازآنجا نتیجه میشود .

$$\frac{m^2}{(2m-1)^2}\leqslant 1 \Longrightarrow \frac{-3m^2+4m-1}{(2m-1)^2}\leqslant 0$$

چون مخرج کسر بازاء جمیع مقادیر m مثبت است پس باید $-3m^2+4m-1\leqslant 0$ باشد .

$$\begin{cases}-۲m^۲+۴m-۱=۰\\ m=۱ \text{ و } \frac{۱}{۳}\end{cases}$$

m	$-\infty$		$\frac{۱}{۳}$		۱		∞
صورت کسر	−		۰	+	۰		−
معادله	دودسته جواب دارد $x=۲K\pi-۹۰^\circ$			جواب ندارد			دو دسته جواب دارد $x=۲K\pi+۹۰^\circ$

تذکر : معادله بازاء $m\geqslant ۱$ و $m\leqslant\frac{۱}{۳}$ دارای جوابست.

-۳۹۲ $(m-۲)\cos x-۲m+۳=۰$

حل : $(m-۲)\cos x=۲m-۳\Longrightarrow\cos x=\dfrac{۲m-۳}{m-۲}$

اگر کسر فوق مابین ۱و۱ — واقع باشد نتیجه زیربدست میآید :

$\cos x=\cos\alpha\Longrightarrow x=۲K\pi\pm\alpha$

بحث : چون $-۱\leqslant\cos x\leqslant ۱$ میباشد پس $\cos^۲ x\leqslant ۱$ خواهدشد واز آنجانتیجه میشود :

$$\frac{(۲m-۳)^۲}{(m-۲)^۲}\leqslant ۱$$

$$\frac{(۲m-۳)^۲-(m-۲)^۲}{(m-۲)^۲}\leqslant ۰\Longrightarrow\frac{۳m^۲-۶m}{(m-۲)^۲}\leqslant ۰$$

$۳m^۲-۶m\leqslant ۰$

$۳m^۲-۶m=۰$

$m=۰$ و ۲

m	$-\infty$		۰		۲	$+\infty$
صورت کسر	+		۰	−	۰	+
معادله	جواب‌ندارد			جواب‌دارد		جواب‌ندارد

تذکر : معادله بازاء $۰\leqslant m\leqslant ۲$ دارای جواب‌است.

-۳۹۳ $m\cos x-m-۱=۰ \qquad ۰<x<\frac{\pi}{۲}$

حل : $m\cos x=m+۱\Longrightarrow\cos x=\dfrac{m+۱}{m}$

چون $0<x<\frac{\pi}{3}$ است پس $1>\cos x>\frac{1}{2}$ میباشد . حال اگر کسر فوق بین $\frac{1}{2}$ و ۱ واقع باشد نتیجه میشود:

$$\cos x=\cos\alpha\Longrightarrow x=2K\pi\pm\alpha$$

بحث : برای اینکه معادله دارای جواب باشد باید نامعادلات زیر برقرار باشند .

$$1>\frac{m+1}{m}>\frac{1}{2}\Longrightarrow\begin{cases}\frac{2m+2-m}{2m}>0\\ \frac{m+1-m}{m}<0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\frac{m+2}{2m}>0\\ \frac{1}{m}<0\end{cases}$$

$m+2=0\Longrightarrow m=-2$ و $2m=0\rightarrow m=0$ و $m=0$

m	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
کسر اول		$+$	0	$-$	∞	$+$	
کسر دوم		$-$		$-$	∞	$+$	
معادله		یك جواب دارد		جواب ندارد		جواب ندارد	

تذکر : معادله بازای $m<-2$ دارای جواب است .

۲۹۴- $\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{12}$ $\qquad 2\sin 2x+m-2=0$

حل : $2\sin 2x=2-m\rightarrow\sin 2x=\frac{2-m}{2}$

چون $\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{12}$ است پس $\frac{5\pi}{6}\leqslant 2x\leqslant\frac{7\pi}{6}$ میباشد وازآنجا $-\frac{1}{2}\leqslant\sin 2x\leqslant\frac{1}{2}$ میشود حال اگر کسر فوق مابین $-\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ واقع باشد نتیجه میشود :

$$\sin 2x = \sin\alpha \Rightarrow x = K\pi + \frac{\alpha}{2} \text{ و } K\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$$

بحث : چون $-\frac{1}{2} \leqslant \sin 2x \leqslant \frac{1}{2}$ می‌باشد پس $\sin^2 2x \leqslant \frac{1}{4}$ است و از آنجا نتیجه میشود :

$$\frac{4+m^2-4m}{4} \leqslant \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{m^2-4m+3}{4} \leqslant 0$$

$m^2-4m+3 \leqslant 0$

$m^2-4m+3=0$

$m=1$ و 3

m	$-\infty$	1		3	$+\infty$
صورت کسر	$+$	0	$-$	0	$+$
معادله	جواب ندارد		یک جواب دارد		جواب ندارد

تذکر : معادله بازاء $1<m<3$ دارای جوابست

۳۹۵- $15^\circ > x > -45^\circ$ $\qquad 2\cos(2x+30^\circ)+m-3=0$

حل: $2\cos(2x+30^\circ)=3-m \Rightarrow \cos(2x+30^\circ)=\frac{3-m}{2}$

چون $15^\circ > x > -45^\circ$ است پس $30^\circ > 2x > -90^\circ$ و $60^\circ > 2x+30^\circ > -60^\circ$ میباشد واز روی دایره مثلثاتی نتیجه میشود که $\cos(2x+30^\circ)$ بین‌صفر و $\frac{1}{2}$ واقع است حال اگر کسر فوق مابین $\frac{1}{2}$ و صفر واقع باشد نتیجه میگردد :

$$\cos(2x+30^\circ)=\cos\alpha \Rightarrow x = K\pi - 15^\circ \pm \frac{1}{2}\alpha$$

بحث : برای اینکه معادله دارای جواب باشد باید نامعادلات‌زیر برقرار باشند:

$$0 < \frac{3-m}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 3-m<1 \\ 3-m>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-m<0 \\ 3-m>0 \end{cases}$$

$$2-m=0 \Rightarrow m=2 \text{ و } 3-m=0 \Rightarrow m=3$$

m	$-\infty$		۲		۳		$+\infty$
نامعادله اول		+	۰	−	|	−	
نامعادله دوم		+	|	+	۰	−	
معادله		جواب ندارد		دوجواب‌دارد		جواب‌ندارد	

۳۹۶- $157/5^\circ > x > 97/5^\circ$ $\quad (m-2)\sin(2x+15^\circ)+2m-1=0$

$$(m-2)\sin(2x+15^\circ)=1-2m \Longrightarrow \sin(2x+15^\circ)=\frac{1-2m}{m-2}$$

حل:

چون $157/5^\circ > x > 97/5^\circ$ است پس $315^\circ > 2x > 195^\circ$ و

$330^\circ > 2x+15^\circ > 210^\circ$ می‌باشند و از روی دایره مثلثاتی معلوم میگردد که

$\sin(2x+15^\circ)$ بین $\frac{-1}{2}$ و -1 واقع میباشد حال اگر کسر فوق ما بین $\frac{-1}{2}$ و -1

واقع باشد نتیجه میگردد :

$$x = K\pi - 7/5^\circ + \frac{1}{2}\alpha \quad \text{و} \quad K\pi + 82/5^\circ - \frac{1}{2}\alpha$$

بحث: برای اینکه معادله دارای جواب باشد باید تا معادلات زیر بر قرارباشند:

$$-1 < \frac{1-2m}{m-2} < -\frac{1}{2} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-2m}{m-2} < -\dfrac{1}{2} \\ \\ \dfrac{1-2m}{m-2} > -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{-3m}{2m-4} < 0 \\ \\ \dfrac{-m-1}{m-2} > 0 \end{cases}$$

$-3m = 0 \Longrightarrow m = 0$ و $2m-4 = 0 \Longrightarrow m = 2$

$-m-1 = 0 \Longrightarrow m = -1$ و $m-2 = 0 \Longrightarrow m = 2$

m	$-\infty$		-۱				۲		$+\infty$
کسر اول		−		−	۰	+	∞	−	
کسر دوم		−	۰	+		+	∞	−	
معادله		جواب ندارد		جواب دارد		جواب ندارد		جواب ندارد	

قاعده ۶۰

شرط اینکه معادلات درجه دوم پارامتری تانژانتی یا کتانژانتی و یا معادلاتی که بمعادله درجه دوم تانژانتی تبدیل میشوند دارای ریشه باشند اینست که مبین (Δ) آنها بزرگتر یا مساوی صفر باشد بنابراین بعد از اینکه معادله بصورت معادله درجه دوم تانژانتی یا کتانژانتی تبدیل شد دلتای آنرا تشکیل داده و خلاصه نموده و سپس مساوی صفر قرارداده و بعد علامت آنرا تعیین می‌نمائیم .

مسأله : معین کنید که هریك از معادلات زیر بازاء چه مقادیر از m دارای دو ریشه و یا دارای ریشه مضاعف می‌باشند .

-۳۹۷ $m\,tg^{۲}x-(۲m+۱)tg\,x+m-۲=۰$

حل: $\Delta=b^{۲}-۴ac=[-(۲m+۱)]^{۲}-۴m(m-۲)$

$$\Delta=۱۶m+۱\rightarrow\Delta=۰\rightarrow۱۶m+۱=۰\rightarrow m=\frac{-۱}{۱۶}$$

m	$-\infty$		$-\frac{۱}{۱۶}$		$+\infty$
Δ		−	۰	+	
معادله		ریشه ندارد	ریشه مضاعف دارد	دوریشه دارد	

۲۹۸- $(m-1)\sin^2 x + 2m\sin x\cos x = 2$

حل : $\dfrac{(m-1)\sin^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{2m\sin x\cos x}{\cos^2 x} = \dfrac{2}{\cos^2 x}$

$$(m-1)tg^2 x + 2m\,tg x = 2(1+tg^2 x) \Longrightarrow (m-3)tg^2 x + 2m\,tg x - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4m^2 + 8m - 24$$

$$\Delta = 0 \Longrightarrow m^2 + 2m - 6 = 0 \Longrightarrow m = -1 \pm \sqrt{7}$$

m	$-\infty$	$-1-\sqrt{7}$		$\sqrt{7}-1$	$+\infty$
Δ	+	0	−	0	+
معادله	دوریشه متمایز دارد	ریشه مضاعف دارد	ریشه ندارد	ریشه مضاعف دارد	دوریشه متمایز دارد

۲۹۹- $(m-2)tg^2 x + (2m-1)tg x + m = 0$

جواب : معادله بازای $m > -\frac{1}{4}$ دارای دوریشه متمایز و بازای $m = -\frac{1}{4}$ دارای ریشه مضاعف است و بازای سایر مقادیر m ریشه ندارد .

مطلوبست تعیین کمانهای زیر

۴۰۰- $\mathrm{Arc}\sin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ و $\mathrm{arc}\sin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\mathrm{Arc}\sin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = x \Longrightarrow \sin x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin x = -\sin 60^\circ = \sin(240^\circ) \Longrightarrow x = 240^\circ$$

$$\arcsin\left(\frac{-\sqrt{۳}}{۲}\right)=y \Longrightarrow \sin y=\frac{-\sqrt{۳}}{۲}=-\sin ۶۰^\circ$$

$$\sin y=\sin ۲۴۰^\circ \Longrightarrow y=۲K\pi+۲۴۰^\circ \text{ و } ۲K\pi-۶۰^\circ$$

۴۰۱- $\text{Arc}\sin\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $\arcsin\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

حل:

$$\text{Arc}\sin\frac{\sqrt{۲}}{۲}=x \Longrightarrow \sin x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin ۴۵^\circ$$

$$\boxed{x=۴۵^\circ} \text{ و } \arcsin\frac{\sqrt{۲}}{۲}=y \Longrightarrow \sin y=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\sin y=\sin ۴۵^\circ \Longrightarrow y=۲K\pi+۴۵^\circ \text{ و } ۲K\pi+۱۳۵^\circ$$

۴۰۲- $\text{Arc}\cos\frac{۱}{۲}$ و $\arccos\frac{۱}{۲}$

حل: $\text{Arc}\cos\frac{۱}{۲}=x \Longrightarrow \cos x=\frac{۱}{۲}=\cos\frac{\pi}{۳} \Longrightarrow x=\frac{\pi}{۳}$

$$\text{arc}\cos\frac{۱}{۲}=y$$

$$\cos y=\frac{۱}{۲}=\cos\frac{\pi}{۳} \Longrightarrow y=۲K\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

۴۰۳- $\text{Arc}\cos\left(\frac{-\sqrt{۲}}{۲}\right)$ و $\arccos\left(\frac{-\sqrt{۲}}{۲}\right)$

حل: $\text{Arc}\cos\left(\frac{-\sqrt{۲}}{۲}\right)=x \Longrightarrow \cos x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$$\cos x=-\cos\frac{\pi}{۴}=\cos\frac{۳\pi}{۴} \Longrightarrow x=\frac{۳\pi}{۴}$$

۴۰۴- $\text{Arc}\,tg\sqrt{۳}$ و $\text{arc}\,tg\sqrt{۳}$

حل: $\text{Arc}\,tg\sqrt{۳}=x \Longrightarrow tg\,x=\sqrt{۳}=tg\,۶۰^\circ$

$$\boxed{x=۶۰^\circ} \text{ و } \text{arc}\,tg\sqrt{۳}=y \Longrightarrow tg\,y=\sqrt{۳}$$

$$tg\,y=tg\,۶۰^\circ \Longrightarrow y=K\pi+۶۰^\circ$$

۴۰۵- $Arctg(-۱)$ و $arctg(-۱)$

حل: $Arctg(-۱)=x \Longrightarrow tgx=-۱=-tg۴۵^\circ$

$tgx=tg۱۳۵^\circ \Longrightarrow x=۱۳۵^\circ$

$arctg(-۱)=y \Longrightarrow tgy=-۱=-tg۴۵$

$tgy=tg(-۴۵^\circ) \Longrightarrow y=k\pi-۴۵^\circ$

۴۰۶- $Arccotg(-\sqrt{۳})$ و $arccotg(-\sqrt{۳})$

حل: $Arccotg(-\sqrt{۳})=x \Longrightarrow cotgx=-\sqrt{۳}$

$cotgx=-cotg۳۰^\circ=cotg۱۵۰^\circ \Longrightarrow x=۱۵۰^\circ$

حل مسائل صفحه ۷٤ کتاب درسی

خطوط مثلثاتی کمانهای زیررا حساب کنید

۴۰۷- ك : ۱ $a=۴۳^\circ$

حل : با توجه بجدول موجود درمتن کتاب داریم :

$sin۴۳^\circ=۰/۶۸۲۰$ و $tg۴۳^\circ=۰/۹۳۲۵$

$cos۴۳^\circ=۰/۷۳۱۴$ و $cotg۴۳^\circ=۱/۰۷۲$

۴۰۸- ك : ۲ $b=۱۳۰$ گراد

حل : اول بدرجه تبدیل میکنیم سپس ازجدول استفاده میکنیم :

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{G}{۲۰۰} \Longrightarrow \frac{D}{۱۸۰}=\frac{۱۳۰}{۲۰۰} \Longrightarrow D=۱۱۷^\circ$$

$cos۱۱۷^\circ=cos(۹۰^\circ+۲۷^\circ)=-sin۲۷^\circ=-۰/۴۵۴۰$

$sin۱۱۷^\circ=sin(۹۰^\circ+۲۷^\circ)=cos۲۷^\circ=۰/۸۹۱۰$

$tg۱۱۷^\circ=tg(۹۰^\circ+۲۷^\circ)=-cotg۲۷^\circ=-۱/۹۶۲$

$cotg(۱۱۷^\circ)=cotg(۹۰^\circ+۲۷^\circ)=-tg۲۷^\circ=-۰/۵۰۹۵$

۴۰۹- ك : ۳ $\frac{۱۰\pi}{۹}$ رادیان

حل : $$\frac{R}{\pi}=\frac{D}{۱۸۰} \Longrightarrow \frac{\frac{۱۰\pi}{۹}}{\pi}=\frac{D}{۱۸۰} \Longrightarrow \frac{۱۰\pi}{۹\pi}=\frac{D}{۱۸۰}$$

$D=۲۰۰^\circ$ و $\sin ۲۰۰^\circ=\sin(۱۸۰^\circ+۲۰^\circ)=-\sin ۲۰^\circ=-۰/۳۴۲۰$

$\cos ۲۰۰^\circ=\cos(۱۸۰^\circ+۲۰^\circ)=-\cos ۲۰^\circ=-۰/۹۳۹۷$

$tg ۲۰۰^\circ=tg(۱۸۰^\circ+۲۰^\circ)=tg ۲۰^\circ=۰/۳۶۴۰$

$cotg ۲۰۰^\circ=cotg(۱۸۰^\circ+۲۰^\circ)=cotg ۲۰^\circ=۲/۷۴۷$

۴۱۰ـ ك ۴ : $d=۳۹۸۱^\circ$

$$\begin{array}{r|l} ۳۹۸۱ & ۳۶۰ \\ \cline{2-2} ۳۶۰ & ۱۱ \\ \hline ۳۸۱ & \\ ۳۶۰ & \\ \hline ۲۱ & \end{array} \Longrightarrow d=۱۱\times ۳۶۰^\circ+۲۱^\circ$$

تذکر: بجای خطوط مثلثاتی ۳۹۸۱° خطوط مثلثاتی ۲۱° را از جدول بدست میآوریم.

۴۱۱ـ ك : ۵ $\alpha=۳۰۷۰$ گراد

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{G}{۲۰۰}\Longrightarrow\frac{D}{۱۸۰}=\frac{۳۰۷۰}{۲۰۰}\Longrightarrow D=۲۷۶۳^\circ$$

$$\begin{array}{r|l} ۲۷۶۳ & ۳۶۰ \\ \hline ۲۵۲۰ & ۷ \\ \hline ۰۲۴۳ & \end{array}$$

$\sin(۳۰۷۰g)=\sin(۲۷۶۳^\circ)=\sin(۷\times ۳۶۰^\circ+۲۴۳^\circ)$

$=\sin ۲۴۳^\circ=\sin(۲۷۰^\circ-۲۷^\circ)=-\cos ۲۷^\circ=-۰/۸۹۱۰$

$\cos\alpha=-۰/۴۵۴۰$ و $tg\alpha=۰/۵۰۹۵$ و $cotg\alpha=۱/۹۶۳$

۴۱۲ـ ك : ۶ $\beta=۳/۹\pi$ رادیان

$$\frac{R}{\pi}=\frac{D}{۱۸۰}\Longrightarrow\frac{۳/۹\pi}{\pi}=\frac{D}{۱۸۰}\Longrightarrow D=۷۰۲^\circ$$

$\sin\beta=\sin ۷۰۲^\circ=\sin(۳۶۰^\circ+۳۴۲^\circ)=\sin ۳۴۲^\circ$

$\sin\beta=\sin(۳۶۰^\circ-۱۸^\circ)=-\sin ۱۸^\circ=-۰/۳۰۹۰$

$\cos\beta=\cos ۱۸=۰/۹۵۱۱$ و $tg\beta=۰/۳۲۴۹$

مقادیر کمانهائی را تعیین کنید که اندازه یکی از خطوط مثلثاتی آنها درزیر داده شده است .

۴۱۳ـ ک ۸: $\sin A = \frac{۱}{۲}$

$\sin A = \sin \frac{\pi}{۶} \Longrightarrow A = ۲K\pi + \frac{\pi}{۶}$ و $A = ۲K\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} = ۲K\pi + \frac{۵\pi}{۶}$

۴۱۴ ـ ک ۹: $\cos B = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

حل : $\cos B = \cos \frac{\pi}{۴} \Longrightarrow B = ۲K\pi \pm \frac{\pi}{۴}$

۴۱۵ـ ک ۱۰ $tg C = \sqrt{۳}$

حل : $tg C = tg \frac{\pi}{۳} \Longrightarrow C = K\pi + \frac{\pi}{۳}$

۴۱۶ ـ ک ۱۱ـ $cotg D = -۱$

حل : $cotg D = - cotg \frac{\pi}{۴} = cotg \left(-\frac{\pi}{۴}\right) \Longrightarrow D = K\pi - \frac{\pi}{۴}$

۴۱۷ ـ ک ـ ۱۲. $\sin x = - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\sin x = - \sin \frac{\pi}{۳} = \sin \left(-\frac{\pi}{۳}\right) \Longrightarrow x = ۲K\pi - \frac{\pi}{۳}$ و $۲K\pi + \frac{۴\pi}{۳}$

حل معادلات صفحه ۷۹ کتاب درسی

صورت کلی جوابهای معادلات زیر را بنویسید و جوابهائی که بین صفر و 2π واقعند، حساب کنید.

۴۱۸ـ ک ۱ $2-4\cos x=0$

حل: $-4\cos x=-2\Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$

$x=2K\pi\pm\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{3}$

۴۱۹ـ ک ـ ۲ $2\sin^2 x-1=0$

حل: $2\sin^2 x=1\Rightarrow \sin^2 x=\frac{1}{2}\Rightarrow \sin x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}=\pm\sin 45^\circ$

$\sin x=\sin 45^\circ\Rightarrow x=2K\pi+45^\circ$ و $2K\pi+135^\circ$

$x=45^\circ$ و 135°

$\sin x=-\sin 45^\circ=\sin(-45^\circ)$

$x=2K\pi-45^\circ$ و $2K\pi+225^\circ\Rightarrow x=315^\circ$ و 225°

۴۲۰ـ ک ۳ $tg\, x-tg\frac{\pi}{12}=0$

حل: $tg\, x=tg\frac{\pi}{12}\Rightarrow x=K\pi+\frac{\pi}{12}\Rightarrow x=\frac{\pi}{12}$ و $\frac{13\pi}{12}$

۴۲۱ـ ک ـ ۴ $\sin x=\cos x$

حل: $\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos x}{\cos x}\Rightarrow tg\, x=1=tg\frac{\pi}{4}$

$$x = K\pi + \frac{\pi}{4} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ و } \frac{5\pi}{4}$$

۴۲۲ـ ک ـ ۵

$$tg\,x = 2\sin x$$

حل:

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 2\sin x \Longrightarrow 2\sin x\cos x = \sin x$$

$$2\sin x\cos x - \sin x = 0 \Longrightarrow \sin x(2\cos x - 1) = 0$$

$$\sin x = 0 = \sin 0^\circ \Longrightarrow x = 2K\pi \text{ و } 2K\pi + \pi \Longrightarrow x = 0, \pi, 2\pi$$

$$2\cos x - 1 = 0 \Longrightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos 60$$

$$x = 2K\pi \pm 60^\circ \Longrightarrow x = 60 \text{ و } 200$$

۴۲۳ـ ک ـ ۶

$$cotg\,x + tg\frac{\pi}{7} = 0$$

حل:

$$cotg\,x = -tg\frac{\pi}{7} = tg\left(\frac{-\pi}{7}\right) = cotg\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{7}\right)$$

$$cotg\,x = cotg\frac{9\pi}{14} \Longrightarrow x = K\pi + \frac{9\pi}{14} \Longrightarrow x = \frac{9\pi}{14} \text{ و } \frac{23\pi}{14}$$

۴۲۴ـ

$$tg\,y = 3\,cotg\,y$$

حل:

$$tg^2 y = 3\,tg\,y\,cotg\,y \Longrightarrow tg^2 y = 3$$

$$tg\,y = \sqrt{3} = tg\frac{\pi}{3} \Longrightarrow y = K\pi + \frac{\pi}{3} \Longrightarrow y = \frac{\pi}{3} \text{ و } \frac{4\pi}{3}$$

$$tg\,y = -\sqrt{3} = tg\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Longrightarrow y = K\pi - \frac{\pi}{3} \Longrightarrow y = \frac{2\pi}{3} \text{ و } \frac{5\pi}{3}$$

۴۲۵ـ

$$\frac{2}{\sin x} - 2\sin x = 3$$

حل:

$$2 - 2\sin^2 x = 3\sin x$$

$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

$$\sin x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$\sin x = -۲$ غیرممکن و $\sin x = \frac{۱}{۲} = \sin\frac{\pi}{۶}$

$x = ۲K\pi + \frac{\pi}{۶}$ و $۲K\pi + \frac{۵\pi}{۶} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{۶}$ و $\frac{۵\pi}{۶}$

-۴۲۶ $۲\cos^۲ x + \cos x = ۰$

حل: $\cos x(۲\cos x + ۱) = ۰ \qquad \cos x = ۰$

$\cos x = \cos\frac{\pi}{۲} \qquad x = ۲K\pi \pm \frac{\pi}{۲} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$

$۲\cos x + ۱ = ۰ \qquad \cos x = -\frac{۱}{۲} = \cos\frac{۲\pi}{۳}$

$x = ۲K\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \Longrightarrow x = \frac{۲\pi}{۳}$ و $\frac{۴\pi}{۳}$

-۴۲۷ $۳tg^۲ x + ۴\sqrt{۳}\,tg x + ۳ = ۰$

حل: $tg x = \frac{-۲\sqrt{۳} \pm \sqrt{۱۲-۹}}{۳} = -\sqrt{۳}$ و $\frac{-\sqrt{۳}}{۳}$

$tg x = -\sqrt{۳} = tg\left(-\frac{\pi}{۳}\right) \Longrightarrow x = K\pi - \frac{\pi}{۳} \Longrightarrow x = \frac{۲\pi}{۳}$

$tg x = -\frac{\sqrt{۳}}{۳} = tg\left(-\frac{\pi}{۶}\right) \Longrightarrow x = K\pi - \frac{\pi}{۶} \Longrightarrow x = \frac{۵\pi}{۶}, \frac{۱۱\pi}{۶}$

-۴۲۸ $۲\sin x\cos x + \sqrt{۳}\cos x = ۰$

حل: $\cos x(۲\sin x + \sqrt{۳}) = ۰$

$\cos x = ۰ = \cos\frac{\pi}{۲} \Longrightarrow x = ۲K\pi \pm \frac{\pi}{۲} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$

$۲\sin x + \sqrt{۳} = ۰ \Longrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sin\left(-\frac{\pi}{۳}\right)$

$x = ۲K\pi - \frac{\pi}{۳}$ و $x = ۲K\pi + \pi + \frac{\pi}{۳} \Longrightarrow x = ۲K\pi + \frac{۴\pi}{۳}$

$x = \frac{۵\pi}{۳}$ و $\frac{۴\pi}{۳}$

-۴۲۹ $\frac{\sqrt{۳}}{\sin x} + \frac{۱}{\cos x} = ۰$

حل: $\frac{\sqrt{۳}}{\sin x} = -\frac{۱}{\cos x} \Longrightarrow \sin x = -\sqrt{۳}\cos x$

$$tg\,x = -\sqrt{3} = tg\left(-\frac{\pi}{3}\right) \quad x = K\pi - \frac{\pi}{3} \Longrightarrow x = \frac{2\pi}{3} \text{ و } \frac{5\pi}{3}$$

-۴۳۰ $2\sin^2 x - 1 = \sin x - \cos^2 x$

حل: $2\sin^2 x - 1 = \sin x - (1 - \sin^2 x)$

$$2\sin^2 x - 1 = \sin x - 1 + \sin^2 x$$

$$\sin^2 x - \sin x = 0 \Longrightarrow \sin x(\sin x - 1) = 0$$

$$\sin x = 0 = \sin 0^\circ \Longrightarrow x = 2K\pi \text{ و } 2K\pi + \pi$$

$$\sin x - 1 = 0 \Longrightarrow \sin x = 1 = \sin\frac{\pi}{2} \Longrightarrow x = 2K\pi + \frac{\pi}{2}$$

-۴۳۱ $\sin^2 y = \cos y + 1$

حل: $1 - \cos^2 y = \cos y + 1 \Longrightarrow \cos^2 y + \cos y = 0$

$$\cos y(\cos y + 1) = 0$$

$$\cos y = 0 = \cos\frac{\pi}{2} \Longrightarrow y = 2K\pi \pm \frac{\pi}{2} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ و } \frac{3\pi}{2}$$

$$1 + \cos y = 0 \quad \cos y = -1 = \cos\pi \quad y = 2K\pi \pm \pi \Longrightarrow y = \pi$$

-۴۳۲ $\cos^2 x + \sin x = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

حل: $1 - \sin^2 x + \sin x = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

$$2\sin^2 x - 2\sin x + \sqrt{2} - 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2(\sqrt{2} - 1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2\sqrt{2} + 2}}{2}$$

$$\sin x = \frac{1 \pm \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}}{2} = \frac{1 \pm (1 - \sqrt{2})}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} \Longrightarrow x = 2K\pi + \frac{\pi}{4} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$x = 2K\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2K\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

$$\sin x = \frac{2-\sqrt{2}}{2}\sin\alpha \Rightarrow x = 2K\pi + \alpha \text{ و } 2K\pi + \pi - \alpha$$

۴۲۳- $$tg\,x + cotg\,x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

حل : $$3tg^2x - 4\sqrt{3}\,tg\,x + 3 = 0$$

$$tg\,x = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{12-9}}{3} = \sqrt{3} \text{ و } \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$tg\,x = \sqrt{3} = tg\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = K\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$tg\,x = \frac{\sqrt{3}}{3} = tg\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = K\pi + \frac{\pi}{6}$$

۴۲۴- $$\frac{1}{1+tg^2y} - \frac{1}{1+cotg^2y} = 0$$

حل: $$\cos^2y - \sin^2y = 0$$

$$\cos^2y = \sin^2y \Rightarrow tg^2y = 1 \Rightarrow tg\,y = \pm 1$$

$$tg\,y = 1 = tg\frac{\pi}{4} \Rightarrow y = K\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$tg\,y = -1 = tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y = K\pi - \frac{\pi}{4}$$

۴۲۵- $$\sin x\,tg\,x + \cos x\,cotg\,x = 0$$

حل : $$\frac{\sin^2x}{\cos x} + \frac{\cos^2x}{\sin x} = 0 \Rightarrow \frac{\sin^3x + \cos^3x}{\sin x\cos x} = 0$$

$$\sin^3x + \cos^3x = 0 \Rightarrow \sin^3x = -\cos^3x$$

$$tg^3x = -1 \Rightarrow tg\,x = -1 = tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x = K\pi - \frac{\pi}{4}$$

۴۲۶- $$\frac{\sin^2x}{tg\,x} + \frac{\cos^2x}{cotg\,x} = 0$$

حل : $$\frac{\sin^2x\,cotg\,x + \cos^2x\,tg\,x}{tg\,x\,cotg\,x} = 0$$

$$\sin x\cos x+\sin x\cos x=0\Longrightarrow 2\sin x\cos x=0$$

$$\sin x=0=\sin 0\Longrightarrow x=2K\pi \text{ و } 2K\pi+\pi$$

$$\cos x=0=\cos\frac{\pi}{2}\Longrightarrow x=2K\pi\pm\frac{\pi}{2}$$

-۴۲۷ $$2\sin(\pi-x)+\sin(\pi+x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=0$$

حل: $$2\sin x+(-\sin x)-\cos x=0$$

$$2\sin x-\sin x-\cos x=0\Longrightarrow \sin x=\cos x$$

$$tg\,x=1=tg\frac{\pi}{4}\Longrightarrow x=K\pi+\frac{\pi}{4}$$

-۴۲۸ $$\frac{2\sin(2\pi-x)}{\cos x}-\frac{\sin(2\pi+x)}{\cos(-x)}=tg\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

حل: $$\frac{-2\sin x}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}=-\cot g\,x$$

$$-3tg\,x=-\cot g\,x\Longrightarrow 3tg\,x\cot g\,x=\cot g^2x$$

$$\cot g\,x=\pm\sqrt{3}=\pm\cot g\,30^\circ\Longrightarrow x=K\pi\pm30^\circ$$

-۴۲۹ $$\frac{\cos(\pi+x)}{\sin(x-\pi)}+\frac{\cos(2\pi+x)}{\sin(x-2\pi)}+\frac{\cos(3\pi+x)}{\sin(x-3\pi)}=0$$

حل: میدانیم اگر بکمانی بمقدار 2π یا 4π اضافه یاکم شود خطوط مثلثاتی آن تغییر نمی‌کند بنابراین میتوان معادله بالا را بصورت زیر نوشت:

$$\frac{\cos(\pi+x)}{\sin(2\pi+x-\pi)}+\frac{\cos(2\pi+x)}{\sin(2\pi+x-2\pi)}+\frac{\cos(3\pi+x-2\pi)}{\sin(4\pi+x-3\pi)}=0$$

$$\frac{\cos(\pi+x)}{\sin(\pi+x)}+\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\cos(\pi+x)}{\sin(\pi+x)}=0$$

$$\cot g(\pi+x)+\cot g\,x+\cot g(\pi+x)=0$$

$$3\cot g\,x=0\Longrightarrow\cot g\,x=0=\cot g\,90^\circ\Longrightarrow x=K\pi+90^\circ$$

-۴۳۰ $$\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{8}-x\right)=1$$

حل: $$\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right)+\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{5\pi}{8}-x\right)\right]=1$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right)+\sin\left[\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{8}+x\right]=1$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right)=1$$

$$2\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right)=1\Longrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$x-\frac{\pi}{8}=2K\pi+\frac{\pi}{6} \quad x=2K\pi+\frac{7\pi}{24}$$

$$x-\frac{\pi}{8}=2K\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\Longrightarrow x=2K\pi+\frac{23\pi}{24}$$

۴۴۱ـ $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}$

حل: $(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos x^2=\frac{1}{2}$

$$1-2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{2}\Longrightarrow 1-2\sin^2 x(1-\sin^2 x)-\frac{1}{2}=0$$

$$4\sin^4 x-4\sin^2 x+1=0$$

$$\sin^2 x=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{4}=\frac{1}{2}\Longrightarrow \sin x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}\Longrightarrow x=2K\pi+\frac{\pi}{4} \text{ و } 2K\pi+\frac{3\pi}{4}$$

$$\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Longrightarrow x=2K\pi-\frac{\pi}{4}$$

$$x=2K\pi+\pi+\frac{\pi}{4}\Longrightarrow x=2K\pi+\frac{5\pi}{4}$$

۴۴۲ـ ۲۵ $\sin^6 x+\cos^6 x=1$

حل: $(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)=1$

$$1-3\sin^2 x\cos^2 x=1\Longrightarrow \sin x\cos x=0$$

$$\sin x=0=\sin 0\Longrightarrow x=2K\pi \text{ و } 2K\pi+\pi$$

$$\cos x=0=\cos 90^\circ\Longrightarrow x=2K\pi\pm 90^\circ$$

خود را امتحان کنید

۴۴۳ـ درصورتیکه $90^\circ < x < 180^\circ$ و $\cot g\, x = \frac{-5}{12}$ باشد سایر نسبتهای مثلثاتی x را معلوم کنید.

۴۴۴ ـ معادله $\frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = 4(\sin^3 x - \cos^3 x)$ را حل کنید

۴۴۵ـ درصورتیکه $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ باشد حساب کنید $\cos 54^\circ$ را.

۴۴۶ـ درستی اتحاد زیر را ثابت کنید

$$\left(\sqrt{\frac{a-\tan x}{a\cot x-1}}+\sqrt{\frac{a-\cot x}{a\tan x-1}}\right)^2 = 2+\frac{1}{\sin x\cos x}$$

۴۴۷ـ با استفاده از رابطه $\frac{a}{\sin\omega}=\frac{b}{\cos\omega}$ رابطه زیر را بدست آورید

$$a\sin\omega+b\cos\omega=\sqrt{a^2+b^2} \qquad \left(0<\omega<\frac{\pi}{2}\right)$$

۴۴۸ـ ثابت کنید عبارت $\frac{\cos^4 x+\sin^4 x-1}{\cos^6 x+\sin^6 x-1}$ به x بستگی ندارد

جواب $\frac{2}{3}$

۴۴۹ـ معادله زیر را حل کنید وجوابهای بین 2π وصفر آنرا بدست آورید،

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-5x\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{2}-5x\right)+\tan\left(\frac{7\pi}{2}-5x\right)=1$$

۴۵۰ـ در معادله زیر پارامتر m را طوری بیابید که یکی از ریشه‌های معادله برابر $x=\frac{5\pi}{18}$ شود سپس بازاء $m=-2$ معادله را حل و جوابهای کلی آنرا بدست آورید.

$$(m-1)\sin^2 2x+\cos^2 2x-m\sin 2x=1$$

۴۵۱ـ θ را بین معادلات زیر حذف کنید.

$$\frac{x}{\cos\theta}=x'-y'tg\theta \quad \text{و} \quad \frac{y}{\cos\theta}=y'+x'tg\theta$$

۴۵۲ـ خطوط مثلثاتی $\frac{9\pi}{8}$ را حساب کنید درصورتی که $C_8=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ باشد:

۴۵۳ـ اولا از معادله

$$(2m+1)\sin^2 x-2m\sin x\cos x+m\cos^2 x=0$$

معادله درجه دومی برحسب $tg x$ نتیجه بگیرید

ثانیاً ـ m را بقسمی تعیین کنید که الف: جوابهای معادله حاصل متمم یکدیگر باشند.

۴۵۴ـ جوابهای بین 2π و 4π معادله زیررا حساب کنید.

$$\sin^2 x+\cos^2 x=\sin x\cdot\cot g x$$

۴۵۵ـ میدانیم $tg a+\frac{1}{\cos a}=2$ می‌باشد مطلوبست تعیین خطوط‌مثلثاتی a در صورتیکه a در ربع اول باشد.

۴۵۶ـ مطلوبست تعیین ساده‌ترین رابطه بین a و b بطریقی که داشته باشیم

$$\begin{cases} a\,tg\omega+\cos\omega=a \quad \text{و} \quad \sin\omega-a=b \end{cases}$$

۴۵۷ـ هرگاه $tg x=\frac{2m-1}{m+2}$ و $tg y=\frac{m-4}{m+1}$ باشد

m را طوری تعیین کنید که کمانهای x و y مکمل یکدیگر باشند.

۴۵۸ـ میدانیم $\cos x-\sin x=\frac{\sqrt{5}}{5}$ است مطلوبست محاسبه مقدار $tg x$

۴۵۹ـ بازاء چه مقداری از a کسر زیر بستگی به x ندارد.

$$\frac{(3-a)\sin x-(3a-1)\cos x}{(2+3a)\cos x+(2+a)\sin x}$$

۴۶۰ـ بازاءچه مقادیر m تساوی $\cos x=\frac{m^2-2m}{m-1}$ بر قرار است سپس $tg\,x$ را بدست آورید.

۴۶۱ـ معادله زیر را حل کنید جوابهای کلی وجوابهای واقع بین صفر و 2π را با استفاده از جدول تعیین کنید.

$$2\sin^2(x+\frac{3\pi}{5})+(1-\sqrt{3})\cos(x+\frac{\pi}{10})=\sqrt{3}$$

۴۶۲ـ مقادیر m و n و k را بقسمی تعیین کنید که بازاء همه مقادیر x تساوی زیر همواره برقرارباشد.

$$\frac{m}{1+n\,tg^2x}+\frac{n}{1+m\cot g^2x}=K$$

۴۶۳ـ درصورتی که روابط

$$tg^4x+1=p\,tg^2x \qquad \text{و} \qquad tg^4x+\cot g^4x=q$$

برقرار باشد رابطه‌ای بین p و q مستقل از x بدست آورید.

جوابهای کلی معادلات زیر رابدست آورید وجوابهای بین ۰ و 2π را حساب کنید

۴۶۴ـ $3\sin x=4\sin^3x+2\cos^3x$

۴۶۵ـ $\sqrt{3}\,tg^2x-2(\sqrt{3}-1)tg\,x+2-\sqrt{3}=0$

۴۶۶ـ $8\sin x\cos x-4\sin x-(\sqrt{5}-1)(2\cos x-1)=0$

۴۶۷ـ مطلوبست محاسبه عبارت زیر برحسب K

$$tg\,\frac{\pi}{4}+3tg\,\frac{3\pi}{4}+5tg\,\frac{5\pi}{4}+\cdots+(4K-1)tg\,\frac{(4K-1)\pi}{4}$$

۴۶۸ـ a و b را طوری تعیین کنید که بازاء جمیع مقادیر x تساوی زیر بر قرار باشد.

$$\frac{a}{1-2\cos x}+\frac{b}{1+2\cos x}=\frac{2(1+tg^2x)}{tg^2x-8}$$

۴۶۹ـ ثابت کنید هرگاه $tg\,x=\frac{\sin y-\cos y}{\sin y+\cos y}$ باشد رابطه زیر بر قرار است

$$2\sin^2 x=(\sin y-\cos y)^2$$

۴۷۰ـ مقدار x راچنان معین کنید که عبارت زیر. اولا حداکثر ثانیا حداقل مقدار ممکن را دارا باشد.

$$(6+\sqrt{2}\sin x)(4-\sqrt{2}\sin x)$$

۴۷۱ـ معادله زیر راحل کنید وجوابهای بین صفر و 2π آن راحساب کنید.

$$tg\,3x\,cotg\,5x=tg\,5x\,cotg\,3x$$

۴۷۲ـ معادله درجه دوم زیررا حل کرده وریشه‌های آن را بازاء $a=\frac{\pi}{4}$ بدست آورید

$$x^2-2(1+2cotg^2 2a)x+1=0$$

۴۷۳ـ a و b را چنان معین کنید که عبارت زیر به x بستگی نداشته باشد.

$$K=\frac{a\sin^2 x+\cos x+b}{b\sin^2 x+a\cos x-1}$$

۴۷۴ـ اگر $9\sin^2 x+12\cos^2 x=11$ باشد مطلوبست محاسبه خطوط مثلثاتی x در صورتی که $0<x<90^\circ$ باشد

۴۷۵ـ تحقیق کنید که عبارت زیر به x بستگی ندارد.

$$\left(\frac{1+tg\,x}{1-tg\,x}\right)^2-\frac{1}{(\cos x-\sin x)^2}$$

۴۷۶ـ اگر $a\sin x\sin y+b\cos x\cos y=0$ باشد ثابت کنید که عبارت زیر بستگی به x و y ندارد.

$$A=\frac{1}{a\sin^2 x+b\cos^2 x}+\frac{1}{a\sin^2 y+b\cos^2 y}$$

۴۷۷ـ معادله زیر را حل کنید $\sin^2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)+2\cos\left(\frac{5\pi}{8}-x\right)=2$

۴۷۸ـ درصورتی که $(0^\circ<\alpha<90^\circ)$ و $tg\alpha=\frac{15}{8}$ باشند مقدار عددی‌عبارت‌زیررا حساب کنید

$$A=\frac{\sin(45^\circ+\alpha)+\cos(540^\circ+\alpha)+tg(990^\circ+\alpha)}{\sin(\alpha-180^\circ)+\cos(\alpha-810^\circ)+tg(\alpha-990^\circ)}$$

ثلث اول دبیرستان البرز

۴۷۹ـ مطلوبست تعیین زوایای α و β و γ برحسب رادیان درصورتیکه داشته باشیم

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{15}$ و گراد $\beta+\gamma=10$ و $\gamma+\alpha=15^\circ$

۴۸۰ـ اگر $cotg\,a=-\frac{2}{3}$ بوده و انتهای کمان a در ربع چهارم باشد مقدار عددی عبارت $A=\frac{4\sin^2 a-9\cos^2 a}{4\sin a\cos a}$ را محاسبه کنید .

۴۸۱ـ عبارت زیررا محاسبه کنید:

$$z=cotg^2\left(\frac{5\pi}{2}+z\right)\cos^2(z-7\pi)+\cos^2\left(z-\frac{3\pi}{2}\right)\ tg^2\left(\frac{9\pi}{2}+z\right)$$
$$-tg\left(\frac{7\pi}{2}-z\right)tg(z-11\pi)$$

۴۸۲ـ جوابهای کلی معادله $\sin x-\cos x=\frac{1-cotg\,x}{2}$ را بدست آورده و جواب‌های بین‌صفر و 2π رامحاسبه کنید

ثلث اول دبیرستان هدف شماره ۱

۴۸۳ـ معادله مثلثاتی زیررا حل کنید و جوابهای معادله را بین صفر و π حساب کنید .

$$\sin\left(۲x+\frac{\pi}{۶}\right)-\sin\left(۲x-\frac{\pi}{۶}\right)=\frac{۱}{۲}$$

۴۸۴ـ درستی تساوی زیررا ثابت کنید .

$$tg\frac{\pi}{۱۶}-cotg\frac{\pi}{۱۶}+۲tg\frac{\pi}{۸}=-۴$$

ثلث اول دبیرستان هدف شماره ۳

صحت اتحادهای زیررا ثابت کنید .

$$\frac{tg(۱۸۰^\circ-a)tg\left(a-\frac{\pi}{۲}\right)-۲\sin(۱۵۰^\circ)\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}-a\right)}{cotg۳۰۰^\circ-\cos۱۵۰^\circ}\qquad -۴۸۵$$

$$=۲\sqrt{۳}+۲\sqrt{۳}\sin a$$

$$\sin^۳a(۱+cotg\,a)+\cos^۳a(۱+tg\,a)=\sin a+\cos a\qquad -۴۸۶$$

۴۸۷ـ ثابت کنید که عبارت زیر بستگی به x ندارد .

$$\frac{۱}{۳}(\sin^۶x+\cos^۶x)-\frac{۱}{۴}(\cos^۲x-\sin^۲x)^۲=؟$$

ثلث اول دبیرستان رهنما

۴۸۸ـ معادله زیررا حل کرده وجوابهای کلی وجوابهای بین صفر و ۲π را بدست آورید .

$$\sqrt{۶}\sin x\cos x-\sqrt{۳}\sin x=\sqrt{۲}\cos^۲x-\cos x$$

ثلث اول دبیرستان ادیب

۴۸۹ـ درروابط زیر α را حذف کنید.

$۳x\sin\alpha-۲x=۱$ و $۴y-۳cotg^۲\alpha=۵$

۴۹۰ـ معادله زیر راحل کردوجوابهای بین صفرو π را بنویسید.

$$۲\sin(۷x-\frac{\pi}{۶})+۲\cos(\frac{\pi}{۶}-۷x)=۰$$

ثلث اول دبیرستان شاهپور (شیراز)

۴۹۱ـ ثابت کنید عبارت زیر مجذور کامل است .

$$۱۶\sin^۲x+۲۰\sin x+۱۳-۳۰\sin x\cos x-۱۲\cos x$$

ثلث اول دبیرستان پهلوی (ساری)

۴۹۲ـ مقدار عبارت زیر را تعیین کنید .

$$\sin(x+\frac{\pi}{۲})\cdot\sin(x-\frac{\pi}{۲})+\cos(x+\pi)\cdot\cos(x-\pi)+$$

$$+tg(۲\pi-x)\cdot cotg(۲\pi+x)=?$$

۴۹۳ـ معادله زیر را حل کرده جوابهای بین صفر و ۲π را محاسبه نمائید .

$$۲\cos^۳x+۴\sin^۲x-۳\sin x=۰$$

۴۹۴ـ عبارت $\frac{۹\cos x-۲b\sin^۲x}{(b\cos x-۱)(a\cos x-۱۰)}$ مفروض است .

اولا ضرائب a و b را طوری تعیین کنید که عبارت زیر به x بستگی نداشته باشد.

ثانیا بازاء $a=۵$ و $b=۲$ ، ثابت کنید کسر فوق برابر $\frac{۳\cos x+۶}{۵\cos x-۱۰}$ می‌باشد

ثلث اول دبیرستان رازی (شاهی)

۴۹۵ـ عبارت زیر را ساده کنید .

$$2\cos^4 x + 2\sin^4 x - 2\cos^6 x - 2\sin^6 x$$

۴۹۶ـ کمانی را بدست آورید که اختلاف مقدار آن نسبت به درجه و گراد برابر ۱۵ باشد .

۴۹۷ ـ درصورتیکه $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$ باشدمقدار K راحساب کنید.

$$K = \frac{\cos 1425^\circ - \sin 195^\circ + 1}{tg 165^\circ - cotg 15^\circ}$$

ثلث اول دبیرستان شهناز (پهلوی)

۴۹۸ ـ تفاضل دو زاویه ۱ گراد و مجموع آنها ۱ درجه استآندو زاویه را پیدا کنید .

۴۹۹ـ چه رابطه‌ای بین a و b باشد تا معادله زیردارای ریشه باشد .

$$a\cos^2 x + b\sin^2 x = c$$

۵۰۰ـ عبارت زیررا ساده کنید .

$$\sin 140^\circ 10' \times \cos 192^\circ 20' + \sin 31^\circ 50' \times \cos 12^\circ 20'$$

۵۰۱ـ درصورتیکه داشته باشیم .

$$\begin{cases} \frac{1}{\cos x} - \cos x = a \text{ و } \frac{1}{\sin x} - \sin x = b \end{cases}$$

چه رابطه‌ای مابین a و b موجود است .

ثلث اول دبیرستان علم (بیرجند)

۵۰۲ـ اگر $\sin A = \frac{3}{5}$ و انتهای کمان در ربع دوم باشد اندازه سایر خطوط مثلثاتی کمان A را حساب کنید

۵۰۳ـ تفاضل دوزاویه ۱ گراد و مجموع آنها یك درجه است آن دوزاویه را بر حسب درجه و گراد ورادیان حساب کنید .

صحت اتحادهای زیررا بدستآورید .

۵۰۴ـ $\left(\frac{1}{\sin\alpha}-\sin\alpha\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha}-\cos\alpha\right)=\frac{tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha}$

۵۰۵ـ $2\sin 36^\circ\cos 54^\circ+tg\,36^\circ\,tg\,54^\circ+\sin 144^\circ\sin 216^\circ$

$-\cos 126^\circ\sin 324^\circ+\sin(-36)\sin 144^\circ=\sin^2 54^\circ$

۵۰۶ـ درعبارت $a\sin^6x+b\cos^6x+c\sin^2x\cos^2x$ مقادیر a و b و c راچنان تعیین کنید که اندازه این عبارت بازاء جمیع مقادیر x برابر ۲ باشد

۵۰۷ . اگر داشته باشیم $3\sin P\cos P-2\cos P=0$ اندازه قوس P را بدست آورید.

ثلث اول دبیرستان قناد (بابل)

۵۰۸ـ اگر $\cos x\cdot cotg\,x=\frac{9}{20}$ و $0<x<\frac{\pi}{2}$ باشد سایر خطوط مثلثاتی کمان x را تعیین کنید .

۵۰۹ـ هرگاه C و B و A زوایای مثلثی باشند صحت اتحادزیررا اثبات کنید.

$$tg\left(\frac{3A+3B+2C}{2}\right)=cotg\frac{C}{2}$$

۵۱۰ـ صحت تساوی زیررا اثبات نمائید .

$$\sin^2x\cos^2x\left(\frac{1}{\frac{1}{\sin^2x}-\cos^2x}+\frac{1}{\frac{1}{\sin^2x}-\sin^2x}\right)=$$

$$\frac{1-\sin^2x\cos^2x}{2+\sin^2x\cos^2x}$$

۵۱۱ـ هرگاه $tg\,22.5^\circ=\sqrt{2}-1$ باشد مقدارعددی رابطه زیررا تعیین کنید.

$$B=\frac{tg\,112.5^\circ+cotg\,292.5^\circ}{tg\,157.5^\circ+cotg\,382.5^\circ}$$

فرمولهای زیر را بخاطر بسپارید :

$$\boxed{\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a \\ \sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a \end{cases}}$$

مانند مثالهای زیر:

$$\sin(2x+y) = \sin 2x\cos y + \sin y\cos 2x$$

$$\sin(4x-45^\circ) = \sin 3x\cos 45^\circ - \sin 45^\circ\cos 3x$$

$$\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right) = \sin 3x\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\cos 3x$$

$$\sin(4x+2y) = \sin 4x\cos 2y + \sin 2y\cos 4x$$

حل مسائل صفحه ۹۳ کتاب درسی

۱۴ـ خطوط مثلثاتی کمان °۱۵ درجه را حساب کنید.

حل : $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ\cos 30^\circ - \sin 30^\circ\cos 45^\circ$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ\cos 30^\circ + \sin 45^\circ\sin 30^\circ$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$$

$$tg\,15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1} = 2-\sqrt{3}$$

$$cotg\,15^\circ = \frac{1}{tg\,15^\circ} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{3-1} = 2+\sqrt{3}$$

۵۱۵ـ خصوط مثلثاتی °۷۵ درجه را حساب کنید.

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 45^\circ$$

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$tg 75^\circ = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = 2 + \sqrt{3}$$

$$cotg 75^\circ = \frac{1}{tg 75^\circ} = 2 - \sqrt{3}$$

درستی تساویهای زیر را تحقیق کنید:

۵۱۶ـ ثابت کنید: $\sin 20^\circ \cos 10^\circ + \cos 20^\circ \sin 10^\circ = \frac{1}{2}$

حل: طرف اول $= \sin(20^\circ + 10^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

۵۱۷ـ ثابت کنید: $\sin 80^\circ \cos 20^\circ - \cos 80^\circ \sin 20^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

حل: طرف اول $= \sin(80^\circ - 20^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

۵۱۸ـ ثابت کنید: $\cos 55^\circ \cos 10^\circ + \sin 55^\circ \sin 10^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

حل: طرف اول $= \cos(55^\circ - 10^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

۵۱۹ـ ثابت کنید: $\cos 85^\circ \cos 35^\circ - \sin 85^\circ \sin 35^\circ = -\frac{1}{2}$

حل : $\text{طرف اول} = \cos(۸۵^\circ + ۳۵^\circ) = \cos ۱۲۰^\circ = -\frac{۱}{۲}$

فرمولهای زیر را بخاطر بسپارید

$$tg(a \pm b) = \frac{tg a \pm tg b}{۱ \mp tg a\, tg b}$$

$$cotg(a \pm b) = \frac{۱ \mp tg a\, tg b}{tg a \pm tg b}$$

$$cotg(a \pm b) = \frac{cotg a\, cotg b \mp ۱}{cotg b \pm cotg a}$$

مانند مثالهای زیر :

$$tg(۲x - ۳y) = \frac{tg ۲x - tg ۳y}{۱ + tg ۲x\, tg ۳y} \quad \text{و} \quad tg(۳x + y) = \frac{tg ۳x + tg y}{۱ - tg ۳x\, tg y}$$

$$cotg(x - ۲۰^\circ) = \frac{۱ + tg x\, tg ۲۰^\circ}{tg x - tg ۲۰^\circ} = \frac{cotg x\, cotg ۲۰^\circ + ۱}{cotg ۲۰^\circ - cotg x}$$

۵۲۰ـ ۶ـ ثابت کنید

$$\frac{tg ۳۲^\circ + tg ۲۸^\circ}{۱ - tg ۳۲ tg ۲۸^\circ} = \sqrt{۳}$$

حل :
$$\frac{tg ۳۲ + tg ۲۸^\circ}{۱ - tg ۳۲ tg ۲۸^\circ} = tg(۳۲^\circ + ۲۸^\circ) = tg ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$$

۵۲۱ـ درصورتی که $\sin\alpha = \frac{۷}{۱۵}$ و $\sin\beta = \frac{۵}{۱۳}$ و زوایای β و α حاده باشند مطلوبست

محاسبه هریک از عبارت ذیل:

$\sin(\alpha+\beta)$، $\cos(\alpha-\beta)$ و $tg(\alpha+\beta)$ ، $cotg(\beta-\alpha)$ و $\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$

حل: ابتدا sin وcos زوایای α وβ را حساب کنیم.

$$\cos\alpha=\sqrt{۱-\sin^۲\alpha}=\frac{۲۴}{۲۵}\text{ و }\cos\beta=\sqrt{۱-\sin^۲\beta}=\frac{۱۲}{۱۳}$$

الف:
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{۷}{۲۵}\times\frac{۱۲}{۱۳}+\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۲۴}{۲۵}=\frac{۸۴+۱۲۰}{۳۲۵}=\frac{۲۰۴}{۳۲۵}$$

ب:
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{۲۴}{۲۵}\times\frac{۱۲}{۱۳}+\frac{۷}{۲۵}\times\frac{۵}{۱۳}=\frac{۲۸۸+۳۵}{۳۲۵}=\frac{۳۲۳}{۳۲۵}$$

ج:
$$\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)=$$
$$(\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha)(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=$$
$$\left(\frac{۷}{۲۵}\times\frac{۱۲}{۱۳}-\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۲۴}{۲۵}\right)\left(\frac{۲۴}{۲۵}\times\frac{۱۲}{۱۳}-\frac{۷}{۲۵}\times\frac{۵}{۱۳}\right)=\frac{-۹۲۰۸}{(۳۲۵)^۲}$$

اگر $tg\alpha$ و $tg\beta$ را بدست‌آورده ودر روابط زیر قرار دهیم نتیجه میشود.

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{۱-tg\alpha\, tg\beta}=\frac{۲۰۴}{۲۵۳}$$

$$cotg(\beta-\alpha)=\frac{۱+tg\alpha\, tg\beta}{tg\beta-tg\alpha}=\frac{۳۲۳}{۳۶}$$

۲۲ك ۱۲ـ مطلوب است محاسبه $\sin(a+b+c)$ برحسب خطوط‌مثلثاتی کمانهای a و b و c

حل:
$$\sin(a+b+c)=\sin[(a+b)+c]=$$
$$\sin(a+b)\cos c+\cos(a+b)\sin c=$$
$$(\sin a\cos b+\cos a\sin b)\cos c+(\cos a\cos b-\sin a\sin b)\sin c=$$
$$\sin a\cos b\cos c+\cos a\sin b\cos c+\cos a\cos b\sin c-\sin a\sin b\sin c$$

۲۳ك ۱۳ـ مطلوب است محاسبه $\cos(a-b-c)$ برحسب خطوط‌مثلثاتی کمانهای a و b و c.

حل:
$$\cos(a-b-c)=\cos[(a-b)-c]=$$
$$=\cos(a-b)\cos c+\sin(a-b)\sin c=$$
$$=\cos a\cos b\cos c+\sin a\sin b\cos c+\sin a\cos b\sin c-\sin b\sin c\cos a$$

۲۴ك ۱۴ـ در صورتی که $tg\alpha=۳$ و $tg\beta=-۲$ باشد ثابت کنید:

$$\alpha-\beta=k\pi+\frac{۳\pi}{۴}$$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{۱+tg\alpha tg\beta}=\frac{۲+۲}{۱-۶}=-۱=-tg\frac{\pi}{۴}$$

$$tg(\alpha-\beta)=tg\frac{۳\pi}{۴} \qquad \alpha-\beta=K\pi+\frac{۳\pi}{۴}$$

به‌کمک دستورهای (۱۷) تا (۲۲)، درستی اتحادهای زیر را تحقیق کنید:

۵۲۵ك ۱۵- $\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=\sin\alpha$

حل: طرف‌اول $=\cos\frac{\pi}{۲}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{۲}\sin\alpha=۰+\sin\alpha=\sin\alpha$

۵۲۶ك ۱۶- $\cos\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=-\sin\alpha$

حل: طرف اول $=\cos\frac{\pi}{۲}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{۲}\sin\alpha=۰-۱\times\sin\alpha=-\sin\alpha$

۵۲۷ك ۱۷ $\sin(\pi-\alpha)+\sin(\pi+\alpha)$

حل: طرف اول $=\sin\pi\cos\alpha-\sin\alpha\cos\pi+\sin\pi\cos\alpha+\sin\alpha\cos\pi$

طرف‌اول $=۲\sin\pi\cos\alpha=۲\times۰\times\cos\alpha=۰$

۵۲۸ ك ۱۸- $\cos(۲\pi+\alpha)+\cos(۲\pi-\alpha)=۲\cos\alpha$

حل:

طرف اول $=\cos۲\pi\cos\alpha-\sin۲\pi\sin\alpha+\cos۲\pi\cos\alpha+\sin۲\pi\sin\alpha$

طرف اول $=۲\cos۲\pi\times\cos\alpha=۲\times۱\times\cos\alpha=۲\cos\alpha$

۵۲۹ ك ۱۹- $tg(\pi+\alpha)-tg(\pi-\alpha)=۲tg\alpha$

حل: طرف اول $=\frac{tg\pi+tg\alpha}{۱-tg\pi tg\alpha}-\frac{tg\pi-tg\alpha}{۱+tg\pi tg\alpha}$

طرف اول $=\frac{۰+tg\alpha}{۱-۰\times tg\alpha}-\frac{۰-tg\alpha}{۱+۰\times tg\alpha}$

طرف اول $=tg\alpha+tg\alpha=۲tg\alpha=$ طرف دوم

درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید:

۵۳۰ ك ۲۰- $\sin 3x\cos 2x+\cos 3x\sin 2x=\sin 5x$

حل: طرف دوم $=\sin 5x=\sin(3x+2x)=$ طرف اول

۵۳۱ ك ۲۱-

$\cos(a+10^\circ)\cos(a-10^\circ)-\sin(a+10^\circ)\sin(a-10^\circ)=\cos 2a$

حل: طرف اول $=\cos(a+10^\circ+a-10^\circ)=\cos 2a$

۵۳۲ ك ۲۲- $\dfrac{\sin 2x\cos x-\cos 2x\sin x}{\cos 2x\cos x+\sin 2x\sin x}=\operatorname{tg} x$

حل: طرف اول $=\dfrac{\sin(2x-x)}{\cos(2x-x)}=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\operatorname{tg} x$

۵۳۳ ك ۲۳- $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin a+\cos a)=\sin(a+\frac{\pi}{4})$

حل: طرف اول $=\sin a\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\cos a\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

طرف اول $=\sin a\cos\frac{\pi}{4}+\cos a\sin\frac{\pi}{4}=\sin(a+\frac{\pi}{4})$

۵۳۴ ك ۲۴- $\cos(a+\frac{\pi}{3})+\cos(a-\frac{\pi}{3})=\cos a$

طرف اول $=\cos a\cos\frac{\pi}{3}-\sin a\sin\frac{\pi}{3}+\cos a\cos\frac{\pi}{3}+\sin a\sin\frac{\pi}{3}$

طرف اول $=2\cos\frac{\pi}{3}\cos a=2\times\frac{1}{2}\cos a=\cos a$

۵۳۵ ك ۲۵- $\sin(x+30^\circ)+\cos(x+60^\circ)=\cos x$

حل: $\sin x\cos 30^\circ+\sin 30^\circ\cos x+\cos x\cos 60^\circ-\sin x\sin 60^\circ=$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\cos x$

۵۳۶ ك ۲۶- $\sin(a+b)\sin(a-b)=\sin^2 a-\sin^2 b$

حل: طرف اول $=(\sin a\cos b+\sin b\cos a)(\sin a\cos b-\sin b\cos a)$

$$\text{طرف اول} = \sin^2 a\cos^2 b - \sin^2 b\cos^2 a$$

$$\text{طرف اول} = \sin^2 a(1-\sin^2 b) - \sin^2 b(1-\sin^2 a)$$

$$\text{طرف اول} = \sin^2 a - \sin^2 a\sin^2 b - \sin^2 b + \sin^2 b\sin^2 a = \sin^2 a - \sin^2 b$$

۵۳۷ ك ۳۷- $\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b$

$$\text{طرف اول} = (\cos a\cos b - \sin a\sin b)(\cos a\cos b + \sin a\sin b)$$

$$\text{طرف اول} = \cos^2 a\cos^2 b - \sin^2 a\sin^2 b$$

$$\text{طرف اول} = \cos^2 a(1-\sin^2 b) - (1-\cos^2 a)\sin^2 b$$

$$\text{طرف اول} = \cos^2 a - \cos^2 a\sin^2 b - \sin^2 b + \sin^2 b\cos^2 a = \cos^2 a - \sin^2 b$$

۵۳۸ ك ۳۸- $tg(45^\circ + x) + tg(45^\circ - x) = \dfrac{2}{\cos^2 x - \sin^2 x}$

حل: $$\text{طرف اول} = \frac{1+tg x}{1-tg x} + \frac{1-tg x}{1+tg x} = \frac{2(1+tg^2 x)}{1-tg^2 x}$$

$$\text{طرف اول} = \frac{2\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)}{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{2}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$

۵۳۹ ك ۳۹- $\dfrac{\cos(x+y)}{\sin x\sin y} + 1 = cotg x\, cotg y$

حل: $$\text{طرف اول} = \frac{\cos x\cos y - \sin x\sin y + \sin x\sin y}{\sin x\sin y}$$

$$\text{طرف اول} = \frac{\cos x\cos y}{\sin x\sin y} = cotg x\, cotg y$$

۵۴۰ ك ۴۰ $\dfrac{tg\alpha + tg\beta}{tg\alpha - tg\beta} = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$

حل: $$\text{طرف اول} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$\text{طرف اول} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$$

۵۴۱ ك ۳۱- $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{1+tg\alpha tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$

حل: $\text{طرف اول}=\dfrac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$

صورت ومخرج را به $\cos\alpha\cos\beta$ تقسیم می‌کنیم.

$$\text{طرف اول}=\dfrac{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\dfrac{1+tg\alpha tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$$

۵۴۲ ك ۳۲- $\dfrac{\sin(x+y)\sin(x-y)}{\cos^2x\cos^2y}=tg^2x-tg^2y$

حل: $\text{طرف اول}=\dfrac{(\sin x\cos y+\sin y\cos x)(\sin x\cos y-\sin y\cos x)}{\cos x^2\cos^2y}$

$$\text{طرف اول}=\dfrac{\sin^2x\cos^2y-\sin^2y\cos^2x}{\cos^2x\cos^2y}$$

اگر تفکیك کنیم بصورت زیر در می‌آید:

$$\text{طرف اول}=\dfrac{\sin^2x\cos^2y}{\cos^2x\cos^2y}-\dfrac{\sin^2y\cos^2x}{\cos^2x\cos^2y}=tg^2x-tg^2y$$

۵۴۳ ك ۳۳- $\dfrac{2\sin(a-b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)}=tga-tgb$

حل: $\text{طرف اول}=\dfrac{2(\sin a\cos b-\sin b\cos a)}{\cos a\cos b-\sin b\sin a+\cos a\cos b+\sin b\sin a}$

$$\text{طرف اول}=\dfrac{2(\sin a\cos b-\sin b\cos a)}{2\cos a\cos b}=$$

$$\dfrac{\sin a\cos b}{\cos a\cos b}-\dfrac{\cos a\sin b}{\cos a\cos b}$$

$$\text{طرف اول}=\dfrac{\sin a}{\cos a}-\dfrac{\sin b}{\cos b}=tga-tgb$$

۵۴۴- $\dfrac{\sin(45^\circ+x)}{\sin(45^\circ-x)}+\dfrac{\cos(45^\circ+x)}{\cos(45^\circ-x)}\quad\dfrac{2}{\cos^2x-\sin^2x}$

حل $\frac{\sin 45^\circ \cos x + \sin x \cos 45^\circ}{\sin 45^\circ \cos x - \sin x \cos 45^\circ} + \frac{\cos 45^\circ \cos x - \sin 45^\circ \sin x}{\cos 45^\circ \cos x + \sin 45^\circ \sin x}$

چون $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ = \cos 45^\circ$ میباشد نتیجه میشود

طرف اول $= \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} + \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$

$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$

طرف اول $= \frac{2\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2}{\cos^2 x - \sin^2 x}$

۵۴۵- $\sin a \sin(b-c) + \sin b \sin(c-a) + \sin c \sin(a-b) = 0$

حل سمت چپ $= \sin a(\sin b \cos c - \sin c \cos b) +$

$\sin b(\sin c \cos a - \sin a \cos c) + \sin c(\sin a \cos b - \sin b \cos a) =$

$= \sin a \sin b \cos c - \sin a \sin c \cos b + \sin b \sin c \cos a -$

$- \sin c \sin b \cos a + \sin c \sin a \cos b - \cos a \sin b \sin c = 0$

۵۴۶- $\cos a \sin(b-c) + \cos b \sin(c-a) + \cos c \sin(a-b) = 0$

حل : $\cos a(\sin b \cos c - \sin c \cos b) + \cos b(\sin c \cos a - \sin a \cos c) +$

$+ \cos c(\sin a \cos b - \sin b \cos a) =$

$\cos a \sin b \cos c - \sin c \cos b \cos a + \cos b \sin c \cos a -$

$- \cos b \sin a \cos c + \cos c \sin a \cos b - \cos c \cos a \sin b = 0$

۵۴۷- ک ۲۷ $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$

$\cos x + \cos x \cos\frac{2\pi}{3} - \sin x \sin\frac{2\pi}{3} + \cos x \cos\frac{2\pi}{3} + \sin x \sin\frac{2\pi}{3}$

طرف اول $= \cos x + 2\cos\frac{2\pi}{3}\cos x = \cos x + 2 \times \frac{-1}{2}\cos x$

طرف اول $= \cos x - \cos x = 0$

۵۴۸- ک ۲۸ $\cos^2 x + \cos^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos^2\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$

حل : با استفاده از $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2a^2 + 2b^2$

$$\cos^2 x+\left(\cos x\cos\frac{2\pi}{3}-\sin x\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2+\left(\cos x\cos\frac{2\pi}{3}+\sin x\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2=$$

$$\cos^2 x+2\cos^2 x\cos^2\frac{2\pi}{3}+2\sin^2 x\sin^2\frac{2\pi}{3}=$$

$$=\cos^2 x+2\times\frac{1}{4}\cos^2 x+2\times\frac{3}{4}\sin^2 x=\frac{3}{2}\cos^2 x+\frac{3}{2}\sin^2 x=\frac{3}{2}$$

۵۵۰ ک ۳۹ ـ

$$(\cos x+\cos y)^2+(\sin x+\sin y)^2-2=2\cos(x-y)$$

حل :

طرف اول $=\cos^2 x+\cos^2 y+2\cos x\cos y+\sin^2 x+\sin^2 y+$

$+2\sin x\sin y-2=$

طرف اول $=1+1+2(\cos x\cos y+\sin x\sin y)-2=$

طرف اول $=2(\cos x\cos y+\sin x\sin y)=2\cos(x-y)$

۵۵۱ ـ $\cos(x-y)+\sin(x+y)=(\sin x+\cos x)(\sin y+\cos y)$

طرف دوم $=\sin x\sin y+\sin x\cos y+\cos x\sin y+\cos x\cos y=$

طرف دوم $=\cos(x-y)+\sin(x+y)$

۵۵۲ ک ۴۱۹ ـ

$$\frac{\sin(x+45^\circ)}{\sin 45^\circ}+\frac{\cos(x+45^\circ)}{\cos 45^\circ}=2\cos x$$

حل :

$$\frac{\sin(x+45^\circ)\cos 45^\circ+\cos(x+45^\circ)\sin 45^\circ}{\sin 45^\circ\cos 45^\circ}$$

$$=\frac{\sin(x+45^\circ+45^\circ)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sin(x+90^\circ)}{\frac{1}{2}}=2\cos x$$

۵۵۳ ک ۴۲

$$\frac{\cos(x+30^\circ)}{\sin 30^\circ}+\frac{\sin(x+30^\circ)}{\cos 30^\circ}=4\cos x\,tg\frac{\pi}{6}$$

حل :

$$=\frac{\cos 30^\circ\cos(x+30^\circ)+\sin(x+30^\circ)\sin 30^\circ}{\sin 30^\circ\cos 30^\circ}$$

$$=\frac{\cos(30^\circ-x-30^\circ)}{\frac{1}{4}\times\sqrt{3}}=\frac{4\cos x}{cotg\frac{\pi}{6}}=4\cos x\,tg\frac{\pi}{6}$$

۵۵۴ ك ۴۳ - $\cos^2 x - \cos x\cos(60^\circ + x) + \cos^2(60^\circ + x) = \frac{3}{4}$

حل :

$$\cos^2 x - \cos x(\cos 60^\circ \cos x - \sin 60^\circ \sin x) +$$
$$+ (\cos^2 60^\circ \cos^2 x + \sin^2 60^\circ \sin^2 x - 2\sin x\cos x \sin 60^\circ \cos 60^\circ) =$$
$$= \cos^2 x - \cos x\left(\frac{\cos x}{2} - \frac{\sqrt{3}\sin x}{2}\right) + \frac{\cos^2 x}{4} + \frac{3\sin^2 x}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x$$
$$= \cos^2 x - \frac{\cos^2 x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x + \frac{\cos^2 x}{4} + \frac{3\sin^2 x}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x$$
$$= \frac{3}{4}\sin^2 x + \frac{3}{4}\cos^2 x = \frac{3}{4}(\sin^2 x + \cos^2 x) = \frac{3}{4}$$

۵۵۵ ك ۴۴ - $\frac{\sin(a+b) - \cos(a-b)}{\sin(a+b) + \cos(a-b)} = tg(a - 45^\circ)cotg(b + 45^\circ)$

حل: طرف دوم $= \frac{\sin(a-45)}{\cos(a-45)} \times \frac{\cos(b+45)}{\sin(b+45)} =$

$$= \frac{\sin a\cos 45^\circ - \sin 45^\circ \cos a}{\cos a\cos 45^\circ + \sin a\sin 45^\circ} \times \frac{\cos b\cos 45^\circ - \sin b\sin 45^\circ}{\sin b\cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos b}$$

چون $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$ میباشد لذا پس از فاکتورگیری عبارت بصورت زیر در میآید.

طرف دوم $= \frac{\sin a - \cos a}{\cos a + \sin a} \times \frac{\cos b - \sin b}{\sin b + \cos b}$

$$= \frac{\sin a\cos b - \sin a\sin b - \cos a\cos b + \cos a\sin b}{\cos a\sin b + \cos a\cos b + \sin a\sin b + \sin a\cos b} =$$
$$= \frac{\sin(a+b) - \cos(a-b)}{\sin(a+b) + \cos(a-b)}$$

۵۵۶ ك ۴۵ - $\sin(a+b)\sin(a-b) + \sin(b+c)\sin(b-c) +$
$+ \sin(c+a)\sin(c-a) = 0$

حل:

$$(\sin a\cos b + \sin b\cos a)(\sin a\cos b - \sin b\cos a) +$$
$$+ (\sin b\cos c + \sin c\cos b)(\sin b\cos c - \sin c\cos b) + (\sin c\cos a +$$
$$\sin a\cos c)(\sin c\cos a - \sin a\cos c) = (\sin^2 a\cos^2 b - \sin^2 b\cos^2 a) +$$
$$+ (\sin^2 b\cos^2 c - \sin^2 c\cos^2 b) + (\sin^2 c\cos^2 a - \sin^2 a\cos^2 c) =$$

$$= \sin^2 a\cos^2 b - \sin^2 b\cos^2 a + \sin^2 b\cos^2 c - \sin^2 c\cos^2 b + \sin^2 c\cos^2 a - \sin^2 a\cos^2 c =$$

$$(1-\cos^2 a)(1-\sin^2 b) - \cos^2 a\cos^2 b + (1-\cos^2 b)(1-\sin^2 c) - \cos^2 b\sin^2 c + (1-\cos^2 c)(1-\sin^2 a) - \cos^2 c\sin^2 a =$$

$$1 - \cos^2 a - \sin^2 b + \cos^2 a\sin^2 b - \cos^2 a\cos^2 b + 1 - \cos^2 b - \sin^2 c + \cos^2 c\sin^2 a - \cos^2 b\sin^2 c + 1 - \cos^2 c - \sin^2 a + \cos^2 c\sin^2 a - \cos^2 c\sin^2 a = 3 - (\sin^2 a + \cos^2 a) - (\sin^2 b + \cos^2 b) - (\cos^2 c + \sin^2 c) = 0$$

۵۵۷ ـ ۴۶ ـ ثابت کنید عبارت: $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$

به ازای جمیع مقادیر x برابر مقداری ثابت است. ثانیاً به ازای چه مقدار x عبارت $\sin x + \cos x$ ماکزیمم یا مینیمم است.

حل:

$$K = \frac{\sin x + \cos x}{\sin(x + 45)} = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x\cos 45 + \sin 45\cos x}$$

$$K = \frac{\sin x + \cos x}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

ثانیاً ـ عبارت $\sin x + \cos x$ را بصورتهای زیر مینویسیم:

$$P = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$$

$$P = \sqrt{2}(\sin 45^\circ\sin x + \cos 45^\circ\cos x) = \sqrt{2}\cos(x - 45^\circ)$$

مقدار P زمانی ماکزیمم مقدار میشود که $\cos(x - 45) = 1$ شود.

$$\cos(x - 45^\circ) = 1 = \cos 0 \Longrightarrow x - 45^\circ = 2K\pi$$

$$x = 2K\pi + 45^\circ$$

ومقدار P زمانی می‌نیمم است که $\cos(x - 45^\circ) = -1$ شود.

$$\cos(x - 45^\circ) = -1 = \cos\pi \Longrightarrow x - 45^\circ = 2K\pi + \pi$$

$$x = 2K\pi + 225^\circ$$

۵۵۸ ـ ۴۷ ـ از رابطهٔ $\dfrac{tg(a - b)}{tg a} + \dfrac{\sin^2 x}{\sin^2 a} = 1$ رابطهٔ $tg^2 x = tg a\, tg b$ را نتیجه بگیرید.

حل: از رابطه $1+cotg^2x=\frac{1}{\sin^2x}$ نتیجه میشود $\sin^2x=\frac{tg^2x}{1+tg^2x}$ پس رابطه فوق را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\frac{\sin^2x}{\sin^2a}=1-\frac{tg(a-b)}{tga}$$

$$\frac{\dfrac{tg^2x}{1+tg^2x}}{\dfrac{tg^2a}{1+tg^2a}}=\frac{tga-\dfrac{tga-tgb}{1+tgatgb}}{tga}$$

$$\frac{tg^2x(1+tg^2a)}{tg^2a(1+tg^2x)}=\frac{tga+tg^2atgb-tga+tgb}{tga(1+tgatgb)}$$

$$\frac{tg^2x(1+tg^2a)}{tg^2a(1+tg^2x)}=\frac{tgb(1+tg^2a)}{tga(1+tgatgb)}$$

$$\frac{tg^2x}{tga(1+tg^2x)}=\frac{tgb}{1+tgatgb}$$

اگر دو طرف تساوی را در tga ضرب نمائیم نتیجه می‌شود:

$$\frac{tg^2x}{1+tg^2x}=\frac{tgatgb}{1+tgatgb}$$

اگر درهریك از نسبت‌ها تفضیل نسبت در مخرج شود نتیجه‌میشود:

$$\frac{tg^2x}{1+tg^2x-tg^2x}=\frac{tgatgb}{1+tgatgb-tgatgb}\Longrightarrow tg^2x=tgatgb$$

مسئله ۴۷ـ اگر $tg\alpha$ و $tg\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $x^2+px+q=0$ باشند، ثابت‌کنید:

$$\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)=q$$

حل:

$$tg\alpha+tg\beta=x'+x''=\frac{-b}{a}=-p$$

$$tg\alpha tg\beta=x'x''=\frac{c}{a}=q$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}=\frac{-P}{1-q}$$

اگر رابطه مساله را بر $cos^2(\alpha+\beta)$ تقسیم کنیم نتیجه میشود :

$$\frac{sin^2(\alpha+\beta)}{cos^2(\alpha+\beta)}+\frac{p\,sin(\alpha+\beta)cos(\alpha+\beta)}{cos^2(\alpha+\beta)}+q=\frac{q}{cos^2(\alpha+\beta)}$$

$$tg^2(\alpha+\beta)+p\,tg(\alpha+\beta)+q=q[1+tg^2(\alpha+\beta)]$$

حال بجای $(\alpha+\beta)tg$ مساویش را قرار میدهیم.

$$\left(\frac{-p}{1-q}\right)^2+p\left(\frac{-p}{1-q}\right)+q=q\left[1+\left(\frac{-p}{1-q}\right)^2\right]$$

$$\frac{p^2}{(1-q)^2}-\frac{p^2}{1-q}+q=q+\frac{p^2q}{(1-q)^2}$$

$$\frac{p^2q}{(1-q)^2}+q=q+\frac{p^2q}{(1-q)^2}$$

چون تساوی برقرارشد پس حکم ثابت است.

درستی روابط زیر را تحقیق کنید:

۵۶۰ـ ۴۹ ـ $\quad Arc\,sin\frac{3}{5}+Arc\,sin\frac{4}{5}=\frac{\pi}{2}$

حل :

$$\begin{cases}Arc\,sin\,\frac{3}{5}=\alpha\\ sin\alpha=\frac{3}{5}\end{cases}\qquad\begin{cases}Arc\,sin\,\frac{4}{5}=\beta\\ sin\beta=\frac{4}{5}\end{cases}$$

حال باید ثابت‌کنیم $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ یا $\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta$

قاعده

برای حل این نوع مسائل باید ازدو طرف تساوی که بر حسب α و β و... بدست میآید sin یا cos یا tg یا... گرفت و سپس آنرا بسط داد وچون یکی از خطوط مثلثاتی α و β ..معلوم میباشد میتوان خطوط مثلثاتی دیگر آنها را که در بسط آنها میباشد بدست آورد وسپس بجای هریك ازآنها در تساوی که از بسط بدست آمده قرار داد اگرحاصل دوطرف این تساوی برابر شد رابطه بر قرار است.

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}\Longrightarrow\alpha=\frac{\pi}{۲}-\beta\Longrightarrow\sin\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{۲}-\beta\right)$$

$$\sin\alpha=\cos\beta\Longrightarrow\sin\alpha=\sqrt{۱-\sin^۲\beta}$$

$$\frac{۳}{۵}=\sqrt{۱-\frac{۱۶}{۲۵}}\Longrightarrow\frac{۳}{۵}=\sqrt{\frac{۹}{۲۵}}\Longrightarrow\frac{۳}{۵}=\frac{۳}{۵}\ .$$

۵۶۱ ك ۵۰- $\quad \mathrm{Arctg}\,\frac{۱}{۲}+\mathrm{Arctg}\frac{۱}{۳}=\frac{\pi}{۴}$

حل:

$$\mathrm{Arctg}\,\frac{۱}{۲}=\alpha\Longrightarrow tg\alpha=\frac{۱}{۲}$$

$$\mathrm{Arctg}\frac{۱}{۳}=\beta\Longrightarrow tg\beta=\frac{۱}{۳}$$

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{۴}$ رابطه مساله $\Longrightarrow tg(\alpha+\beta)=tg\frac{\pi}{۴}$

$$\frac{tg\alpha+tg\beta}{۱-tg\alpha\, tg\beta}=۱\Longrightarrow\frac{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}}{۱-\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}}=۱\Longrightarrow\frac{\frac{۵}{۶}}{\frac{۵}{۶}}=۱\Longrightarrow۱=۱$$

۵۶۲ ك ۵۱- $\quad \mathrm{Arctg}(\sqrt{۲}+۱)-\mathrm{Arctg}(-\sqrt{۲}-۱)=\frac{۳\pi}{۴}$

حل:

$$\operatorname{Arctg}(\sqrt{2}+1)=\alpha \Longrightarrow tg\alpha=\sqrt{2}+1$$

$$\operatorname{Arctg}(-\sqrt{2}-1)=\beta \Longrightarrow tg\beta=-\sqrt{2}-1$$

$$\alpha-\beta=\frac{3\pi}{4}\ \text{رابطهٔ مسئله} \Longrightarrow tg(\alpha-\beta)=tg\frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\, tg\beta}=-1 \qquad \frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}+1}{1+(\sqrt{2}+1)(-\sqrt{2}-1)}=-1$$

۵۶۳ ـ ک ۴۲ ـ

$$\operatorname{Arcsin}\frac{2ab}{a^2+b^2}+\operatorname{Arcsin}\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\frac{\pi}{2}$$

حل :

$$\operatorname{Arcsin}\frac{2ab}{a^2+b^2}=\alpha \Longrightarrow \sin\alpha=\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

$$\operatorname{Arcsin}\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\beta \Longrightarrow \sin\beta=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$\alpha+\beta=90^\circ\ \text{رابطه مسأله} \Longrightarrow \alpha=90^\circ-\beta$$

$$\sin\alpha=\sin(90^\circ-\beta)=\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}$$

$$\frac{2ab}{a^2+b^2}=\sqrt{1-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2}=\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

۵۶۴ ـ ک ۴۳ ـ

$$\operatorname{Arctg}\frac{a+b}{a-b}-\operatorname{Arctg}\frac{b+a}{b-a}=\operatorname{Arctg}\frac{b^2-a^2}{2ab}$$

حل :

$$\operatorname{Arctg}\frac{a+b}{a-b}=\alpha \Longrightarrow tg\alpha=\frac{a+b}{a-b}$$

$$\operatorname{Arctg}\frac{b+a}{b-a}=\beta \Longrightarrow tg\beta=\frac{b+a}{b-a}$$

$$\operatorname{Arctg}\frac{b^2-a^2}{2ab}=\gamma \Longrightarrow tg\gamma=\frac{b^2-a^2}{2ab}$$

$$\alpha-\beta=\gamma\ \text{رابطهٔ مسأله} \Longrightarrow tg(\alpha-\beta)=tg\gamma$$

اگر در این رابطه بجای $tg\alpha$ و $tg\beta$ و $tg\gamma$ مساویشان را قرار دهیم می‌بینیم که تساوی برقرار است.

$$\frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\, tg\beta} = tg\gamma$$

معادلات زیر را حل کنید

۵۶۵ ك ۵۴ $\quad tg(y - \frac{\pi}{3}) = cotg\, y$

حل : $\quad tg(y - \frac{\pi}{3}) = tg(\frac{\pi}{2} - y)$

$$y - \frac{\pi}{3} = K\pi + \frac{\pi}{2} - y \Longrightarrow y = \frac{K\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}$$

۵۶۶ ك ۵۵ م $\quad sin(y + \frac{\pi}{4}) - cos(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}) = 0$

حل: $\quad sin(y + \frac{\pi}{4}) - sin\frac{y}{2} = 0 \Longrightarrow sin(y + \frac{\pi}{4}) = sin\frac{y}{2}$

$$y + \frac{\pi}{4} = 2K\pi + \frac{y}{2} \qquad y = 4K\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$y + \frac{\pi}{4} = 2K\pi + \pi - \frac{y}{2} \qquad y = \frac{4K\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$$

۵۶۷ ك ۵۶ م $\quad 2cos(x + \frac{\pi}{4})\, cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1$

حل : $\quad 2(cos x\, cos\frac{\pi}{4} - sin x\, sin\frac{\pi}{4})(cos x\, cos\frac{\pi}{4} + sin x\, sin\frac{\pi}{4}) = 1$

$$2(cos^2 x\, cos^2\frac{\pi}{4} - sin^2 x\, sin^2\frac{\pi}{4}) = 1$$

$$cos^2 x - sin^2 x = 1 \Longrightarrow cos^2 x - (1 - cos^2 x) = 1$$

$$2cos^2 x = 2 \Longrightarrow cos^2 x = 1 \Longrightarrow cos x = \pm 1$$

$$cos x = 1 = cos 0 \Longrightarrow x = 2K\pi$$

$$cos x = -1 = cos\pi \Longrightarrow x = 2K\pi \pm \pi$$

۵۶۸ ك ۵۷ - $\quad 2sin^2(x + \frac{\pi}{8}) = 1$

حل:
$$\sin^2(x+\frac{\pi}{8})=\frac{1}{2}\Longrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{8})=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{8})=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}\Longrightarrow x=2K\pi+\frac{\pi}{8} \text{ و } 2K\pi+\frac{5\pi}{8}$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{8})=-\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin(\frac{-\pi}{4})\Longrightarrow x=2K\pi-\frac{3\pi}{8} \text{ و } 2K\pi+\frac{9\pi}{8}$$

۵۶۹ ک ۵۸ -
$$2tgz+tg(\frac{\pi}{4}-z)=2$$

$$2tgz+\frac{tg45^\circ-tgz}{1+tg45^\circ tgz}=2\Longrightarrow 2tgz+\frac{1-tgz}{1+tgz}=2$$

$$2tg^2z-tgz-2=0$$

$$tgz=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{6}=\frac{1\pm5}{6}=1 \text{ و } \frac{-2}{3}$$

$$tgz=1=tg45^\circ\Longrightarrow z=K\pi+45^\circ$$

$$tgz=-\frac{2}{3}=-tg\alpha=tg(-\alpha)\Longrightarrow z=K\pi-\mathrm{Arctg}(\frac{2}{3})$$

۵۷۰ ک ۵۹ -
$$tg^2x=tg(x+\frac{\pi}{6})\,tg(x-\frac{\pi}{6})$$

حل:
$$tg^2x=\frac{tgx+tg30^\circ}{1-tgx\,tg30^\circ}\times\frac{tgx-tg30^\circ}{1+tgx\,tg30^\circ}$$

$$tg^2x=\frac{tg^2x-tg^230^\circ}{1-tg^2x\,tg^230^\circ}\Longrightarrow tg^2x=\frac{tg^2x-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}tg^2x}$$

$$tg^2x=\frac{3tg^2x-1}{3-tg^2x}\Longrightarrow\begin{cases}3tg^2x-tg^4x=3tg^2x-1\\ tg^4x=1\Longrightarrow tgx=\pm1\end{cases}$$

$$tgx=1=tg45^\circ\Longrightarrow x=K\pi+45^\circ$$

$$tgx=-1=tg(-45^\circ)\Longrightarrow x=K\pi-45^\circ$$

۵۷۱ ک ۶۰ -
$$\sin(x+30^\circ)\sin(x-30^\circ)=\frac{1}{4}$$

حل: $(\sin x\cos 30 + \sin 30\cos x)(\sin x\cos 30 - \sin 30\cos x) = \frac{1}{4}$

$$\sin^2 x\cos^2 30 - \sin^2 30\cos^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\frac{3\sin^2 x}{4} - \frac{\cos^2 x}{4} - \frac{1}{4} = 0 \Longrightarrow \frac{3\sin^2 x - \cos^2 x - 1}{4} = 0$$

$$3\sin^2 x - (1 - \sin^2 x) - 1 = 0$$

$$4\sin^2 x = 2 \Longrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Longrightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(\pm\frac{\pi}{4})$$

$x = 2K\pi \pm \frac{\pi}{4}$ و $x = 2K\pi + \pi \pm \frac{\pi}{4}$

۷۵۲ ك ۶۱ ـ ثابت کنید که عبارت زیر بستگی به x و y ندارد:

$$A = \cos^2(x+y) + \cos^2(x-y) - \cos 2x\cos 2y$$

$$A = (\cos x\cos y - \sin x\sin y)^2 + (\cos x\cos y + \sin x\sin y^2) - \cos(x+x)\cos(y+y)$$

$$A = 2\cos^2 x\cos^2 y + 2\sin^2 x\sin^2 y - (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 y - \sin^2 y)$$

$$A = 2\cos^2 x\cos^2 y + 2\sin^2 x\sin^2 y - \cos^2 x\cos^2 y + \cos^2 x\sin^2 y + \sin^2 x\cos^2 y - \sin^2 x\sin^2 y$$

$$A = \cos^2 x\cos^2 y + \sin^2 x\sin^2 y + \sin^2 x\cos^2 y + \cos^2 x\sin^2 y$$

$$A = \cos^2 x(\cos^2 y + \sin^2 y) + \sin^2 x(\sin^2 y + \cos^2 y)$$

مقادیر داخل پرانتزها برابر یك هستند پس.

$$A = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

۵۷۳ ك ۶۲ ـ ثابت کنید که هریك ازدو رابطهٔ زیر را می‌توان ازدیگری بدست آورد:

$\sin(2x+y) = 5\sin y$ (۱) و $2tg(x+y) = 3tg x$ (۲)

حل: از رابطه (۱) رابطه (۲) را بدست می‌آوریم:

$$\sin[(x+y)+x] = 5\sin[(x+y)-x]$$

$$\sin(x+y)\cos x + \sin x\cos(x+y) =$$

$$5[\sin(x+y)\cos x - \sin x\cos(x+y)]$$

و یا، $6\cos(x+y)\sin x = 4\cos x\sin(x+y)$.

اگر طرفین تساوی را بر $2\cos(x+y)\cos x$ تقسیم کنیم رابطه (۲) بدست می‌آید.

$$3tg x = 2tg(x+y)$$

۵۷۴ ك ۶۳ ـ $tg\alpha$ و k را بقسمی تعیین کنید که تساوی زیر به ازای جمیع مقادیر x برقرار باشد:

$$3\sin x + 4\cos x = k\sin(x+\alpha)$$

حل: $3\sin x + 4\cos x = K\sin x\cos\alpha + K\sin\alpha\cos x$

تساوی بالا وقتی برقرار است که ضریب $\sin x$ و $\cos x$ دوطرف تساوی باهم برابر باشند.

$$\begin{cases} 3 = K\cos\alpha \\ 4 = K\sin\alpha \end{cases} \xrightarrow[\text{دو رابطه}]{\text{از تقسیم}} \begin{cases} \dfrac{3}{4} = \operatorname{cotg}\alpha \Longrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

$$3 = K\cos\alpha \Longrightarrow 9 = K^2\cos^2\alpha \Longrightarrow K^2 = \frac{9}{\cos^2\alpha}$$

$$K^2 = 9(1+\operatorname{tg}^2\alpha) = 9(1+\frac{16}{9}) = 9(\frac{25}{9}) \Longrightarrow K = \pm 5$$

۵۷۵ ك ۶۴ـ ثابت کنید که اگر $x+y=\frac{\pi}{4}$ باشد ، رابطهٔ زیر برقرار است.

$$(1+\operatorname{tg}x)(1+\operatorname{tg}y) = 2$$

حل

$$x+y = 45^\circ \Longrightarrow \operatorname{tg}(x+y) = \operatorname{tg}45^\circ$$

$$\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y} = 1 \Longrightarrow \operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y = 1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y$$

$$1+\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y = 2$$

$$1+\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y(1+\operatorname{tg}x) = 2$$

$$(1+\operatorname{tg}x)(1+\operatorname{tg}y) = 2$$

۵۷۶ ك ۶۵ـ اگر $x+y+a+b=\pi$ و $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin a}{\sin b}$ باشد ثابت کنید ،

$$\operatorname{cotg}x - \operatorname{cotg}y = \operatorname{cotg}a - \operatorname{cotg}b$$

حل: (۱)

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin a}{\sin b} \Longrightarrow \sin x\sin b = \sin y\sin a \qquad (1)$$

$$x+b = \pi-(y+a) \qquad \sin(x+b) = \sin(y+a)$$

$$\boxed{\sin x\cos b+\cos x\sin b = \sin y\cos a+\sin a\cos y} \qquad (2)$$

حال اگر طرفین رابطه (۲) را برطرفین رابطه (۱) تقسیم کنیم داریم :

$$\frac{\sin x\cos b}{\sin x\sin b} + \frac{\cos x\sin b}{\sin b\sin x} = \frac{\sin y\cos a}{\sin y\sin a} + \frac{\sin a\cos y}{\sin y\sin a}$$

$$\operatorname{cotg}b+\operatorname{cotg}x = \operatorname{cotg}a+\operatorname{cotg}y$$

$$\operatorname{cotg}x-\operatorname{cotg}y = \operatorname{cotg}a-\operatorname{cotg}b$$

۵۷۷ ك ۶۶ ـ اگر $a+b+c=\frac{\pi}{2}$ باشد ثابت کنید که:

$$tg\,a\,tg\,b+tg\,b\,tg\,c+tg\,c\,tg\,a=1 \qquad (1)$$

$$cotg\,a+cotg\,b+cotg\,c=cotg\,a\,cotg\,b\,cotg\,c \qquad (2)$$

حل:

$$a+b=90^\circ-c \Longrightarrow tg(a+b)=tg(90^\circ-c) \qquad (1)$$

$$\frac{tg\,a+tg\,b}{1-tg\,a\,tg\,b}=cotg\,c \Longrightarrow \frac{tg\,a+tg\,b}{1-tg\,a\,tg\,b}=\frac{1}{tg\,c}$$

$$tg\,a\,tg\,c+tg\,b\,tg\,c=1-tg\,a\,tg\,b$$

$$tg\,a\,tg\,c+tg\,b\,tg\,c+tg\,a\,tg\,b=1$$

برای اثبات رابطه (۲)

$$\frac{1}{cotg\,a\,cotg\,c}+\frac{1}{cotg\,b\,cotg\,c}+\frac{1}{cotg\,a\,cotg\,b}=1$$

$$\frac{cotg\,b+cotg\,a+cotg\,c}{cotg\,a\,cotg\,b\,cotg\,c}=1$$

$$cotg\,b+cotg\,a+cotg\,c=cotg\,a\,cotg\,b\,cotg\,c$$

۵۷۸ ك ۶۷ ـ اگر $a+b=c$ باشد ثابت کنید:

$$\cos^2 a+\cos^2 b-2\cos a\cos b\cos c=\sin^2 c$$

حل:

$$a+b=c \Longrightarrow \sin(a+b)=\sin c$$

$$\sin a\cos b+\sin b\cos a=\sin c$$

$$(\sin a\cos b+\sin b\cos a)^2=\sin^2 c$$

$$\sin^2 a\cos^2 b+\sin^2 b\cos^2 a+2\sin a\sin b\cos a\cos b=\sin^2 c$$

$$(1-\cos^2 a)\cos^2 b+(1-\cos^2 b)\cos^2 a+2\sin a\sin b\cos a\cos b=\sin^2 c$$

$$\cos^2 b-\cos^2 a\cos^2 b+\cos^2 a-\cos^2 a\cos^2 b+2\sin a\sin b\cos a\cos b=\sin^2 c$$

$$\cos^2 a+\cos^2 b-2\cos^2 a\cos^2 b+2\sin a\sin b\cos a\cos b=\sin^2 c$$

$$\cos^2 a+\cos^2 b-2\cos a\cos b(\cos a\cos b-\sin a\sin b)=\sin^2 c$$

$$\cos^2 a+\cos^2 b-2\cos a\cos b\cos(a+b)=\sin^2 c$$

$$\cos^2 a+\cos^2 b-2\cos a\cos b\cos c=\sin^2 c$$

۵۷۹ ك ۶۸ ـ ثابت کنید که :

$$tg(a-b)+tg(b-c)+tg(c-a)=tg(a-b)tg(b-c)tg(c-a)$$

حل: میدانیم که :

$$(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$$

$$(a-b)+(b-c)=-(c-a)$$

$$tg[(a-b)+(b-c)]=-tg(c-a)$$

$$\frac{tg(a-b)+tg(b-c)}{1-tg(a-b)tg(b-c)}=-tg(c-a)$$

$$tg(a-b)+tg(b-c)=-tg(c-a)+tg(c-a)tg(a-b)tg(b-c)$$

$$tg(a-b)+tg(b-c)+tg(c-a)=tg(c-a)tg(a-b)tg(b-c)$$

حاصل عبارات زیر را بدست آورید :

۵۸۰ـ $\operatorname{Sec}\operatorname{Arc}\cos 0/5$

حل: $$\operatorname{Sec}\operatorname{Arc}\cos 0/5=\frac{1}{\cos\operatorname{Arc}\cos 0/5}=\frac{1}{0/5}=2$$

۵۸۱ـ $2\operatorname{cotg}\operatorname{Arc}tg 2$

حل: $$2\operatorname{cotg}\operatorname{Arc}tg 2=\frac{2}{tg\operatorname{Arc}tg 2}=\frac{2}{2}$$

۵۸۲ـ $\operatorname{cosec}^2\operatorname{Arc}\sin 2x$

حل: $$\frac{1}{\sin^2\operatorname{Arc}\sin 2x}=\frac{1}{(2x)^2}=\frac{1}{4x^2}$$

۵۸۳ـ $tg\operatorname{Arc}\cos x$

حل: $$tg\operatorname{Arc}\cos x=\frac{\sin\operatorname{Arc}\cos x}{\cos\operatorname{Arc}\cos x}$$

$$=\sqrt{\frac{1-\cos^2\operatorname{Arc}\cos x}{\cos\operatorname{Arc}\cos x}}=\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}$$

۵۸۴ـ $\cos\operatorname{Arc}\sin(-\frac{\sqrt{3}}{2})=$

حل: $$\cos\operatorname{Arc}\sin(-\frac{\sqrt{3}}{2})=\cos(-\operatorname{Arc}\sin\frac{\sqrt{3}}{2})=$$

$$=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

خود را امتحان کنید

درستی اتحادهای زیر را تحقیق کنید :

۵۸۵- $\dfrac{1+tg3a\,tga}{1-tg3a\,tga}=\dfrac{\cos 2a}{\cos 4a}$

۵۸۶- $\dfrac{1+tg2a\,cotg3a}{1-tg2a\,cotg3a}=\dfrac{\sin 5a}{\sin a}$

۵۸۷- $tg3x+tg2x+tgx=tg3x\,tg2x\,tgx$

۵۸۸- $cotg4x\,cotgx-cotg5x\,cotgx-cotg5x\,cotg4x=1$

۵۸۹- $1+tg4x\,tg2x=\dfrac{1}{\cos 4x}$

۵۹۰- $1-tg6x\,cotg3x=\dfrac{-1}{\cos 6x}$

فرمول خطوط مثلثاتی کمان $2a$ برحسب خطوط مثلثاتی کمان a

$$\boxed{\sin 2a=2\sin a\cos a}$$

مانند مثالهای زیر :

$\sin 4a=2\sin 2a\cos 2a$

$\sin 6a=2\sin 3a\cos 3a$ و $\sin 20^\circ=2\sin 10^\circ\cos 10^\circ$

$\sin 8a=2\sin 4a\cos 4a$ و $\sin 70^\circ=2\sin 35^\circ\cos 35^\circ$

$$\sin 5a = 2\sin\frac{5a}{2}\cos\frac{5a}{2} \quad \text{و} \quad \sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \\ \cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \quad \text{و} \quad \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a \end{array}}$$

مانند مثالهای زیر :

$$\begin{cases} \cos 4a = \cos^2 2a - \sin^2 2a \\ \cos 4a = 2\cos^2 2a - 1 \quad \text{و} \quad \cos 4a = 1 - 2\sin^2 2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 6a = \cos^2 3a - \sin^2 3a \\ \cos 6a = 2\cos^2 3a - 1 \quad \text{و} \quad \cos 6a = 1 - 2\sin^2 3a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 10x = \cos^2 5x - \sin^2 5x \\ \cos 10x = 2\cos^2 5x - 1 \quad \text{و} \quad \cos 10x = 1 - 2\sin^2 5x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 5x = \cos^2\frac{5x}{2} - \sin^2\frac{5x}{2} \\ \cos 5x = 2\cos^2\frac{5x}{2} - 1 \quad \text{و} \quad \cos 5x = 1 - 2\sin^2\frac{5x}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} \\ \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 \quad \text{و} \quad \cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} \end{cases}$$

فرمول خطوط مثلثاتی یك قوس برحسب tg نصف آن قوس

$$\sin 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} \quad \text{و} \quad \cos 2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} \quad \text{و} \quad cotg 2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{2tg\alpha}$$

مانند مثالهای زیر

$$\begin{cases} \sin 20^\circ = \dfrac{2tg10^\circ}{1+tg^2 10^\circ} \quad \text{و} \quad \cos 20 = \dfrac{1-tg^2 10^\circ}{1+tg^2 10^\circ} \\[2ex] tg20^\circ = \dfrac{2tg10^\circ}{1-tg^2 10^\circ} \quad \text{و} \quad cotg20^\circ = \dfrac{1-tg^2 10^\circ}{2tg10^\circ} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 4a = \dfrac{2tg2a}{1+tg^2 2a} \quad \text{و} \quad \cos 4a = \dfrac{1-tg^2 2a}{1+tg^2 2a} \\[2ex] tg4a = \dfrac{2tg2a}{1-tg^2 2a} \quad \text{و} \quad cotg4a = \dfrac{1-tg^2 2a}{2tg2a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 6a = \dfrac{2tg3a}{1+tg^2 3a} \quad \text{و} \quad \cos 6a = \dfrac{1-tg^2 3a}{1+tg^2 3a} \\[2ex] tg6a = \dfrac{2tg3a}{1-tg^2 3a} \quad \text{و} \quad cotg6a = \dfrac{1-tg^2 3a}{2tg3a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 10a = \dfrac{2tg5a}{1+tg^2 5a} \text{ و } \cos 10a = \dfrac{1-tg^2 5a}{1+tg^2 5a} \\ tg 10a = \dfrac{2tg5a}{1-tg^2 5a} \text{ و } cotg 10a = \dfrac{1-tg^2 5a}{2tg5a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 3a = \dfrac{2tg\frac{3a}{2}}{1+tg^2\frac{3a}{2}} \text{ و } \cos 3a = \dfrac{1-tg^2\frac{3a}{2}}{1+tg^2\frac{3a}{2}} \\ tg 3a = \dfrac{2tg\frac{3a}{2}}{1-tg^2\frac{3a}{2}} \text{ و } cotg 3a = \dfrac{1-tg^2\frac{3a}{2}}{2tg\frac{3a}{2}} \end{cases}$$

حل مسائل صفحه ۱۰۳ کتاب درسی

۱۹۹ك۱ـ درصورتیکه $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ و α کمانی حاده باشد مطلوبست خطوط مثلثاتی کمان 2α

حل: ابتداء $\cos\alpha$ وسپس $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ را بدست میآوریم وبعد $tg 2\alpha$ و $cotg 2\alpha$ را محاسبه میکنیم.

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{12}{13}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \times \frac{5}{13} \times \frac{12}{13} = \frac{120}{169}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{144}{169} - \frac{25}{169} = \frac{119}{169}$$

$$tg\,2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{120}{169}\div\frac{119}{169}=\frac{120}{119} \text{ و } cotg\,2\alpha=\frac{119}{120}$$

۵۹۲ ک ۴ـ اگر $tg\alpha=\frac{1}{2}$ باشد ، مطلوبست محاسبه $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ و $tg\,2\alpha$

حل :

$$\sin 2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{2\times\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{4}{5}$$

$$\cos 2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{3}{5}$$

$$tg\,2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=\frac{4}{3}$$

۵۹۳ ک ۴ـ با استفاده از دستورهای:

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2} \text{ و } \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

خطوط مثلثاتی کمان ۲۲/۵ را حساب کنید.

حل :

$$\cos^2 22/5^\circ=\frac{1+\cos 45^\circ}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin^2 22/5=\frac{1-\cos 45}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$tg\,22/5=\frac{\sin 22/5}{\cos 22/4}=\sqrt{2}+1 \text{ و } cotg\,22/5=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

۵۹۴ ک ۴ـ درصورتی که $tg\alpha=-\frac{2}{3}$ باشد ، مطلوب است محاسبهٔ $tg\frac{\alpha}{2}$.

حل :

$$tg\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}=-\frac{2}{3}$$

$$2tg^2\frac{\alpha}{2}-6tg\frac{\alpha}{2}-2=0$$

$$tg\frac{a}{۲}=\frac{۳\pm\sqrt{۹+۴}}{۲}=\frac{۳\pm\sqrt{۱۳}}{۲}$$

۵۹۵ ك ۵ـ اگر $\sin x - \cos x = \frac{۱}{۵}$ باشد، خطوط‌مثلثاتی کمان $۲x$ را حساب کنید.

حل: طرفین تساوی $\sin x - \cos x = \frac{۱}{۵}$ را بقوه دومیرسانیم:

$$\sin^۲ x + \cos^۲ x - ۲\sin x\cos x = \frac{۱}{۲۵}$$

$$۱-۲\sin x\cos x=\frac{۱}{۲۵} \Longrightarrow ۲\sin x\cos x=\sin ۲x=۱-\frac{۱}{۲۵}=\frac{۲۴}{۲۵}$$

$$\cos ۲x=\sqrt{۱-\sin^۲ ۲x}=\sqrt{۱-(\frac{۲۴}{۲۵})^۲}=\frac{۷}{۲۵}$$

$$tg۲x=\frac{\sin ۲x}{\cos ۲x}=\frac{۲۴}{۷} \text{ و } cotg۲x=\frac{۷}{۲۴}$$

۵۹۶ ك ۶ ـ میدانیم که $\sin\alpha=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ و انتهای کمان α در ربع دوم است مطلوبست

محاسبه‌خطوط‌مثلثاتی ۲α

حل: ابتداء $\cos\alpha$ رامحاسبه می‌کنیم وپس از فرمولهای بالا استفاده می‌نمائیم:

$$\cos^۲\alpha=۱-\sin^۲\alpha=۱-\frac{۱}{۸}=\frac{۷}{۸}\Longrightarrow\cos\alpha=\frac{-\sqrt{۷}}{۲\sqrt{۲}}=\frac{-\sqrt{۱۴}}{۴}$$

$$\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha=۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۴}\times\frac{-\sqrt{۱۴}}{۴}=-\frac{\sqrt{۷}}{۴}$$

$$\cos ۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha=۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴} \text{ و } tg۲\alpha=\frac{\sin ۲\alpha}{\cos ۲\alpha}=\frac{-\sqrt{۷}}{۳}$$

$$cotg۲\alpha=\frac{\cos ۲\alpha}{\sin ۲\alpha}=\frac{-۳\sqrt{۷}}{۷}$$

درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید:

۵۹۷- $\frac{۲}{tg x + cotg x} = \sin ۲x$

حل: $\text{طرف اول} = \frac{۲}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{۲}{\frac{\sin^۲ x + \cos^۲ x}{\cos x \sin x}}$ ،

$\text{طرف اول} = ۲\sin x \cos x = \sin ۲x$

۵۹۸- $\frac{۱}{\sin ۲x} - \frac{۱}{tg ۲x} = tg x$

حل: $\text{طرف چپ} = \frac{۱}{\sin ۲x} - \frac{۱}{tg ۲x} = \frac{۱}{\sin ۲x} - cotg ۲x =$

$\frac{۱}{\sin ۲x} - \frac{\cos ۲x}{\sin ۲x} = \frac{۱ - \cos ۲x}{\sin ۲x} = \frac{۲\sin^۲ x}{۲\sin x \cos x} = tg x$

$\sin^۲ a + \frac{۱}{۲}\cos ۲a = \frac{۱}{۲}$

حل: $\text{طرف اول} = \sin^۲ a + \frac{۱}{۲}(۱ - ۲\sin^۲ a) = \frac{۱}{۲}$

۵۹۹ ک ۹- ✓ $tg(\frac{\pi}{۴} + x) + tg(\frac{\pi}{۴} - x) = \frac{۲}{\cos ۲x}$

حل: $\text{طرف اول} = \frac{tg ۴۵^\circ + tg x}{۱ - tg ۴۵^\circ tg x} + \frac{tg ۴۵^\circ - tg x}{۱ + tg ۴۵^\circ tg x} =$

$= \frac{۱ + tg x}{۱ - tg x} + \frac{۱ - tg x}{۱ + tg x} =$

$\frac{(۱ + tg x)^۲ + (۱ - tg x)^۲}{۱ - tg^۲ x} = \frac{۲(۱ + tg^۲ x)}{۱ - tg^۲ x} = \frac{۲}{\cos ۲x}$

۶۰۰ ک ۱۰- $\frac{\sin ۲x}{\sin x} - \frac{\cos ۲x}{\cos x} = \frac{۱}{\cos x}$

حل: $\frac{\cos x \sin 2x - \cos 2x \sin x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin(2x - x)}{\sin x \cos x} =$ طرف اول

$= \frac{\sin x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\cos x}$

۶۰۱ ك ۱۱ - $tg\,2x - tg\,x = \frac{tg\,x}{\cos 2x}$

حل: $tg\,2x - tg\,x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} - \frac{\sin x}{\cos x} =$

$\frac{\sin 2x \cos x - \sin x \cos 2x}{\cos 2x \cos x} = \frac{\sin(2x - x)}{\cos 2x \cos x} = \frac{tg\,x}{\cos 2x}$

۶۰۲ ك ۱۲- $tg\,2x\, cotg\,x - tg\,x\, tg\,2x = 2$

حل: $tg\,2x\,(cotg\,x - tg\,x) = tg\,2x\,\left(\frac{1}{tg\,x} - tg\,x\right) =$ طرف چپ

$= \frac{2\,tg\,x}{1 - tg^2 x}\left(\frac{1 - tg^2 x}{tg\,x}\right) = 2$

۶۰۳ ك ۱۳- $\frac{1}{\sin 2x} \times \frac{1}{\cos 2x} = tg\,2x + cotg\,2x$

حل: $\frac{1}{\sin 2x \cos 2x} = \frac{\sin^2 2x + \cos^2 2x}{\sin 2x \cos 2x} =$ طرف اول

$\frac{\sin^2 2x}{\sin 2x \cos 2x} + \frac{\cos^2 2x}{\sin 2x \cos 2x} = tg\,2x + cotg\,2x =$ طرف اول

فرمول خطوط مثلثاتی یك قوس بر حسب کسینوس دو برابر همان قوس

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \quad \text{و} \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \\ tg^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a} \quad \text{و} \quad cotg^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{1 - \cos 2a} \end{array}}$$

مانند مثالهای زیر :

$$\begin{cases} \cos^2 2x = \dfrac{1+\cos 4x}{2} \text{ و } \sin^2 2x = \dfrac{1-\cos 4x}{2} \\ tg^2 2x = \dfrac{1-\cos 4x}{1+\cos 4x} \text{ و } cotg^2 2x = \dfrac{1+\cos 4x}{1-\cos 4x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^2 3x = \dfrac{1+\cos 6x}{2} \text{ و } \sin^2 3x = \dfrac{1-\cos 6x}{2} \\ tg^2 3x = \dfrac{1-\cos 6x}{1+\cos 6x} \text{ و } cotg^2 3x = \dfrac{1+\cos 6x}{1-\cos 6x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{2} \text{ و } \cos^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1+\cos x}{2} \\ tg^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x} \text{ و } cotg^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1+\cos x}{1-\cos x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^2 15^\circ = \dfrac{1+\cos 30^\circ}{2} \text{ و } \sin^2 15^\circ = \dfrac{1-\cos 30^\circ}{2} \\ tg^2 15^\circ = \dfrac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ} \text{ و } cotg^2 15^\circ = \dfrac{1+\cos 30}{1-\cos 30} \end{cases}$$

$$\cos^2 22/5^\circ = \dfrac{1+\cos 45^\circ}{2} \text{ و } \sin^2 22/5 = \dfrac{1-\cos 45^\circ}{2}$$

درستی اتحادهای زیر را تحقیق کنید:

۶۰۴ ك ۱۴- $\cos^2(a+b)+\cos^2(a-b)-\cos 2a\cos 2b=1$

$$\frac{1+\cos(2a+2b)}{2}+\frac{1+\cos(2a-2b)}{2}-\cos 2a\cos 2b$$

$$=\frac{2+\cos(2a+2b)+\cos(2a-2b)-2\cos 2a\cos 2b}{2}$$

$$=\frac{2+2\cos 2a\cos 2b-2\cos 2a\cos 2b}{2}=\frac{2}{2}=1$$

۶۰۵ ك ۱۵- $\dfrac{\sin 2a-tg a\cos 2a}{\cos 2a+tg a\sin 2a}=tg a$

حل : $\text{سمت چپ}=\dfrac{\sin 2a-\dfrac{\sin a}{\cos a}\times\cos 2a}{\cos 2a+\dfrac{\sin a}{\cos a}\times\sin 2a}$

$$\frac{\dfrac{\sin 2a\cos a-\sin a\cos 2a}{\cos a}}{\dfrac{\cos 2a\cos a+\sin a\sin 2a}{\cos a}}=\frac{\sin 2a\cos a-\sin a\cos 2a}{\cos 2a\cos a+\sin a\sin 2a}$$

$$=\frac{\sin(2a-a)}{\cos(2a-a)}=\frac{\sin a}{\cos a}=tg a$$

۶۰۶ ك ۲۹- $2(\cos^2 2a-\sin^2 a)=\cos 2a+\cos 4a$

حل : $2\left(\dfrac{1+\cos 4a}{2}-\dfrac{1-\cos 2a}{2}\right)=1+\cos 4a-1+\cos 2a$

$\text{طرف اول}=\cos 4a+\cos 2a$

تذکر بقیه مسائل کتاب درسی درصفحه (۱۵۴) حل‌شد. است.

۶۰۷- با معلوم بودن $\cos 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ **خطوط مثلثاتی ۷٫۵ را بدست آورید.**

$$\cos^2 7/5^\circ=\frac{1+\cos 15^\circ}{2}=\frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}$$

$$\cos 7/5^\circ=\frac{\sqrt{8+2\sqrt{6}+2\sqrt{2}}}{4}$$

$$\sin^2 7/5^\circ = \frac{1-\cos 15^\circ}{2} = \frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$$

$$\sin 7/5^\circ = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}}{4}$$

$$tg\, 7/5 = \frac{\sin 7/5^\circ}{\cos 7/5} = \sqrt{\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}}$$

۶۰۸- اگر $\cos 18^\circ = a$ باشد خطوط مثلثاتی کمان ۹۹° را بدست آورید.

۶۰۹- اگر $\sin 18^\circ = b$ باشد خطوط مثلثاتی ۳۶° را بدست آورید.

۶۱۰- طول ضلع هشت ضلعی منتظم محاطی در دایرهٔ به شعاع R ، برابر است با $c_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ؛ با استفاده از این دستور ، خطوط مثلثاتی کمان ۱۱/۲۵° را حساب کنید .

۶۱۱- طول ضلع ده ضلعی منتظمی محاطی در دایرهٔ به شعاع R برابر است با $c_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$. با استفاده از این دستور ، خطوط مثلثاتی کمان ۱۸۹° را حساب کنید .

۶۱۲- طول ضلع دوازده ضلعی منتظم محاطی در دایرهٔ به شعاع R ، برابر است با $C_{12} = \frac{R}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$. با استفاده از این دستور . خطوط مثلثاتی کمان ۲۷۷/۵° را حساب کنید .

فرمولهای خطوط مثلثاتی کمان ۳a برحسب خطوط مثلثاتی کمان a

$$\boxed{\begin{aligned} \sin 3a &= 3\sin a - 4\sin^3 a \\ \cos 3a &= 4\cos^3 a - 3\cos a \\ tg\, 3a &= \frac{3tg\, a - tg^3 a}{1-3tg^2 a} \end{aligned}}$$

مانند مثالهای زیر :

$$\begin{cases} \sin 6a = 3\sin 2a - 4\sin^3 2a \quad \text{و} \quad \cos 6a = 4\cos^3 2a - 3\cos 2a \\ tg\,6a = \dfrac{3tg\,2a - tg^3 2a}{1 - 3tg^2 2a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 15^\circ = 3\sin 5^\circ - 4\sin^3 5^\circ \quad \text{و} \quad \cos 15^\circ = 4\cos^3 5^\circ - 3\cos 5^\circ \\ tg\,15^\circ = \dfrac{3tg\,5^\circ - tg^3 5^\circ}{1 - 3tg^2 5^\circ} \end{cases}$$

درستی اتحادهای زیر را تحقیق کنید:

۶۱۳-ک۱۶- $4\sin a \sin(\frac{\pi}{3} + a)\sin(\frac{\pi}{3} - a) = \sin 3a$

حل: $4\sin a(\sin 60^\circ \cos a + \sin a \cos 60^\circ)(\sin 60^\circ \cos a - \sin a \cos 60^\circ)$

$= 4\sin a(\sin^2 60^\circ \cos^2 a - \sin^2 a \cos^2 60^\circ)$

$= 4\sin a(\frac{3}{4}\cos^2 a - \frac{1}{4}\sin^2 a) = \sin a(3\cos^2 a - \sin^2 a)$

$= \sin a(3 - 3\sin^2 a - \sin^2 a) = 3\sin a - 4\sin^3 a = \sin 3a$

۶۱۴-ک۱۷- $4\cos a \cos(\frac{\pi}{3} + a)\cos(\frac{\pi}{3} - a) = \cos 3a$

حل:

$4\cos a(\cos 60^\circ \cos a - \sin 60^\circ \sin a)(\cos 60^\circ \cos a + \sin 60^\circ \sin a)$

$4\cos a(\cos^2 60^\circ \cos^2 a - \sin^2 60^\circ \sin^2 a)$

$= 4\cos a(\frac{1}{4}\cos^2 a - \frac{3}{4}\sin^2 a) = \cos a(\cos^2 a - 3\sin^2 a)$

$= \cos a(\cos^2 a - 3 + 3\cos^2 a) = 4\cos^3 a - 3\cos a = \cos 3a$

۶۱۵-ک۱۸- $tg\,a\,tg(\frac{\pi}{3} + a)\,tg(\frac{\pi}{3} - a) = tg\,3a$

حل:

$$\text{طرف اول}=tg a\left[\frac{tg\frac{\pi}{3}+tg a}{1-tg\frac{\pi}{3}\times tg a}\right]\left[\frac{tg\frac{\pi}{3}-tg a}{1+tg\frac{\pi}{3}tg a}\right]$$

$$=tg a\left(\frac{\sqrt{3}+tg a}{1-\sqrt{3}tg a}\right)\left(\frac{\sqrt{3}-tg a}{1+\sqrt{3}tg a}\right)=$$

$$=tg a\left(\frac{3-tg^2 a}{1-3tg^2 a}\right)=\frac{3tg a-tg^3 a}{1-3tg^2 a}=tg 3a$$

۶۱۶-۱۹ک-

$$\frac{\sin x}{1-\cos x}=cotg\frac{x}{2}$$

حل:

$$\text{سمت‌چپ}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}=cotg\frac{x}{2}$$

۶۱۷-۲۰ک-

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}=2tg\frac{x}{2}$$

حل:

$$\text{سمت چپ}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}+\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$=tg\frac{x}{2}+tg\frac{x}{2}=2tg\frac{x}{2}$$

۶۱۸-۲۱ک-

$$\frac{\sin x-tg\frac{x}{2}}{\cos x}=tg\frac{x}{2}$$

حل : بجای $\sin x$ و $\cos x$ برحسب $tg\frac{x}{2}$ قرارمیدهیم:

$$\frac{\dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}-tg\frac{x}{2}}{\dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}}=\frac{tg\frac{x}{2}\left[\dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}\right]}{\dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}}$$

طرف اول $=tg\frac{x}{2}$

۲۲۵ ک ۶۱۹- ط $\frac{\cos x}{1+\sin x}=tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$

حل: سمت چپ $=\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

اگر صورت ومخرج کسر را بر $\cos^2\frac{x}{2}$ تقسیم کنیم نتیجه میشود:

$$=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}+2tg\frac{x}{2}}=\frac{\left(1-tg\frac{x}{2}\right)\left(1+tg\frac{x}{2}\right)}{\left(1+tg\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{tg\frac{\pi}{4}-tg\frac{x}{2}}{1+tg\frac{\pi}{4}tg\frac{x}{2}}=tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$$

۲۲۴ ک ۶۲۰- $\frac{1-\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=2tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$

حل- $\dfrac{1-\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}=\dfrac{2\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}=\dfrac{2\cos x}{1+\sin x}$

$$=\frac{2\times\dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}}{1+\dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}}=\frac{\dfrac{2(1-tg^2\frac{x}{2})}{(1+tg^2\frac{x}{2})}}{\dfrac{1+tg^2\frac{x}{2}+2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}}=$$

$$=\frac{2(1-tg^2\frac{x}{2})}{(1+tg\frac{x}{2})^2}=\frac{2(1-tg\frac{x}{2})}{1+tg\frac{x}{2}}$$

$$\frac{2\times(tg\frac{\pi}{4}-tg\frac{x}{2})}{1+tg\frac{\pi}{4}\,tg\frac{x}{2}}=2tg(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})$$

۶۲۱ ک ۲۴- $tg(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})+cotg(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})=\frac{2}{\cos x}$

حل: $\dfrac{tg\frac{\pi}{4}-tg\frac{x}{2}}{1+tg\frac{\pi}{4}\,tg\frac{x}{2}}+\dfrac{1+tg\frac{\pi}{4}\,tg\frac{x}{2}}{tg\frac{\pi}{4}-tg\frac{x}{2}}$

$$\frac{(1-tg\frac{x}{2})^2+(1+tg\frac{x}{2})^2}{1-tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2(1+tg^2\frac{x}{2})}{1-tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2}{\cos x}$$

۶۲۲ ک ۲۵- $tg2a-tga=\dfrac{2\sin a}{\cos a+\cos 2a}$

حل: $\dfrac{\sin 2a}{\cos 2a}-\dfrac{\sin a}{\cos a}=\dfrac{\sin 2a\cos a-\sin a\cos 2a}{\cos 2a\cos a}$ = سمت چپ

$$\frac{\sin(2a-a)}{\cos 2a\cos a}=\frac{\sin a}{(2\cos^2 a-1)\cos a}=$$

$$\frac{\sin a}{2\cos^2 a-\cos a}=\frac{2\sin a}{4\cos^2 a-2\cos a}=$$

$$\frac{2\sin a}{(4\cos^2 a-2\cos a)+\cos a}=\frac{2\sin a}{\cos 2a+\cos a}$$

۲۶ک۶۲۳ـ

$$\frac{3\cos x+\cos 3x}{3\sin x-\sin 3x}=\operatorname{cotg}^3 x$$

$$\text{سمت چپ}=\frac{3\cos x+(4\cos^3 x-3\cos x)}{3\sin x-(3\sin x-4\sin^3 x)}=$$

$$=\frac{3\cos x+4\cos^3 x-3\cos x}{3\sin x-3\sin x+4\sin^3 x}=\frac{4\cos^3 x}{4\sin^3 x}=\operatorname{cotg}^3 x$$

۲۷ک۶۲۴ـ

$$\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}=2$$

حل :

$$\frac{\sin 3x\cos x-\cos 3x\sin x}{\sin x\cos x}=\frac{\sin(3x-x)}{\frac{1}{2}\sin 2x}=2$$

۲۸ک۶۲۵ـ

$$\operatorname{tg}2a+\frac{1}{\cos 2a}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+a\right)$$

حل :

$$\frac{\sin 2a}{\cos 2a}+\frac{1}{\cos 2a}=\frac{1+\sin 2a}{\cos 2a}=\frac{1+2\sin a\cos a}{\cos^2 a-\sin^2 a}$$

صورت و مخرج کسر اخیر را بر $\cos^2 a$ تقسیم‌میکنیم :

$$=\frac{1+\operatorname{tg}^2 a+2\operatorname{tg}a}{1-\operatorname{tg}^2 a}=\frac{(1+\operatorname{tg}a)^2}{(1-\operatorname{tg}a)(1+\operatorname{tg}a)}$$

$$=\frac{1+\operatorname{tg}a}{1-\operatorname{tg}a}=\frac{\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}a}{1-\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}a}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+a\right)$$

تذکر: مسأله ۲۹ کتاب درسی درصفحه (۱۵۲) حل شده است.

۳۰ک۶۲۶ـ

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}-\operatorname{tg}\frac{A}{2}=2\operatorname{cotg}A$$

حل:
$$\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}-\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{\cos A}{\frac{1}{2}\sin A}$$
$$=2\operatorname{cotg}A$$

۶۲۷ک ۳۱-
$$\cos A\left(\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

حل:
$$\cos A\left(\frac{\sin A}{\cos A}-\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\right)$$
$$=\frac{\cos A\left(\sin A\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\cos A\right)}{\cos A\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

۶۲۸ک ۳۲-
$$\sin a(\sin a+\sin 3a)=\cos a(\cos a-\cos 3a)$$

حل:
$$\sin a(\sin a+3\sin a-4\sin^3 a)=4\sin^2 a-4\sin^4 a$$
$$=4(1-\cos^2 a)-4(1-\cos^2 a)^2$$
$$=4-4\cos^2 a-4-4\cos^4 a+8\cos^2 a=4\cos^2 a-4\cos^4 a=$$
$$=\cos a(4\cos a-4\cos^3 a)=\cos a(\cos a+3\cos a-4\cos^3 a)$$
$$=\cos a\left[\cos a-(4\sin^3 a-3\cos a)\right]=\cos a(\cos a-\cos 3a)$$

۶۲۹ک ۳۳-
$$\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\times\frac{\cos x}{1+\cos x}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

حل:
$$\frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x}\times\frac{\cos x(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$$
$$=\frac{1-(1-2\sin^2\frac{x}{2})}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

۶۳۰ک ۳۴-
$$\sin 3x\sin^3 x+\cos 3x\cos^3 x=\cos^3 2x$$

حل :
$$(3\sin x-4\sin^3 x)\sin^3 x+(4\cos^3 x-3\cos x)\cos^3 x=$$
$$3\sin^4 x-4\sin^6 x+4\cos^6 x-3\cos^4 x=$$
$$4(\cos^6 x-\sin^6 x)-3(\cos^4 x-\sin^4 x)=$$
$$4(\cos^2 x-\sin^2 x)(\cos^4 x+\sin^4 x+\sin^2 x\cos^2 x)-3(\cos^2 x-\sin^2 x)(\cos^2 x+\sin^2 x)$$
$$=4\cos 2x\left[(\cos^2 x+\sin^2 x)^2-\sin^2 x\cos^2 x\right]-3\cos 2x$$
$$=\cos 2x(4-4\sin^2 x\cos^2 x-3)=\cos 2x(1-\sin^2 2x)=\cos^3 2x$$

۶۳۱ـك۳۵ـ
$$\frac{1-tg^2(\frac{\pi}{4}-a)}{1+tg^2(\frac{\pi}{4}-a)}=\sin 2a$$

حل، با استفاده از فرمول $\cos 2x=\dfrac{1-tg^2 x}{1+tg^2 x}$ می‌توان نوشت .

$$\text{طرف اول}=\cos(90-2a)=\sin 2a$$

معادلات زیر را حل کنید

۶۳۲ك۳۶ـ
$$\cos 2z+\cos z+1=0$$

حل :
$$2\cos^2 z-1+\cos z+1=0\Longrightarrow\cos z(2\cos z+1)=0$$
$$\cos z=0=\cos 90^\circ\Longrightarrow z=2k\pi\pm 90^\circ$$
$$2\cos z+1=0\Longrightarrow 2\cos z=-1$$
$$\cos z=\frac{-1}{2}=-\cos\frac{\pi}{3}=\cos\frac{2\pi}{3}\Longrightarrow z=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$$

۶۳۳ك۳۷ـ
$$2\cos 2x-4\sin x+1=0$$

حل :
$$2(1-2\sin^2 x)-4\sin x+1=0$$
$$2-4\sin^2 x-4\sin x+1=0\Longrightarrow 4\sin^2 x+4\sin x-3=0$$
$$\sin x=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{4}=\frac{-3}{2}\ \text{وغیرممکن}\ \frac{1}{2}=\sin 30^\circ$$
$$\sin x=\sin 30^\circ\Longrightarrow x=2k\pi+30^\circ\ \text{و}\ 2k\pi+150^\circ$$

۶۳۴-ک۳۸ $2\cos^2\frac{z}{2}=1-\cos 2z$

حل: $2\times\frac{1+\cos z}{2}=1-\cos 2z$

$1+\cos z=1-\cos 2z\Rightarrow\cos 2z=-\cos z=\cos(\pi-z)$

$2z=2k\pi+\pi-z\Rightarrow 3z=2k\pi+\pi\Rightarrow z=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{3}$

$2z=2k\pi-\pi+z\Rightarrow z=2k\pi-\pi$

۶۳۵-ک۳۹ $\sin^2 2x=4(\sin^2 x-1)$

حل: $(2\sin x\cos x)^2=4(\sin^2 x-1)$

$4\sin^2 x\cos^2 x=4(\sin^2 x-1)\Rightarrow\sin^2 x\cos^2 x=\sin^2 x-1$

$\sin^2 x\cos^2 x-\sin^2 x=-1\Rightarrow-\sin^2 x(-\cos^2 x+1)=-1$

$-\sin^4 x=-1\Rightarrow\sin^4 x=1\Rightarrow\sin x=\pm 1$

۶۳۶-ک۴۰ $\sin 2y-2\cos y=0$

حل: $2\sin y\cos y-2\cos y=0\Rightarrow 2\cos y(\sin y-1)=0$

$\cos y=0=\cos 90^\circ\Rightarrow y=2k\pi\pm 90^\circ$

$\sin y-1=0\Rightarrow\sin y=1=\sin 90^\circ\Rightarrow y=2k\pi+90^\circ$

۶۳۷-ک۴۱ $\cos(x-\frac{\pi}{4})+\sin(\pi-2x)=0$

حل: $\cos(x-45^\circ)+\sin 2x=0\Rightarrow\sin 2x=-\cos(x-45^\circ)$

$\sin 2x=-\sin(90^\circ-x+45^\circ)=-\sin(135-x)=\sin(x-135^\circ)$

$\sin 2x=\sin(x-135^\circ)\Rightarrow 2x=2K\pi+x-135^\circ\Rightarrow x=2K\pi-135^\circ$

$2x=2K\pi+\pi-x+135^\circ\Rightarrow 3x=2K\pi+315^\circ$

$x=\frac{2K\pi}{3}+105^\circ$

۶۳۸-ک۴۲ $\sin(\frac{3\pi}{2}+x)+\cos 3x=0$

حل: $-\cos x+\cos 3x=0\Rightarrow\cos 3x=\cos x$

$3x=2K\pi+x\Rightarrow 2x=2K\pi\Rightarrow x=K\pi$

$3x=2K\pi-x\Rightarrow 4x=2K\pi\Rightarrow x=\frac{K\pi}{2}$

۶۳۹ ك ۴۳ـ
$$2\sin x = \frac{1}{2\cos x}$$

حل :
$$4\sin x\cos x = 1 \Longrightarrow 2\sin 2x = 1$$
$$\sin 2x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Longrightarrow x = K\pi + \frac{\pi}{12} \text{ و } K\pi + \frac{5\pi}{12}$$

۶۴۰ ك ۴۴ـ
$$\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \cos 2x = \cos 30^\circ$$
$$2x = 2K\pi \pm 30^\circ \Longrightarrow x = K\pi \pm 15^\circ$$

۶۴۱ ك ۴۵ـ
$$tg 2x = tg x\, tg(x - 45^\circ)\, tg(x + 45^\circ)$$

حل :
$$\frac{2tg x}{1 - tg^2 x} = tg x \times \frac{tg x - tg 45^\circ}{1 + tg x\, tg 45^\circ} \times \frac{tg x + tg 45^\circ}{1 - tg x\, tg 45^\circ}$$
$$\frac{2tg x}{1 - tg^2 x} = tg x \times \frac{tg x - 1}{1 + tg x} \times \frac{tg x + 1}{1 - tg x}$$
$$\frac{2tg x}{1 - tg^2 x} = -tg x \Longrightarrow 2tg x = -tg x(1 - tg^2 x)$$
$$tg x(2 + 1 - tg^2 x) = 0 \Longrightarrow tg x(3 - tg^2 x) = 0$$
$$tg x = 0 = tg\, 0 \Longrightarrow x = K\pi$$
$$3 - tg^2 x = 0 \Longrightarrow tg^2 x = 3 \Longrightarrow tg x = \pm\sqrt{3}$$
$$tg x = \pm tg 60^\circ = tg(\pm 60^\circ) \Longrightarrow x = K\pi \pm 60^\circ$$

۶۴۲ ك ۴۶ـ
$$tg 2x + cotg 2x = 2$$

حل :
$$tg^2 2x + tg 2x\, cotg 2x = 2tg 2x$$
$$tg^2 2x - 2tg 2x + 1 = 0 \Longrightarrow (tg 2x - 1)^2 = 0$$
$$tg 2x - 1 = 0 \Longrightarrow tg 2x = 1 = tg\frac{\pi}{4} \Longrightarrow x = \frac{K\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

۶۴۳ ك ۴۷ـ اگر $\cos\alpha = \frac{a}{b+c}$ و $\cos\beta = \frac{b}{c+a}$ و $\cos\gamma = \frac{c}{a+b}$ باشد

ثابت کنید $tg^2\frac{\alpha}{2} + tg^2\frac{\beta}{2} + tg^2\frac{\gamma}{2} = 1$

حل : اگر بطرفین رابطه $\cos\alpha$ یك واحد اضافه و یك واحد کم کنیم نتیجه میشود.

$$\begin{cases} 1+\cos\alpha = 1+\dfrac{a}{b+c} \Longrightarrow 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{a+b+c}{b+c} \\ 1-\cos\alpha = 1-\dfrac{a}{b+c} \Longrightarrow 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{b+c-a}{b+c} \end{cases}$$

از تقسیم دورابطهٔ نتیجه میشود.

$$tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{b+c-a}{a+b+c}$$

هم چنین اعمال رادرباره $\cos\beta$ و $\cos\gamma$ انجام میدهیم که خواهیم داشت:

$$tg^2\frac{\beta}{2}=\frac{a+c-b}{a+b+c} \quad \text{و} \quad tg^2\frac{\gamma}{2}=\frac{a+b-c}{a+b+c}$$

پس

$$tg^2\frac{\alpha}{2}+tg^2\frac{\beta}{2}+tg^2\frac{\gamma}{2}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$$

۶۴۴ك۴۸- ثابت کنید $2\,\mathrm{Arc}\,cotg\dfrac{1}{2}-\mathrm{Arc}\,cotg\,2+\mathrm{Arc}\,cotg\dfrac{12}{9}=\dfrac{3\pi}{4}$

$$\begin{cases} \mathrm{Arc}\,cotg\dfrac{1}{2}=\alpha \\ cotg\,\alpha=\dfrac{1}{2} \\ tg\,\alpha=2 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathrm{Arc}\,cotg\,2=\beta \\ cotg\,\beta=2 \\ tg\,\beta=\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \mathrm{Arc}\,cotg\dfrac{12}{9}=\gamma \\ cotg\,\gamma=\dfrac{12}{9} \\ tg\,\gamma=\dfrac{9}{12} \end{cases}$$

$$tg\,2\alpha=\frac{2tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}=\frac{2\times 2}{1-4}=\frac{-4}{3}$$

حال باید ثابت کنید $2\alpha-\beta+\gamma=\dfrac{3\pi}{4}$ ویا

$$2\alpha-\beta=\frac{3\pi}{4}-\gamma=\pi-\frac{\pi}{4}-\gamma=\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\gamma\right)$$

$$tg(2\alpha-\beta)=tg[\pi-(\frac{\pi}{4}+\gamma)] = -tg(\frac{\pi}{4}+\gamma)$$

$$\frac{tg2\alpha-tg\beta}{1+tg2\alpha tg\beta}=-\frac{tg45^\circ+tg\gamma}{1-tg45^\circ tg\gamma}$$

$$\frac{-\frac{4}{3}-\frac{1}{2}}{1-\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}}=-\frac{1+\frac{9}{12}}{1-\frac{9}{12}} \Longrightarrow \frac{-\frac{11}{6}}{+\frac{2}{6}}=-\frac{\frac{22}{12}}{\frac{4}{12}}$$

۶۴۵ ك **۴۹**- اگر $\cos x=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ باشد، $\cos 4x$ را محاسبه نمائید واز آن، کمان حاده x را تعیین کنید.

حل:

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1$$

$$\cos 2x=2\times(\frac{\sqrt{5}-1}{4})^2-1=2\times\frac{5+1-2\sqrt{5}}{16}-1$$

$$\cos 2x=\frac{12-4\sqrt{5}-16}{16}=\frac{-4\sqrt{5}-4}{16}=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$\cos 4x=2\cos^2 2x-1=2\,(-\frac{\sqrt{5}+1}{4})^2-1$$

$$\cos 4x=2\,(\frac{5+1+2\sqrt{5}}{16})-1=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

از اینجا نتیجه میگیریم $\cos 4x=\cos x$

$$4x=2K\pi\pm x \Longrightarrow x=\frac{2K\pi}{3} \text{ و } \frac{2K\pi}{5}$$

۶۴۶ ك **۵۰**- از رابطه $(1+a\cos x)(1-a\cos y)=1-a^2$ رابطه زیر رانتیجه

نتیجه بگیرید $tg^2\frac{x}{2}\div tg^2\frac{y}{2}=\frac{1+a}{1-a}$

۶۴۷ ك **۵۱**- $tg x$ را حساب کنید در صورتیکه $4\sin 2x+3\cos 2x=3$ باشد.

حل:

$$4\sin 2x=3-3\cos 2x$$

$$8\sin x\cos x=3(1-\cos 2x)\Longrightarrow 8\sin x\cos x=6\sin^2 x$$

$$۴\cos x = ۲\sin x \Longrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{۴}{۲} \Longrightarrow tg\,x = \frac{۴}{۲}$$

۵۲۶۴۸ـ اگر $\sin x = \frac{a-b}{a+b}$، باشد مطلوبست محاسبه $tg^۲\left(\frac{\pi}{۴} - \frac{x}{۲}\right)$

حل: با استفاده از فرمول $tg^۲ A = \frac{۱-\cos ۲A}{۱+\cos ۲x}$ نتیجه میشود

$$tg^۲\left(\frac{\pi}{۴} - \frac{x}{۲}\right) = \frac{۱-\cos(۹۰^\circ - x)}{۱+\cos(۹۰^\circ - x)} = \frac{۱-\sin x}{۱+\sin x}$$

$$tg^۲\left(\frac{\pi}{۴} - \frac{x}{۲}\right) = \frac{۱-\frac{a-b}{a+b}}{۱+\frac{a-b}{a+b}} = \frac{a+b-a+b}{a+b+a-b} = \frac{b}{a}$$

درستی تساویهای زیر را تحقیق کنید:

۵۲۶۴۹ـ $۴\,Arc\,tg\frac{۱}{۵} - Arc\,tg\frac{۱}{۲۳۹} = \frac{\pi}{۴}$

حل:
$$\begin{cases} Arc\,tg\frac{۱}{۵} = \alpha \\ tg\alpha = \frac{۱}{۵} \end{cases} \quad و \quad \begin{cases} Arc\,tg\frac{۱}{۲۳۹} = \beta \\ tg\beta = \frac{۱}{۲۳۹} \end{cases}$$

$$tg۲\alpha = \frac{۲tg\alpha}{۱-tg^۲\alpha} = \frac{\frac{۲}{۵}}{۱-\frac{۱}{۲۵}} = \frac{\frac{۲}{۵}}{\frac{۲۴}{۲۵}} = \frac{۵}{۱۲}$$

$$tg۴\alpha = \frac{۲tg۲\alpha}{۱-tg^۲۲\alpha} = \frac{\frac{۵}{۶}}{۱-\frac{۲۵}{۱۴۴}} = \frac{\frac{۵}{۶}}{\frac{۱۱۹}{۱۴۴}} = \frac{۱۲۰}{۱۱۹}$$

حال باید ثابت کنیم $۴\alpha - \beta = \frac{\pi}{۴}$

$$۴\alpha = ۴۵^\circ + \beta \Longrightarrow tg۴\alpha = tg(۴۵^\circ + \beta)$$

$$\frac{۱۲۰}{۱۱۹}=\frac{\frac{۱}{۲۳۹}+۱}{۱-\frac{۱}{۲۳۹}}=\frac{۲۴۰}{۲۳۸}=\frac{۱۲۰}{۱۱۹}$$

۶۵۰ک۵۴ـ

$$۲\,\mathrm{Arctg}\,\frac{۱}{۲}+\mathrm{Arctg}\,۲+\mathrm{Arctg}\,\frac{۹}{۱۳}=\frac{\pi}{۴}$$

$$\begin{cases}\mathrm{Arctg}\,\dfrac{۱}{۲}=\alpha\\[2ex] tg\alpha=\dfrac{۱}{۲}\end{cases}\quad \begin{cases}\mathrm{Arctg}\,۲=\beta\\ tg\beta=۲\end{cases}\ \text{و}\quad \begin{cases}\mathrm{Arctg}\,\dfrac{۹}{۱۳}=\gamma\\[2ex] tg\gamma=\dfrac{۹}{۱۳}\end{cases}$$

$$tg۲\alpha=\frac{۲tg\alpha}{۱-tg^{۲}\alpha}=\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۴}}=\frac{۴}{۳}$$

حال باید ثابت کنیم

$$۲\alpha+\beta+\gamma=۴۵^{\circ}$$

حل مسائل متفرقه

یادآوری چند فرمول:

$$\sin 2x = \frac{2\,tg\,x}{1+tg^2 x}$$ مثال $$\sin x = \frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$ و $$\sin 4x = \frac{2\,tg\,2x}{1+tg^2 2x}$$

$$\cos 2x = \frac{1-tg^2 x}{1+tg^2 x}$$ مثال $$\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$ و $$\cos 4x = \frac{1-tg^2 2x}{1+tg^2 2x}$$

قاعده — راه‌حل معادلاتیکه بصورت $a\sin x + b\cos x = c$ می‌باشند اینست که بجای سینوس و کسینوس برحسب تانژانت نصف قوس قرارداده سپس مخرج مشترك گرفته‌وطرفین‌وسطین می‌کنیم بعد تمام جملات را بیك‌طرف‌آورده وخلاصه‌می‌کنیم. معادله درجه دومی از جنس تانژانت نصف قوس بدست می‌آیدکه آنرا حل می‌کنیم.

تذکر: شرط اینکه‌این‌نوع‌معادلات‌دارای جواب‌باشداینستکه $a^2+b^2 \geqslant c^2$ باشد.

۶۵۱- $\text{۴}\sin\text{۲}x+\text{۳}\cos\text{۲}x=\text{۳}$

حل : $\text{۴}\times\dfrac{\text{۲}tgx}{\text{۱}+tg^{\text{۲}}x}+\text{۳}\times\dfrac{\text{۱}-tg^{\text{۲}}x}{\text{۱}+tg^{\text{۲}}x}=\text{۳}\Longrightarrow \text{۶}tg^{\text{۲}}x-\text{۸}tgx=\text{۰}$

$$\text{۲}tgx(\text{۳}tgx-\text{۴})=\text{۰}\Longrightarrow tgx=\text{۰}\Longrightarrow x=K\pi$$

$$\text{۳}tgx-\text{۴}=\text{۰}\Longrightarrow tgx=\frac{\text{۴}}{\text{۳}}=tg\alpha\Longrightarrow x=K\pi+\alpha$$

$$x=K\pi+Arctg\frac{\text{۴}}{\text{۳}}$$

۶۵۲- $\text{۳}\cos x+\text{۲}\sin x=\text{۲}$

حل: $\dfrac{\text{۳}\left(\text{۱}-tg^{\text{۲}}\frac{x}{\text{۲}}\right)}{\text{۱}+tg^{\text{۲}}\frac{x}{\text{۲}}}+\dfrac{\text{۲}\left(\text{۲}tg\frac{x}{\text{۲}}\right)}{\text{۱}+tg^{\text{۲}}\frac{x}{\text{۲}}}=\text{۲}$

$$\text{۵}tg^{\text{۲}}\frac{x}{\text{۲}}-\text{۴}tg\frac{x}{\text{۲}}-\text{۱}=\text{۰}$$

$$tg\frac{x}{\text{۲}}=\text{۱}\ \text{و}\ tg\frac{x}{\text{۲}}=-\frac{\text{۱}}{\text{۵}}\Longrightarrow tg\frac{x}{\text{۲}}=\text{۱}=tg\frac{\pi}{\text{۴}}\Longrightarrow x=\text{۲}K\pi+\frac{\pi}{\text{۲}}$$

$$tg\frac{x}{\text{۲}}=-\frac{\text{۱}}{\text{۵}}=-tg\alpha=tg(-\alpha)\Longrightarrow x=\text{۲}K\pi-\text{۲}\alpha$$

۶۵۳- $\sin\dfrac{x}{\text{۲}}+\text{۲}\cos\dfrac{x}{\text{۲}}=\dfrac{\text{۳}}{\sqrt{\text{۲}}}$

حل: $\dfrac{\text{۲}tg\frac{x}{\text{۴}}}{\text{۱}+tg^{\text{۲}}\frac{x}{\text{۴}}}+\dfrac{\text{۲}\left(\text{۱}-tg^{\text{۲}}\frac{x}{\text{۴}}\right)}{\text{۱}+tg^{\text{۲}}\frac{x}{\text{۴}}}=\dfrac{\text{۳}}{\sqrt{\text{۲}}}$

$$(\text{۳}+\text{۲}\sqrt{\text{۲}})tg^{\text{۲}}\frac{x}{\text{۴}}-\text{۲}\sqrt{\text{۲}}tg\frac{x}{\text{۴}}+\text{۳}-\text{۲}\sqrt{\text{۲}}=\text{۰}$$

$$tg\frac{x}{\text{۴}}=\sqrt{\text{۲}}-\text{۱}\ \text{و}\ \sqrt{\text{۲}}+\text{۱}\Longrightarrow tg\frac{x}{\text{۴}}=\sqrt{\text{۲}}-\text{۱}=tg\frac{\pi}{\text{۸}}$$

$$x=\text{۴}K\pi+\text{۹۰}^{\circ}$$

$$tg\frac{x}{2}=\sqrt{3}+1=0$$

۶۵۴- $(2+\sqrt{3})\sin x+2(2-\sqrt{3})\cos x=\frac{7}{2}$

حل:

$$\frac{2(2+\sqrt{3})tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}+\frac{2(2-\sqrt{3})(1-tg^2\frac{x}{2})}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{7}{2}$$

$$(15-4\sqrt{3})tg^2\frac{x}{2}-4(2+\sqrt{3})tg\frac{x}{2}+4\sqrt{3}-1=0$$

$$tg\frac{x}{2}=\frac{12-\sqrt{3}}{15-4\sqrt{3}} \text{ و } \frac{5\sqrt{3}-4}{15-4\sqrt{3}}$$

لطفاً خودتان گویا کنید و x را محاسبه نمائید.

این چهار فرمول را بخاطر بسپارید :

$$\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\sin b\cos a$$

$$\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\sin a\sin b$$

مثال :

$$\sin 30^\circ\cos x+\sin x\cos 30^\circ=\sin(30^\circ+x)$$

$$\sin 60^\circ\cos x+\sin x\cos 60^\circ=\sin(60^\circ+x)$$

$$\cos x\cos 45^\circ+\sin x\sin 45^\circ=\cos(x-45^\circ)$$

$$\sin 2x\cos 45^\circ-\sin 45^\circ\cos 2x=\sin(2x-45^\circ)$$

$$\sin 3x\cos 4x-\sin 4x\cos 3x=\sin(3x-4x)=\sin(-x)=-\sin x$$

$$\cos 3x\cos x-\sin 3x\sin x=\cos(3x+x)=\cos 4x$$

$$\sin 4x\sin 2x+\cos 4x\cos 2x=\cos(4x-2x)=\cos 2x$$

$$\sin 5x\sin 2x-\cos 5x\cos 2x=-(\cos 5x\cos 2x-\sin 5x\sin 2x)$$

$$=-\cos(5x+2x)=-\cos 7x$$

قاعده

اگر در معادله $a\sin x+b\cos x=c$ مقدار $\frac{a}{b}$ یا $\frac{b}{a}$ مساوی تانژانت زاویه معلومی باشد (یعنی مساوی: $tg\frac{\pi}{4}$ و $tg\frac{\pi}{3}$ و $tg\frac{\pi}{6}$ و $tg\frac{\pi}{12}$ و $tg\frac{\pi}{8}$ باشد). راه حل اینست که جملات دوطرف معادله را بر a یا b تقسیم نموده (یعنی عملی انجام دهیم که ضریب سینوس یا کسینوس برابر یك شود) وسپس بجای $\frac{b}{a}$ یا $\frac{a}{b}$ تانژانت زاویه معلوم را قرار می‌دهیم وبعد بجای تانژانت، مساویش $\frac{\text{سینوس}}{\text{کسینوس}}$ را قرار داده طرفین را درکسینوس آن زاویه ضرب می‌کنیم پس‌از ساده‌کردن معادله درجه اولی از جنس سینوس یا کسینوس بدست میآید که آنرا حل می‌کنیم.

تذکر ـ شرط اینکه این نوع معادلات دارای جواب‌باشند اینست که $a^2+b^2\geqslant c^2$ باشد بنا براین قبل ازحل معادله این شرط را تحقیق می‌نمائیم واگر این شرط برقرارباشد معادله را حل‌می‌کنیم.

۶۵۵ـ $\sin x-\sqrt{3}\cos x=1$

حل: $\sin x-tg60^\circ\cos x=1\Longrightarrow\sin x-\frac{\sin60^\circ}{\cos60^\circ}\cos x=1$

$\sin x\cos60^\circ-\sin60^\circ\cos x=\cos60^\circ\Longrightarrow\sin(x-60^\circ)=\cos60^\circ=\sin30^\circ$

$x=2K\pi+90^\circ$ و $2K\pi+210^\circ$

۶۵۶ـ $\sin2x+\sqrt{3}\cos2x=2$

حل: $\sin2x+tg60\cdot\cos2x=2\Longrightarrow\sin2x+\frac{\sin60^\circ\cos2x}{\cos60^\circ}=2$

$\sin2x\cos60^\circ+\sin60^\circ\cos2x=2\cos60^\circ\Longrightarrow\sin(2x+60^\circ)=2\cos60^\circ$

$\sin(2x+60)=2\times\frac{1}{2}=1\Longrightarrow x=K\pi+15^\circ$

۶۵۷- $(\sqrt{۳}+۱)\sin(x+۷/۵^\circ)+\cos(x+۷/۵^\circ)=-۱$

حل: $tg۶۷/۵^\circ\sin(x+۷/۵^\circ)+\cos(x+۷/۵^\circ)=-۱$

$\sin۶۷/۵^\circ\sin(x+۷/۵^\circ)+\cos(x+۷/۵^\circ)\cos۶۷/۵^\circ=-\cos۶۷/۵^\circ$

$\cos(۶۷/۵^\circ-x-۷/۵^\circ)=-\cos۶۷/۵^\circ\Longrightarrow\cos(۶۰^\circ-x)=\cos۱۱۲/۵^\circ$

$x=-۲K\pi-۵۲/۵^\circ$ و $x=۱۷۲/۵^\circ-۲K\pi$

۶۵۸- $(۲-\sqrt{۳})\sin(۳۵+x)+\sin(۵۵^\circ-x)=۱$

حل: $tg۱۵^\circ\sin(۳۵+x)+\sin(۵۵^\circ-x)=۱$

$\frac{\sin۱۵^\circ\cos(۵۵^\circ-x)}{\cos۱۵^\circ}+\sin(۵۵^\circ-x)=۱$

$\sin۱۵^\circ\cos(۵۵^\circ-x)+\cos۱۵^\circ\sin(۵۵^\circ-x)=\cos۱۵^\circ$

$\sin(۷۰^\circ-x)=\cos۱۵^\circ=\sin۷۵^\circ\Longrightarrow x=-۲K\pi-۵^\circ$ و $-۲K\pi-۳۵^\circ$

۶۵۹- $(۲+\sqrt{۳})\sin(x+۱۵^\circ)+\cos(۱۶۵^\circ-x)=\sqrt{۶}+\sqrt{۲}$

حل: $tg۷۵^\circ\sin(x+۱۵^\circ)+\cos[۱۸۰-(۱۵+x)]=\sqrt{۶}+\sqrt{۲}$

$tg۷۵^\circ\sin(x+۱۵^\circ)-\cos(x+۱۵^\circ)=\sqrt{۶}+\sqrt{۲}$

$\sin۷۵^\circ\sin(x+۱۵^\circ)-\cos۷۵^\circ\cos(x+۱۵^\circ)=(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})\cos۷۵^\circ$

$-[\cos۷۵^\circ\cos(x+۱۵^\circ)-\sin۷۵^\circ\sin(x+۱۵^\circ)]=(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})\cos۷۵^\circ$

$-\cos(۹۰^\circ+x)=\sqrt{۶}+\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}=۱\Longrightarrow\sin x=۱$

$x=۲k\pi+۹۰^\circ$

۶۶۰- $۳\sin۲x+\sqrt{۳}\cos۲x=\sqrt{۶}$

حل: $\sin۲x+\frac{\sqrt{۳}}{۳}\cos۲x=\frac{\sqrt{۶}}{۳}\Longrightarrow\sin۲x+tg۳۰^\circ\cos۲x=\frac{\sqrt{۶}}{۳}$

$\sin۲x+\frac{\sin۳۰^\circ\cos۲x}{\cos۳۰^\circ}=\frac{\sqrt{۶}}{۳}$

$\sin۲x\cos۳۰^\circ+\sin۳۰^\circ\cos۲x=\frac{\sqrt{۶}}{۳}\cos۳۰^\circ$

$\sin(۲x+۳۰^\circ)=\frac{\sqrt{۶}}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin۴۵^\circ$

$x=k\pi+۵۲/۵^\circ$ و $k\pi+۷/۵^\circ$

۶۶۱- (تلو ۴۴) $\sqrt{۳}\sin۲x-۲\cos۲x=\sqrt{۶}$

حل :

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\sin 2x - \cos 2x = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$tg30^\circ \sin 2x - \cos 2x = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}\sin 2x - \cos 2x = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\sin 30^\circ \sin 2x - \cos 30^\circ \cos 2x = \frac{\sqrt{6}}{3}\cos 30^\circ$$

$$-(\cos 2x \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \sin 2x) = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-\cos(2x+30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos(2x+30^\circ) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(2x+30^\circ) = -\cos 45^\circ = \cos 135^\circ \Rightarrow x = k\pi + 52/5^\circ \text{ و } K\pi - 82/5^\circ$$

۶۶۳ـ خرداد ۱۳۴۰ ششم ریاضی

$$\sin x + \cos x = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

حل:

$$\sin x \cos x + \cos^2 x = 1 - \sin x \Rightarrow \sin x(\cos x + 1) + \cos^2 x - 1 = 0$$

$$(\cos x + 1)(\sin x + \cos x - 1) = 0 \Rightarrow \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -1$$

$$x = 2k\pi + \pi \text{ و } \sin x + \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x + \cos x = 1$$

پس مسئله دارای جوابست

$$a^2 + b^2 \geqslant c^2 \Rightarrow 1 + 1 \geqslant 1 \Rightarrow 2 > 1$$

$$\sqrt{2}\sin(45^\circ + x) = 1 \Rightarrow \sin(45^\circ + x) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ$$

$$x = 2k\pi \text{ و } 2K\pi + 90^\circ$$

۶۶۴ـ

$$\sin x + \cos x + tg x = \frac{1}{\cos x}$$

حل:

$$\sin x + \cos x + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \sin x \cos x + \cos^2 x + \sin x = 1$$

$$1 - \cos^2 x - \sin x \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin^2 x - \sin x \cos x - \sin x =$$

$$\sin x(\sin x - \cos x - 1) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$\sin x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{2}\sin(x - 45^\circ) = 1$$

$$\sin(x - 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ$$

$x=2k\pi+90^\circ$ و $x=2k\pi+\pi$

۶۶۴- $(\sin x+\cos x)^2-(1+\sqrt{2})(\sin x+\cos x)+\sqrt{2}=0$

حل : اگر $\cos x+\sin x=y$ فرض شود نتیجه میشود :

$$y^2-(1+\sqrt{2})y+\sqrt{2}=0 \Longrightarrow y=1 \text{ و } \sqrt{2}$$

$$\sin x+\cos x=1 \Longrightarrow \sin(x+45^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin 45^\circ$$

$$x=2k\pi \text{ و } x=2k\pi+90^\circ$$

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2} \Longrightarrow \sin(x+45^\circ)=1 \Longrightarrow x=2k\pi+45^\circ$$

۶۶۵- $\sin x+\cos x=\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$

جواب : $x=K\pi$ و $2k\pi+90^\circ$ $x=2k\pi+\pi$

۶۶۶- $\sin x+\cos x+tg x=\dfrac{1}{\cos x}$

جواب : $x=K\pi$ و $2K\pi+\pi$ و $2K\pi+90^\circ$

درس

$$\sin x+\cos x=y \Longrightarrow (\sin x+\cos x)^2=y^2$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=y^2 \Longrightarrow 1+2\sin x\cos x=y^2$$

$$2\sin x\cos x=y^2-1 \Longrightarrow \sin x\cos x=\frac{y^2-1}{2}$$

تذکر ۱: اگر $\sin x+\cos x=y$ باشد نتیجه میشود که $\sin x\cos x=\dfrac{y^2-1}{2}$

تذکر ۲: اگر $\sin x-\cos x=y$ باشدنتیجه میشود که $\sin x\cos x=\dfrac{1-y^2}{2}$

قاعده

راه حل معادلاتیکه بصورت

$a(\sin x+\cos x)+b\sin x\cos x=c$ میباشند اینست که $\sin x+\cos x$ را مساوی y فرض نموده و سپس در معادله بجای $\sin x+\cos x$ مساویش y و بجای $\sin x\cos x$ مساویش $\frac{y^2-1}{2}$ را قرار میدهیم . معادله درجه دومی از جنس y بدست میآید و حل می‌کنیم وسپس دررابطه $\sin x+\cos x=y$ بجای y ریشه‌های معادله فوق را قرار میدهیم ومعادله بدست آمده راحل می‌نمائیم .

قاعده

راه حل معادلاتی که بصورت

$a(\sin x-\cos x)+b\sin x\cos x=c$ میباشند اینست که $(\sin x-\cos x)$ را مساوی y فرض نموده وسپس درمعادله بجای $\sin x-\cos x$ مساویش y و بجای $\sin x\cos x$ مساویش $\frac{1-y^2}{2}$ را قرار داده و معادله درجه دومی ازجنس y بدست میآید آنرا حل می‌کنیم وسپس در رابطه $\sin x-\cos x=y$ بجای y ریشه‌های معادله فوق را قرار میدهیم ومعادله بدست آمده راحل می‌نمائیم.

معادلات زیررا حل کرده وجوابهای کلی آنها را بدست آورید

۶۶۷- $\sin x+\cos x-\sin x\cos x=1$

$$\sin x+\cos x=y\Longrightarrow\sin x\cos x=\frac{y^2-1}{2}$$

$$y-\frac{y^2-1}{2}=1\Longrightarrow y^2-2y+1=0\Longrightarrow y=1$$

$$\sin x+\cos x=y=1\Longrightarrow\sin(x+45^\circ)=\sin 45^\circ$$

$$x=2k\pi ,\ 2k\pi+90^\circ$$

۶۶۸- $\sin x-\cos x+2\sin x\cos x=\sqrt{2}-1$

حل:

$$\sin x-\cos x=y\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{1-y^2}{2}$$

$$y+2\times\frac{1-y^2}{2}=\sqrt{2}-1\Rightarrow y^2-y+\sqrt{2}-2=0$$

$$y=1-\sqrt{2} \text{ و } \sqrt{2}$$

$$\sin x-\cos x=1-\sqrt{2}\Rightarrow \sin(x-45^\circ)=(1-\sqrt{2})\cos 45^\circ$$

$$\sin(x-45^\circ)=\frac{\sqrt{2}-2}{2}=\sin\alpha\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{4}+\alpha$$

$$x=2k\pi+225^\circ-\alpha$$

$$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\Rightarrow \sin(x-45^\circ)=\sqrt{2}\cos 45^\circ$$

$$\sin(x-45^\circ)=1\Rightarrow x=2k\pi+135^\circ$$

۶۶۹-

$$(1-\sqrt{3})\sin x+2\sqrt{3}\sin 2x-(\sqrt{3}-1)\cos x=2$$

حل

$$(1-\sqrt{3})\sin x+4\sqrt{3}\sin x\cos x+(1-\sqrt{3})\cos x=2$$

$$(1-\sqrt{3})(\sin x+\cos x)+4\sqrt{3}\sin x\cos x=2$$

$$\sin x+\cos x=y\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{y^2-1}{2}$$

$$2\sqrt{3}y^2+(1-\sqrt{3})y-2\sqrt{3}-2=0\Rightarrow y=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ و } \frac{-2\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin x+\cos x=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ و } \sin x+\cos x=\frac{-2\sqrt{3}}{3}$$

$$x=2k\pi+30^\circ \text{ و } 2k\pi+60^\circ \text{ و } 2k\pi-45^\circ-\alpha \text{ و } 2k\pi+135^\circ+\alpha$$

۶۷۰-

$$(\cos x+\sin x)(tg\, x+cotg\, x)=\sqrt{3}$$

حل:

$$(\cos x+\sin x)\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\sqrt{3}\Rightarrow\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}=\sqrt{3}$$

$$\frac{2y}{y^2-1}=\sqrt{3}\Rightarrow\sqrt{3}y^2-2y-\sqrt{3}=0\Rightarrow y=\sqrt{3} \text{ و } -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin x+\cos x=\sqrt{3}\Rightarrow \sin(x+45^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$ غیر ممکن

$$\sin x+\cos x=\frac{-\sqrt{3}}{3}\Rightarrow \sin(x+45^\circ)=-\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\sin(x+۴۵^\circ)=-\sin a=\sin(-a)\Longrightarrow x=۲k\pi-۴۵^\circ-a$$
$$x=۲k\pi+۱۳۵^\circ+a$$

۶۷۱- ششم ریاضی (شهریور ۴۱) $\sin۲x-\cos۲x=۱-\sin۴x$

حل:
$$\sin۲x-\cos۲x=۱-۲\sin۲x\cos۲x$$
$$\sin۲x-\cos۲x+۲\sin۲x\cos۲x-۱=۰$$
$$\sin۲x-\cos۲x=y\Longrightarrow ۲\sin۲x\cos۲x=۱-y^۲$$
$$y^۲-y=۰\Longrightarrow y(y-۱)=۰\Longrightarrow y=۰ \text{ و } y=۱$$
$$\sin۲x-\cos۲x=۰\Longrightarrow tg۲x=۱\Longrightarrow x=K\times۹۰^\circ+۲۲/۵^\circ$$
$$\sin۲x-\cos۲x=۱\Longrightarrow\sqrt{۲}\sin(۲x-۴۵^\circ)=۱\Longrightarrow\sin(۲x-۴۵^\circ)=\sin۴۵^\circ$$
$$x=k\pi+۴۵^\circ \text{ و } x=k\pi+۹۰^\circ$$

۶۷۲- $\sin x\cos x+\frac{۲-\sqrt{۳}}{۴}\cos x=(۱+\sin x)\cos^۲x$

حل:
$$\cos x\sin x+\frac{۲-\sqrt{۳}}{۴}\cos x-(۱+\sin x)\cos^۲x=۰$$
$$\cos x(\sin x-\cos x-\sin x\cos x+\frac{۲-\sqrt{۳}}{۴})=۰$$
$$\cos x=۰=\cos۹۰^\circ\Longrightarrow x=۲k\pi\pm۹۰^\circ$$
$$\sin x-\cos x-\sin x\cos x+\frac{۲-\sqrt{۳}}{۴}=۰$$
$$۲y^۲+۴y-\sqrt{۳}=۰$$
$$\sin(x-۴۵^\circ)=\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴} \text{ و } \frac{-۲\sqrt{۲}-\sqrt{۶}}{۴} \text{غیر ممکن}$$
$$x=۲k\pi+۶۰^\circ \text{ و } x=۲k\pi+۲۱۰^\circ$$

۶۷۳- $\sin x+\cos x+tgx+cotgx+\frac{۱}{\sin x}+\frac{۱}{\cos x}=-۲$

حل:
$$\sin x+\cos x+\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{۱}{\sin x}+\frac{۱}{\cos x}+۲=۰$$
$$\frac{\sin^۲x\cos x+\cos^۲x\sin x+\sin^۲x+\cos^۲x+\cos x+\sin x+۲\sin x\cos x}{\sin x\cos x}=۰$$

$$\sin x\cos x(\sin x+\cos x)+(\sin x+\cos x)^2+\sin x+\cos x=0$$

$$(\sin x+\cos x)(\sin x\cos x+\sin x+\cos x+1)=0$$

$$\sin x+\cos x=0\Longrightarrow tg x=-1\Longrightarrow x=K\pi-45^\circ$$

$$\sin x\cos x+\sin x+\cos x+1=0\Longrightarrow\sin x(\cos x+1)+(\cos x+1)=0$$

$$(\cos x+1)(\sin x+1)=0\Longrightarrow\cos x+1=0\Longrightarrow\cos x=-1$$

$$x=2K\pi+\pi$$

$$\sin x+1=0\Longrightarrow\sin x=-1\Longrightarrow x=2k\pi-90^\circ$$

۶۷۴- $\sin x+\cos x=cotg x-tg x$

حل: $\sin x+\cos x=\dfrac{\cos x}{\sin x}-\dfrac{\sin x}{\cos x}\Longrightarrow\sin x+\cos x=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x\cos x}$

$$\sin x\cos x(\sin x+\cos x)-(\cos^2 x-\sin^2 x)=0$$

$$(\sin x+\cos x)(\sin x\cos x+\sin x-\cos x)=0\Longrightarrow\sin x+\cos x=0$$

$$tg x=-1\Longrightarrow x=k\pi-45^\circ\text{؛}\ \sin x-\cos x+\sin x\cos x=0$$

$$y+\frac{1-y^2}{2}=0\Longrightarrow y^2-2y-1=0\Longrightarrow y=1\pm\sqrt{2}$$

$$\sin x-\cos x=1-\sqrt{2}\Longrightarrow\sin(x-45^\circ)=\frac{\sqrt{2}-2}{2}=\sin\beta$$

$$x=2K\pi+\beta+45^\circ\text{؛}\ x=2K\pi+225^\circ-\beta$$

۶۷۵- $\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}=2\sqrt{2}$

حل: $\sin x+\cos x=y\Longrightarrow\sin x\cos x=\dfrac{y^2-1}{2}$

$$\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}=2\sqrt{2}\Longrightarrow\frac{2y}{y^2-1}=2\sqrt{2}\Longrightarrow\sqrt{2}y^2-y-\sqrt{2}=0$$

$$y=\sqrt{2}\text{ و }-\frac{\sqrt{2}}{2}\Longrightarrow\sin x+\cos x=\sqrt{2}\Longrightarrow\sqrt{2}\sin(x+45^\circ)=\sqrt{2}$$

$$\sin(x+45^\circ)=1\Longrightarrow x=2K\pi+45^\circ$$

$$\sin x+\cos x=\frac{-\sqrt{2}}{2}\Longrightarrow\sqrt{2}\sin(x+45^\circ)=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(x+45^\circ)=-\frac{1}{2}.$$

$\sin(x+۴۵^\circ)=-\sin ۳۰^\circ=\sin(-۳۰^\circ)\Longrightarrow x=۲K\pi-۷۵^\circ$ و $۲K\pi+۱۶۵$

-۶۷۶ $\sqrt{۲}\sin ۲x-\sqrt{۲}\cos ۲x+\sin ۴x=۱$

جواب $x=K\times ۹۰^\circ+۲۲/۵^\circ$ و $x=K\pi+۶۷/۵$

-۶۷۷ $۲\sin\frac{x}{۲}+۲\cos\frac{x}{۲}+\sin x=\sqrt{۲}+tg ۶۷/۵^\circ$

جواب $x=۴K\pi+۹۰^\circ$

-۶۷۸ $\sin^۲ x\cos x+\sin x\cos^۲ x+\sin x+\cos x+\sin ۲x+۱=۰$

جواب $x=K\pi-۴۵^\circ$ و $۲K\pi-۹۰^\circ$ و $۲K\pi+۱۸۰^\circ$

-۶۷۹ $\sqrt{۲}(\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲})+۲\sin x=۶\Longrightarrow x=۴K\pi+۹۰^\circ$

۶۸۰ $\cotg x-tg x+۲\sqrt{۲}(\sin x+\cos x)=۰$

جواب $x=۲K\pi+۱۳۵$ و $۲K\pi-۱۵^\circ$ و $۲K\pi-۱۰۵^\circ$

تذکر : فرمولهای مثلثاتی زیر را بخاطر بسپارید

$\cos ۲x=\cos^۲ x-\sin^۲ x$ و $\cos ۲x=۲\cos^۲ x-۱$ و $\cos ۲x=۱-۲\sin^۲ x$

$\sin ۲x=۲\sin x\cos x$ و $\cos ۳x=۴\cos^۳ x-۳\cos x$ و $\sin ۳x=۳\sin x-۴\sin^۳ x$

معادلات زیر را حل کرده وجوابهای کلی آنها رابدست آورید

۶۸۱ $\sin^۲ x+۲\cos ۲x=\frac{۱}{۲}$

حل : $\sin^۲ x+۲(۱-۲\sin^۲ x)=\frac{۱}{۲}\Longrightarrow \sin^۲ x=\frac{۱}{۲}\Longrightarrow \sin x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$\sin x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin ۴۵^\circ\Longrightarrow x=۲K\pi+۴۵^\circ$ و $x=۲K\pi+۱۳۵^\circ$

$\sin x=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}=-\sin ۴۵^\circ=\sin(-۴۵^\circ)$

$x=۲K\pi+۲۲۵^\circ$ و $۲K\pi-۴۵^\circ$

-۶۸۲ $\cos x-\sin x=\sqrt{۲}\cos ۲x$

-۶۸۳ $\cos ۳x+۲\cos x=۰$

حل :

$4\cos^3 x - 3\cos x + 2\cos x = 0 \Longrightarrow \cos x(4\cos^2 x - 1) = 0 \Longrightarrow \cos x = 0$

$x = K\pi + 90^\circ$ و $4\cos^2 x - 1 = 0 \Longrightarrow \cos x = \pm\frac{1}{2}$

$\cos x = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$

$x = 2K\pi \pm 60^\circ$ و $\cos x = -\frac{1}{2} = \cos 120^\circ \Longrightarrow x = 2K\pi \pm 120^\circ$

۶۸۳- $\cos 3x - 2\cos x + 1 = 0$

$4\cos^3 x - 3\cos x - 2\cos x + 1 = 0 \Longrightarrow 4\cos^3 x - 5\cos x + 1 = 0$

$4\cos^3 x - 4\cos x - \cos x + 1 = 0 \Longrightarrow 4\cos x(\cos^2 x - 1) - (\cos x - 1) = 0$

$(\cos x - 1)(4\cos^2 x + 4\cos x - 1) = 0 \Longrightarrow \cos x - 1 = 0$

$\cos x = 1 \Longrightarrow x = 2K\pi$

$4\cos^2 x + 4\cos x - 1 = 0$

$\cos x = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{-1-\sqrt{2}}{2}$ غیرممکن

$\cos x = \frac{\sqrt{2}-1}{2} = \cos a \Longrightarrow x = 2K\pi \pm a$

۶۸۴- $\sin 2x = 3\cos 3x + \cos x$

حل : $2\sin x\cos x = 3(4\cos^3 x - 3\cos x) + \cos x$

$2\sin x\cos x - 12\cos^3 x + 8\cos x = 0 \Longrightarrow 2\cos x(\sin x - 6\cos^2 x + 4) = 0$

$\cos x = 0 \Longrightarrow x = K\pi + 90^\circ \Longrightarrow \sin x - 6\cos^2 x + 4 = 0$

$6\sin^2 x + \sin x - 2 = 0 \Longrightarrow \sin x = \frac{1}{2} , \frac{-2}{3}$

$\sin x = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ \Longrightarrow x = 2K\pi + 30^\circ$ و $2K\pi + 150^\circ$

$\sin x = \frac{-2}{3} = -\sin a = \sin(-a) \Longrightarrow x = 2K\pi - a$ و $2K\pi + \pi + a$

۶۸۵- $2\cos\frac{x}{3} - \sin\frac{x}{2} = 2$

حل : برای حل این مسئله $\cos\frac{x}{3}$ را بر حسب نصف قوس و $\sin\frac{x}{2}$ را بر حسب ثلث قوس می نویسیم:

$$2\left(1-2\sin^2\frac{x}{6}\right)-\left(3\sin\frac{x}{6}-4\sin^3\frac{x}{6}\right)=2$$

$4\sin^3\frac{x}{6}-4\sin^2\frac{x}{6}-3\sin\frac{x}{6}=0$ نتیجه میشود $\sin\frac{x}{6}=y$ بفرض

$$4y^3-4y^2-3y=0\Longrightarrow y(4y^2-4y-3)=0$$

$y=0\Longrightarrow\sin\frac{x}{6}=0\Longrightarrow x=6K\pi$ یا $4y^2-4y-3=0$

$y=-\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{2}$ غیرممکن

$\sin\frac{x}{6}=-\frac{1}{2}=\sin(-30^\circ)\Longrightarrow x=12K\pi-\pi$ و $12K\pi+7\pi$

۶۸۶- (فنی تبریز ۴۵) $\quad$ [illegible] $=\sin 3x+3\sin x$

حل:

$$2(\cos x-4\cos^3x+3\cos x)=3\sin x-4\sin^3x+3\sin x$$

$$2(4\cos x-4\cos^3x)=6\sin x-4\sin^3x$$

$$8\cos x(1-\cos^2x)=2\sin x(3-2\sin^2x)$$

$$8\cos x\sin^2x-2\sin x(3-2\sin^2x)=0$$

$$2\sin x(4\cos x\sin x-3+2\sin^2x)=0\Longrightarrow\sin x=0\Longrightarrow x=K\pi$$

$4\sin x\cos x+2\sin^2x-3=0\Longrightarrow tg^2x-4tg\,x+3=0\Longrightarrow tg\,x=1$ و 3

$tg\,x=1\Longrightarrow x=K\pi+45^\circ$ و $tg\,x=3=tg\,a\Longrightarrow x=K\pi+a$

۶۸۷- $\quad 1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$

حل:

$$1+\cos x+2\cos^2x-1+4\cos^3x-3\cos x=0$$

$$2\cos^3x+\cos^2x-\cos x=0$$

$$\cos x(2\cos^2x+\cos x-1)=0\Longrightarrow\cos x=0\Longrightarrow x=K\pi+90^\circ$$

$2\cos^2x+\cos x-1=0\Longrightarrow\cos x=-1$ و $\frac{1}{2}\Longrightarrow\cos x=-1$

$$x=2K\pi+\pi$$

$$\cos x=\frac{1}{2}=\cos 60^\circ\Longrightarrow x=2K\pi\pm 60^\circ$$

۶۸۸ـ $2\sin 3x = 3\cos x + \cos 3x$

حل :

$$2(3\sin x - 4\sin^3 x) = 3\cos x + 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$3\sin x - 4\sin^3 x - 2\cos^3 x = 0 \Longrightarrow \frac{3\sin x}{\sin^3 x} - \frac{4\sin^3 x}{\sin^3 x} - \frac{2\cos^3 x}{\sin^3 x} = 0$$

$$3(1+\cot g^2 x) - 2\cot g^3 x - 4 = 0 \Longrightarrow 3\cot g^2 x - 2\cot g^3 x - 1 = 0$$

$$2\cot g^2 x - 2\cot g^3 x + \cot g^2 x - 1 = 0 \Longrightarrow 2\cot g^2 x(1-\cot g x) - (1-\cot g^2 x) = 0$$

$$(1-\cot g x)(2\cot g^2 x - 1 - \cot g x) = 0 \Longrightarrow 1 - \cot g x = 0 \Longrightarrow \cot g x = 1$$

$$x = K\pi + 45^\circ \text{ و } 2\cot g^2 x - \cot g x - 1 = 0 \Longrightarrow \cot g x = 1 \text{ و } -\frac{1}{2}$$

$$\cot g x = -\frac{1}{2} = -\cot g \alpha \Longrightarrow \cot g x = \cot g(-\alpha) \Longrightarrow x = K\pi - \alpha$$

۶۸۹ـ $\sin^4(45^\circ - x) - \sin^4(x+45^\circ) = \frac{1}{2}$

حل :

$$\cos^4(x+45^\circ) - \sin^4(x+45^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$[\cos^2(x+45^\circ) + \sin^2(x+45^\circ)][\cos^2(x+45^\circ) - \sin^2(x+45^\circ)] = \frac{1}{2}$$

$$\cos(2x+90^\circ) = \frac{1}{2} \Longrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} = \sin(-30^\circ)$$

$$x = K\pi - 15^\circ \text{ و } K\pi + 105^\circ$$

۶۹۰ـ $4\sin 2x - 2(\sqrt{5}-1)\cos x - 4\sin x + \sqrt{5} - 1 = 0$

حل:

$$8\sin x\cos x - 2(\sqrt{5}-1)\cos x - 4\sin x + \sqrt{5} - 1 = 0$$

$$4\sin x(2\cos x - 1) - (\sqrt{5}-1)(2\cos x - 1) = 0$$

$$(2\cos x - 1)(4\sin x - \sqrt{5} + 1) = 0 \Longrightarrow 2\cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ \Longrightarrow x = 2K\pi \pm 60^\circ \text{ و } 4\sin x - \sqrt{5} + 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \sin 18^\circ \Longrightarrow x = 2K\pi + 18^\circ \text{ و } 2K\pi + \pi - 18^\circ$$

۶۹۱ـ اردیبهشت ۴۱ $2\cos^2 x + \sin 2x = 2$

حل: $2\cos^2 x + 2\sin x\cos x = 2 \Longrightarrow \cos^2 x + \sin x \cos x = 1$

$1 + tg x = 1 + tg^2 x \Longrightarrow tg^2 x - tg x = 0 \Longrightarrow tg x (tg x - 1) = 0$

$tg x = 0 \Longrightarrow x = K\pi$ و $tg x - 1 = 0 \Longrightarrow tg x = 1 \Longrightarrow x = K\pi + 45^\circ$

۶۹۲ـ خرداد ۱۳۴۰ ششم ریاضی $\sin\frac{x}{2} + \cos x = 1$

حل: $\sin\frac{x}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} = 1 \Longrightarrow \sin\frac{x}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2} = 0$

$\sin\frac{x}{2}\left(1 - 2\sin\frac{x}{2}\right) = 0$

$\sin\frac{x}{2} = 0 \Longrightarrow x = 2K\pi$ و $1 - 2\sin\frac{x}{2} = 0 \Longrightarrow \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$

$x = 4K\pi + 60^\circ$ و $4K\pi + 300^\circ$

۶۹۳ـ ششم ریاضی شهریور ۱۳۳۸ $\frac{1}{\sin x} = cotg\frac{x}{2} + cotg x$

حل: $\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = cotg\frac{x}{2} \Longrightarrow \frac{1 - \cos x}{\sin x} = cotg\frac{x}{2}$

$$\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = cotg\frac{x}{2}$$

$tg\frac{x}{2} = cotg\frac{x}{2} = tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) \Longrightarrow x = K\pi + \frac{\pi}{2}$

۶۹۴ـ $\sin 2x + 2\cos x = 0$

جواب: $x = K\pi + 90^\circ$ و $2K\pi - 90^\circ$

۶۹۵ـ $\cos 4x + \cos 2x + 1 = 0$

جواب: $x = K180^\circ + 45^\circ$ و $K\pi \pm 60^\circ$

۶۹۶ $\cos 4x - \sqrt{3}\sin 4x - 1 = 0$

جواب: $x = \frac{K\pi}{2}$ و $\frac{2K\pi}{3} + 80^\circ$

۶۹۷ـ $\cos 4x + \sqrt{3}\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = 0$

جواب : $x=\frac{K\pi}{۲}-\frac{\pi}{۸}$ و $K\pi+\frac{۳\pi}{۸}$

۶۹۸- $\cos ۲x+\sin x-\cos x=۰$

جواب: $x=K\pi+۴۵^\circ$ و $۲K\pi$ و $۲K\pi+۹۰^\circ$

۶۹۹- $\cos ۶x-۴\cos ۳x-۳=۰$

جواب: $x=K\pi+۹۰^\circ$ و $K\pi\pm ۶۰^\circ$

۷۰۰- $tg x-cotg x=۴\cos ۲x$

جواب: $x=K\pi\pm ۴۵^\circ$ و $K\pi-۱۵^\circ$ و $K\pi+۱۰۵^\circ$

یاد آوری : $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$ و $a\sin x\cos x=\frac{a}{۲}\sin ۲x$

$a\sin^۲ x\cos^۲ x=\frac{a}{۴}\sin^۲ ۲x$

$a^۲+b^۲=(a+b)^۲-۲ab$ و $a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b)$

معادلات زیر را حل کنید :

۷۰۱- $\sin^۴ x+\cos^۴ x=\frac{۵}{۸}$

حل : $(\sin^۲ x+\cos^۲ x)^۲-۲\sin^۲ x\cos^۲ x=\frac{۵}{۸}\Longrightarrow ۱-\frac{۲}{۴}\sin^۲ ۲x=\frac{۵}{۸}$

$\sin^۲ ۲x=\frac{۳}{۴}\Longrightarrow \sin ۲x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Longrightarrow \sin ۲x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sin ۶۰^\circ$

$x=K\pi+۳۰^\circ$ و $K\pi+۶۰^\circ$

$\sin ۲x=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}=-\sin ۶۰^\circ=\sin(-۶۰^\circ)$

$x=K\pi-۳۰^\circ$ و $K\pi+۱۲۰^\circ$

۷۰۲- $\sin^۴ x+\cos^۴ x-\sin ۲x=-\frac{۱}{۲}$

حل : $(\sin^۲ x+\cos^۲ x)^۲-۲\sin^۲ x\cos^۲ x-\sin ۲x=-\frac{۱}{۲}$

$۱-۲\sin^۲ x\cos^۲ x-\sin ۲x=-\frac{۱}{۲}$

$$\frac{1}{2}\sin^2 2x+\sin 2x-\frac{3}{2}=0\Longrightarrow \sin^2 2x+2\sin 2x-3=0$$

$\sin 2x=1$ و -3 غیرممکن $\sin 2x=1\Longrightarrow x=K\pi+45^\circ$

۷۰۳ $3tg^2x-16\sin^2x+3=0$

حل:

$$3tg^2x-16\times\frac{tg^2x}{1+tg^2x}+3=0\Longrightarrow 3tg^4x-10tg^2x+3=0$$

$$tg^2x=3 \text{ و } \frac{1}{3}\Longrightarrow tgx=\pm\sqrt{3} \text{ و } \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$tgx=\sqrt{3}=tg60^\circ \text{ و } tgx=-\sqrt{3}=tg(-60^\circ)$$

$$x=K\pi+60^\circ \text{ و } K\pi-60^\circ$$

$$tgx=\frac{\sqrt{3}}{3}=tg30^\circ \text{ و } tgx=-\frac{\sqrt{3}}{3}=tg(-30^\circ)$$

$$x=K\pi+30^\circ \text{ و } K\pi-30^\circ$$

۷۰۴- $\sqrt{2}\cos x=\cos^3x+\sin^3x+\sin x\cos^2x+\cos x\sin^2x$

حل: $\sqrt{2}\cos x=(\cos x+\sin x)(\cos^2x+\sin^2x)$

$$\sqrt{2}\cos x=\cos x+\sin x\Longrightarrow(\sqrt{2}-1)\cos x=\sin x\Longrightarrow tgx=\sqrt{2}-1$$

$$tgx=tg22.5^\circ\Longrightarrow x=K\pi+22.5^\circ$$

راه حل دوم

$$\sqrt{2}\cos x=\cos x(1-\sin^2x)+\sin x(1-\cos^2x)+\sin x\cos^2x+\cos x\sin^2x$$

که پس‌از ضرب کردن وخلاصه نمودن همان نتیجه اول بدست میآید.

راه حل سوم:

$$\sqrt{2}\cos x=\cos^3x+\sin^3x+\sin x(1-\sin^2x)+\cos x(1-\cos^2x)$$

که پس ازضرب کردن وساده نمودن همان نتیجه بدست میآید.

۷۰۵- $\sin^6x+\cos^6x=\frac{1}{4}$

حل: $(\sin^2x+\cos^2x)^3-3\sin^2x\cos^2x(\sin^2x+\cos^2x)=\frac{1}{4}$

$$1-3\sin^2x\cos^2x=\frac{1}{4}$$

$$-3\sin^2 x\cos^2 x = -\frac{3}{4} \Longrightarrow \sin^2 2x = 1 \Longrightarrow \sin 2x = \pm 1$$

$\sin 2x = 1 \Longrightarrow x = K\pi + 45^\circ$ و $\sin 2x = -1 \Longrightarrow x = K\pi - 45^\circ$

۷۰۶- $\sin^4 2x + \cos^4 2x + \cos 4x = 0$

حل: $(\sin^2 2x + \cos^2 2x)^2 - 2\sin^2 2x\cos^2 2x + \cos 4x = 0$

$$2 - 4\sin^2 2x\cos^2 2x + 2\cos 4x = 0$$

$$1 + 1 - \sin^2 4x + 2\cos 4x = 0 \Longrightarrow \cos^2 4x + 2\cos 4x + 1 = 0$$

$$(\cos 4x + 1)^2 = 0 \Longrightarrow x = K \times 90^\circ + 45^\circ$$

۷۰۷- $\sin^6 x - \cos^6 x + \cos 2x = 0$

جواب: $x = K\pi \pm 45^\circ$ و $x = K\pi$

۷۰۸-

$$\sin^4(x+30^\circ) + \cos^4(x+30^\circ) = \sin^4(x-30^\circ) + \cos^4(x-30^\circ)$$

جواب: $x = \frac{K\pi}{4}$

۷۰۹- $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{1}{8}$

جواب: $x = K\pi \pm 45^\circ$

تذکر مهم- میدانیم اگر $a+b+c=0$ باشد نتیجه زیر بدست میآید:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

معادلات زیر را حل کنید وجوابهای کلی آنها را بدست آورید.

۷۱۰-

$$(\sin x - \sin 2x)^3 + (\sin 2x - \sin 3x)^3 + (\sin 3x - \sin x)^3 = 0$$

اگر پرانتزها را بترتیب a و b و c فرض کنیم چون مجموع آنها برابر صفر است پس مجموع مکعباتشان مساوی سه برابر حاصلضرب آنها میباشد پس معادله بصورت زیر درمیآید

$$3(\sin x - \sin 2x)(\sin 2x - \sin 3x)(\sin 3x - \sin x) = 0$$

$x = 2k\pi$ و $k \times 120^\circ + 60^\circ$ و $k \times 72^\circ + 36^\circ$ و $k\pi$ و

$k \times 90^\circ + 45^\circ$

۷۱۱- $(2\sin x - 1)^3 + (\cos x - \sin x)^3 + (1 - \sin x - \cos x)^3 = 0$

حل: اگر پرانتزها را بترتیب a و b و c فرض کنیم چون مجموع آنها برابر صفر است پس مجموع مکعباتشان مساوی سه برابر حاصلضرب آنها میباشد. پس معادله بصورت زیر در می‌آید:

$$3(2\sin x-1)(\cos x-\sin x)(1-\sin x-\cos x)=0$$

جواب: $x=2k\pi+30°$ و $2K\pi+150°$ و $k\pi+45°$ و $2k\pi+90°$ و $2k\pi$

۷۱۲- $(2\,tg\,x-3\sin x)^3+(\sin x-tg\,x)^3+(2\sin x-tg\,x)^3=0$

جواب: $x=k\pi$ و $2k\pi\pm Arccos\frac{2}{3}$ و $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ و $2k\pi\pm60°$ و $x=2K\pi$

۷۱۳- $(cotg\,x-tg\,x)^3+(tg\,x-\sin x)^3+(\sin x-cotg\,x)^3=0$

جواب: $x=\frac{K\pi}{2}+45°$ و $k\pi$ و $2k\pi$ و $2k\pi\mp Arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

۷۱۴- $(\cos^2 x-2)^3+(\sin^2 x-2\cos x)^3+(2\cos x+1)^3=0$

جواب: $x=2k\pi\pm Arccos(\sqrt{3}-1)$ و $2k\pi\pm120°$

۷۱۵- $(1-4\sin x\cos x)^3+(\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x)^3+$
$(\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x-1)^3=0$

جواب: $x=k\pi+15°$ و $k\pi+75°$ و $k\times90°-30°$
$x=k\pi+45°$ و $k\pi+105°$

معادلات زیر را حل کنید:

۷۱۶- $3\,arc\,tg\sqrt{x^2-5x+9}=\pi$

حل:

$$arctg\sqrt{x^2-5x+9}=60°\Longrightarrow tg\,arctg\sqrt{x^2-5x+9}=tg60°$$

$$\sqrt{x^2-5x+9}=\sqrt{3}\Longrightarrow x^2-5x+6=0\Longrightarrow x=2 \text{ و } 3$$

۷۱۷- $6\arcsin(0/5x^2-3x+3)=\pi$

حل:

$$\arcsin(0/5x^2-3x+3)=30°\Longrightarrow \sin\arcsin(0/5x^2-3x+3)=\sin30°$$

$$0/5x^2-2x+2=\frac{1}{2}\Rightarrow x^2-6x+5=0\Rightarrow x=1 \text{ و } 5$$

۷۱۸- $\arcsin(x-1)=\arccos\sqrt{2x-1}$

حل :

$$\arcsin(x-1)=\alpha\Rightarrow \sin\alpha=x-1 \text{ و } \cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{2x-x^2} \text{ و } \arccos\sqrt{2x-1}=\beta$$

$$\cos\beta=\sqrt{2x-1}$$

$$\alpha=\beta\Rightarrow\cos\alpha=\cos\beta\Rightarrow\pm\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{2x-1}\Rightarrow x=1$$

۷۱۹- $2\arccos x=\arccos(2x-1)$

حل: $\cos(2\arccos x)=\cos[\arccos(2x-1)]$

$$4\cos^3\arccos x-3\cos\arccos x=2x-1$$

$$4x^3-3x=2x-1\Rightarrow 4x^3-5x+1=0$$

$$(x-1)(4x^2+4x-1)=0\Rightarrow x=1 \text{ و } (-1\pm\sqrt{2})\div 2$$

۷۲۰- $2\operatorname{Arccos}(x-1)=\operatorname{Arccos}(2x^2-7)\Rightarrow x=2$ ج

۷۲۱- $2\arcsin(x-2)=\arcsin\sqrt{x^2-3x+2}$

حل: $\arcsin(x-2)=\alpha\Rightarrow\sin\alpha=x-2$

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\pm\sqrt{4x-x^2-3}$$

$$\arcsin\sqrt{x^2-3x+2}=\beta\Rightarrow\sin\beta=\sqrt{x^2-3x+2}$$

$$2\alpha=\beta\Rightarrow\sin 2\alpha=\sin\beta\Rightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha=\sin\beta$$

$$\pm 2(x-2)\sqrt{4x-x^2-3}=\sqrt{x^2-3x+2}$$

$$\sqrt{(x-2)(x-1)}$$

$$4(x-2)^2(4x-x^2-3)=(x-2)(x-1)$$

$$(x-2)(4x^2-15x+11)=0 \Longrightarrow x=2 \text{ و } 1 \text{ و } \frac{11}{4}$$

۷۲۲-
$$\operatorname{arctg}(x-1)+\operatorname{arctg}(x-2)=\operatorname{tg}\operatorname{arctg}\frac{2}{5-x}$$

حل:

$$\operatorname{arctg}(x-1)=\alpha \Longrightarrow \operatorname{tg}\alpha=x-1 \text{ و } \operatorname{arctg}(x-2)=\beta \Longrightarrow \operatorname{tg}\beta=x-2$$

$$\alpha+\beta=\operatorname{arctg}\frac{2}{5-x} \Longrightarrow \operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{arctg}\frac{3}{5-x}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{2}{5-x} \Longrightarrow \frac{x-1+x-2}{1-(x-1)(x-2)}=\frac{2}{5-x}$$

$$6x=16 \Longrightarrow x=\frac{8}{3}$$

۷۲۳-
$$\arccos x-\arcsin x=\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$$

حل:
$$\arccos x=\alpha \Longrightarrow \cos\alpha=x \text{ و } \arcsin x=\beta \Longrightarrow \sin\beta=x$$

$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\gamma \Longrightarrow \cos\gamma=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-x^2} \text{ و } \cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}$$

$$=\sqrt{1-x^2}$$

$$\alpha-\beta=\gamma \Longrightarrow \cos(\alpha-\beta)=\cos\gamma$$

$$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos\gamma \Longrightarrow x\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-x^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$4x\sqrt{1-x^2}=\sqrt{3} \Longrightarrow 16x^2(1-x^2)=3 \Longrightarrow x^2=\frac{3}{4} \text{ و } \frac{1}{4}$$

$$x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } x=\pm\frac{1}{2}$$

تمرین با جواب

	جواب:	صورت
۷۲۴-	$x = 2$ و 4	$2\arcsin(x^2 - 6x + 8.5) = \pi$
۷۲۵-	$x = 0$	$2\arcsin x = \arcsin 2x$
۷۲۶-	$x = \frac{1}{2}$	$\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{6}$
۷۲۷-	$x = \sqrt{3} - 1$	$\operatorname{arctg}\frac{1}{1-x} - \operatorname{arctg}\frac{1}{1+x} = \frac{\pi}{12}$
۷۲۸-	جواب: $x = 0$	$\arccos(x + \frac{1}{2}) + \arccos x + \arccos(x - \frac{1}{2}) = \frac{3\pi}{2}$
۷۲۹-	جواب: $x = 0$ و 0.5	$\arccos x + \arccos(1 - x) = \arccos(-x)$
۷۳۰-	$x = \pm\frac{1}{3}$	$\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\operatorname{arcsec} 5x = \frac{\pi}{4}$
۷۳۱-	$\arccos x = 2$ و 4	$(\arccos x)^2 - 6\arccos x + 8 = 0$
۷۳۲-	$x = 0$ و ± 1	$\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \operatorname{arctg}\frac{x}{3} = \operatorname{arctg} x$
۷۳۳-	$x = 0$ و $\frac{\sqrt{5}}{6}$	$\arcsin 2x + \operatorname{arctg} 3x = \pi$
۷۳۴-	$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\arcsin x = \arccos x$
۷۳۵-	$x = 3$ و -1	$4\operatorname{arctg}(x^2 - 2x - 2) = \pi$
۷۳۶-	$x = -2$ و -1	$\operatorname{arctg}(x + 2) - \operatorname{arctg}(x + 1) = 45^\circ$
۷۳۷-	$x = \frac{1}{7}$	$2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}$

-۷۳۸ $\arcsin\frac{2}{2\sqrt{x}}-\arcsin\sqrt{1-x}=\arcsin\frac{1}{3}$ $\qquad x=\frac{2}{3}$

-۷۳۹ $\operatorname{arctg}\frac{a}{b}-\operatorname{arctg}\frac{a-b}{a+b}=\operatorname{arctg}x$ $\qquad x=1$

-۷۴۰ $\arcsin 3x=\arccos 4x$ $\qquad x=0/2$

-۷۴۱ $2\arcsin x=\arcsin\frac{10x}{13}$ $\qquad x=0$ و $\pm\frac{12}{13}$

-۷۴۲ $3\arcsin\sqrt{x}=\pi$ $\qquad x=\frac{3}{4}$

-۷۴۳ $\arccos x=\operatorname{arctg}x$ $\qquad x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

-۷۴۴ $\arcsin 2x+\operatorname{arctg}\frac{1-x}{2x}=\frac{\pi}{2}$ $\qquad x=1$ و 4

-۷۴۵

$$\arccos\frac{1-x^2}{x^2+1}+\arcsin\frac{2x}{x^2+1}+\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}=\frac{3\pi}{2}$$

$x=1$

معادلات زیر را حل کنید:

-۷۴۶ $16^{\sin x}=\sqrt[\cos x]{4}$

حل: $\log 16^{\sin x}=\log\sqrt[\cos x]{4}\Longrightarrow \sin x\log 16=\frac{1}{\cos x}\log 4$

$2\sin x\log 4=\frac{1}{\cos x}\log 4\Longrightarrow 2\sin x=\frac{1}{\cos x}\Longrightarrow 2\sin x\cos x=1$

$\sin 2x=1\Longrightarrow x=k\pi+45^\circ$

-۷۴۷ $(\cos 2x)^{2\cos 2x+4\cos x-1}=\sec 2x$

حل: $\log(\cos 2x)^{2\cos 2x+4\cos x-1}=\log\frac{1}{\cos 2x}$

$$(۲\cos۳x+۴\cos x-۱)\log\cos۲x=\log۱-\log\cos۲x$$

$$۲\cos۳x+۴\cos x-۱=-۱\Longrightarrow ۲\cos۳x+۴\cos x=۰$$

$$۲(۴\cos^{۳}x-۳\cos x)+۴\cos x=۰\Longrightarrow ۸\cos^{۳}x-۲\cos x=۰$$

$$۲\cos x(۴\cos^{۲}x-۱)=۰\Longrightarrow \cos x=۰\Longrightarrow x=۲k\pi\pm۹۰^\circ$$

$$۴\cos^{۲}x-۱=۰\Longrightarrow \cos^{۲}x=\frac{۱}{۴}\Longrightarrow \cos x=\pm\frac{۱}{۲}$$

$$\cos x=\frac{۱}{۲}=\cos۶۰^\circ\Longrightarrow x=۲k\pi\pm۶۰^\circ$$

$$\cos x=-\frac{۱}{۲}=-\cos۶۰^\circ=\cos۱۲۰^\circ\Longrightarrow x=۲k\pi\pm۱۲۰^\circ$$

۷۴۸- $(\cos x)^{\sin^{۲}x-\frac{۳}{۲}\sin x+\frac{۱}{۲}}=۱$

حل: $\log(\cos x)^{\sin^{۲}x-\frac{۳}{۲}\sin x+\frac{۱}{۲}}=\log۱$

$$(\sin^{۲}x-\frac{۳}{۲}\sin x+\frac{۱}{۲})\log\cos x=۰$$

$$\sin^{۲}x-\frac{۳}{۲}\sin x+\frac{۱}{۲}=۰\Longrightarrow \sin x=۱ \text{ و } \frac{۱}{۲}\Longrightarrow \sin x=۱$$

$$x=۲k\pi+۹۰^\circ$$

$$\sin x=\frac{۱}{۲}=\sin۳۰^\circ\Longrightarrow x=۲K\pi+۳۰^\circ \text{ و } ۲K\pi+۱۵۰^\circ$$

$$\log\cos x=۰\Longrightarrow \cos x=۱\Longrightarrow x=۲K\pi$$

۷۴۹- $\sin(\pi\log x)+\cos(\pi\log x)=۱$

حل: $\sqrt{۲}\sin(\pi\log x+۴۵^\circ)=۱\Longrightarrow \sin(\pi\log x+۴۵^\circ)=\sin۴۵^\circ$

$$\pi\log x=۲K\pi\Longrightarrow \log x=۲K\Longrightarrow x=۱۰^{۲K}$$

$$\pi\log x=۲K\pi+\frac{\pi}{۲}\Longrightarrow \log x=۲K+\frac{۱}{۲}$$

$$x = 10^{\frac{4K+1}{2}} = \sqrt{10^{(4K+1)}} = 10^{2K}\sqrt{10}$$

۷۵۰- $\log_{\cos x}\sin x + \log_{\sin x}\cos x - 2 = 0$

حل : اگر $\log_{\cos x}\sin x = y$ فرض شود $\log_{\sin x}\cos x = \frac{1}{y}$ خواهد بود.

$$y + \frac{1}{y} - 2 = 0 \Longrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Longrightarrow (y-1)^2 = 0 \Longrightarrow y = 1$$

$$\log_{\cos x}\sin x = 1 \Longrightarrow \sin x = \cos x \Longrightarrow tg\, x = 1 \Longrightarrow x = k\pi + 45^\circ$$

۷۵۱- $(\cos 2x)^{2\cos 3x + 4\cos x - 1} = \sec 2x$

جواب: $x = 2K\pi \pm 120^\circ$ و $2K\pi \pm 60^\circ$ و $2K\pi$

۷۵۲- $\log_{\sin x} 2 + \log_{\sin^2 x} 3 = 1$

جواب :

$$x = 2K\pi + Arc\sin 2^{-\sqrt{\log_2 3}} \text{ و } 2K\pi + \pi - Arc\sin 2^{-\sqrt{\log_2 3}}$$

۷۵۳- $1 + \log_2 \sin x + \log_2^2 \sin x + \log_2^3 \sin x + \cdots\cdots = \frac{2}{3}$

جواب: $x = 2K\pi + 45^\circ$ و $2K\pi + 135^\circ$

۷۵۴-

$$\sin 2^{\sqrt{-x}} = \frac{1}{2} \qquad ج \Longrightarrow x = -\log_2^2\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right)$$

تذکر : K اعداد صفر ومنفی نمیتواند باشد. لطفاً تحقیق کنید چرا؟

تمرین با جواب برای حل

۷۵۵- $81^{\cos x} = \sqrt[\sin x]{3\sqrt{3}}$

جواب: $x = K\pi + 30^\circ$ و $x = K\pi + 60^\circ$

۷۵۶- $5^{\log \cos 2x} + 5^{\log \sec 2x} = 2$ جواب: $x = K\pi$

۷۵۷- $27^{1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \cdots} = 9$

جواب: $x = 2K\pi - 30^\circ$ و $x = 2K\pi + 210^\circ$

۷۵۸- $\left(\frac{1 - \cos x}{1 + \sin x}\right)^{tg x + cotg x} = tg^2 \frac{x}{2}$ جواب $x = K\pi + 45^\circ$

۷۵۹- $(4 + \sqrt{15})^{2\cos x + 1} + (4 - \sqrt{15})^{2\cos x + 1} = 8$

جواب: $x = K\pi + 90^\circ$ و $x = 2K\pi + \pi$

۷۶۰- $\left(\log_{\sec x} \sqrt{5}\right)^2 - \log_{\sec x} 5\sqrt{5} = -\frac{5}{4}$

جواب: $x = 2K\pi \pm \operatorname{Arccos} \frac{\sqrt[5]{625}}{5}$ و $2k\pi \pm \operatorname{Arccos} \frac{1}{5}$

۷۶۱- $2\log\sqrt{tg x} + 2\log\sqrt{cotg x} = 2$

جواب: $x = K\pi + \operatorname{Arctg} 10000$

۷۶۲- $\left(\sqrt{\operatorname{cosec} x}\right)^{\log_5 \operatorname{cosec} x - 1} = 5$

۷۶۳- $\cos 2x^{\cos 3x + 2\cos x} = 1$

جواب: $x = 2K\pi$ و $2k\pi \pm 60^\circ$ و $2k\pi \pm 120^\circ$ و $K\pi + 45^\circ$

-۷۶۴ $\sin x^{\sin 2x+\sqrt{3}\cos x}=1$

جواب: $x=2K\pi$ و $2K\pi-60^\circ$ و $2K\pi+240^\circ$ و $2K\pi+90^\circ$

ج-۷۶۵: $x=K\pi\pm60^\circ$ $\qquad 9^{tg^2x}+2\times3^{tg^2x}=783$

ج۷۶۶: $x=2K\pi\,60$ $\qquad \log_{\sqrt[3]{2\sin^2x}}(1+\cos x)=3$

-۷۶۷ $16^{\sin^2x}+16^{\cos^2x}=10$

ج: $x=2K\pi\pm30^\circ$ و $2K\pi\pm150^\circ$ و $2K\pi\pm60^\circ$ و $2K\pi\pm120^\circ$

-۷۶۸ $\log_{\sin x}\log_{\sqrt{\sqrt{3}\cos x}}\sin 2x=0$

جواب: $x=K\pi+90^\circ$ و $2K\pi+60^\circ$ و $2K\pi+120^\circ$

-۷۶۹ $\left[(\sin x)^{2\sin x-1}\right]^{2\cos x+\sqrt{3}}=1$

جواب: $x=2K\pi\pm150^\circ$ و $2K\pi+30^\circ$ و $K\pi+90^\circ$

-۷۷۰ $\left\{\left[(2\cos x+1)^{3tg x-\sqrt{3}}\right]^{cotg x-1}\right\}^{\sqrt{3}\sin x+1}=1$

جواب: $x=K\pi+45^\circ$ و $K\pi+30^\circ$ و $K\pi+90^\circ$

-۷۷۱ ج: $x=K\pi-30^\circ$ $\qquad \sqrt[3]{3\sqrt{3}}\times3^{tg x}=1$

قاعده مهم . در معادلات درجه دوم تانژانتی یا کتانژانتی اگر حدود زاویه تانژانت یاکتانژانت بین صفرو $\frac{\pi}{2}$ یا π و $\frac{3\pi}{2}$ باشد تانژانت یاکتانژانت ازصفرتابینهایت تغییر کرده وفقط مقادیر مثبت را قبول میکنند بنا بر این شرط وجود جواب اینست که یکی جوابهای معادله یاهر دوجواب مثبت باشد بنا بر این Δ و $\frac{c}{a}$ و $\frac{-b}{a}$ معادله راتشکیل داده و ،

صورت ومخرج هریك را بدست میآوریم وسپس علامت هریك را درجدول تعیین میکنیم .

تذکر ۱ : اگر درستون عمودی جدول $\Delta > 0$ و $\frac{c}{a} > 0$ و $\frac{-b}{a} > 0$ باشد معادله دارای دو جواب قابل قبول است .

تذکر ۲ : اگر در ستون عمودی جدول $\Delta > 0$ و $\frac{c}{a} < 0$ و $\frac{-b}{a}$ مثبت یا منفی یا مساوی صفر باشد معادله فقط دارای یك جواب قابل قبول استودر حالتی که $\frac{-b}{a} = 0$ باشد تانژانت یاکتانژانت زاویه مساوی $\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ میگردد که قابل محاسبه است .

تذکر ۳ : اگر در ستون عمودی جدول $\Delta = 0$ و $\frac{c}{a} > 0$ و $\frac{-b}{a} > 0$ باشد معادله دارای یك ریشه مضاعف قابل قبول است و تانژانت یاکتانژانت زاویه برابر $\frac{-b}{2a}$ میباشد که قابل محاسبه است .

تذکر ۴ : اگردرستون عمودی جدول $\Delta > 0$ و $\frac{c}{a} = \infty$ و $\frac{-b}{a} = \infty$ باشد در این صورت تانژانت یا کتانژانت زاویه علاوه بر اینکه مساوی بینهایت است برابر $-\frac{c}{a}$ معادله میباشد که قابل محاسبه است .

تذکر ۵ : اگر درستون عمودی جدول $\Delta > 0$ و $\frac{c}{a} = 0$ و $\frac{-b}{a} > 0$ باشد معادله دارای یك ریشه حقیقی است و تانژانت یاکتانژانت زاویه مساوی $\frac{-b}{a}$ میباشد که قابل محاسبه است ویك ریشه مساوی صفر هم دارد .

تذکر ۶ : در غیر حالات ذکر شده معادله دارای جواب نیست .

قاعده مهم . درمعادلات درجه دوم تانژانتی یا کتانژانتی اگر حدود زاویه تانژانت یا کتانژانت بین $\frac{\pi}{2}$ و π یا بین $\frac{3\pi}{2}$ و 2π (یاصفرو $\frac{-\pi}{2}$) باشدتانژانت یاکتانژانت ازصفر تابینهایت

تغییر کرده وفقط مقادیر منفی را قبول میکنند بنابراین شرط وجود جواب اینست‌که یکی ازجوابهای معادله یا هر دو جواب معادله منفی باشد بنابراین Δ و $\frac{c}{a}$ و $\frac{-b}{a}$ معادله را تشکیل داده وریشه‌های صورت ومخرج هریك را بدست میآوریم و سپس علامت هریك را در جدول تعیین میکنیم .

تذکر ۱ : اگر در ستون عمودی جدول $\Delta > 0$ و $\frac{c}{a} > 0$ و $\frac{-b}{a} < 0$ باشد معادله دارای دو جواب قابل‌قبول‌است.

تذکر ۲ : اگر درستون‌عمودی جدول $\Delta > 0$ و $\frac{c}{a} < 0$ و $\frac{-b}{a}$ مثبت یا منفی یا مساوی صفر باشد معادله فقطدارای یك جواب قابل قبول استودرحالتی‌که $-\frac{b}{a} = 0$ باشد تانژانت‌یاکتانژانت زاویه برابر $\pm\sqrt{\frac{c}{a}}$ میگرددکه قابل محاسبه است

تذکر ۳ : اگر در ستون عمودی جدول $\Delta = 0$ و $\frac{c}{a} > 0$ و $\frac{-b}{a} < 0$ باشد معادله دارای یك ریشه مضاعف قابل قبول است و تانژانت یا کتانژانت زاویه برابر $-\frac{b}{2a}$ میباشدکه قابل محاسبه است .

تذکر ۴ : اگر درستون عمودی جدول $\Delta > 0$ و $\frac{c}{a} = \infty$ و $\frac{-b}{a} = \infty$ باشددراین صورت تانژانت یاکتانژانت زاویه علاوه بر اینکه مساوی بینهایت است برابر $\frac{-c}{b}$ معادله میباشدکه قابل محاسبه است

تذکر ۵ : اگر در ستون عمودی جدول $\Delta > 0$ و $\frac{c}{a} = 0$ و $\frac{-b}{b} < 0$ باشد معادله دارای یك ریشه حقیقی استوتانژانت یاکتانژانت زاویه‌مساوی $\frac{-b}{a}$ میباشدکه‌قابل‌محاسبه هم‌است ویك ریشه مساوی صفر دارده

تذکر ۶. در غیر حالات ذکر شده معادله دارای جواب نیست .

معادلات زیر را حل و بحث نمائید

۷۷۲- $0<x<\frac{\pi}{2}$ $\quad m\,tg^2x+2(m-1)tg\,x+m+2=0$

حل: $\Delta'=b'^2-ac=(m-1)^2-m(m+2)=1-4m$

$\Delta'=0\Longrightarrow 1-4m=0\Longrightarrow m=\frac{1}{4}$

$\frac{c}{a}=\frac{m+2}{m}\Longrightarrow m+2=0\Longrightarrow m=-2$ و $m=0$

$-\frac{b}{a}=\frac{2(1-m)}{m}\Longrightarrow 1-m=0\Longrightarrow m=1$ و $m=0$

m	$-\infty$	-2		0		$\frac{1}{4}$		1	$+\infty$
Δ'	+		+		+	0	−		−
$\frac{c}{a}$	+	0	−	∞	+		+		+
$\frac{-b}{a}$	−		−	∞	+		+	0	−
معادله مثلثاتی	ریشه ندارد		یک ریشه دارد		دو ریشه دارد		ریشه ندارد		ریشه ندارد
	ریشه ندارد		$tg\,x=\frac{-c}{b}=1$ $x=45^\circ$			$tg\,x=\frac{-b}{2a}=2$ $x=Arctg\,2$			

۷۷۳- $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}\quad (m-1)cotg^2(x+45^\circ)+cotg(x+45^\circ)-1=0\Longrightarrow$

حل : چون $45^\circ<x<135^\circ$ است پس $90^\circ<x+45^\circ<\pi$ میباشد ودراین فاصله کتانژانت همواره منفی است .

$$\Delta=b^{۲}-۴ac=۱+۴m-۴=۴m-۳$$

$$\Delta=۰\Longrightarrow ۴m-۳=۰\Longrightarrow m=\frac{۳}{۴}$$

$$\frac{c}{a}=۰\Longrightarrow\frac{\text{[illegible]}-۱}{m-۱}=۰\Longrightarrow\frac{۱}{۱-m}=۰\Longrightarrow ۱-m=۰\Longrightarrow m=۱$$

$$\frac{-b}{a}=۰\Longrightarrow\frac{-۱}{m-۱}=۰\Longrightarrow\frac{۱}{۱-m}=۰\Longrightarrow ۱-m=۰\Longrightarrow m=۱$$

m	$-\infty$		$\frac{۳}{۴}$		۱		$+\infty$
Δ		$-$	۰	$+$	|	$+$	
$\frac{c}{a}$		$+$		$+$	∞	$-$	
$\frac{-b}{a}$		$+$		$+$	∞	$-$	
مساله مثلثاتی		ریشه ندارد		ریشه ندارد		یک ریشه دارد	

$$cotg(x+۴۵^\circ)=\frac{-b}{۲a}=۲$$

$$cotg(x+۴۵^\circ)=\frac{-c}{b}=۱\Longrightarrow x=۰$$

۷۷۴- $tg(۲x+۳۰^\circ)+(m^{۲}-۲m)cotg(۲x+۳۰^\circ)=۲(m-۱)$

$$-۶۰^\circ<x<-۱۵^\circ$$

حل : اگر طرفین تساوی را در $tg(۲x+۳۰^\circ)$ ضرب نمائیم نتیجه میشود .

$$tg^{۲}(۲x+۳۰^\circ)-۲(m-۱)tg(۲x+۳۰^\circ)+m^{۲}-۲m=۰$$

اگر $-۶۰^\circ<x<-۱۵^\circ$ باشد پس $-۹۰<۲x+۳۰^\circ<۰$ خواهدشد ودر

این فاصله تانژانت همواره منفی است .

$$\Delta'=b'^{۲}-ac=[-(m-۱)]^{۲}-m^{۲}+۲m=۱$$

چون $\Delta'>۰$ است همواره مثبت میباشد $\Delta'=۱$

$$\frac{c}{a}=m^{۲}-۲m\Longrightarrow m(m-۲)=۰\Longrightarrow m=۰ \text{ و } ۲$$

$$\frac{-b}{a}=2(m-1)\Rightarrow m-1=0\Rightarrow m=1$$

m	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
Δ'		$+$		$+$		$+$		$+$	
$\frac{c}{a}$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$-\frac{b}{a}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
معادله مثلثاتی		دو ریشه دارد		یك ریشه دارد		یك ریشه دارد		ریشه ندارد	

$tg(2x+30^\circ)=0$ و -2 $x=-15^\circ$	$tg(2x+30^\circ)=\pm 1$ $x=-37/5^\circ$	$tg(2x+30^\circ)\overset{\pm}{=}0$ و 2 $x=-15^\circ$

قاعده مهم : برای حل و بحث معادلات دو مجذوری درجه چهارمی که بر حسب تانژانت یا کتانژانت می‌باشند ابتدا tg^2x یا $cotg^2x$ را مساوی y فرض نموده و سپس در وجود وعلامت ریشه‌های معادله درجه دومی که از جنس y بدست آمده است بحث میکنیم یعنی Δ و $\frac{c}{a}$ و $\frac{-b}{a}$ معادله را تشکیل داده و ریشه‌های صورت و مخرج آنها را بدست آورده وعلامت Δ و $\frac{c}{a}$ و $\frac{-b}{a}$ را در جدول تعیین میکنیم

تذکر ۱ : اگر در ستون جدول عمودی $\Delta>0$ و $\frac{c}{a}>0$ و $\frac{-b}{a}>0$ باشد معادله مثلثاتی دارای چهار ریشه که دو بدو قرینه یکدیگرند میباشد .

تذکر ۲: اگر در ستون عمودی جدول $\Delta>0$ و $\frac{c}{a}>0$ و $\frac{-b}{a}<0$ باشد معادله مثلثاتی ریشه حقیقی ندارد .

تذکر۳ : اگر در ستون عمودی جدول $\Delta>0$ و $\frac{c}{a}>0$ و $-\frac{b}{a}$ مثبت‌یامنفی‌یا مساوی صفر باشد معادله مثلثاتی فقط‌دارای دوریشه میباشدکه قرینه یکدیگرند.

تذکر۴: اگر در ستون عمودی جدول $\Delta>0$ و $\frac{c}{a}=0$ و $\frac{-b}{a}>0$ باشد معادله مثلثاتی دارای یك جواب صفر ودو جواب قرینه‌می‌باشد وتانژانت یاکتانژانت زاویه برابر $\pm\sqrt{\frac{-b}{a}}$ می باشدکه قابل محاسبه است .

تذکر۵ : اگر درستون عمودی جدول $\Delta>0$ و $\frac{c}{a}=0$ و $\frac{-b}{a}<0$ باشد معادله فقط دارای یك ریشه صفر می باشد.

تذکر۶ : اگر در ستون عمودی جدول $\Delta=0$ و $\frac{-b}{a}>0$ باشدمعادله دارای‌دو ریشه قرینه است وتانژانت یا کتانژانت زاویه‌مساوی $\frac{-b}{2a}$ مـی‌باشدکه قـابـل محاسبه است .

تذکر۷: اگردرستون‌عمودی‌جدول $\Delta>0$ و $\frac{c}{a}=\infty$ و $\frac{-b}{a}=\infty$ باشد در اینصورت یکی از ریشه‌ها بینهایت است ودو ریشه دیگر برابر $\frac{-c}{b}$ میباشند کـه قـابـل محاسبه است

تذکر۸ : در غیر حالات‌ذکرشده‌معادله دارای جواب‌نیست

۷۷۵- $tg^2x-\sin^2x=m$

حل : $\frac{1}{cotg^2x}-\frac{1}{1+cotg^2x}=m \Rightarrow \frac{1}{cotg^2x(1+cotg^2x)}=m$

$$m\,cotg^4x+m\,cotg^2x-1=0\Rightarrow my^2+my-1=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=m^2+4m\Rightarrow m(m+4)=0\Rightarrow m=0 \text{ و } -4$$

$$\frac{c}{a}=\frac{-1}{m}=\frac{1}{-m}\Longrightarrow -m=0\Longrightarrow m=0$$

چون $\frac{-b}{a}=-1$ است علامت آن همواره منفی است $\frac{-b}{a}=\frac{-m}{m}=-1$

m	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
Δ		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\frac{c}{a}$		$+$	|	$+$	∞	$-$	
$\frac{-b}{a}$		$-$	|	$-$	|	$-$	
معادله مثلثاتی		ریشه حقیقی ندارد		ریشه حقیقی ندارد		دو ریشه قرینه دارد و دو ریشه موهومی	
			ریشه حقیقی ندارد		$tg\,x=0=tg\,0^\circ$ $x=K\pi$		

۷۷۶- $(m^2-1)\cos x+2m^2-1=0$

ج:

m	$-\infty$	$\frac{-\sqrt{6}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$+\infty$
معادله مثلثاتی	جواب ندارد	جواب دارد	جواب دارد	جواب ندارد	

۷۷۷- $(m-2)\sin x+3m-4=0 \qquad 30^\circ<x<90^\circ$

ج:

m	$-\infty$	$\frac{10}{7}$	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
معادله مثلثاتی	جواب ندارد	جواب دارد	جواب ندارد	جواب ندارد	

۷۷۸- $(m+2)\cos^2 x+2m\sin x\cos x+(m+1)\sin^2 x=m$

ج:

m	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
معادله	جواب دارد	جواب ندارد	جواب دارد	

۷۷۹- $(m-2)tg^2 x-(m-2)tg\,x+1-m=0\Longrightarrow 90^\circ<x<0$

ج:

m	$-\infty$ — 1	1 — $\frac{6}{5}$	$\frac{6}{5}$ — 2	2 — $+\infty$
معادله	جواب دارد	جواب دارد	جواب ندارد	جواب دارد

۷۸۰- $\sin^4 x + \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x = m\cos 4x$

حل : $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x + \sin^2 x\cos^2 x = m\cos 4x$

$$1 - \frac{1}{4}\sin^2 2x = m\cos 4x \Longrightarrow 1 - \frac{1}{4}\times\frac{1-\cos 4x}{2} = m\cos 4x$$

$$8 - 1 + \cos 4x = 8m\cos 4x \Longrightarrow (8m-1)\cos 4x = 7$$

$$\cos 4x = \frac{7}{8m-1} = \cos\alpha \Longrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{1}{4}\alpha$$

بحث : بازاء $m>1$ و $m<-\frac{3}{4}$ معادله دارای دو دسته جواب است.

۷۸۱- $tg(x+a)\,tg(x-a) = m$

حل : $\frac{tg x + tg a}{1 - tg x\, tg a}\times\frac{tg x - tg a}{1 + tg x\, tg a} = m \Longrightarrow tg^2 x = \frac{m + tg^2 a}{1 + m\, tg^2 a}$

$$tg\, x = \pm\sqrt{\frac{m+tg^2 a}{1+m\,tg^2 a}} = \pm\, tg\alpha \Longrightarrow \begin{cases} x = k\pi + \alpha \\ x = k\pi - \alpha \end{cases}$$

بحث شرط اینکه معادله دارای جواب باشد اینست که : $\frac{m+tg^2 a}{1+m\,tg^2 a} \geqslant 0$ باشد .

۷۸۲- $\cos 3x = 4a\cos^2 x$

حل $4\cos^3 x - 3\cos x = 4a\cos^2 x \Longrightarrow (4-4a)\cos^3 x - 3\cos x = 0$

$$\cos x\,[(4-4a)\cos^2 x - 3] = 0 \Longrightarrow \cos x = 0 \Longrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

یا

$$(4-4a)\cos^2 x - 3 = 0 \Longrightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{3}{4-4a}} \begin{cases} x = 2k\pi \pm \alpha \\ x = 2k\pi \pm (\pi - \alpha) \end{cases}$$

بحث : چون $\cos x$ بین ۱ و ۱- میباشد پس $\cos^2 x$ کوچکتر یا مساوی یک میباشد

$$\frac{3}{4-4a} \leqslant 1 \Longrightarrow \frac{-1+4a}{4-4a} \leqslant 0 \Longrightarrow a \geqslant 1 \text{ و } a \leqslant \frac{1}{4}$$

۷۸۳- $\dfrac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}=m\,tg\,x$

حل : $\dfrac{2\sin 3x\cos 2x+\sin 3x}{2\cos 3x\cos 2x+\cos 3x}=m\,tg\,x$

$$\frac{\sin 3x(2\cos 2x+1)}{\cos 3x(2\cos 2x+1)}=m\,tg\,x \Longrightarrow tg\,3x=m\,tg\,x$$

$$\frac{3tg\,x-tg^3x}{1-3tg^2x}=m\,tg\,x\Longrightarrow(3m-1)tg^3x-(m-3)tg\,x=0$$

$$tg\,x[(3m-1)tg^2x-(m-3)]=0\Longrightarrow tg\,x=0\Longrightarrow x=k\pi$$

$$(3m-1)tg^2x-(m-3)=0\Longrightarrow tg^2x=\frac{m-3}{3m-1}$$

$$tg\,x=\pm\sqrt{\frac{m-3}{3m-1}}=\pm tg\,\alpha\Longrightarrow x=k\pi\pm\alpha$$

بحث : شرط اینکه معادله دارای جواب باشد اینستکه $\dfrac{m-3}{3m-1}\geqslant 0$ باشد.

جواب $m<\frac{1}{3}$ و $m>3$

فرمولهای قابل محاسبه بر اریتم

فرمولهای تبدیل مجموع یا تفاضل دو خط مثلثاتی به عوامل ضرب

۱ $$\boxed{\sin P+\sin q=2\sin\frac{P+q}{2}\cos\frac{P-q}{2}}$$

مانند مثالهای زیر :

$$\sin 3x+\sin x=2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}=2\sin 2x\cos x$$

$$\sin 5x+\sin 3x=2\sin\frac{5x+3x}{2}\cos\frac{5x-3x}{2}=2\sin 4x\cos x$$

$$\sin 9x+\sin 5x=2\sin\frac{9x+5x}{2}\cos\frac{9x-5x}{2}=2\sin 7x\cos 2x$$

$$\sin 140^\circ+\sin 80^\circ=2\sin\frac{140^\circ+80^\circ}{2}\cos\frac{140^\circ-80^\circ}{2}=2\sin 110^\circ\cos 30^\circ$$

$$\boxed{\sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}}\quad ۲$$

مانند مثالهای زیر :

$$\sin 4x-\sin 2x=2\sin\frac{4x-2x}{2}\cos\frac{4x+2x}{2}=2\sin x\cos 3x$$

$$\sin 7x-\sin 5x=2\sin\frac{7x-5x}{2}\cos\frac{7x+5x}{2}=2\sin x\cos 6x$$

$$\sin 6x-\sin 2x=2\cos\frac{6x+2x}{2}\sin\frac{6x-2x}{2}=2\cos 4x\sin 2x$$

$$\sin 130^\circ-\sin 70^\circ=2\cos\frac{130^\circ+70^\circ}{2}\sin\frac{130^\circ-70^\circ}{2}$$
$$=2\cos 100^\circ\sin 30^\circ$$

$$\boxed{\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}\quad ۳$$

مانندمثالهای زیر :

$$\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{x}{2}=2\cos\frac{\frac{3x}{2}+\frac{x}{2}}{2}\cos\frac{\frac{3x}{2}-\frac{x}{2}}{2}=2\cos x\cos\frac{x}{2}$$

$$\cos 8x+\cos 4x=2\cos\frac{8x+4x}{2}\cos\frac{8x-4x}{2}=2\cos 6x\cos 2x$$

$$\cos 9x+\cos 3x=2\cos\frac{9x+3x}{2}\cos\frac{9x-3x}{2}=2\cos 6x\cos 3x$$

$$\cos 190^\circ+\cos 30^\circ=2\cos\frac{190^\circ+30^\circ}{2}\cos\frac{190^\circ-30^\circ}{2}=2\cos 110^\circ\cos 80^\circ$$

$$\boxed{\cos P-\cos q=-2\sin\frac{P-q}{2}\sin\frac{P+q}{2}} \quad ۴$$

مانند مثالهای زیر :

$$\cos 10x-\cos 6x=-2\sin\frac{10x+6x}{2}\sin\frac{10x-6x}{2}$$

$$=-2\sin 8x\sin 2x$$

$$\cos 15x-\cos 7x=-2\sin\frac{15x+7x}{2}\sin\frac{15x-7x}{2}$$

$$=-2\sin 11x\sin 4x$$

$$\cos 9x-\cos 5x=-2\sin\frac{9x+5x}{2}\sin\frac{9x-5x}{2}=-2\sin 7x\sin 2x$$

$$\cos 70^\circ-\cos 30=-2\sin\frac{70^\circ+30^\circ}{2}\sin\frac{70^\circ-30^\circ}{2}$$

$$=-2\sin 50^\circ\sin 20^\circ$$

۵
$$\boxed{tg\,p \pm tg\,q = \frac{\sin(p \pm q)}{\cos p \cos q}}$$

مانند مثالهای زیر:

$$tg\,13x + tg\,3x = \frac{\sin(13x+3x)}{\cos 13x \cos 3x} = \frac{\sin 16x}{\cos 13x \cos 3x}$$

$$tg\,11x + tg\,2x = \frac{\sin(11x+2x)}{\cos 11x \cos 2x} = \frac{\sin 13x}{\cos 11x \cos 2x}$$

$$tg\,160^\circ + tg\,50^\circ = \frac{\sin(160^\circ+50^\circ)}{\cos 160^\circ \cos 50^\circ} = \frac{\sin 210^\circ}{\cos 160^\circ \cos 50^\circ} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 40^\circ \cos 20^\circ}$$

$$tg\,170^\circ - tg\,90^\circ = \frac{\sin(170^\circ-90^\circ)}{\cos 170^\circ \cos 90^\circ} = \frac{\sin 80^\circ}{\cos 170^\circ \cos 90^\circ}$$

۶
$$\boxed{cotg\,p \pm cotg\,q = \frac{\sin(q \pm p)}{\sin p \sin q}}$$

مانند مثالهای زیر:

$$cotg\,5x + cotg\,7x = \frac{\sin(7x+5x)}{\sin 5x \sin 7x} = \frac{\sin 12x}{\sin 5x \sin 7x}$$

$$cotg\,9x - cotg\,13x = \frac{\sin(13x-9x)}{\sin 9x \sin 13x} = \frac{\sin 4x}{\sin 9x \sin 13x}$$

$$cotg\,6x + cotg\,5x = \frac{\sin(5x+6x)}{\sin 6x \sin 5x} = \frac{\sin 11x}{\sin 6x \sin 5x}$$

$$cotg\,8x - cotg\,15x = \frac{\sin(15x-8x)}{\sin 8x \sin 15x} = \frac{\sin 7x}{\sin 8x \sin 15x}$$

$$cotg\,90^\circ + cotg\,40^\circ = \frac{\sin(40^\circ+90^\circ)}{\sin 90^\circ \sin 40^\circ} = \frac{\sin 130^\circ}{\sin 90^\circ \sin 40^\circ} = \frac{\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} = cotg\,40^\circ$$

$$cotg\,160^\circ - cotg\,330^\circ = \frac{\sin(330^\circ-160^\circ)}{\sin 160^\circ \sin 330^\circ} = \frac{\sin 170^\circ}{\sin 160^\circ \sin 330^\circ}$$

حل مسائل کتاب درسی (صفحه ۱۲۳)

تمرین ـ درستی تساویهای زیر را تحقیق کنید:

۷۸۴ ك ۱ـ $\sin 40^\circ + \sin 20^\circ = \cos 10^\circ$

حل: $\text{طرف اول} = 2\sin\frac{40^\circ+20^\circ}{2}\cos\frac{40^\circ-20^\circ}{2}$

$\text{طرف اول} = 2\sin 30^\circ \cos 10^\circ = 2\times\frac{1}{2}\cos 10^\circ = \cos 10^\circ$

۷۸۵ ك ۲ـ $\cos 80^\circ + \cos 40^\circ = \cos 20^\circ$

حل: $\text{طرف اول} = 2\cos\frac{80^\circ+40^\circ}{2}\cos\frac{80^\circ-40^\circ}{2}$

$\text{طرف اول} = 2\cos 60^\circ \cos 20^\circ = 2\times\frac{1}{2}\cos 20^\circ = \cos 20^\circ$

۷۸۶ ك ۳ـ $\cos 140^\circ + \cos 100^\circ + \cos 20^\circ = 0$

حل: $\text{سمت چپ} = 2\cos\frac{140^\circ+100^\circ}{2}\cos\frac{140^\circ-100^\circ}{2} + \cos 20^\circ =$

$2\cos 120^\circ \cos 20^\circ + \cos 20^\circ = 2\times -\frac{1}{2}\cos 20^\circ + \cos 20^\circ = 0$

۷۸۷ ك ۴ـ $\frac{\sin 50^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ - \cos 50^\circ} = \sqrt{3}$

حل: $\text{سمت چپ} = \frac{2\sin\frac{50^\circ-10^\circ}{2}\cos\frac{50^\circ+10^\circ}{2}}{-2\sin\frac{10^\circ+50^\circ}{2}\sin\frac{10^\circ-50^\circ}{2}}$

$$=\frac{2\sin 20^\circ\cos 30^\circ}{-2\sin 30^\circ\sin(-20^\circ)}=\frac{\sin 20^\circ\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ\sin 20^\circ}=\operatorname{cotg}30^\circ=\sqrt{3}$$

درستی اتحادهای زیر را تحقیق کنید

۷۸۸ ک ۵-
$$\frac{\sin 7x+\sin x}{\cos 7x+\cos x}=\operatorname{tg}4x$$

حل:
$$\frac{2\sin\frac{7x+x}{2}\cos\frac{7x-x}{2}}{2\cos\frac{7x+x}{2}\cos\frac{7x-x}{2}}=\frac{\sin 4x}{\cos 4x}=\operatorname{tg}4x$$

۷۸۹ ک ۶
$$\frac{\sin 2x+\sin x}{\cos 2x+\cos x}=\operatorname{tg}\frac{3x}{2}$$

حل:
$$\frac{2\sin\frac{2x+x}{2}\cos\frac{2x-x}{2}}{2\cos\frac{2x+x}{2}\cos\frac{2x-x}{2}}=\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}}=\operatorname{tg}\frac{3x}{2}$$

۷۹۰ ک ۷-
$$\frac{\sin x+\sin y}{\cos x+\cos y}=\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}$$

حل:
$$\text{طرف اول}=\frac{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}=\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}$$

۷۹۱ ک ۸-
$$\frac{\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}x}=\frac{\sin 3x}{\sin x}=3-4\sin^2 x$$

حل:
$$\frac{\frac{\sin(2x+x)}{\cos 2x\cos x}}{\frac{\sin(2x-x)}{\cos 2x\cos x}}=\frac{\sin 3x}{\sin x}=\frac{3\sin x-4\sin^3 x}{\sin x}$$

$$=۳-۴\sin^{۲}x$$

۷۹۲ ک ۹- $\sin(x-y-z)+\sin(x-y+z)=۲\sin(x-y)\cos z$

حل :

$$\text{طرف اول}=۲\sin\frac{x-y-z+x-y+z}{۲}\cos\frac{x-y-z-x+y-z}{۲}$$

$$\text{طرف اول}=۲\sin(x-y)\cos(-z)=۲\sin(x-y)\cos z$$

۷۹۳ ک ۱۰- $\sin^{۲}۲x-\sin^{۲}x=\sin۳x\sin x$

حل :

$$\frac{۱-\cos۴x}{۲}-\frac{۱-\cos۲x}{۲}=\frac{۱-\cos۴x-۱+\cos۲x}{۲}$$

$$=\frac{\cos۲x-\cos۴x}{۲}=\frac{-۲\sin۳x\sin(-x)}{۲}$$

$$=-\sin۳x\times-\sin x=\sin۳x\sin x$$

۷۹۴ ک ۱۱- $\dfrac{\sin^{۲}x-\sin^{۲}y}{\sin۲x+\sin۲y}=\dfrac{tg(x-y)}{۲}$

حل :

$$\frac{\frac{۱-\cos۲x}{۲}-\frac{۱-\cos۲y}{۲}}{۲\sin(x+y)\cos(x-y)}=\frac{۱-\cos۲x-۱+\cos۲y}{۴\sin(x+y)\cos(x-y)}$$

$$=\frac{\cos۲y-\cos۲x}{۴\sin(x+y)\cos(x-y)}=\frac{-۲\sin(y+x)\sin(y-x)}{۴\sin(x+y)\cos(x-y)}=$$

$$=\frac{\sin(x-y)}{۲\cos(x-y)}=\frac{tg(x-y)}{۲}$$

۷۹۵ ک ۱۲- $\dfrac{\sin(x+۳y)+\sin(۳x+y)}{\sin۲x+\sin۲y}=۲\cos(x+y)$

حل :

$$\text{طرف اول}=\frac{۲\sin\frac{x+۳y+۳x+y}{۲}\cos\frac{x+۳y-۳x-y}{۲}}{۲\sin\frac{۲x+۲y}{۲}\cos\frac{۲x-۲y}{۲}}$$

$$\text{طرف اول}=\frac{\sin(۲x+۲y)\cos(y-x)}{\sin(x+y)\cos(x-y)}=\frac{\sin۲(x+y)}{\sin(x+y)}$$

$$\text{طرف اول} = \frac{2\sin(x+y)\cos(x+y)}{\sin(x+y)} = 2\cos(x+y)$$

۷۹۶ ک ۱۴ $\dfrac{1-\cos x+\sin x}{1+\cos x+\sin x} = tg\,\dfrac{x}{2}$

حل:

$$\text{سمت چپ} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} =$$

$$\frac{\sin\frac{x}{2}\left(2\sin\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2}\right)}{\cos\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = tg\,\frac{x}{2}$$

۷۹۷ ک ۱۴- $\sin a + \sin b + \sin(a+b) = 4\cos\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{b}{2}\sin\dfrac{a+b}{2}$

حل:

$$\text{سمت چپ} = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$$

$$= 2\sin\frac{a+b}{2}\left[\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\right] =$$

$$= 2\sin\frac{a+b}{2}\left\{2\cos\frac{\frac{a-b+a+b}{2}}{2}\cos\frac{\frac{a-b-a-b}{2}}{2}\right\} =$$

$$= 4\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}$$

عبارات زیر را قابل محاسبه به وسیله لگاریتم کنید.

۷۹۸ ک ۱۵- $K = 1 + \cos a$

حل: $K = \cos 0^\circ + \cos a = 2\cos\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{a}{2} = 2\cos^2\dfrac{a}{2}$

طریقه دوم

$$K = 1 + \cos a = 1 + 2\cos^2\frac{a}{2} - 1 = 2\cos^2\frac{a}{2}$$

۷۹۹ ك ۱۶-

$$P = 1 - \cos a$$

حل:

$$P = 1 - (1 - 2\sin^2\frac{a}{2}) = 2\sin^2\frac{a}{2}$$

۸۰۰ ك ۱۷-

$$M = 1 + \sin a$$

حل:

$$M = \sin 90^\circ + \sin a = 2\sin(45^\circ + \frac{a}{2})\cos(45^\circ - \frac{a}{2})$$

$$M = 2\sin(45^\circ + \frac{a}{2})\sin(90^\circ - 45^\circ + \frac{a}{2}) = 2\sin^2(45^\circ + \frac{a}{2})$$

۸۰۱ ك ۱۸-

$$N = 1 - \sin a$$

$$N = 2\sin^2(45^\circ - \frac{a}{2})$$

۸۰۲ ك ۱۹-

$$Q = 1 + 2\cos a$$

حل:

$$Q = 2\left(\frac{1}{2} + \cos a\right) = 2(\cos 60^\circ + \cos a)$$

$$Q = 2\left(2\cos\frac{a+60^\circ}{2}\cos\frac{a-60^\circ}{2}\right) = 4\cos\frac{a+60^\circ}{2}\cos\frac{a-60^\circ}{2}$$

۸۰۳ ك ۲۰-

$$P = 1 - 2\cos a$$

$$Z = -4\sin\frac{a+60^\circ}{2}\sin\frac{60^\circ - a}{2} = 4\sin\frac{a+60^\circ}{2}\sin\frac{a-60^\circ}{2}$$

۸۰۴ ك ۲۱-

$$K = 1 + \sqrt{2}\sin a$$

حل:

$$K = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin a\right) = \sqrt{2}(\sin a + \sin 45^\circ)$$

$$K = 2\sqrt{2}\sin\frac{a+45^\circ}{2}\cos\frac{a-45^\circ}{2}$$

۸۰۵ ك ۲۲-

$$K' = 1 - \sqrt{2}\sin a$$

جواب:

$$K' = 2\sqrt{2}\sin\frac{45^\circ - a}{2}\cos\frac{45^\circ + a}{2}$$

۸۰۶ ك ۲۳-

$$P = \cos^2 2a - \sin^2 a$$

حل:
$$P=\frac{1+\cos 4a}{2}-\frac{1-\cos 2a}{2}$$

$$P=\frac{1+\cos 4a-1+\cos 2a}{2}=\frac{\cos 4a+\cos 2a}{2}=\frac{2\cos 3a\cos a}{2}$$

$$P=\cos 3a\cos a$$

۸۰۷ ك ۲۱-
$$M=\sin^2 a-\sin^2 b$$

حل:
$$M=\frac{1-\cos 2a}{2}-\frac{1-\cos 2b}{2}=\frac{1-\cos 2a-1+\cos 2b}{2}$$

$$M=\frac{\cos 2b-\cos 2a}{2}=\frac{-2\sin(b+a)\sin(b-a)}{2}=\sin(b+a)\sin(a-b)$$

۸۰۸ ك ۲۱-
$$A=\sin 3a+\sin 2a+\sin a$$

حل:
$$A=\sin 3a+\sin a+\sin 2a=2\sin 2a\cos a+\sin 2a$$

$$A=2\sin 2a(\cos a+\frac{1}{2})=2\sin 2a(\cos a+\cos 60^\circ)$$

$$=2\sin 2a\ (2\cos\frac{a+60^\circ}{2}\cos\frac{a-60^\circ}{2})=4\sin 2a\cos\frac{a+60^\circ}{2}\cos\frac{a-60^\circ}{2}$$

۸۰۹ ك ۲۲-
$$B=\cos 3a+2\cos 2a+\cos a$$

حل:
$$=2\cos 2a\cos a+2\cos 2a=2\cos 2a(\cos a+1)$$

$$=2\cos 2a(2\cos^2\frac{a}{2}-1+1)=4\cos 2a\cos^2\frac{a}{2}$$

۸۱۰ ك ۲۳-
$$C=1+\cos b+\sin b$$

$$C=1+2\cos^2\frac{b}{2}-1+2\sin\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2}=2\cos\frac{b}{2}\ (\cos\frac{b}{2}+\sin\frac{b}{2})$$

$$C=2\cos\frac{b}{2}\ [\cos\frac{b}{2}+\cos(90^\circ-\frac{b}{2})]=2\cos\frac{b}{2}\ (2\cos 45^\circ\cos\frac{b-90^\circ}{2})$$

$$C=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{b}{2}\ \cos(\frac{b}{2}-45^\circ)=2\sqrt{2}\cos\frac{b}{2}\ \cos(\frac{b}{2}-45^\circ)$$

۸۱۱ ك ۲۴-
$$D=1-\cos b+\sin b$$

حل:
$$D=1-(1-2\sin^2\frac{b}{2})+2\sin\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2}$$

$$D=2\sin^2\frac{b}{2}+2\sin\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2}=2\sin\frac{b}{2}\left(\sin\frac{b}{2}+\cos\frac{b}{2}\right)$$

$$D=2\sin\frac{b}{2}\left[\sin\frac{b}{2}+\sin\left(90^\circ-\frac{b}{2}\right)\right]$$

$$D=4\sin\frac{b}{2}\sin 45^\circ\cos\frac{b+90^\circ}{2}=2\sqrt{2}\sin\frac{b}{2}\cos\left(\frac{b}{2}+45^\circ\right)$$

۸۱۲ ك ۲۵- $E=tg^2a-cotg^2b$

حل: $E=1+tg^2a-cotg^2b-1$

$$E=\frac{1}{\cos^2 a}-\frac{1}{\sin^2 b}=\frac{\sin^2 b-\cos^2 a}{\sin^2 b\cos^2 a}$$

$$E=\frac{\frac{1-\cos 2b}{2}-\frac{1+\cos 2a}{2}}{\sin^2 b\cos^2 a}=\frac{\frac{-\cos 2b-\cos 2a}{2}}{\sin^2 b\cos^2 a}$$

$$E=\frac{-(\cos 2a+\cos 2b)}{2\sin^2 b\cos^2 a}=\frac{-2\cos(a+b)\cos(a-b)}{2\sin^2 b\cos^2 a}$$

$$E=\frac{-\cos(a+b)\cos(a-b)}{\sin^2 b\cos^2 a}$$

۸۱۳ ك ۲۶- $F=1+\cos c+\cos 2c$

حل: $F=1+\cos c+2\cos^2 c-1$

$$F=2\cos c\left(\cos c+\frac{1}{2}\right)=2\cos c\left(\cos c+\cos\frac{\pi}{3}\right)$$

ف $4\cos c\cos\left(\frac{c}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{c}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$

۸۱۴ ك ۲۷- $K=1+\sin a+\cos a+\sin a\cos a$

حل: $K=(1+\sin a)+\cos a(1+\sin a)=(1+\sin a)(1+\cos a)$

$$K=(\sin 90^\circ+\sin a)\left(1+2\cos^2\frac{a}{2}-1\right)$$

$$K=2\sin\left(45^\circ+\frac{a}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{a}{2}\right)\times 2\cos^2\frac{a}{2}$$

$$4\sin(45^\circ+\frac{a}{2})\sin(45^\circ+\frac{a}{2})\cos^2\frac{a}{2}=4\sin^2(45^\circ+\frac{a}{2})\cos^2\frac{a}{2}$$

-۲۸ک۸۱۵
$$M=\sin x+\sin 3x+\sin 9x-\sin 5x$$

$$M=2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}+2\sin\frac{9x-5x}{2}\cos\frac{9x+5x}{2}$$

$$M=2\sin 2x\cos x+2\sin 2x\cos 7x=2\sin 2x(\cos 7x+\cos x)$$

$$M=2\sin 2x\times 2\cos 4x\cos 3x=4\sin 2x\cos 4x\cos 3x$$

-۲۹ک۸۱۶
$$N=\sin(a+b+c)-\sin a-\sin b-\sin c$$

حل :
$$N=\sin(a+b+c)-\sin c-(\sin a+\sin b)=$$

$$2\sin\frac{a+b+c-c}{2}\cos\frac{a+b+c+c}{2}-2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$N=2\sin\frac{a+b}{2}\left[\cos\frac{a+b+2c}{2}-\cos\frac{a-b}{2}\right]$$

$$N=2\sin\frac{a+b}{2}\left(-2\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{a+c}{2}\right)$$

$$N=-4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a+c}{2}\sin\frac{b+c}{2}$$

-۳۰ک۸۱۷
$$P=\cos(a+b+c)+\cos a+\cos b+\cos c$$

حل :

$$P=2\cos\frac{a+b+c+a}{2}\cos\frac{a+b+c-a}{2}+2\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{b-c}{2}$$

$$P=2\cos\frac{2a+b+c}{2}\cos\frac{b+c}{2}+2\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{b-c}{2}$$

$$P=2\cos\frac{b+c}{2}\left[\cos\frac{2a+b+c}{2}+\cos\frac{b-c}{2}\right]=$$

$$2\cos\frac{b+c}{2}\left(2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+c}{2}\right)=4\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+c}{2}$$

-۳۱ک۸۱۸
$$A=\frac{1-\sin a}{1-\cos a}$$

حل :

$$A = \frac{\sin 90^\circ - \sin a}{1-(1-2\sin^2\frac{a}{2})} = \frac{2\sin(45^\circ-\frac{a}{2})\cos(45^\circ+\frac{a}{2})}{2\sin^2\frac{a}{2}}$$

$$A = \frac{\cos(45^\circ+\frac{a}{2})\cos(45^\circ+\frac{a}{2})}{\sin^2\frac{a}{2}} = \frac{\cos^2(45^\circ+\frac{a}{2})}{\sin^2\frac{a}{2}}$$

۸۱۹ـ۳۲ک

$$B = \frac{1+\sin a}{1+\cos a}$$

حل :

$$\frac{\sin 90^\circ + \sin a}{1+2\cos^2\frac{a}{2}-1} = \frac{\sin^2(45+\frac{a}{2})}{\cos^2\frac{a}{2}}$$

۸۲۰ـ۳۳ک

$$C = \frac{1}{\sin b}+\frac{1}{\cos b}$$

حل :

$$C = \frac{1}{\sin b}+\frac{1}{\cos b} = \frac{\sin b+\cos b}{\sin b\cos b} = \frac{\sin b+\sin(\frac{\pi}{2}-b)}{\sin b\cos b}$$

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{4}\cos(b-\frac{\pi}{4})}{\sin b\cos b} = \frac{\sqrt{2}\cos(b-\frac{\pi}{4})}{\frac{1}{2}\sin 2b} = \frac{2\sqrt{2}\cos(b-\frac{\pi}{4})}{\sin 2b}$$

۸۲۱ـ۳۴ک

$$D = \frac{\sin^2 a-\sin^2 b}{(\cos a+\cos b)^2}$$

حل :

$$D = \frac{(\sin a+\sin b)(\sin a-\sin b)}{(\cos a+\cos b)^2}$$

$$D=\frac{2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\times 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}}{2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\times 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}$$

$$D=tg\frac{a+b}{2}tg\frac{a-b}{2}$$

۸۲۲ ك ۳۵-

$$E=\frac{\sin a+\sin 3a+\sin 5a}{\cos a+\cos 3a+\cos 5a}$$

حل:

$$E=\frac{2\sin 3a\cos 2a+\sin 3a}{2\cos 3a\cos 2a+\cos 3a}$$

$$E=\frac{\sin 3a(2\cos 2a+1)}{\cos 3a(2\cos 2a+1)}=\frac{\sin 3a}{\cos 3a}=tg 3a$$

به فرض آنکه $\alpha=26^\circ 35'$ باشد مطلوبست محاسبه هر یك از عبارات زیر:

۸۲۳ ك ۳۶-

$$A=\frac{\cos 2\alpha-\cos 4\alpha}{\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}$$

حل:

$$A=\frac{-2\sin 3\alpha\sin(-\alpha)}{2\cos 3\alpha\cos\alpha}=\frac{\sin 3\alpha\sin\alpha}{\cos 3\alpha\cos\alpha}$$

$$A=tg 3\alpha tg\alpha=tg 78^\circ 105' tg 26^\circ 35'$$

$$A=tg 79^\circ 45' tg 26^\circ 35'=cotg 10^\circ 15' tg 26^\circ 35'$$

حال بجای $cotg\ 10^\circ 15'$ و $tg\ 26^\circ 35'$ مقادیرشان را ازجدول کتاب بدست آورده وسپس مقدار A را بدست می‌آوریم.

۸۲۴ ك ۳۸-

$$B=\sin\alpha+\cos\alpha$$

حل:

$$B=\sin\alpha+\sin(90^\circ-\alpha)=2\sin 45^\circ\cos(\alpha-45^\circ)$$

$$B=\sqrt{2}\cos(26^\circ 35'-45^\circ)=\sqrt{2}\cos(-18^\circ 25')=\sqrt{2}\cos 18^\circ 25'$$

$$\begin{cases}\cos 18^\circ=0/95111\\ \cos 19^\circ=0/9455\end{cases}$$

تفاوت دوزاویه

$$\left.\begin{array}{ll} 1^\circ & 0/0056 \\ \frac{25}{60} & x \end{array}\right\} x=\frac{0/0056\times 25}{60}=0/00233$$

$$\cos 18^\circ 25' = 0/9511 - 0/00233 = 0/94877$$

$$B=\sqrt{2}\times 0/94877$$

۸۲۵ ك ۲۸- $C=\sin 5\alpha - 2\sin 3\alpha + \sin\alpha$

حل: $C = 2\sin 3\alpha \cos 2\alpha - 2\sin 3\alpha = 2\sin 3\alpha(\cos 2\alpha - 1)$

$$C=2\sin 3\alpha(1-2\sin^2\alpha - 1) = -4\sin 3\alpha \sin^2\alpha$$

$$C=-4\sin 78^\circ 105'\sin^2 26^\circ 35' = -4\cos 10^\circ 15'\sin^2 26^\circ 35'$$

تذکر: بقیه مسائل کتاب درسی درصفحه (۲۸۲) از مسألهٔ (۸۳۲)شروع میشود.
مانند دو مسأله قبل حل می‌شود

تذکر: برای اثبات اتحادهای شرطی‌که در آن مجموع سه‌زاویه ۱۸۰° یا ۹۰° میباشد وهمچنین برای اثبات روابط بین خطوط مثلثاتی زوایای یك مثلث دو قاعده زیر را خوب بخاطر بسپارید.

قاعده

خطوط مثلثاتی مجموع دو زاویه یك‌مثلث باخطوط مثلثاتی زاویه دیگر بطور متشابه برابر است وعلامت آنها بجز sin تغییرمی‌کند.
$\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$
$\cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C$

مانند مثالهای زیر:

$\sin(B+C)=\sin A$ و $\sin(A+C)=\sin B$

$\cos(B+C)=-\cos A$ و $\cos(A+C)=-\cos B$

$tg(B+C)=-tg A$ و $tg(B+A)=-tg C$ و $tg(A+C)=-tg B$

$cotg(B+C)=-cotg A$ و $cotg(B+A)=-cotg C$

قاعده

خطوط مثلثاتی نصف مجموع دو زاویه مثلث با خطوط مثلثاتی نصف زاویه دیگر بطور ناجور برابر است.

$$\sin\frac{B+C}{2}=\sin\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}$$

$$\cos\frac{B+C}{2}=\cos\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}$$

مانند مثالهای زیر

$$\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2} \qquad \text{و}\ \sin\frac{A+C}{2}=\cos\frac{B}{2}$$

$$tg\frac{B+C}{2}=cotg\frac{A}{2} \qquad \text{و}\ tg\frac{A+B}{2}=cotg\frac{C}{2}$$

$$tg\frac{A+C}{2}=cotg\frac{B}{2} \qquad \text{و}\ \cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}$$

$$\cos\frac{A+C}{2}=\sin\frac{B}{2} \qquad \text{و}\ \cos\frac{B+C}{2}=\sin\frac{A}{2}$$

$$cotg\frac{B+C}{2}=tg\frac{A}{2} \qquad \text{و}\ cotg\frac{A+B}{2}=tg\frac{C}{2}$$

درصورتی که A و B و C زوایای مثلثی باشند، درستی اتحادهای زیر را تحقیق کنید:

-۳۹ك۸۴۶ $$\sin A+\sin B=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

حل: $$\text{سمت چپ}=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

۸۳۷ک۴۰ـ

$$\frac{\sin B-\sin C}{\cos B-\cos C}=-tg\frac{A}{2}$$

حل :

$$\text{سمت چپ}=\frac{2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}}{-2\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}$$

$$=-cotg\frac{B+C}{2}=-cotg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=-tg\frac{A}{2}$$

۸۳۸ک۴۱ـ

$$\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}=\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$

$$\text{سمت چپ}=\frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$

۸۳۹ک۴۲ـ

$$\frac{\cos A}{\sin B\sin C}+\frac{\cos B}{\sin C\sin A}+\frac{\cos C}{\sin A\sin B}=2$$

حل :

$$\text{سمت چپ}=\frac{\sin A\cos A+\sin B\cos B+\sin C\cos C}{\sin B\sin C\sin A}=$$

$$\frac{\frac{1}{2}\sin 2A+\frac{1}{2}\sin 2B+\frac{1}{2}\sin 2C}{\sin B\sin C\sin A}=\frac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{2\sin B\sin C\sin A}$$

طبق حل دومساله بعد (۸۳۱) صورت کسر مساوی $4\sin A\sin B\sin C$ میباشد پس حاصل کسر مساوی ۲ میشود

۸۴۰ک۴۳ـ

$$\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin C}=\sin(A-B)$$

حل :
$$\text{سمت چپ} = \frac{\frac{1-\cos 2A}{2}-\frac{1-\cos 2B}{2}}{\sin C}=\frac{\frac{\cos 2B-\cos 2A}{2}}{\sin C}$$

$$=\frac{-2\sin(B+A)\sin(B-A)}{2\sin C}=\frac{-\sin(\pi-C)\sin(B-A)}{\sin C}$$

$$=\frac{-\sin C\sin(B-A)}{\sin C}=-\sin(B-A)=\sin(A-B)$$

۸۳۱ ـ ۴۴ـ $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$

حل:
$$\text{سمت چپ}=2\sin(A+B)\cos(A-B)+\sin 2C=$$

$$2\sin(\pi-C)\cos(A-B)+\sin 2C=$$

$$2\sin C\cos(A-B)+2\sin C\cos C=2\sin C[\cos(A-B)+\cos C]$$

$$=2\sin C\left(2\cos\frac{A+C-B}{2}\cos\frac{A-B-C}{2}\right)$$

$$=4\sin C\cos\frac{\pi-2B}{2}\cos\frac{A-\pi+A}{2}$$

$$=4\sin C\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=4\sin C\sin B\sin A$$

۸۳۲ ـ ۴۵ـ $\frac{\sin A+\sin B-\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}=tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}$

حل :
$$\text{سمت چپ}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\sin C}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin C}$$

$$=\frac{2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=$$

$$=\frac{2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)}{2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)}=$$

$$\frac{-2\sin\frac{A}{2}\sin\left(\frac{-B}{2}\right)}{2\cos\frac{A}{2}\cos\left(\frac{-B}{2}\right)}=\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}=tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}$$

-۴۶ک۸۳۴ $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=2+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

حل : $\frac{1+\cos A}{2}+\frac{1+\cos B}{2}+1-\sin^2\frac{C}{2}=$ سمت چپ

$$=\frac{2+\cos A+\cos B}{2}+1-\sin^2\frac{C}{2}$$

$$=1+\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-\sin^2\frac{C}{2}$$

$$=2+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}=$$

$$2+\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$=2+\sin\frac{C}{2}\left[-2\sin\frac{A}{2}\sin\left(\frac{-B}{2}\right)\right]=2+2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

عبارات زیر را قابل محاسبه به وسیلهٔ لگاریتم کنید :

-۴۷ک۸۳۴ $A=tg25^\circ+tg20^\circ+2$

حل : $A=\frac{\sin(20^\circ+25^\circ)}{\cos20^\circ\cos25^\circ}+2=\frac{\sin55^\circ}{\cos20^\circ\cos25^\circ}+2$

$$A=\frac{\cos35^\circ}{\cos20^\circ\cos35^\circ}+2=\frac{1}{\cos20^\circ}+2=\frac{1+2\cos20^\circ}{\cos20^\circ}$$

$$A=\frac{2(\frac{1}{2}+\cos 20^\circ)}{\cos 20^\circ}=\frac{2(\cos 60^\circ+\cos 20^\circ)}{\cos 20^\circ}$$

$$A=\frac{2(2\cos 40^\circ\cos 20^\circ)}{\cos 20^\circ}=4\cos 40^\circ$$

۸۳۵ك۴۸-

$$B=\sin 70^\circ+8\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$$

$$B=\cos 20^\circ+8\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\cos 20^\circ(1+8\cos 40^\circ\cos 80^\circ)$$

$$B=\cos 20^\circ(1+\frac{8\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{\sin 40^\circ})=\cos 20^\circ(1+\frac{4\sin 80^\circ\cos 80^\circ}{\sin 40^\circ})$$

$$B=\cos 20^\circ(\frac{\sin 40^\circ+2\sin 160^\circ}{\sin 40^\circ})=\cos 20^\circ(\frac{2\sin 20^\circ\cos 20^\circ+2\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ})$$

$$B=\frac{2\sin 20^\circ\cos 20^\circ(\cos 20^\circ+1)}{2\sin 20^\circ\cos 20^\circ}=\cos 20^\circ+1=2\cos^2 10^\circ$$

این مسأله درصفحه (   ) ازدوطریق دیگر حل شده است

۸۳۶ك۴۹-

$$C=1+\sin\alpha+\cos\alpha+tg\alpha$$

$$C=(1+\cos\alpha)+(\sin\alpha+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})$$

$$C=(1+\cos\alpha)+\frac{\sin\alpha(\cos\alpha+1)}{\cos\alpha}=(1+\cos\alpha)(1+tg\alpha)$$

$$C=(1+2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1)(tg 45^\circ+tg\alpha)=2\cos^2\frac{\alpha}{2}\times\frac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos 45^\circ\cos\alpha}$$

۸۳۷ك۵۰ه-

$$D=3-4\sin 2\alpha+\cos 4\alpha$$

حل:

$$D=3-4\cos 2\alpha+2\cos^2 2\alpha-1=2\cos^2 2\alpha-4\cos 2\alpha+2$$

$$D=2(\cos^2 2\alpha-2\cos 2\alpha+1)=2(\cos 2\alpha-1)^2$$

$$D=2(1-2\sin^2\alpha-1)^2=2(4\sin^4\alpha)=8\sin^4\alpha$$

۸۳۸ك۵۱ه

$$E=\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2\alpha-\sin^2\beta$$

حل:

$$E=\sin^2(\alpha+\beta)+\frac{1-\cos 2\alpha}{2}-\frac{1-\cos 2\beta}{2}$$

$$E = \frac{2\sin^2(\alpha+\beta) - \cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2}$$

$$E = \frac{2\sin^2(\alpha+\beta) - 2\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}{2}$$

$$E = \sin(\alpha+\beta)[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\beta-\alpha)]$$

$$E = \sin(\alpha+\beta)[2\sin(\alpha)\cos\beta] = 2\sin\alpha\cos\beta\sin(\alpha+\beta)$$

۸۳۹ک۲صـ ثابت کنید اگر $\sin(b+c-a)$ و $\sin(c+a-b)$ و $\sin(a+b-c)$ سه‌جمله متوالی یك تصاعد حسابی باشند، tga و tgb و tgc نیز سه‌جمله متوالی یك تصاعد حسابی خواهند بود.

حل: میدانیم درهر تصاعد عددی درسه جمله متوالی دوبرابر جمله وسط برابر است بامجموع دوجمله طرفین:

پس می‌توان نوشت

$$2\sin(c+a-b) = \sin(b+c-a) + \sin(a+b-c)$$

این‌رابطه‌را می‌توان بصورت زیر نوشت

$$\sin(c+a-b) - \sin(b+c-a) = \sin(a+b-c) - \sin(c+a-b)$$

$$2\sin(a-b)\cos c = 2\sin(b-c)\cos a$$

$$\frac{(\sin a\cos b - \sin b\cos a)\cos c}{\cos a\cos b\cos c} = \frac{(\sin b\cos c - \sin c\cos b)\cos a}{\cos a\cos b\cos c}$$

$$\frac{\sin a\cos b}{\cos a\cos b} - \frac{\sin b\cos a}{\cos a\cos b} = \frac{\sin b\cos c}{\cos b\cos c} - \frac{\sin c\cos b}{\cos b\cos c}$$

$$tga - tgb = tgb - tgc \Longrightarrow tga + tgc = 2tgb$$

چون $(tga+tgc)$ دوبرابر tgb میباشد پس tga و tgb و tgc سه جمله متوالی یك تصاعد عددی میباشند

تذکرـ بقیه مسائل کتاب درسی درصفحه (۲۲۸) حل شده است

فرمول‌های تبدیل حاصلضرب دوخط مثلثاتی به مجموع یا تفاضل دوخط مثلثاتی

۱
$$\boxed{m\sin a\cos b=\frac{m}{۲}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]}$$

مانندمثالهای زیر :

$$\sin ۵x\cos ۳x=$$

$$\frac{۱}{۲}[\sin(۵x+۳x)+\sin(۵x-۳x)]=\frac{۱}{۲}(\sin ۸x+\sin ۲x)$$

$$۶\sin ۹x\cos ۴x=$$

$$۳[\sin(۹x+۴x)+\sin(۹x-۴x)]=۳(\sin ۱۳x+\sin ۵x)$$

$$۸\sin ۵x\cos ۸x=$$

$$۴[\sin(۵x+۸x)+\sin(۵x-۸x)]=۴(\sin ۱۳x-\sin ۳x)$$

$$۲\sin ۷۰^\circ\cos ۲۰^\circ=$$

$$[\sin(۷۰^\circ+۲۰^\circ)+\sin(۷۰^\circ-۲۰^\circ)]=(\sin ۹۰^\circ+\sin ۵۰^\circ)$$

۲
$$\boxed{m\cos a\cos b=\frac{m}{۲}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]}$$

مانند مثالهای زیر:

$$۶\cos ۱۱x\cos ۵x=$$

$$۳[\cos(۱۱x+۵x)+\cos(۱۱x-۵x)]=۳(\cos ۱۶x+\cos ۶x)$$

$$۳\cos ۷x\cos ۲x=$$

$$\frac{۳}{۲}[\cos(۷x+۲x)+\cos(۷x-۲x)]=\frac{۳}{۲}(\cos ۹x+\cos ۵x)$$

$$4\cos 12x\cos 3x=$$
$$2[\cos(12x+3x)+\cos(12x-3x)]=2(\cos 15x+\cos 9x)$$
$$8\cos 170^\circ\cos 40^\circ=4[\cos(170^\circ+40)+\cos(170^\circ-40)]=4[\cos 210+$$
$$+\cos 130^\circ]$$

۳
$$\boxed{m\sin a\sin b=\frac{m}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]}$$

مانند مثالهای زیر:

$$5\sin 4x\sin 3x=$$
$$\frac{5}{2}[\cos(4x-3x)-\cos(4x+3x)]=\frac{5}{2}(\cos x-\cos 7x)$$
$$4\sin 8x\sin 5x=$$
$$2[\cos(8x-5x)-\cos(8x+5x)]=2(\cos 3x-\cos 13x)$$
$$14\sin 13x\sin 8x=$$
$$7[\cos(13x-8x)-\cos(13x+8x)]=7(\cos 5x-\cos 21x)$$
$$10\sin 270^\circ\sin 190^\circ=$$
$$5[\cos(270^\circ-190^\circ)-\cos(270^\circ+190^\circ)]=5(\cos 80^\circ-\cos 460^\circ)$$

درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

۸۴۰- $2\sin 3x\cos x+4\sin 5x\cos 3x=2\sin 8x+\sin 4x+3\sin 2x$

حل:

$$[\sin(3x+x)+\sin(3x-x)]+2[\sin(5x+3x)+\sin(5x-3x)]$$
$$=\sin 4x+\sin 2x+2\sin 8x+2\sin 2x=2\sin 8x+\sin 4x+3\sin 2x$$

۸۴۱- $2\cos 4x\cos x-4\cos 5x\cos 2x=\cos 5x-2\cos 7x-\cos 3x$

حل:

$$1[\cos(4x+x)+\cos(4x-x)]-2[\cos(5x+2x)+\cos(5x-2x)]$$
$$=\cos 5x+\cos 3x-2\cos 7x-2\cos 3x=\cos 5x-2\cos 7x-\cos 3x$$

۸۴۲- $\cos 5x \cos 2x + \sin 4x \sin 3x - \cos 4x \cos x = \sin 2x \sin 3x$

حل :

$$\frac{1}{2}(\cos 7x + \cos 3x) + \frac{1}{2}(\cos x - \cos 7x) - \frac{1}{2}(\cos 5x + \cos 3x)$$

$$= \frac{1}{2}(\cos 7x + \cos 3x + \cos x - \cos 7x - \cos 5x - \cos 3x)$$

$$\frac{1}{2}(\sin x - \sin 5x) = \frac{1}{2} \times -2\sin 3x \sin(-2x) = \sin 2x \sin 3x$$

معادلات زیر را حل کنید و جوابهای کلی آنها را بدست آورید:

۸۴۳- $2\sin x \sin 3x = 1$

حل : $\frac{2}{2}\,[\cos(x - 3x) - \cos(x + 3x)] = 1 \Longrightarrow \cos 2x - \cos 4x = 1$

$$\cos 2x - (2\cos^2 2x - 1) = 1 \Longrightarrow \cos 2x - 2\cos^2 2x + 1 = 1$$

$$\cos 2x(1 - 2\cos 2x) = 0 \Longrightarrow \cos 2x = 0 \Longrightarrow x = K \times 90^\circ + 45^\circ$$

$$1 - 2\cos 2x = 0 \Longrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ \Longrightarrow x = K\pi \pm 30^\circ$$

۸۴۴- $\sin x \sin 3x = \cos 2x$

حل : $\frac{1}{2}[\cos(3x - x) - \cos(x + 3x)] = \cos 2x$

$$(\cos 2x - \cos 4x) = 2\cos 2x$$

$$\cos 2x - (2\cos^2 2x - 1) = 2\cos 2x \Longrightarrow \cos 2x - 2\cos^2 2x + 1 = 2\cos 2x$$

$$2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0 \Longrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \text{ و } -1$$

$$\cos 2x = -1 \Longrightarrow x = K\pi + 90^\circ$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ \Longrightarrow x = K\pi \pm 30^\circ$$

-۸۴۵ $\sin(x+30^\circ)\sin(x-30^\circ)=\frac{1}{4}$

حل :

$$\frac{1}{2}\left[\cos(x+30^\circ-x+30^\circ)-\cos(x+30^\circ+x-30^\circ)\right]=\frac{1}{4}$$

$$(\cos 60^\circ-\cos 2x)=\frac{1}{2}\Longrightarrow \cos 2x=0\Longrightarrow x=K\pi\pm 45^\circ$$

-۸۴۶ $tg(a+x)tg(a-x)=\frac{1-2\cos 2a}{1+2\cos 2a}$

حل :

$$\frac{\sin(a+x)}{\cos(a+x)}\times\frac{\sin(a-x)}{\cos(a-x)}=\frac{1-2\cos 2a}{1+2\cos 2a}$$

$$\frac{\cos(a+x-a+x)-\cos(a+x+a-x)}{\cos(a+x+a-x)+\cos(a+x-a+x)}=\frac{1-2\cos 2a}{1+2\cos 2a}$$

$$\frac{\cos 2x-\cos 2a}{\cos 2a+\cos 2x}=\frac{1-2\cos 2a}{1+2\cos 2a}$$

$$\cos 2a-2\cos^2 2a+\cos 2x-2\cos 2a\cos 2x$$

$$=\cos 2x+2\cos 2a\cos 2x-\cos 2a-2\cos^2 2a$$

$$2\cos 2a-4\cos 2a\cos 2x=0\Longrightarrow 2\cos 2a(1-2\cos 2x)=0$$

$$1-2\cos 2x=0\Longrightarrow \cos 2x=\frac{1}{2}=\cos 60^\circ\Longrightarrow x=k\pi\pm 30^\circ$$

-۸۴۷ $2\cos(x+45^\circ)\cos(x-45^\circ)-3\sin x+1=0$

حل : $(\cos 2x+\cos 90^\circ)-3\sin x+1=0\Longrightarrow \cos 2x-3\sin x+1=0$

$$1-2\sin^2 x-3\sin x+1=0\Longrightarrow 2\sin^2 x+3\sin x-2=0$$

$\sin x=\frac{1}{2}$ و $\sin x=-2$ غیرممکن

$$\sin x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}\Longrightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \text{ و } 2k\pi+\frac{5\pi}{6}$$

-۸۴۸ $\sin 5x\cos 3x-\sin 2x\sin x-1=0$

حل : $\frac{1}{2}\left(\cos 8x+\cos 2x\right)-\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 4x)-1=0$

ی $\cos 8x + \cos 4x - 2 = 0 \Longrightarrow 2\cos^2 4x - 1 + \cos 4x - 2 = 0$

$2\cos^2 4x + \cos 4x - 3 = 0 \Longrightarrow \cos 4x = 1$ و $\cos 4x = -\frac{3}{2}$ غیرممکن

$\cos 4x = 1 \Longrightarrow x = k \times 90°$

۸۴۹- $2\sin x \sin 7x + \cos^2 4x = 2\sin^2 4x$

جواب: $x = \frac{k\pi}{2} \pm \text{Arccos}\frac{1}{2}$

۸۵۰- $4\sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}$

جواب: $x = k\pi + 45°$ و $2k\pi - 90°$

۸۵۱- $16\sin x \cos 2x \sin(60° + x)\sin(60° - x) = \sqrt{3}$

جواب : $x = K\cdot 60° + 10°$ و $K\cdot 60° + 20°$

۸۵۲- $4\sin 2x \sin 4x \sin 6x - \sin 8x = 0$

جواب: $x = \frac{k\pi}{4}$ و $\frac{k\pi}{8} + \frac{\pi}{16}$

لطفاً این چهارفرمول را بخاطر بسپارید :

این فرمولها در مسائل (۶۱۳) و (۶۱۴) و (۶۱۵) درصفحه (۱۵۲) اثبات شده است

$4\sin(60 - a)\sin a \sin(60 + a) = \sin 3a$

$4\cos(60 - a)\cos a \cos(60 + a) = \cos 3a$

$tg(60 - a)\,tg a\, tg(60 + a) = tg 3a$

$cotg(60 - a)\,cotg a\, cotg(60 + a) = cotg 3a$

درستی تساویهای زیر را تحقیق کنید :

۸۵۳ک۵۴- $\sin 20° \sin 40° \sin 60° \sin 80° = \frac{3}{16}$

راه حل اول: $a = 20$

طرف اول $= [\sin 20° \sin(60° - 20°)\sin(60° + 20°)]\sin 60°$

$$= [\frac{۱}{۴}\sin(۳\times ۲۰^\circ)]\sin ۶۰^\circ = \frac{۱}{۴}\sin^{۲} ۶۰^\circ = \frac{۳}{۱۶}$$

راه حل دوم

طرف اول $= \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin ۴۰^\circ \sin ۸۰^\circ \sin ۲۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۴}\sin ۲۰(\cos ۴۰^\circ - \cos ۱۲۰^\circ)$

$$= \frac{\sqrt{۳}}{۴}\sin ۲۰^\circ(\cos ۴۰^\circ + \frac{۱}{۲}) = \frac{\sqrt{۳}}{۸}\sin ۲۰^\circ(۲\cos ۴۰^\circ + ۱)$$

$$= \frac{\sqrt{۳}}{۸}(۲\sin ۲۰\cos ۴۰ + \sin ۲۰) = \frac{\sqrt{۳}}{۸}(\sin ۶۰ - \sin ۲۰ + \sin ۲۰) = \frac{۳}{۱۶}$$

۸۵۴ک۵۴- $\cos ۲۰^\circ\cos ۴۰^\circ\cos ۶۰^\circ\cos ۸۰^\circ = \frac{۱}{۱۶}$

راه حل اول :

طرف اول $= \cos ۶۰^\circ[\cos ۲۰^\circ\cos(۶۰^\circ - ۲۰^\circ)\cos(۶۰^\circ + ۲۰^\circ)] =$

$$\frac{۱}{۲}[\frac{۱}{۴}\cos(۳\times ۲۰^\circ)] = \frac{۱}{۸}\cos ۶۰^\circ = \frac{۱}{۱۶}$$

راه حل دوم از رابطه $\sin ۲a = ۲\sin a\cos a$ نتیجه میشود که :

$$\cos a = \frac{\sin ۲a}{۲\sin a}$$

پس $\cos ۴۰ = \frac{\sin ۸۰^\circ}{۲\sin ۴۰^\circ}$ و $\cos ۲۰^\circ = ۲\frac{\sin ۴۰^\circ}{\sin ۲۰^\circ}$

طرف اول $= \frac{\sin ۴۰}{۲\sin ۲۰}\times\frac{\sin ۸۰}{۲\sin ۴۰}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{\sin ۱۶۰}{۲\sin ۸۰} = \frac{\sin ۱۶۰}{۱۶\sin ۲۰} = \frac{\sin ۲۰}{۱۶\sin ۲۰} = \frac{۱}{۱۶}$

راه حل سوم : ازفرمول حاصلضرب مجموع

طرف اول $= \frac{۱}{۲}\cos ۲۰^\circ\cos ۴۰^\circ\cos ۸۰^\circ = \frac{۱}{۴}\cos ۲۰^\circ(\cos ۱۲۰^\circ + \cos ۴۰^\circ) =$

$$= \frac{۱}{۴}\cos ۲۰(-\frac{۱}{۲} + \cos ۴۰) = \frac{۱}{۸}\cos ۲۰(۲\cos ۴۰ - ۱) =$$

$$\frac{1}{8}(2\cos 40\cdot\cos 20-\cos 20)=\frac{1}{8}(\cos 60+\cos 20-\cos 20)=\frac{1}{16}$$

راه حل چهارم:

$$\text{طرف اول}=\frac{\sin 20\cdot\cos 20\cdot\cos 40\cdot\cos 80}{2\sin 20}=\frac{\sin 40\cdot\cos 40\cdot\cos 80}{4\sin 20}=\frac{\sin 80\cdot\cos 80}{8\sin 20^\circ}=$$

$$\frac{\sin 160}{16\sin 20}=\frac{1}{16}$$

۸۵۵- $tg 20^\circ tg 40^\circ tg 60^\circ tg 80^\circ=3$

حل: $\text{طرف اول}=\sqrt{3}\, tg 20\cdot tg(60-20)\, tg(60+20)$

$=\sqrt{3}\, tg(3\times 20^\circ)=3$

دانشکده صنعتی آریا مهر

۸۵۶- $\sin 12^\circ\sin 48^\circ\sin 54^\circ\sin 72^\circ=\cos 12^\circ\cos 48^\circ\cos 54^\circ\cos 72^\circ$

حل: باید ثابت کنیم که $tg 12^\circ tg 48^\circ tg 54^\circ tg 72^\circ=1$

میباشد اگر $12=a$ باشد نتیجه میشود $48=60-a$ و $72=60+a$ بنابراین:

$$tg 12^\circ tg 48^\circ tg 72^\circ tg 54^\circ=tg 54^\circ tg 12^\circ tg(60^\circ-12^\circ)\, tg(60^\circ+12^\circ)=$$

$$tg 54^\circ tg(3\times 12^\circ)=cotg 36^\circ tg 36^\circ=1$$

۸۵۷- $tg 6^\circ tg 42^\circ tg 66^\circ tg 78^\circ=1$

$$\text{طرف اول}=\frac{tg 6^\circ tg 54^\circ tg 66^\circ tg 42^\circ tg 78^\circ}{tg 54^\circ}=\frac{tg(3\times 6^\circ)\, tg 42^\circ tg 78^\circ}{tg 54^\circ}=$$

$$\frac{tg 18^\circ tg 42^\circ tg 78^\circ}{tg 54^\circ}=\frac{tg(3\times 18^\circ)}{tg 54^\circ}=1$$

۸۵۸- $\cos 18^\circ\cos 36^\circ\cos 72\cos 144^\circ=-\frac{1}{16}cotg 18^\circ$

$$\text{طرف اول}=\frac{\sin 36\cos 36^\circ\cos 72^\circ\cos 144^\circ}{2\sin 18^\circ}=\frac{\sin 72^\circ\cos 72\cos 144^\circ}{4\sin 18^\circ}$$

$$\text{طرف اول}=\frac{\sin 144^\circ\cos 144^\circ}{8\sin 18^\circ}=\frac{\sin 288}{16\sin 18}=\frac{\sin(270^\circ+18^\circ)}{16\sin 18^\circ}$$

$$\text{طرف اول} = \frac{-\cos 18^\circ}{16\sin 18^\circ} = -\frac{1}{16}\cot g\, 18^\circ$$

۸۵۹- خطوط مثلثاتی کمان $5a$ را برحسب خطوط مثلثاتی کمان a حساب کنید.

حل:

$$\sin 5a = \sin(3a+2a) = \sin 3a\cos 2a + \sin 2a\cos 3a =$$

$$(3\sin a - 4\sin^3 a)(1-2\sin^2 a) + 2\sin a\cos a(4\cos^3 a - 3\cos a)$$

خطوط مثلثاتی کمانهای $6a$ و $8a$ را برحسب خطوط مثلثاتی a بدست آورید.

۸۶۰ ك ۸۵۷- ثابت کنید

$$\frac{\sin 7x}{\sin x} - 2\cos 2x - 2\cos 4x - 2\cos 6x = 1$$

حل:

$$\text{سمت چپ} = \frac{\sin 7x - 2\cos 2x\sin x - 2\cos 4x\sin x - 2\cos 6x\sin x}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin 7x - (\sin 3x - \sin x) - (\sin 5x - \sin 3x) - (\sin 7x - \sin 5x)}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin 7x - \sin 3x + \sin x - \sin 5x + \sin 3x - \sin 7x + \sin 5x}{\sin x}$$

$$\text{سمت چپ} = \frac{\sin x}{\sin x} = 1$$

۸۶۱ ك ۸۵۸-

$$\frac{\sin 3a + \cos 3a + \sin 5a + \cos 5a + \sin 7a + \cos 7a}{\cos 3a + \cos 5a + \cos 7a} = \frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ + 5a)}{\cos 5a}$$

حل:

$$\frac{(\sin 3a + \sin 7a) + (\cos 3a + \cos 7a) + (\sin 5a + \cos 5a)}{(\cos 3a + \cos 7a) + \cos 5a}$$

$$= \frac{2\sin 5a\cos 2a + 2\cos 5a\cos 2a + \sin 5a + \cos 5a}{2\cos 5a\cos 2a + \cos 5a}$$

$$\frac{2\cos 2a(\sin 5a + \cos 5a) + (\sin 5a + \cos 5a)}{\cos 5a(2\cos 2a + 1)}$$

$$= \frac{(\sin 5a + \cos 5a)(2\cos 2a + 1)}{\cos 5a(2\cos 2a + 1)} = \frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ + 5a)}{\cos 5a}$$

حل مسائل مختلف

خارج از کتاب درسی

معادلات زیر را حل کرده وجوابهای کلی آنها را بدست آورید:

۸۶۲- $\sin 3x + \sin 2x + \sin x = 0$

حل: $\sin 3x + \sin x + \sin 2x = 0 \Longrightarrow 2\sin 2x \cos x + \sin 2x = 0$

$\sin 2x(2\cos x + 1) = 0 \Longrightarrow x = K\times 90^\circ$ و $2K\pi \pm 120^\circ$

۸۶۳- $\sin 3x + 2\cos 2x - \sin x = 0$

حل: $2\sin x \cos 2x - 2\cos 2x = 0 \Longrightarrow 2\cos 2x(\sin x - 1) = 0$

$x = K\times 90^\circ + 45^\circ$ و $2K\pi + 90^\circ$

۸۶۴- $\cos 3x + \sqrt{3}\cos 2x + \cos x = 0$

حل: $2\cos 2x \cos x + \sqrt{3}\cos 2x = 0 \Longrightarrow \cos 2x(2\cos x + \sqrt{3}) = 0$

$x = K\times 90^\circ + 45^\circ$ و $2K\pi \pm 150^\circ$

۸۶۵- $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$

حل: $2\sin 2x \cos x + \sin 2x = 1 + \cos x + 2\cos^2 x - 1$

$\sin 2x(2\cos x + 1) = \cos x(2\cos x + 1)$

$(2\cos x + 1)(\sin 2x - \cos x) = 0$

$\cos x(2\cos x + 1)(2\sin x - 1) = 0$

$x = K\pi + 90^\circ$ و $2K\pi \pm 120^\circ$ و $2K\pi + 30^\circ$ و $2K\pi + 150^\circ$

۸۶۶- $tg x + tg 2x + tg 3x = 0$

حل: $\dfrac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x} + \dfrac{\sin 3x}{\cos 3x} = 0 \Longrightarrow \dfrac{\sin 3x(\cos 3x + \cos x \cos 2x)}{\cos x \cos 2x \cos 3x} = 0$

$\sin 3x[4\cos^3 x - 3\cos x + \cos x(2\cos^2 x - 1)] = 0$

$$\sin 3x \cos x (6\cos^2 x - 4) = 0 \Longrightarrow x = \frac{K\pi}{3} \text{ و } K\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$x = 2K\pi \pm \operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{6}}{3} \text{ و } 2K\pi \pm \left(\pi - \operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

۸۶۷- $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$

جواب: $x = \frac{K\pi}{5} + \frac{\pi}{10} \text{ و } \frac{K\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \text{ و } K\pi - \frac{\pi}{2}$

۸۶۸- $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2$

جواب: $x = \frac{K\pi}{5} + \frac{\pi}{10} \text{ و } \frac{K\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \text{ و } K\pi - \frac{\pi}{2}$

۸۶۹- $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$

جواب: $x = K\pi + 90^\circ \text{ و } 2K\pi + \pi \text{ و } K \times 72^\circ$

۸۷۰- $\cos 5x + \cos 3x + \sin 5x + \sin 3x = \sqrt{2}(\sin 4x + \cos 4x)$

جواب: $x = 2K\pi + \frac{\pi}{4} \text{ و } \frac{2K\pi}{7} + \frac{\pi}{28}$

عبارات زیر را قابل‌محاسبه به‌لگاریتم نمائید.

۸۷۱- $K = 1 + 2\sin a$

حل: $K = 2\left(\frac{1}{2} + \sin a\right) = 2(\sin 30^\circ + \sin a)$

$$K = 2\left(2\sin\frac{30^\circ + a}{2}\cos\frac{30^\circ - a}{2}\right) = 4\sin\frac{30^\circ + a}{2}\cos\frac{30^\circ - a}{2}$$

۸۷۲- $L = 1 - 2\sin a$

جواب: $L = 4\sin\frac{30^\circ - a}{2}\cos\frac{30^\circ + a}{2}$

۸۷۳- $P = \operatorname{tg}^2 a - 3$

حل: $(\operatorname{tg} a - \sqrt{3})(\operatorname{tg} a + \sqrt{3}) = (\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} 60^\circ)(\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} 60^\circ)$

$$P = \frac{\sin(a - 60^\circ)}{\cos a \cos 60^\circ} \times \frac{\sin(a + 60^\circ)}{\cos a \cos 60^\circ} = \frac{4\sin(a - 60^\circ)\sin(a + 60^\circ)}{\cos^2 a}$$

۸۷۴– $A=\frac{۱+\sqrt{۲}}{۲}$

حل: $A=\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶}+\sin\frac{\pi}{۴}=۲\sin\frac{۵\pi}{۲۴}\cos\frac{\pi}{۲۴}$

۸۷۵– $B=\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$

حل: $B=۲\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=۲\left(\sin\frac{\pi}{۳}+\sin\frac{\pi}{۴}\right)=۴\sin\frac{۷\pi}{۲۴}\cos\frac{\pi}{۲۴}$

۸۷۶– $C=\sqrt{۳}+۱$

حل: $C=tg۶۰^\circ+tg۴۵^\circ=\frac{\sin۱۰۵^\circ}{\cos۶۰^\circ\cos۴۵^\circ}=۲\sqrt{۲}\cos۱۵^\circ$

۸۷۷– $D=۳+\sqrt{۳}$

حل: $D=۳\left(۱+\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)=۳(tg۴۵^\circ+tg۳۰^\circ)$

$$D=۳\times\frac{\sin۷۵^\circ}{\cos۴۵^\circ\cos۳۰^\circ}=\frac{۳\times۴\sin۷۵^\circ}{\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}}=۲\sqrt{۶}\sin۷۵^\circ$$

۸۷۸– $E=۱+۲\cos۲\alpha$

حل: $E=۲\left(\frac{۱}{۲}+\cos۲\alpha\right)=۲(\cos۶۰^\circ+\cos۲\alpha)$

$$E=۴\cos(\alpha+۳۰^\circ)\cos(\alpha-۳۰^\circ)$$

۸۷۹– $F=\sqrt{۳}-۲\sin\alpha$

حل: $F=۲\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\sin\alpha\right)=۲\left(\sin\frac{\pi}{۳}-\sin\alpha\right)$

$$F=۴\sin\left(\frac{\pi}{۶}-\frac{\alpha}{۲}\right)\cos\left(\frac{\pi}{۶}+\frac{\alpha}{۲}\right)$$

۸۸۰– $M=\sin B+\sqrt{۳}\cos B$

حل: $M=\sin B+tg۶۰^\circ\cos B$

$$M=\frac{\sin B\cos۶۰^\circ+\sin۶۰^\circ\cos B}{\cos۶۰^\circ}=۲\sin(B+۶۰^\circ)$$

۸۸۱– $N=۳\sin B+\sqrt{۳}\cos B$

حل :
$$N=۲(\sin B+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos B)=۲(\sin B+tg۳۰^\circ\cos B)$$

$$N=۲\sqrt{۳}\sin(B+۳۰^\circ)$$

-۸۸۲
$$K=\frac{۳+\sqrt{۳}}{۳-\sqrt{۳}}$$

حل:
$$K=\frac{\sqrt{۳}(\sqrt{۳}+۱)}{\sqrt{۳}(\sqrt{۳}-۱)}=\frac{tg۶۰^\circ+tg۴۵^\circ}{tg۶۰^\circ-tg۴۵^\circ}$$

$$K=\frac{\sin ۱۰۵^\circ}{\sin ۱۵^\circ}=\frac{\cos ۱۵^\circ}{\sin ۱۵^\circ}=cotg\,۱۵^\circ$$

-۸۸۳
$$L=\sqrt{۶}+\sqrt{۲}$$

حل:
$$L=\sqrt{۲}(\sqrt{۳}+۱)=\sqrt{۲}(tg۶۰^\circ+tg۴۵^\circ)$$

$$L=\sqrt{۲}\times\frac{\sin(۶۰^\circ+۴۵^\circ)}{\cos۶۰^\circ\cos۴۵^\circ}=۴\cos ۱۵^\circ$$

-۸۸۴
$$R=۳-۴\sin^۲ a$$

حل:

$$R=۳-۴\times\frac{۱-\cos۲a}{۲}=۳-۲+۲\cos۲a=۱+۲\cos۲a$$

$$R=۲(\frac{۱}{۲}+\cos۲a)=۲(\cos۶۰^\circ+\cos۲a)=$$

$$R=۴\cos(۳۰^\circ+a)\cos(a-۳۰^\circ)$$

-۸۸۵
$$H=\sin۳\alpha+۲\sin۵\alpha+\sin۷\alpha$$

حل :
$$H=۲\sin۵\alpha+۲\sin۵\alpha\cos۲\alpha=۲\sin۵\alpha(۱+\cos۲\alpha)$$

$$H=۲\sin۵\alpha(۱+۲\cos^۲\alpha-۱)=۴\sin۵\alpha\cos^۲\alpha$$

-۸۸۶
$$D=\sin(a+b+c)-\sin a-\sin b-\sin c$$

حل:
$$D=۲\cos\frac{a+b+c+a}{۲}\sin\frac{b+c}{۲}-۲\sin\frac{b+c}{۲}\cos\frac{b-c}{۲}$$

$$D=۲\sin\frac{b+c}{۲}\left[\cos\frac{۲a+b+c}{۲}-\cos\frac{b-c}{۲}\right]$$

$$D=-۴\sin\frac{b+c}{۲}\sin\frac{a+b}{۲}\sin\frac{a+c}{۲}$$

۸۸۷- $A = 1 - \cos 2^\circ + \cos 4^\circ$

حل : $A = 1 - \cos 2^\circ + 2\cos^2 2^\circ - 1 = 2\cos 2^\circ\left(\cos 2^\circ - \frac{1}{2}\right)$

$A = 2\cos 2^\circ(\cos 2^\circ - \cos 60^\circ) = 4\cos 2^\circ \sin 21^\circ \sin 29^\circ$

۸۸۸- $B = tg\alpha + cotg\alpha + \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}$

حل : $B = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha}$

$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1 + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$B = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}$$

۸۸۹- $F = \sin^2 a + \sin^2 b - \sin^2(a+b)$

$$F = \frac{1 - \cos 2a}{2} + \frac{1 - \cos 2b}{2} - \sin^2(a+b)$$

$$F = \frac{2 - 2\cos(a+b)\cos(a-b) - 2[1 - \cos^2(a+b)]}{2}$$

$F = \cos(a+b)[-\cos(a-b) + \cos(a+b)]$

$F = -2\cos(a+b)\sin a \sin b$

۸۹۰- $I = tg 10^\circ + 2tg 70^\circ + tg 80^\circ$

حل: $$I = \frac{\sin(10^\circ + 80^\circ)}{\cos 10^\circ \cos 80^\circ} + 2cotg 20^\circ$$

$$I = \frac{1}{\cos 10^\circ \sin 10^\circ} + \frac{2\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}$$

$$I = \frac{2}{\sin 20^\circ} + \frac{2\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{2(1 + \cos 20^\circ)}{\sin 20^\circ} = \frac{4\cos^2 10^\circ}{2\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = 2cotg 10^\circ$$

۸۹۱- $M = tg 200^\circ + 2cotg 10^\circ$

حل:
$$M=tg(180^\circ+20^\circ)+\cot 10^\circ+\cot 10^\circ$$

$$M=tg 20^\circ+tg 80^\circ+\cot 10^\circ=\frac{\sin 100^\circ}{\cos 20^\circ\cos 80^\circ}+\frac{\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}=$$

$$\frac{\cos 10^\circ}{\cos 20^\circ\sin 10^\circ}+\frac{\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}=\frac{\cos 10^\circ(1+\cos 20^\circ)}{\sin 10^\circ\cos 20^\circ}=\frac{2\cos^3 10^\circ}{\sin 10^\circ\cos 20^\circ}$$

۸۹۲-
$$N=\sqrt{3}\,tg 10^\circ+\sqrt{3}\,tg 40^\circ+2$$

حل:
$$N=\frac{\sqrt{3}\sin 50^\circ}{\cos 10^\circ\cos 40^\circ}+2=\frac{\sqrt{3}\cos 40^\circ}{\cos 10^\circ\cos 40^\circ}+2$$

$$N=\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}+2$$

$$N=\frac{\sqrt{3}+2\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ}=\frac{2(\cos 30^\circ+\cos}{\cos 10^\circ}$$

۸۹۳-
$$q=-\cos 2\alpha+4\cos\alpha-3$$

حل:
$$q=-2\cos^2\alpha+1+4\cos\alpha-3= \qquad \cdot 2\cos\alpha+1)$$

$$q=-2(\cos\alpha-1)^2=-2\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}-1\right)^2=-8\sin^4\frac{\alpha}{2}$$

۸۹۴-
$$M=\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b} \qquad a>b$$

$$M=\sqrt{a}\left(\sqrt{1+\frac{b}{a}}+\sqrt{1-\frac{b}{a}}\right) \qquad \frac{b}{a}=\cos 2\alpha$$

$$M=\sqrt{a}\left(\sqrt{1+\cos 2\alpha}+\sqrt{1-\cos 2\alpha}\right)$$

$$M=\sqrt{a}\left(\sqrt{2\cos^2\alpha}+\sqrt{2\sin^2\alpha}\right)$$

$$M=\sqrt{2a}(\cos\alpha+\sin\alpha)=2\sqrt{a}\,\sin(45+\alpha)$$

۸۹۵-
$$N=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$$

حل : $N = \sqrt{\dfrac{a(۱-\frac{b}{a})}{a(۱+\frac{b}{a})}} + \sqrt{\dfrac{a(۱+\frac{b}{a})}{a(۱-\frac{b}{a})}}$

$$N = \sqrt{\frac{۱-\cos ۲\alpha}{۱+\cos ۲\alpha}} + \sqrt{\frac{۱+\cos ۲\alpha}{۱-\cos ۲\alpha}} = \sqrt{\frac{۲\sin^۲\alpha}{۲\cos^۲\alpha}} + \sqrt{\frac{۲\cos^۲\alpha}{۲\sin^۲\alpha}}$$

$$N = tg\alpha + cotg\alpha = \frac{۲}{\sin ۲\alpha} = \frac{\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

۸۹۵- $R = \cos ۳\alpha + ۲\cos\alpha$

حل: $R = \cos ۳\alpha + \cos\alpha + \cos\alpha = ۲\cos ۲\alpha\cos\alpha + \cos\alpha$

$$R = ۲\cos\alpha(\cos ۲\alpha + \cos ۶۰^\circ) = ۴\cos\alpha\cos(\alpha+۳۰^\circ)\cos(\alpha-۳۰^\circ)$$

	جواب:	صورت
۸۹۶-	$A' = -۲\sin\frac{۵\pi}{۲۴}\cos\frac{\pi}{۲۴}$	$A' = \frac{۱-\sqrt{۲}}{۲}$
۸۹۷-	$B' = ۴\cos\frac{۷\pi}{۲۴}\sin\frac{\pi}{۲۴}$	$B' = \sqrt{۳} - \sqrt{۲}$
۸۹۸-	$C' = ۲\sqrt{۲}\sin ۱۵^\circ$	$C' = \sqrt{۳} - ۱$
۸۹۹-	$D' = ۲\sqrt{۶}\sin ۱۵^\circ$	$D' = ۳ - \sqrt{۳}$
۹۰۰-	$Q = \frac{۴\sin(\alpha-۳۰^\circ)\sin(\alpha+۳۰^\circ)}{\cos^۲\alpha}$	$Q = ۳tg^۲\alpha - ۱$
۹۰۱-	$E = \frac{tg ۲\alpha}{tg ۳\beta}$	$E = \frac{tg ۲\alpha + cotg ۳\beta}{cotg ۲\alpha + tg ۳\beta}$
۹۰۲-	$P = \frac{\sin(\alpha+۳۵^\circ)}{\sin(۳۵^\circ-\alpha)}$	$P = \frac{\cos\alpha + \sqrt{۳}\sin\alpha}{\cos\alpha - \sqrt{۳}\sin\alpha}$
۹۰۳-	$y = ۴\cos\alpha\cos ۲\alpha\cos ۳\alpha$	$y = ۱ + \cos ۲\alpha + \cos ۴\alpha + \cos ۶\alpha$
۹۰۴-	$M = \frac{۴\cos^۲(۲\alpha+۴۵^\circ)}{\sin ۴\alpha}$	$M = ۲ + tg ۲\alpha + cotg ۲\alpha$

$h = \cos^۲ x + \cos^۲ y + \cos^۲ z + \cos^۲(x+y+z) - ۲$

جواب: $h=2\cos(x+y)\cos(x+z)\cos(y+z)$

۹۰۵- $A=\sin 87^\circ \sin 59^\circ-\sin 93^\circ+\sin 61^\circ$

جواب: $A=\sin 1^\circ$

۹۰۶- $B=\sin 47^\circ+\sin 61^\circ-\sin 11^\circ \sin 25^\circ$

جواب: $B=\cos 7^\circ$

۹۰۷- $C=\sin 25^\circ+\cos 40^\circ+\sin 55^\circ+\cos 20^\circ$

جواب: $C=4\cos 10^\circ \cos 7/5^\circ \sin 52/5^\circ$

۹۰۸-

$D=\cos 11\alpha+3\cos 9\alpha+3\cos 9\alpha+3\cos 7\alpha+\cos 7\alpha+\cos 5\alpha$

جواب: $D=8\cos 8\alpha\cos^3\alpha$

۹۰۹- $F=\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 6\alpha+\cos 7\alpha$

جواب: $F=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2}\cos 4\alpha$

۹۱۰- $L=\cos 2\alpha-\cos 3\alpha-\cos 4\alpha+\cos 5\alpha$

جواب: $L=-4\cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\cos\frac{7\alpha}{2}$

۹۱۱- $K=tg\alpha+cotg\alpha+tg 3\alpha+cotg 3\alpha$

جواب: $K=\frac{8\cos^2 2\alpha}{\sin 6\alpha}$

۹۱۲- $M=1+\cos 4x+\sin 4x+\sin 2x+\cos 2x$

جواب: $M=4\sqrt{2}\sin(2x+45^\circ)\cos(x+30^\circ)\cos(x-30^\circ)$

۹۱۳- $N=\frac{\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x}{\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x}$

جواب: $N=$

۹۱۴- $P=tgx-tg2x-tg3x+tg4x$

جواب: $P=$.

۹۱۵ $q=tg2x-tgx+tg6x-tg7x$

جواب: $q=$

۹۱۶- $E=1-\sin 2\alpha+\cos 2\alpha$

جواب: $E=2\sqrt{2}\cos\alpha\sin(45^\circ-\alpha)$

۹۱۷- $F=\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)$

جواب: $F=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$

۹۱۸- $R=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)$

جواب: $R=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}$

۹۱۹- $Q=\cos^2x+\cos^2y-\sin^2(x+y)$

جواب: $Q=2\cos x\cos y\cos(x+y)$

۹۲۰- $S=\sin^2x+\sin^2y+2\sin y\sin x\cos(x+y)$

جواب: $S=\sin^2(x+y)$

۹۲۱- $N=\sin\alpha+\cos\alpha+\sin2\alpha+\cos2\alpha+\sin3\alpha+\cos3\alpha$

جواب: $N=4\sqrt{2}\cos(45^\circ-2\alpha)\cos(30^\circ-\frac{\alpha}{2})\cos(30^\circ+\frac{\alpha}{2})$

۹۲۲- $A=\cot g^2 2x-tg^2 2x-8\cos4x\cot g4x\cot g4x$

جواب: $A=8\cot g4x\,\mathrm{cosec}4x\sin^2(45^\circ-4x)$

۹۲۳- $B=2tg2x-7-4\sqrt{3}$

جواب: $B=\frac{\sin(2x+75^\circ)\sin(2x-75^\circ)}{\cos^2 2x\cos^2 75^\circ}$

۹۲۴- $C=\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+1$

جواب: $C=2\sqrt{2}tg7{,}5^\circ\cos15^\circ$

۹۲۵- $D=2\sin2x+2\sqrt{3}\cos2x+\sqrt{3}$

جواب: $D=4\sqrt{3}\cos x\cos(x+30^\circ)$

۹۲۶- $E=6+4\sqrt{2}$

جواب: $E=2tg^2 67{,}5^\circ$

۹۲۷- $F=5-2\sqrt{6}$

جواب: $F=tg^2 15^\circ$

۹۲۸- $L=3\sin^2(\alpha-270^\circ)-\cos^2(\alpha+270^\circ)$

جواب: $L=4\cos(30^\circ+\alpha)\cos(30^\circ-\alpha)$

مسائل متفرقه

۹۲۹ـ عبارت $(\sin A - \sin B)^2 + (\cos A + \cos B)^2$ را قابل محاسبه لگاریتمی کنید.

حل :
$$\sin^2 A + \sin^2 B - 2\sin A \sin B + \cos^2 A + \cos^2 B + 2\cos A \cos B = 2 + 2(\cos A \cos B - \sin A \sin B) = 2 + 2\cos(A+B) =$$
$$= 2[1 + \cos(A+B)] = 2[1 + 2\cos^2\frac{A+B}{2} - 1] = 4\cos^2\frac{A+B}{2}$$

ـ اگر A وB و C زوایای مثلثی باشند درستی تساویهای زیر را ثابت کنید:

۹۳۰ـ
$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

حل :
$$\text{طرف اول} = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} =$$
$$2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$\text{طرف اول} = 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right) = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

۹۳۱ـ
$$\sin A + \sin B - \sin C = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

حل:
$$\text{طرف اول} = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} =$$
$$2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$\text{طرف اول} = 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right) = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

۹۳۲ـ
$$\sin B + \sin C - \sin A = 4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}$$

-۹۳۳ $\sin A+\sin C-\sin B=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}$

-۹۳۴ $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

حل: $\text{طرف اول}=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}=$

$2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}$

$\text{طرف اول}=2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)+1=$

$2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)+1$

$\text{طرف اول}=4\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+1$

-۹۳۵ $\cos A+\cos C-\cos B=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}-1$

-۹۳۶ $\cos B+\cos C-\cos A=4\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}-1$

-۹۳۷ $\sin 2A+\sin 2C-\sin 2B=4\cos A\cos C\sin B$

-۹۳۸ $\sin 2A+\sin 2B-\sin 2C=4\cos A\cos B\sin C$

-۹۳۹ $\sin 2B+\sin 2C-\sin 2A=4\cos B\cos C\sin A$

-۹۴۰ $tg A+tg B+tg C=tg A\,tg B\,tg C$

$A+B+C=\pi\Longrightarrow A+B=\pi-C$

$tg(A+B)=tg(\pi-C)\quad tg(A+B)=-tg C$

$\frac{tg A+tg B}{1-tg A\,tg B}=-tg C\Longrightarrow tg A+tg B=-tg C+tg A\,tg B\,tg C$

حل: $tg A+tg B+tg C=tg A\,tg B\,tg C$

-۹۴۱ $tg 2A+tg 2B+tg 2C=tg 2A\,tg 2B\,tg 2C$

حل: $A+B+C=180^\circ\Longrightarrow 2A+2B+2C=360^\circ=2\pi$

$2A+2B=2\pi-2C\Longrightarrow tg(2A+2B)=tg(2\pi-2C)$

$$tg(۲A+۲B)=-tg۲C$$

$$\frac{tg۲A+tg۲B}{۱-tg۲A\,tg۲B}=-tg۲C$$

$$tg۲A+tg۲B=-tg۲C+tg۲A\,tg۲B\,tg۲C$$

$$tg۲A+tg۲B+tg۲C=tg۲A\,tg۲B\,tg۲C$$

۹۴۲- $$cotgA\,cotgB+cotgA\,cotgC+cotgB\,cotgC=۱$$

$$\text{طرف اول}=\frac{۱}{tgA\,tgB}+\frac{۱}{tgA\,tgC}+\frac{۱}{tgB\,tgC}=\frac{tgC+tgB+tgA}{tgA\,tgB\,tgC}$$

طبق حل مسأله ۹۴۰ صفحه ۲۴۲ صورت کسر برابر $tgA\,tgB\,tgC$ می‌باشد پس کسر مساوی یك میشود.

۹۴۳- $$cotg\frac{A}{۲}+cotg\frac{B}{۲}+cotg\frac{C}{۲}=cotg\frac{A}{۲}\,cotg\frac{B}{۲}\,cotg\frac{C}{۲}$$

حل :

$$A+B+C=\pi\Longrightarrow\frac{A}{۲}+\frac{B}{۲}+\frac{C}{۲}=\frac{\pi}{۲}\Longrightarrow\frac{A+B}{۲}=\frac{\pi}{۲}-\frac{C}{۲}$$

وبنابراین $tg\frac{A+B}{۲}=cotg\frac{C}{۲}$ ورابطه فوق بصورت زیردرمیآید :

$$\frac{tg\frac{A}{۲}+tg\frac{B}{۲}}{۱-tg\frac{A}{۲}\,tg\frac{B}{۲}}=cotg\frac{C}{۲}\Longrightarrow\frac{cotg\frac{B}{۲}+cotg\frac{A}{۲}}{cotg\frac{A}{۲}\,cotg\frac{B}{۲}-۱}=cotg\frac{C}{۲}$$

$$cotg\frac{B}{۲}+cotg\frac{A}{۲}=cotg\frac{A}{۲}\,cotg\frac{B}{۲}\,cotg\frac{C}{۲}-cotg\frac{C}{۲}$$

$$cotg\frac{B}{۲}+cotg\frac{A}{۲}+cotg\frac{C}{۲}=cotg\frac{A}{۲}\,cotg\frac{B}{۲}\,cotg\frac{C}{۲}$$

۹۴۴- $$tg\frac{A}{۲}tg\frac{B}{۲}+tg\frac{A}{۲}tg\frac{C}{۲}+tg\frac{B}{۲}tg\frac{C}{۲}=۱$$

حل-

$$\text{طرف اول} = \frac{1}{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2}} + \frac{1}{\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}} = .$$

$$\text{طرف اول} = \frac{\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{A}{2}}{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}.$$

طبق مسئله ۹۴۲ صفحه ۲۴۳ صورت کسر فوق بصورت $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2}\cot\frac{B}{2}$ درمیاید در نتیجه حاصل کسر مساوی یك خواهد شد. (طبق مساله ۹۴۲ هم می‌توان حل کرد)

۹۴۵- $\operatorname{tg} mA+\operatorname{tg} mB+\operatorname{tg} mC=\operatorname{tg} mA\times\operatorname{tg} mB\times\operatorname{tg} mC$

(m عدد صحیح است)

حل - داریم $mA+mB+mC=m(A+B+C)=m\pi$

$mB+mC=m(\pi-A)$

$\operatorname{tg}(mB+mC)=\operatorname{tg}(m\pi-mA)=-\operatorname{tg} mA$

$$\frac{\operatorname{tg} mB+\operatorname{tg} mC}{1-\operatorname{tg} mB\times\operatorname{tg} mC}=-\operatorname{tg} mA$$

$\operatorname{tg} mB+\operatorname{tg} mC=-\operatorname{tg} mA+\operatorname{tg} mA\operatorname{tg} mB\operatorname{tg} mC$

$\operatorname{tg} mA+\operatorname{tg} mB+\operatorname{tg} mC=\operatorname{tg} mA\operatorname{tg} mB\operatorname{tg} mC$

۹۴۶- $\cot mB\times\cot mC+\cot mC\times\cot mA+\cot mA\times\cot mB=1$

۹۴۷- $$\frac{\cot B+\cot C}{\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C}+\frac{\cot C+\cot A}{\operatorname{tg} C+\operatorname{tg} A}+\frac{\cot A+\cot B}{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B}=1$$

حل: $$\frac{\cot B+\cot C}{\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C}=\frac{\cot B+\cot C}{\frac{1}{\cot B}+\frac{1}{\cot C}}=\frac{\cot B+\cot C}{\frac{\cot B+\cot C}{\cot B\cot C}}=\cot B\cot C$$

پس مساله بصورت زیردر میاید:

$\cot B\cot C+\cot A\cot C+\cot A\cot B=1$

طبق حل مسئله صفحه ۲۴۳ طرف اول این رابطه مساوی یک میباشد.

-۹۴۸

$$S=\frac{1-tgB\,tgC}{\cos^2A}+\frac{1-tgC\,tgA}{\cos^2B}+\frac{1-tgA\,tgB}{\cos^2C}=\frac{-2}{\cos A\cos B\cos C}$$

-۹۴۹ $$\cos 4A+\cos 4B+\cos 4C=4\cos 2A\cos 2B\cos 2C-1$$

-۹۵۰ $$\sin 4A+\sin 4B+\sin 4C=-4\sin 2A\sin 2B\sin 2C$$

-۹۵۱ $$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}$$

-۹۵۲ $$\cos^3A+\cos^3C+2\cos A\cos B\cos C=$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 2A\cos 2B\cos 2C+1)$$

-۹۵۳ $$\sin^3A\cos(B-C)+\sin^3B\cos(C-A)+\sin^3C\cos(A-B)=$$

$$=3\sin A\sin B\sin C$$

-۹۵۴ $$\frac{tgB+tgC}{\sin 2A}=\frac{tgC+tgA}{\sin 2B}=\frac{tgA+tgB}{\sin 2C}$$

حل: $$=\frac{\frac{\sin(B+C)}{\cos B\cos C}}{\sin 2A}=\frac{\frac{\sin A}{\cos B\cos C}}{2\sin A\cos A}=\frac{1}{2\cos A\cos B\cos C}=$$ کسر اول

$$\frac{\sin B}{2\sin B\cos B\cos A\cos C}=\frac{\sin(A+C)}{\sin 2B\cos A\cos C}$$

کسر اول $$=\frac{\sin A\cos C}{\sin 2B\cos A\cos C}+\frac{\sin C\cos A}{\sin 2B\cos A\cos C}$$

کسر اول $$=\frac{tgA}{\sin 2B}+\frac{tgC}{\sin 2B}=\frac{tgA+tgC}{\sin 2B}$$

و بهمین ترتیب ثابت میشود که کسر دوم نیز مساوی کسر سوم است

-۹۵۵ $$1+\frac{\sin C\cos B}{\sin A\sin^2B}+\frac{\sin A\cos C}{\sin B\sin^2C}+\frac{\sin B\cos A}{\sin C\sin^2A}=$$

$$=(\cot gA+\cot gB+\cot gC)^2$$

$$\text{طرف اول} = 1 + \frac{\sin(A+B)\cos B}{\sin A \sin^2 B} + \frac{\sin(B+C)\cos C}{\sin B \sin^2 C} + \frac{\sin(A+C)\cos A}{\sin C \sin^2 A}$$

$$\text{طرف اول} = 1 + \frac{(\sin A\cos B + \sin B\cos A)\cos B}{\sin A \sin^2 B} +$$

$$\frac{(\sin B\cos C + \sin C\cos B)\cos C}{\sin B \sin^2 C} + \frac{(\sin A\cos C + \sin C\cos A)\cos A}{\sin C \sin^2 A}$$

$$\text{طرف اول} = 1 + \frac{\sin A\cos^2 B}{\sin A\sin^2 B} + \frac{\sin B\cos B\cos A}{\sin A\sin^2 B} + \frac{\sin B\cos^2 C}{\sin B\sin^2 C} +$$

$$+ \frac{\sin C\cos C\cos B}{\sin B\sin^2 C} + \frac{\sin A\cos C\cos A}{\sin C\sin^2 A} + \frac{\sin C\cos^2 A}{\sin C\sin^2 A}$$ -۹۵۶

$$\text{طرف اول} = 1 + \cot g^2 B + \cot g B \cot g A + \cot g^2 C + \cot g B \cot g C +$$

$$\cot g A \cot g C + \cot g^2 A$$

اگر طبق مساله پانزده صفحه ۲۱ بجای عدد یك مساویش را قراردهیم وخلاصه کنیم طرف دوم تساوی بدست میآید :

-۹۵۷ $\sin A\cos B\cos C + \sin B\cos C\cos A + \sin C\cos A\cos B = \sin A\sin B\sin C$

-۹۵۸ $\cos A\sin B\sin C + \cos B\sin A\sin C + \cos C\sin A\sin B = 1 + \cos A\cos B\cos C$

-۹۵۹ $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A\cos B\cos C)$

-۹۶۰ $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2\sin A\sin B\cos C$

-۹۶۱ $1 + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -4\cos A\cos B\cos C$

-۹۶۲ $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$

-۹۶۳ $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A\cos B\cos C)$

-۹۶۴ $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = 1 - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

-۹۶۵ $\frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} = tg\frac{A}{2}\, tg\frac{B}{2}$

۹۶۶- $\cos^2(\frac{2\pi}{3}-A)+\cos^2(\frac{2\pi}{3}-B)+\cos^2(\frac{2\pi}{3}-C)=$

$$1-2\cos(\frac{2\pi}{3}-A)\cos(\frac{2\pi}{3}-B)\cos(\frac{2\pi}{3}-C)$$

۹۶۷- مطلوبست محاسبه حد عبارت زیر وقتی که n به سمت بینهایت میل کند.

$$A=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^n}$$

حل : از رابطه $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ نتیجه میشود:

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}} \text{ و } \cos\frac{x}{4}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{4}} \text{ و } \cos\frac{x}{8}=\frac{\sin\frac{x}{4}}{2\sin\frac{x}{8}}$$

حال اگر در مساله بجای $\cos\frac{x}{2}$ و $\cos\frac{x}{4}$ و ...... و $\cos\frac{x}{2^n}$ مساویشان را قرار دهیم نتیجه میشود :

$$A=\frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}\times\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{4}}\times\frac{\sin\frac{x}{4}}{2\sin\frac{x}{8}}\times\cdots\times\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$A=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}\times\frac{x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}\times\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}$$

وقتی n بسمت بی نهایت میل میکند $\frac{x}{2^n}$ بسمت صفر میل میکند و در نتیجه :

$\dfrac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}$ به سمت یك میل می‌نماید.

پس : $A=\dfrac{\sin x}{x}$

مطلوبست حاصل هریك ازعبارات زیر :

۹۶۸- $A=\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots\cdots+\sin nx$

حل : دو طرف تساوی را در $2\sin\frac{x}{2}$ ضرب می‌کنیم

$$2A\sin\frac{x}{2}=2\sin x\sin\frac{x}{2}+2\sin 2x\sin\frac{x}{2}\qquad+2\sin nx\sin\frac{x}{2}$$

$$2A\sin\frac{x}{2}=\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{5x}{2}+\cdots\cdots$$

$$+\cos\frac{(2n-1)x}{2}-\cos\frac{(2n+1)x}{2}$$

$$2A\sin\frac{x}{2}=\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{(2n+1)x}{2}=2\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}$$

$$A=\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}\div\sin\frac{x}{2}$$

۹۶۹- $B=\cos x+2\cos 2x+3\cos 3x+\cdots+n\cos nx$

حل : اگر از رابطهٔ مسأله قبل نسبت به x مشتق بگیریم مشتق بدست آمده مساوی B میباشد پس از خلاصه شدهٔ عبارت A مشتق میگیریم : $B=A'=$

$$\frac{\left[\frac{(n+1)}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}+\frac{n}{2}\cos\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}\right]\sin\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$\frac{\frac{۱}{۲}\cos\frac{x}{۲}\sin\frac{(n+۱)x}{۲}\sin\frac{nx}{۲}}{\sin^{۲}\frac{x}{۲}}$$

$$B=A'=\left[n\sin\frac{(۲n+۱)x}{۲}\sin\frac{x}{۲}-\sin^{۲}\frac{nx}{۲}\right]\div\sin^{۲}\frac{x}{۲}$$

-۹۷۰ $C=\cos^{۲}x+\cos^{۲}۲x+\cos^{۲}۳x+\cdots\cdots+\cos^{۲}nx$

حل:

$$C=\frac{۱+\cos ۲x}{۲}+\frac{۱+\cos ۴x}{۲}+\frac{۱+\cos ۶x}{۲}+\cdots\cdots+\frac{۱+\cos ۲nx}{۲}$$

$$C=\frac{n+\cos ۲x+\cos ۴x+\cos ۶x+\cdots\cdots+\cos ۲nx}{۲}$$

دوطرف تساوی را در $۲\sin x$ ضرب می‌نمائیم:

$$۴C\sin x=۲n\sin x+۲\sin x\cos ۲x+۲\sin x\cos ۴x+\cdots\cdots$$
$$+۲\sin x\cos ۲nx$$

$$۴C\sin x=۲n\sin x+\sin ۳x-\sin x+\sin ۵x-\sin ۳x+$$
$$\sin ۷x-\sin ۵x+\cdots\cdots+\sin(۲n+۱)x-\sin(۲n-۱)x$$

$$۴C\sin x=۲n\sin x+\sin(۲n+۱)x-\sin x$$

$$۴C\sin x=۲n\sin x+۲\sin nx\cos(n+۱)x$$

$$C=\frac{n\sin x+\sin nx\cos(n+۱)x}{۲\sin x}$$

-۹۷۱ $D=\cos a+\cos ۲a+\cos ۳a+\cos ۴a+\cdots\cdots+\cos na$

جواب: $D=\cos\frac{(n+۱)a}{۲}\sin\frac{na}{۲}\div\sin\frac{a}{۲}$

-۹۷۲

$$E=\cos x+\cos(x+a)+\cos(x+۲a)+\cdots\cdots+\cos(x+na)$$

-۹۷۳

$$F=\sin^{۲}a+\sin^{۲}۲a+\sin^{۲}۳a+\sin^{۲}۴a+\cdots\cdots+\sin^{۲}ma$$

حل: میدانیم

$$\sin^{۲}a=\frac{۱-\cos ۲a}{۲}\text{ و }\sin^{۲}۲a=\frac{۱-\cos ۴a}{۲}\text{ و }\sin^{۲}n\,a=\frac{۱-\cos ۲na}{۲}$$

اگر بجای $\sin^2\alpha$ و $\sin^2 2\alpha$ و ... مساویشان را قرار دهیم نتیجه میشود:

$$F = -\sin n\alpha \cos(n+1)\alpha \div 2\sin\alpha$$

۹۷۴- $M = \cos^2\alpha + \cos^2 2\alpha + \cos^2 3\alpha + \cdots + \cos^2 n\alpha$

۹۷۵- $N = \sin^2 a + \sin^2 2a + \sin^2 3a + \cdots + \sin^2 na$

۹۷۶- $K = \sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) + \cdots + \sin(a+nb)$

فرمولهای مثلثاتی زیر را بخاطر بسپارید :

$2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$ و $2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$

$$2\sin a\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

درستی تساوی‌های زیر را تحقیق کنید:

۹۷۷- دبیرستان نوباوگان ضرابی $\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}$

حل صورت ومخرج اول رادر $2\sin\frac{\pi}{5}$ ضرب می‌نمائیم :

$$\text{طرف اول} = \frac{2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} + 2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}} =$$

$$\frac{\sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{4\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\sin(\pi - \frac{\pi}{5})}{2\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\sin\frac{\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{1}{2}$$

۹۷۸- $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$

حل: صورت و مخرج کسر طرف اول را در $2\sin\frac{\pi}{7}$ ضرب می‌نمائیم :

$$\text{طرف اول} = \frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$\text{طرف اول} = \frac{\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7} + \sin\pi - \sin\frac{5\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{2}$$

۹۷۹- $\cos\frac{\pi}{17} + \cos\frac{3\pi}{17} + \cos\frac{5\pi}{17} + \cdots\cdots + \cos\frac{15\pi}{17} = \frac{1}{2}$

حل :

$$\text{طرف اول} = \frac{2\sin\frac{\pi}{17}\cos\frac{\pi}{17} + 2\sin\frac{\pi}{17}\cos\frac{3\pi}{17} + 2\sin\frac{\pi}{17}\cos\frac{5\pi}{17} + \quad +}{2\sin\frac{\pi}{17}}$$

$$\frac{+2\sin\frac{\pi}{17}\cos\frac{15\pi}{17}}{2\sin\frac{\pi}{17}}$$

$$\text{طرف اول} = \frac{\sin\frac{2\pi}{17} + \sin\frac{4\pi}{17} - \sin\frac{2\pi}{17} + \sin\frac{6\pi}{17} - \sin\frac{4\pi}{17} + \quad +}{2\sin\frac{\pi}{17}}$$

$$\frac{+\sin\frac{16\pi}{17} - \sin\frac{14\pi}{17}}{2\sin\frac{\pi}{17}}$$

$$\text{طرف اول} = \frac{\sin\frac{16\pi}{17}}{2\sin\frac{\pi}{17}} = \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{17}\right)}{2\sin\frac{\pi}{17}} = \frac{\sin\frac{\pi}{17}}{2\sin\frac{\pi}{17}} = \frac{1}{2}$$

۹۸۰ـ $\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cdots\cdots+\cos\frac{11\pi}{13}=\frac{1}{2}$

۹۸۱ـ $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$

۹۸۲ـ $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$

۹۸۳ـ $\frac{1}{\sin 45^\circ}-\frac{1}{\sin 90^\circ}-\frac{1}{\sin 67/5^\circ}=-\,tg\frac{3\pi}{16}$

حل:

$$\text{طرف اول}=\sqrt{2}-1-\frac{1}{\sin 67/5^\circ}=cotg\,67/5^\circ-\frac{1}{\sin 67/5^\circ}=\frac{\cos 67/5^\circ-1}{\sin 67/5^\circ}$$

$$\text{طرف اول}=\frac{1-2\sin^2\frac{3\pi}{16}-1}{2\sin\frac{3\pi}{16}\cos\frac{3\pi}{16}}=-\,tg\frac{3\pi}{16}$$

۹۸۴ـ $cosec\,45^\circ-cosec\,90^\circ+cosec\,67/5^\circ=cotg\,33/75^\circ$

۹۸۵ـ $cosec\,90^\circ+cosec\,45^\circ+cosec\,22/5^\circ=cotg\frac{\pi}{16}$

۹۸۶ـ $tg\,60^\circ+4\cos 60^\circ+cosec\,15^\circ=cotg\,7/5^\circ$

۹۸۷ـ $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}=\frac{1}{16}$

حل ـ صورت ومخرج طرف اول‌را در $2\sin\frac{\pi}{5}$ ضرب کرده و سپس از فرمول $a\sin x\cos x=\frac{a}{2}\sin 2x$ استفاده می‌کنیم:

$$\text{طرف اول}=\frac{2\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{\frac{1}{4}\sin\frac{8\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\sin\left(\pi+\frac{3\pi}{5}\right)\cos\frac{3\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{-\frac{1}{4}\sin\frac{3\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}$$

$$=\frac{-\frac{1}{8}\sin\frac{6\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)}{16\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{16\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{1}{16}$$

۹۸۸- $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{8}$

۹۸۹- $\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5}=\frac{5}{16}$

حل: اگر بجای هریک از جملات کسینوس متمم آنرا قرار دهیم نتیجه میشود :

طرف اول $=\cos\frac{3\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(-\frac{3\pi}{10}\right)=\cos^2\frac{3\pi}{10}\cos^2\frac{\pi}{10}$

طرف اول $=\frac{1+\cos\frac{3\pi}{5}}{2}\times\frac{1+\cos\frac{\pi}{5}}{2}=\frac{1+\cos\frac{3\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}}{4}$

صورت $=1+2\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}=1+\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}$

صورت $=1+\frac{2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}=1+\frac{\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}$

$$\text{صورت} = ۱+\frac{\frac{۱}{۲}\sin\frac{۴\pi}{۵}}{۲\sin\frac{\pi}{۵}} = ۱+\frac{۱}{۴}=\frac{۵}{۴} \Longrightarrow \text{طرف اول} = \frac{\frac{۵}{۴}}{۴}=\frac{۵}{۱۶}$$

۹۹۰- $\sin\frac{\pi}{۱۴}\sin\frac{۵\pi}{۱۴}\sin\frac{۷\pi}{۱۴}=\frac{۱}{۸}$

۹۹۱- $\cos\frac{\pi}{۲K+۱}\cos\frac{۲\pi}{۲K+۱}\cdot\cos\frac{۳\pi}{۲K+۱}\cdots\cdots\cos\frac{K\pi}{۲K+۱}=\frac{۱}{۲k}$

حاصل عبارت زیر را از روی دستور بالا بدست آورید :

۹۹۲- $A=\cos\frac{\pi}{۹}\cos\frac{۲\pi}{۹}\cos\frac{۳\pi}{۹}\cos\frac{۴\pi}{۹}$

درستی تساوی‌های زیر را تحقیق کنید .

راهنمائی : مسائل زیر را ابتدا بر حسب کسینوس دو برابر قوس نوشته و سپس مطابق مسائل (۹۷۷ و ۹۷۸ وغیره) عمل می‌نمائیم :

۹۹۳- $\cos^۲\frac{\pi}{۱۰}+\cos^۲\frac{۳\pi}{۱۰}=\frac{۵}{۴}$

۹۹۴- $\cos^۲\frac{\pi}{۷}+\cos^۲\frac{۲\pi}{۷}+\cos^۲\frac{۳\pi}{۷}=\frac{۵}{۴}$

۹۹۵- $\sin^۲\frac{\pi}{۷}+\sin^۲\frac{۲\pi}{۷}+\sin^۲\frac{۳\pi}{۷}=\frac{۷}{۴}$

۹۹۶- $\sin^۲\frac{\pi}{۲۲}+\sin^۲\frac{۳\pi}{۲۲}+\sin^۲\frac{۵\pi}{۲۲}+\cdots\cdots+\sin^۲\frac{۹\pi}{۲۲}=\frac{۹}{۴}$

۹۹۷- $\cos^۴\frac{\pi}{۸}+\cos^۴\frac{۳\pi}{۸}+\cos^۴\frac{۵\pi}{۸}+\cos^۴\frac{۷\pi}{۸}=\frac{۳}{۲}$

۹۹۸- $\sin^۴\frac{\pi}{۸}+\sin^۴\frac{۳\pi}{۸}+\sin^۴\frac{۵\pi}{۸}+\sin^۴\frac{۷\pi}{۸}=\frac{۳}{۲}$

بدون استفاده از جدول مقدار عددی هر یك از عبارات زیر را بدست آورید :

	جواب	صورت
۹۹۹-	$A=\frac{-\sqrt{6}}{2}$	$A=\sin 195^\circ+\cos 195^\circ$
۱۰۰۰-	$B=-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$B=\sin 255^\circ-\cos 255^\circ$
۱۰۰۱-	$C=4$	$C=\operatorname{cosec} 10^\circ-\sqrt{3}\operatorname{Sec} 10^\circ$
۱۰۰۲-	$D=\frac{1}{16}$	$D=\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$
۱۰۰۳-	$E=1$	$E=\operatorname{cotg} 18^\circ \operatorname{cotg} 36^\circ \operatorname{cotg} 42^\circ \operatorname{cotg} 78^\circ$
۱۰۰۴-	$F=\frac{1}{16}$	$F=\sin 15^\circ \sin 25^\circ \sin 35^\circ \sin 85^\circ$
۱۰۰۵-	$H=1$	$H=\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 80^\circ$
۱۰۰۶-	$L=1$	$L=\operatorname{tg} 6^\circ \operatorname{cotg} 48^\circ \operatorname{tg} 66^\circ \operatorname{cotg} 12^\circ$
۱۰۰۷-	$K=\frac{1}{8}$	$K=\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{4}$
۱۰۰۸-	$P=\frac{-1}{2}$	$P=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$
۱۰۰۹-	$Q=\frac{-1}{16}$	$Q=\cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ \cos 96^\circ$
۱۰۱۰-	$U=\frac{1}{5}$	$U=\operatorname{cotg}\frac{\pi}{5}\operatorname{cotg}\frac{2\pi}{5}\operatorname{cotg}\frac{3\pi}{5}\operatorname{cotg}\frac{4\pi}{5}$
۱۰۱۱-	$W=1$	$W=2\cos 25^\circ \cos 40^\circ \cos 65^\circ-\sin 10^\circ$
۱۰۱۲-	$V=1$	$V=\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 30^\circ+\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ+\operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 40^\circ$
۱۰۱۳-		$x=\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 20+\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 60^\circ+\operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 10^\circ$

جواب: $x=1$

۱۰۱۴- $y = (۱ + \cos\frac{۷\pi}{۸})(۱ + \cos\frac{۵\pi}{۸})(۱ + \cos\frac{۳\pi}{۸})(۱ + \cos\frac{\pi}{۸})$

جواب: $y = \frac{۱}{۸}$

۱۰۱۵- $G = \cos\frac{\pi}{۱۱} + \cos\frac{۳\pi}{۱۱} + \cos\frac{۵\pi}{۱۱} + \cos\frac{۷\pi}{۱۱} + \cos\frac{۹\pi}{۱۱}$

جواب $G = \frac{۱}{۲}$

۱۰۱۶- $Z = \sin^۴\frac{۷\pi}{۸} + \sin^۴\frac{۵\pi}{۸} + \sin^۴\frac{۳\pi}{۸} + \sin^۴\frac{\pi}{۸}$

جواب: $Z = ۱/۵$

ثابت کنید که عبارات زیر به x و y بستگی ندارند:

۱۰۱۷- $A = \cos ۲x \cos(۲x + ۴۰۵^\circ) - \sin ۲x \cos(۲x + ۱۳۵^\circ)$

۱۰۱۸- $D = \cos(\frac{x}{۲} + \frac{۲\pi}{۵})\cos(\frac{x}{۲} - \frac{۲\pi}{۵}) - \sin^۲(\frac{\pi}{۲} + \frac{x}{۲})$

۱۰۱۹- $C = \left(\frac{\sin ۳x \cos x + \sin ۳x \cos x}{\cos ۵x \cos x + \sin ۵x \sin x}\right)^۲ - \frac{۱}{tg^۲ ۴x}$

جواب: $C = -۱$

۱۰۲۰-

$D = \frac{۵ tg x\, tg ۲[illegible]}{tg^۲ x + [illegible]} [illegible] + \frac{\sin(x - ۲y)}{\cos x \sin ۲y}]$

۱۰۲۱- $E = ۲\sin(x + ۶[illegible]) - [illegible] - \sin ۲x$

۱۰۲۲- $H = \sin^۲(x + ۶[illegible]) - [illegible] + \sin^۲(x - ۶۰^\circ)$

جواب. $H = ۱/۵$

۱۰۲۳- $I = (۲\cos x + ۱)(۲\cos x - ۱)(۲\cos ۲x - ۱) - ۲\cos ۴x$

جواب: $I = ۱$

۱۰۲۴- $G = ۴(\sin^۶ x + \cos^۶ x) - ۳\cos^۲ ۲x$

جواب: $G = ۱$

$$H=\frac{cotg\,x}{cotg\,x-cotg\,۲x}+\frac{tg\,x}{tg\,x-tg\,۲x}$$ ج: $H=۱$ ۱۰۲۵-

$$X=\cos^۲(a-x)+\cos^۲x-۲\cos a\cos x\cos(a-x)$$ ۱۰۲۶-

$$F=[tg(y+۶۰^\circ)-tg(۲۴۰^\circ-y)](cotg\,y-۳tg\,y)$$ ۱۰۲۷-

۱۰۲۸-

$$K=\frac{۲\sin(x+۴۵^\circ)}{\cos x}-\frac{۲\cos(۱۳۵^\circ-x)}{\sin x}+\frac{\sqrt{۲}(\sin ۲x-۲)}{\sin ۲x}$$

۱۰۲۹-

$$L=\left[\left(\frac{\sin ۷x}{\cos ۲x}+\frac{\cos ۷x}{\sin ۲x}\right)\sin ۳x-\left(\frac{\sin ۷x}{\sin ۲x}-\frac{\cos ۷x}{\cos ۲x}\right)\cos ۳x\right]\cos ۲x\,۱-=?$$

$$M=\frac{\sin(۲x+y)-\cos ۲x\sin y}{\sin(۲x-y)+\cos ۲x\sin y}$$ ۱۰۳۰-

جواب: $M=۱$

$$P=۸(\cos^۶x+\sin^۶x)-۳\cos ۴x$$ ۱۰۳۱-

جواب: $P=۵$

$$Q=\frac{\sin ۹x}{\cos x}-۲\cos ۸x+۲\cos ۶x-۲\cos ۴x+۲\cos ۲x$$

جواب: $Q=۱$

$$Z=\cos^۲x+\cos^۲(x+۶۰^\circ)+\cos^۲(x-۶۰^\circ)$$ ۱۰۳۳-

جواب: $Z=۱/۵$

صحت روابط زیر را ثابت کنید:

$$\text{arctg}\,\frac{۱}{۳}+\text{arc tg}\,\frac{۱}{۲}=k\pi+\frac{\pi}{۴}$$ ۱۰۳۴-

$$۲\text{Arcsin}x=\text{Arcsin}[۲x\sqrt{۱-x^۲}]$$ ۱۰۳۵-

$$\text{Arc tg}x=\text{Arc tg}\frac{۲x}{۱-x^۲}$$

-۱۰۳۶ $2\operatorname{Arccos}x=\operatorname{Arccos}(2x^2-1)$

-۱۰۳۷ $3\operatorname{Arcsin}x=\operatorname{Arcsin}(3x-4x^3)$

-۱۰۳۸ $3\operatorname{Arccos}x=\operatorname{Arccos}(4x^3-3x)$

-۱۰۳۹ $3\operatorname{Arctg}x=\operatorname{Arctg}\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$

-۱۰۴۰ $\dfrac{1}{2}\operatorname{Arccos}x=\operatorname{Arcsin}\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}$

-۱۰۴۱ $\dfrac{1}{2}\operatorname{Arccos}x=\operatorname{Arccos}\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$

-۱۰۴۲ $\operatorname{Arctg}\dfrac{4}{3}+\operatorname{Arctg}7=\dfrac{3\pi}{4}$

-۱۰۴۳ $\operatorname{Arctg}1+\operatorname{Arctg}(2-\sqrt{3})=\dfrac{\pi}{3}$

-۱۰۴۴ $\operatorname{Arctg}\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\operatorname{Arctg}\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{3\pi}{4}$

-۱۰۴۵ $\operatorname{Arccotg}\dfrac{7}{5}+\operatorname{Arccotg}6=\dfrac{\pi}{4}$

-۱۰۴۶ $\operatorname{Arctg}\dfrac{5}{6}+\operatorname{Artg}\dfrac{1}{11}=\dfrac{\pi}{4}$

-۱۰۴۷ $\operatorname{Arctg}\dfrac{m}{m+1}+\operatorname{Arctg}\dfrac{1}{2m+1}=\dfrac{\pi}{4}$

-۱۰۴۸ $\operatorname{Arccotg}\dfrac{1}{3}+\operatorname{Arccotg}\dfrac{3}{4}=\operatorname{Arccotg}2$

-۱۰۴۹ $\operatorname{Arcsin}\dfrac{2mn}{m^2+n^2}+\operatorname{Arcsin}\dfrac{m^2-n^2}{m^2+n^2}=\dfrac{\pi}{2}$

-۱۰۵۰ $\operatorname{Arccos}\sqrt{\dfrac{2}{3}}-\operatorname{Arccos}\dfrac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\pi}{6}$

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=k\pi+\frac{\pi}{4}$$ -۱۰۵۱

$$2\operatorname{Arcsin}x=\operatorname{Arcsin}\left[2x\sqrt{1-x^2}\right]$$ -۱۰۵۲

$$2\operatorname{Arctg}x=\operatorname{Arctg}\frac{2x}{1-x^2}$$ -۱۰۵۳

$$2\operatorname{Arccos}x=\operatorname{Arccos}(2x^2-1)$$ -۱۰۵۴

$$3\operatorname{Arcsin}x=\operatorname{Arcsin}(3x-4x^3)$$ -۱۰۵۵

$$3\operatorname{Arccos}x=\operatorname{Arccos}(4x^3-3x)$$ -۱۰۵۶

$$3\operatorname{Arctg}x=\operatorname{Artg}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$$ -۱۰۵۷

$$\frac{1}{2}\operatorname{Arccos}x=\operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{1-x}{2}}$$ -۱۰۵۸

$$\frac{1}{2}\operatorname{Arccos}x=\operatorname{Arccos}\sqrt{\frac{1+x}{2}}$$ -۱۰۵۹

-۱۰۶۰

$$\operatorname{Arccos}\frac{4}{5}+\operatorname{Arcsin}\frac{5}{13}+\operatorname{Arcsin}\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{Arc\,tg}\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\operatorname{Arc\,tg}\frac{24}{7}=\frac{1}{3}\operatorname{Arctgcos}\left(\frac{-44}{125}\right)$$ -۱۰۶۱

$$2\operatorname{Arctg}\frac{2}{3}-\operatorname{Arsin}\frac{3}{5}=\operatorname{Arcsin}\frac{33}{65}$$ -۱۰۶۲

$$\operatorname{Arc\,tg}\frac{2}{3}+\operatorname{Arctg}\frac{3}{4}-\operatorname{Arctg}\frac{11}{23}=\frac{\pi}{4}$$ -۱۰۶۳

$$\operatorname{Arctg}m+\operatorname{arctg}n=\operatorname{Arccos}\sqrt{\frac{1-mn}{(1+m^2)(1+n^2)}}$$ -۱۰۶۴

$$\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{4}+\operatorname{Arc\,tg}\frac{2}{9}+\operatorname{Arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{Arctg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$ -۱۰۶۵

-۱۰۶۶ $\frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}\frac{4}{5}+\operatorname{Arctg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$

-۱۶۰۷ $\operatorname{Arcsin}x-\operatorname{Arcsin}y=$

$$\operatorname{Arccos}\sqrt{1-x^2-y^2+x^2y^2}+xy$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{cotg}A)-\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}A)=k\pi+\frac{\pi}{2}-2A$$

معادلات زیر را حل کنید:

-۱۰۶۸ $\operatorname{Arcsin}\frac{x}{2}=30^\circ$

$$\operatorname{Arctg}x+2\operatorname{Arctg}\frac{1}{x}=\frac{3\pi}{4}$$

-۱۰۶۹ $\operatorname{Arcsin}x+2\operatorname{Arccos}x=\frac{2\pi}{3}$

-۱۰۷۰ $\operatorname{Arcsin}x+3\operatorname{Arccos}x=\frac{7\pi}{6}$

۱۰۷۱- مطلوب است حل معادلهٔ:

$$\operatorname{Arctg}(x+1)+\operatorname{Arccotg}(x-1)=$$

$$\operatorname{Arcsin}\frac{4}{5}+\operatorname{Arccos}\frac{3}{5}$$

۱۰۷۲- هرگاه $tg\,x=$ ۰/۳۶۷۳۵ باشد مطلوبست محاسبه $tg\,2x$

جواب: $tg\,2x=$ ۰/۸۴۹۲

۱۰۷۳- هرگاه $cotg\,x=$ ۰/۳۶۷۳۵ باشد مطلوبست محاسبه $tg\,2x$

جواب: $tg\,2x=$ ۱/۱۷۷۶

در صورتیکه $\sin x=\frac{3}{5}$ و $\cos y=\frac{12}{13}$ و x و y زوایای حاده باشند مطلوب است

محاسبه:

-۱۰۷۴ $\sin(x+y)$ جواب: $\frac{56}{65}$

-۱۰۷۵ $\sin(x-y)$ « $\frac{۱۶}{۶۵}$

-۱۰۷۶ $\cos(x+y)$ « $\frac{۳۳}{۶۵}$

-۱۰۷۷ $\cos(x-y)$ « $\frac{۶۳}{۶۵}$

-۱۰۷۸ $tg(x+y)$ « $\frac{۵۶}{۳۳}$

-۱۰۷۹ $tg(x-y)$ « $\frac{۱۶}{۳۳}$

-۱۰۸۰ هرگاه $tg\,y = \frac{a}{۱+a}$ و $tg\,x = ۱$ باشد مطلوبست محاسبهٔ $tg(x-y)$ « ۱

مسائل صفحه ۱۳۷ کتاب درسی

به کمک زاویه معینی عبارت زیر را قابل محاسبه بوسیله لگاریتم نمائید.

۱۰۸۱ ك ۱- $A = ۱ + \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

حل: $A = ۱ + \cos ۴۵° = ۱ + ۲\cos^۲ ۲۲/۵° - ۱ = ۲\cos^۲ ۲۲/۵°$

۱۰۸۲ ك ۲- $B = \sqrt{۳} + \sqrt{۲}$

حل: $B = ۲\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = ۲(\sin ۶۰° + \sin ۴۵°) =$

$۲\sin ۵۲/۵° \cos ۷/۵°) = ۴\sin ۵۲/۵° \cos ۷/۵°$

۱۰۸۳ ك ۳- $= ۲ - \sqrt{۳}$

حل: $C = ۲\left(۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = ۲(۱ - \cos ۳۰°)$

$C = ۲(۱ - ۱ + ۲\sin^۲ ۱۵°) = ۴\sin^۲ ۱۵°$

۱۰۸۴ ك ۴- $D = \cos a + \sqrt{۳}\sin a$

حل: $D = \cos a + \frac{\sin ۶۰°}{\cos ۶۰°}\sin a = \frac{\cos a \cos ۶۰° + \sin a \sin ۶۰°}{\cos ۶۰°}$

$D = 2\cos(a - 60^\circ) = 2\sin(a + 30^\circ)$

۱۰۸۵ ك هـ $E = \sqrt{5} + 2$

حل: $E = 2(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}) = 2(tg45^\circ + tg\alpha) = \frac{2\sin(45^\circ + \alpha)}{\cos45^\circ \cos a}$

۱۰۸۶ ك ۶ـ در صورتی که داشته باشیم: $a = \sqrt{3}$ و $b = \sqrt{2}$ ، مقدار کمان x را از رابطه $tg2x = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b}$ حساب کنید.

حل: $tg2x = \frac{a}{b}(1 + \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}})$

$$tg2x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{3}}) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(1 + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}) = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

$$tg2x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{10}}{2} = \frac{2.449 + 3.166}{2} = \frac{5.615}{2} = 2.8075$$

$$tg2x = tg70.5^\circ \Longrightarrow x = 23.5^\circ \Longrightarrow x = K \times 60^\circ + 23.5^\circ$$

۱۰۸۷ ك ۷ـ ریشه معادله $x^2 - 155x + 343.1 = 0$ را بوسیله لگاریتم حساب کنید:

حل:

$$x = \frac{155 \pm \sqrt{155^2 - 1372.4}}{2} = \frac{155}{2}(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1372.4}{155^2}})$$

حال اگر فرض کنیم $\sin^2\alpha = \frac{1372.4}{155^2}$ داریم:

$$x = \frac{155}{2}(1 \pm \cos\alpha) \Longrightarrow x' = 155\sin^2\frac{\alpha}{2} \quad و \quad x'' = 155\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

۱۰۸۸ ك ۸ـ کمان x را از رابطه زیر حساب کنید:

$0.5\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

حل: $\cos x = 3 \pm \sqrt{7} = 3(1 \pm \frac{\sqrt{7}}{3})$

چون $\cos x$ مساوی $2(1+\frac{\sqrt{7}}{2})$ نمی‌تواند باشد اگر $\frac{\sqrt{7}}{2}$ مساوی $\cos\alpha$ فرض کنیم نتیجه می‌شود.

$$\cos x = 2\left(1-\frac{\sqrt{7}}{2}\right) = 2(1-\cos\alpha) = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

۱۰۸۹ ك ۹ـ اگر $\frac{4(a-b)\sqrt{ab}}{(a+b)^2}$ باشد وفرض کنیم که $tg^2\alpha = \frac{b}{a}$ مقدار $\sin x$ را قابل محاسبه بوسیله لگاریتم کنید زاویه x را برحسب α بدست آورید.

حل:

$$\sin x = \frac{4a^2\left(1-\frac{b}{a}\right)\sqrt{\frac{b}{a}}}{a^2\left(1+\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{4(1-tg^2\alpha)tg\alpha}{(1+tg^2\alpha)^2}$$

$$\sin x = 4\,tg\alpha\cos^2\alpha\cos 2\alpha = 4\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha = 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha = \sin 4\alpha$$

$x = 2k\pi + 4\alpha$ و $2k\pi + \pi - 4\alpha$.

حل مثلث قائم‌الزاویه

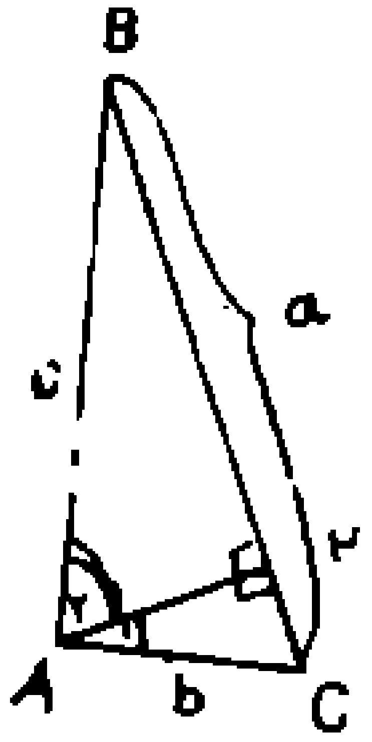
قاعده

در هر مثلث قائم‌الزاویه بین اضلاع وخطوط مثلثاتی زوایای حاده روابط زیر برقرار است.

$$\sin \text{زاویه} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} \qquad \cos \text{زاویه} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$$

$$tg \text{ زاویه} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} \qquad cotg \text{ زاویه} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}$$

در مثلث قائم‌الزاویه ABC میتوان نوشت:



$$\sin C=\frac{AB}{BC} \text{ و } \cos C=\frac{AC}{BC}$$

$$tg\,C=\frac{AB}{AC} \text{ و } cotg\,C=\frac{AC}{AB}$$

$$\sin P=\frac{b}{a} \text{ و } \cos B=\frac{-}{a} \text{ و } tg\,B=\frac{b}{c} \text{ و } cotg\,B=\frac{c}{b}$$

در مثلث قائم‌الزاویه ACH می‌توان نوشت:

$$\sin C=\frac{AH}{AC} \text{ و } \cos C=\frac{CH}{AC} \text{ و } tg\,C=\frac{AH}{CH} \text{ و } cotg\,C=\frac{CH}{AH}$$

$$\sin A_1=\frac{HC}{AC} \text{ و } \cos A_1=\frac{AH}{AC} \text{ و } tg\,A_1=\frac{CH}{AH} \text{ و } cotg\,A_1=\frac{AH}{CH}$$

در مثلث قائم‌الزاویه AHB می‌توان نوشت:

$$\sin B=\frac{AH}{AB} \text{ و } \cos B=\frac{BH}{AB} \text{ و } tg\,B=\frac{AH}{BH} \text{ و } cotg\,B=\frac{BH}{AH}$$

تذکر: اگر سه جزء هر مثلث (بجز سه زاویه) معلوم باشد میتوان اجزاء دیگر مثلث را بدست آورد (درمثلث قائم‌الزاویه همیشه یك زاویه آن قائمه میباشد پس [illegible] یك زاویه حاده ویك ضلع و [illegible] دو ضلع آن معلوم باشد).

تذکر ۲ـ در [illegible] قائم‌الزاویه ABC شکل بالا می‌توان روابط زیر راهم نوشت.

A [illegible] $B+C=۱۸۰°$ یا $B+C=۹۰°$

[illegible]$^2=a^2$

$$\begin{cases}\sin C=\frac{c}{a}\\ c=a\sin C\end{cases} \text{ و } \begin{cases}\cos C=\frac{b}{a}\\ b=a\cos C\end{cases} \text{ و } \begin{cases}tg\,C=cotg\,B=\frac{c}{b}\end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin B = \dfrac{b}{a} \\ b = a\sin B \end{cases} \text{ و } \begin{cases} \cos B = \dfrac{c}{a} \\ c = a\cos B \end{cases} \text{ و } \begin{cases} tg B = cotg C = \dfrac{b}{c} \end{cases}$$

تذکر خیلی‌مهم: هر ضلع مجاور زاویه قائمه برابر وتر ضرب در sin زاویه‌مقابل آن ضلع میباشد.

قاعده	اگر ازیك مثلث قائم‌الزاویه وتر ویك‌ضلع معلوم باشد ازرابطه sin ویا cos زاویه حاده‌استفاده کرده وسایر اجزاءمثلثرا بدست‌میآوریم.
قاعده	اگر ازیك‌مثلث قائم‌الزاویه وتر یك‌زاویه حاده معلوم باشد ابتدا زاویه سوم مثلث را حساب کرده وسپس از رابطه sin ویا cos زاویه‌حاده‌استفاده می‌نمائیم ودوضلع دیگر راحساب‌می‌کنیم.
قاعده	اگر ازیك مثلث قائم‌الزاویه یك زاویه حاده ویك ضلع معلوم باشد ابتداء زاویه حاده دیگر را حساب کرده وسپس ازرابطه sin یا cos یا tg یا cotg استفاده کرده وسایر اجزاء مثلثرا بدستمیآوریم
قاعده	اگرازیك مثلث قائم‌الزاویه‌دوضلع آن‌معلوم باشد ابتداء از رابطه tg یا cotg استفاده‌کرده ویك زاویه حاده را بدستمیآوریم‌وسپس‌زاویه‌حاده دیگر را بدست میآوریم وبعد وتررا از رابطه sin یا cos بدست میآوریم.

درحالتهای زیر $C=90^\circ$ میباشد

نوع	اجزاء معلوم	اجزاء مجهول	روش بدست آوردن اجزاء مجهول
I	A و c	B و a و b	$B=90^\circ-A$ و $a=c\sin A$ و $b=c\cos A$
II	A و a	B و b و c	$B=90^\circ-A$ و $b=a\cot A$ و $c=\frac{a}{\sin A}$
III	a و b	A و B و c	$\tan A=\frac{a}{b}$ و $B=90^\circ-A$ و $c=\frac{a}{\sin A}$
IV	a و c	A و B و b	$\sin A=\frac{a}{c}$ و $B=90^\circ-A$ و $b=\sqrt{c^2-a^2}$

مسائل صفحه ۱۴۵ و ۱۴۶ و ۱۴۷ و ۱۴۸ و ۱۴۹ کتاب درسی

مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A}=90^\circ$) را در هریک از حالات زیر حل کنید:

۱۰۹۰ - ک ۱ - $a=29/24$ متر $\hat{B}=17^\circ$

۱۰۹۱ - ک ۲ - $a=326/7$ متر $\hat{C}=14^\circ 17'$

۱۰۹۲ - ک ۳ - $b=15/72$ متر $\hat{C}=56^\circ$

۱۰۹۳ - ک ۴ - $c=228/7$ متر $\hat{B}=11^\circ$

۱۰۹۴ - ک ۵ - $c=19/29$ متر $\hat{C}=21^\circ$

۱۰۹۵ - ک ۶ - $b=72/37$ متر $\hat{B}=58^\circ 21'$

۱۰۹۶ ک ۷ـ $a=۳۱/۲$ متر $b=۱۲/۰۲$ متر

۱۰۹۷ ک ۸ـ $a=۲/۷۲۶$ متر $c=۰/۹۷$ متر

۱۰۹۸ ک ۹ـ $b=۱۵/۳۲$ متر $c=۱۲/۷$ متر

ثابت کنید در مثلث قائم‌الزاویه رابطه زیر بر قرار است:

۱۰۹۹ ک ۱۰ـ
$$\frac{b+c}{a}=\sin B+\cos B=\sqrt{۲}\cos(\frac{\pi}{۴}-B)$$

حل: طرف اول $=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\sin B+\cos B=\sin B+\sin(۹۰^\circ-B)$

$$=۲\sin ۴۵^\circ\cos(B-۴۵^\circ)=\sqrt{۲}\cos(۴۵^\circ-B)$$

۱۱۰۰ ک ۱۱ـ ثابت کنید درمثلث قائم‌الزاویه رابطهٔ زیر برقرار است:

$$tg\frac{B}{۲}=\frac{b}{a+c}$$

حل: طرف دوم $=\frac{a\sin B}{a+a\sin C}=\frac{\sin B}{۱+\sin C}=\frac{\sin B}{۱+\cos B}$

طرف دوم $=\frac{۲\sin\frac{B}{۲}\cos\frac{B}{۲}}{۱+۲\cos^۲\frac{B}{۲}-۱}=\frac{۲\sin\frac{B}{۲}\cos\frac{B}{۲}}{۲\cos^۲\frac{B}{۲}}=tg\frac{B}{۲}$

۱۱۰۱ ک ۱۲ـ ثابت کنید درمثلث قائم‌الزاویه رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\frac{b^۲-c^۲}{a^۲}=\cos ۲c$$

حل: طرف اول $=\frac{a^۲\sin^۲B-a^۲\sin^۲C}{a^۲}=\frac{\sin^۲B-\sin^۲C}{۱}$

$$=\cos^۲C-\sin^۲C=\cos ۲C$$

۱۱۰۲ ک ۱۳ـ ثابت کنید درمثلث قائم‌الزاویه رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\cos(B-C)=\frac{۲bc}{a^۲}$$

حل: طرف دوم $=\frac{۲a\sin B\times a\sin C}{a^۲}=۲\sin B\sin C$

$$= \cos(B-C) - \cos(B+C) = \cos(B-C) - \cos 90^\circ = \cos(B-C)$$

۱۱۰۳ ك ۱۴ـ ثابت کنید در مثلث قائم‌الزاویه رابطهٔ زیر برقرار است.

$$tg\, 2B = \frac{2bc}{c^2 - b^2}$$

حل : طرف دوم $= \dfrac{2a\sin B \times a\sin C}{a^2\sin^2 C - a^2\sin^2 B} = \dfrac{2\sin B\sin C}{\sin^2 C - \sin^2 B}$

طرف دوم $= \dfrac{\cos(C-B) - \cos(C+B)}{\cos^2 B - \sin^2 B} = \dfrac{\cos(90^\circ - B - B) - \cos 90^\circ}{\cos 2B}$

طرف دوم $= \dfrac{\cos(90^\circ - 2B) - 0}{\cos 2B} = \dfrac{\sin 2B}{\cos 2B} = tg\, 2B$

۱۱۰۴ ك ۱۵ـ ثابت کنید در مثلث قائم‌الزاویه رابطهٔ زیر برقرار است.

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$$

حل : طرف اول $= \sin^2 90^\circ + \sin^2 B + \cos^2 B = 1 + 1 = 2$

۱۱۰۵ ك ۱۶ـ ثابت کنید درمثلث قائم‌الزاویه رابطه زیر برقراراست.

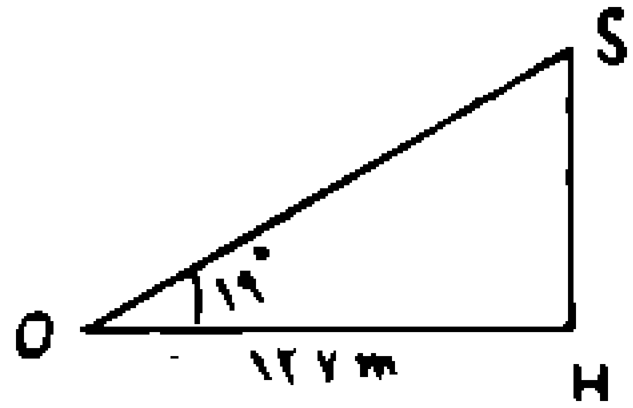
$$2\cot g\, 2C = \cot g\, C - \cot g\, B$$

حل : طرف دوم $= \dfrac{1}{tg\, C} - tg\, C = \dfrac{1 - tg^2 C}{tg\, C}$

طرف دوم $= 2 \times \dfrac{1 - tg^2 C}{2\,tg\, C} = 2 \times \dfrac{1}{tg\, 2C} = 2\cot g\, 2C$

۱۱۰۶ ك ۱۷ـ از نقطه O واقع برروی زمین زاویه فرازی رأس برجی را اندازه گرفته برابر ۱۹° شده است درصورتی‌که فاصله O تاپای‌برج ۱۲۷ متر باشد ارتفاع برج‌را تعیین کنید

حل : در مثلث‌قائم‌الزاویه O SH می‌توان نوشت



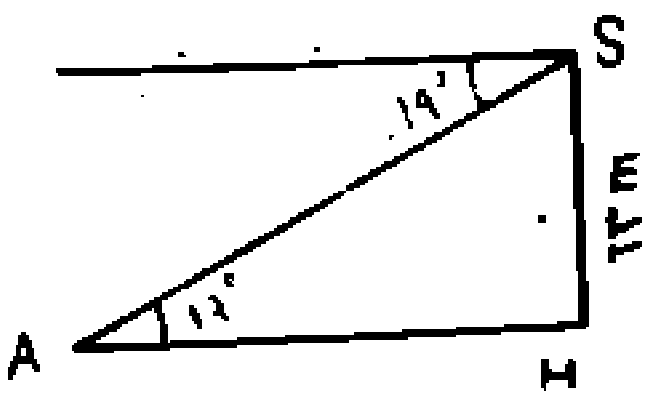
$$tg\, O = \frac{SH}{OH} \Rightarrow tg\, 19^\circ = \frac{SH}{127}$$

$$SH = 127\, tg\, 19^\circ$$

$$SH = 127 \times 0/3443 = 43/7261$$

۱۱۰۷ک۱۸ـ از نقطه S بالای برجی که ارتفاع آن ۶۲ متر است نقطه A را که در روی زمین قرار دارد نگاه می‌کنیم . اگر زاویه نشیب °۱۹ باشد فاصله نقطه A را تا پای برج حساب کنید .

حل:



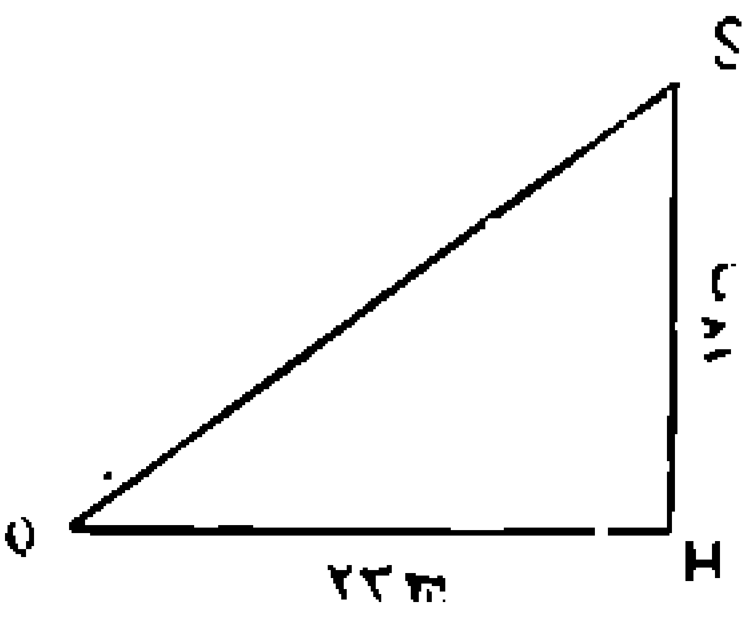
$$tg A = \frac{SH}{AH} \Longrightarrow tg ۱۹° = \frac{۶۲}{AH}$$

$$AH\, tg ۱۹° = ۶۲$$

$$AH = \frac{۶۲}{tg ۱۹°} = \frac{۶۲}{۰/۳۴۴۳} \# ۱۸۲/۹$$

۱۱۰۸ک۱۹ـ ارتفاع ساختمانی ۱۷ متر است معین کنید زاویه فراز بالای ساختمان را از نقطه ای که با ساختمان ۲۳ متر فاصله دارد و روی زمین واقع است .

حل :

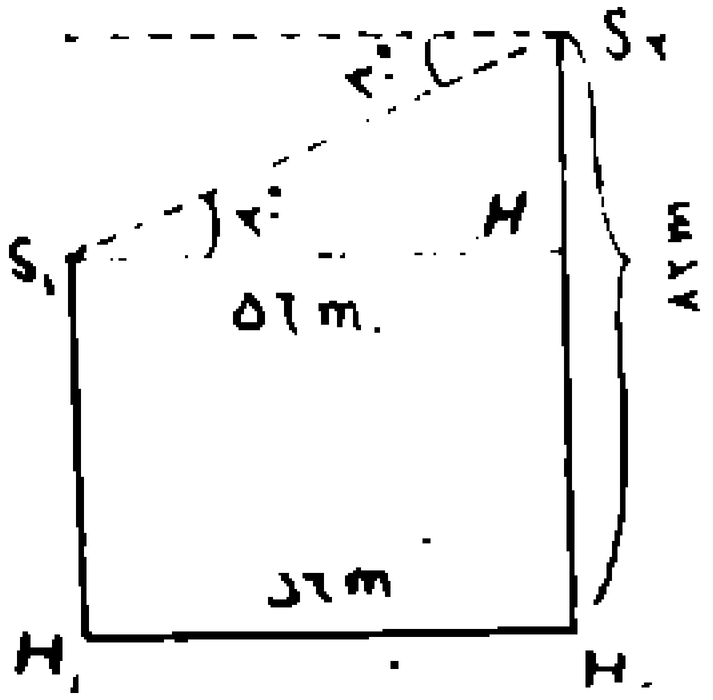


$$tg O = \frac{SH}{OH} = \frac{۱۷}{۲۳}$$

$$tg O \# ۰/۷۳۹۱$$

$$O \# ۳۶°۲'$$

۱۱۰۹ک۲۰ـ از بالای برجی به ارتفاع ۸۲ متر زاویه شیب رأس برج دیگری را اندازه گرفته‌ایم برابر °۳۰ شده است فاصله این دو برج ۵۶ متر است ارتفاع برج دیگر را حساب کنید.



حل: در مثلث S_1S_2H می‌توان نوشت

$$tg S_1 = \frac{S_2 H}{S_1 H}$$

$$tg ۲۰^\circ = \frac{S_2 H}{۵۶}$$

$$S_2 H = ۵۶ tg ۳۰^\circ = \frac{۵۶\sqrt{۳}}{۳}$$

$$S_1 H_1 = HH_2 = S_1 H_2 - S_2 H = ۸۲ - \frac{۵۶\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۲۴۶ - ۵۶\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۱۱۰ك۲۱ـ برای محاسبه ارتفاع درختی از دو نقطهٔ A و B واقع در یک طرف آن که با نقطهٔ H پای درخت در روی یک خط مستقیم قرار دارند زوایای فراز رأس درخت را اندازه گرفته‌ایم بترتیب °۵۰ و °۲۲ شده است بعلاوه میدانیم که فاصله AB برابر ۱۶ متر است ارتفاع درخت را تعیین کنید .

حل:

$$tg A = \frac{SH}{AH}$$

$$tg B = \frac{SH}{BA + AH}$$

از تقسیم دو رابطه نتیجه میشود:

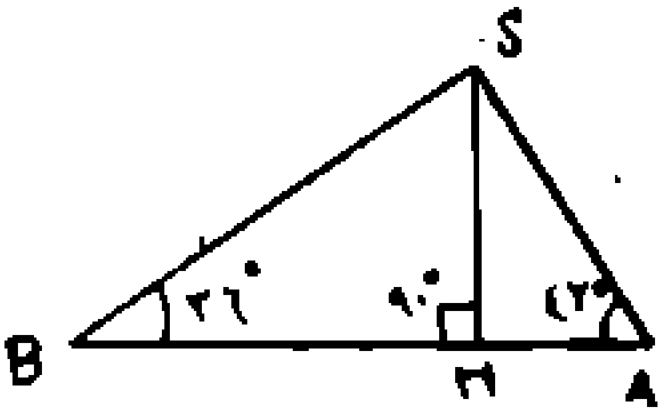
$$\frac{tg A}{tg B}=\frac{BA+AH}{AH} \Longrightarrow \frac{tg ۵۰^\circ}{tg ۲۲^\circ}=\frac{۱۶+AH}{AH}$$

$$AH=\frac{۱۶ tg ۲۲^\circ}{tg ۵۰^\circ - tg ۲۲^\circ}=\frac{۱۶\times ۰/۴۰۴۰}{۱/۱۹۲۰-۰/۴۰۴۰}=\frac{۱۶\times ۴۰۴۰}{۷۸۸۰}\neq ۸/۲$$

$$tg A=\frac{SH}{AH}\Longrightarrow SH=۸/۲ tg ۵۰^\circ=۸/۲\times ۱/۹۲۰\neq ۱۵/۷۴۴$$

۱۱۱۱ك۲۲ـ برای محاسبهٔ ارتفاع درختی ازدو نقطه B و A واقع درطرفین درخت که با نقطهٔ H پای درخت روی یك خط مستقیم قراردارند زوایای فراز رأس درخت را اندازه گرفته‌ایم ، بترتیب ۴۷° و۳۶° شده است . بعلاوه می‌دانیم که AB برابر ۱۲ متر است ارتفاع درخت را تعیین کنید .

حل:



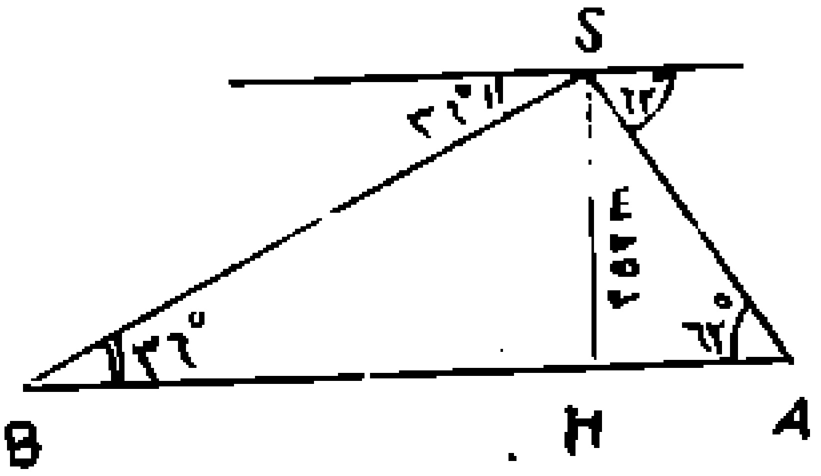
$$AH=SH \cotg ۴۷^\circ$$
$$BH=SH \cotg ۳۶^\circ$$

$$AH+BH=SH(\cotg ۴۷^\circ+\cotg ۳۶^\circ)$$
$$AB=۱۲=SH(۰/۹۳۲۵+۱/۳۷۶)$$

$$SH=\frac{۱۲}{۲/۳۰۸۵}\neq ۵/۶ m$$

۱۱۱۲ك۲۳ـ از بالای کوهی به ارتفاع ۴۵۲ متر که در کنار دریایی واقع است زاویه نشیب دو نقطهٔ A و B از دو کشتی را که با محل مشاهده در یك سطح قائم قراردارند اندازه گرفته‌ایم بترتیب ۶۲° و۲۶° شده است فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B را حساب کنید .

حل:



$$AH = ۴۵۲\ \mathrm{cotg}\, ۶۲^\circ$$

$$BH = ۴۵۲\ \mathrm{cotg}\, ۳۶^\circ$$

$$AH + BH = ۴۵۲\ (\mathrm{cotg}\, ۶۲^\circ + \mathrm{cotg}\, ۳۶^\circ)$$

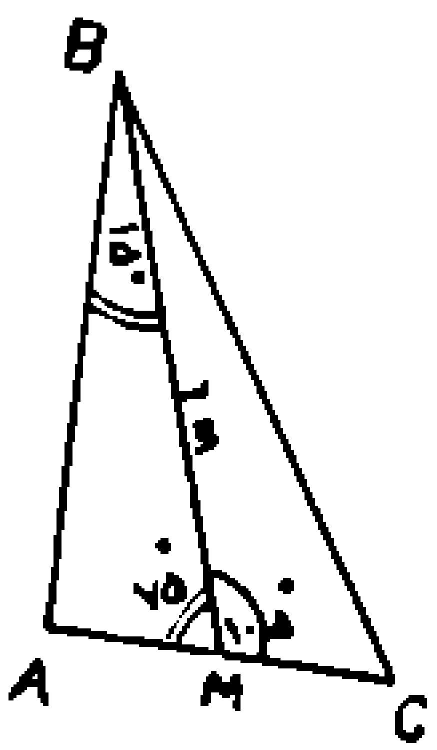
$$AB = ۴۵۲\ (۰/۵۳۱۷ + ۱/۳۷۶)$$

$$AB = ۴۵۲(۱/۹۰۷۷) \approx ۸۶۲/۲۸۰۴\mathrm{m}$$

۱۱۱۳ک۲۴ـ از هواپیمایی که در ارتفاع ۱۲۰۰ متری از سطح دریاچه‌ای در پرواز است گوشهٔ شیب دو نقطه از ساحلهای طرفین دریاچه‌ای را اندازه گرفته‌ایم بترتیب برابر ۲۴° و ۵۶° شده است در صورتی که این دو نقطه و هوا پیما در یک صفحه قائم قرار داشته باشند فاصلهٔ دو نقطه ساحل را تعیین کنید.

حل: مانند مسأله‌های قبل عمل نمائید

۱۱۱۴ک۲۵ـ در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$) میانه BM باضلع ABC زاویه ۱۰۵° می‌سازد وطول این میانه برابر ۶ متر است اضلاع مثلث ABC وتانژانت زوایای B و C را حساب کنید.



حل: در مثلث ABM می‌توان نوشت

$$AB = BM \sin ۷۵^\circ = ۶ \times ۰/۹۶۵۹$$

$$AB = ۵/۷۹۵۴$$

$$AM = BM \sin ۱۵^\circ = ۶ \sin ۱۵^\circ = ۱/۵۵۲۸$$

$$AC = ۲AM = ۲ \times ۱/۵۵۲۸ = ۳/۱۰۵۶$$

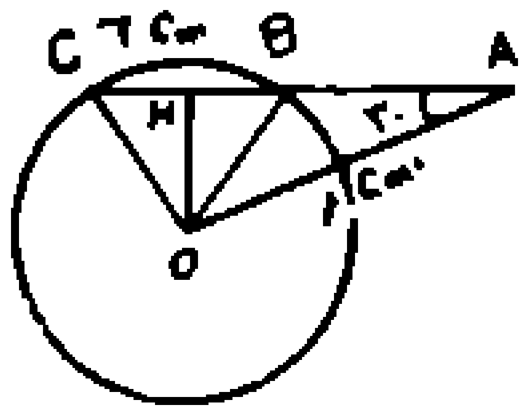
$$tgC = \frac{AB}{AC} = \frac{۵/۷۹۵۴}{۳/۱۰۵۶} \approx ۱/۸ \quad \text{و} \quad tgB = \frac{۱}{tgC} \approx \frac{۱}{۱/۸} = \frac{۱۰}{۱۸} = \frac{۵}{۹}$$

$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ \Rightarrow BC \approx ۶/۲۱$$

۱۱۱۵ك۴۶ـ نقطهٔ A خارج دایره‌ای به‌مرکز O بقسمی قرار دارد که فاصلهٔ OA برابر ۸ سانتیمتر است ، از نقطهٔ A قاطع A B C نسبت به این دایره رسم شده است ؛ درصورتی‌که داشته‌باشیم :

$CAO = ۳۰°$ و $CB = ۶$ سانتیمتر

طول شعاع دایره واندازهٔ زوایای BOA و COA را حساب کنید .



حل : چون OH ضلع روی زاویه ۳۰° درجه است

پس $OH = ۴cm$ میباشد

چون OH بر CB عمود است

پس $CH = HB = ۳m$

$$R^۲ = OB^۲ = OH^۲ + HB^۲ = ۱۶ + ۹$$

$$R^۲ = ۲۵ \Rightarrow R = ۵m$$

$$tgHOB = tgCOH = \frac{۳}{۴} = ۰/۷۵ \Rightarrow HOB = COH \approx ۳۷°$$

$$AOH = ۹۰° - ۳۰° = ۶۰° \Rightarrow BOA \approx ۶۰° - ۳۷° \approx ۲۳°$$

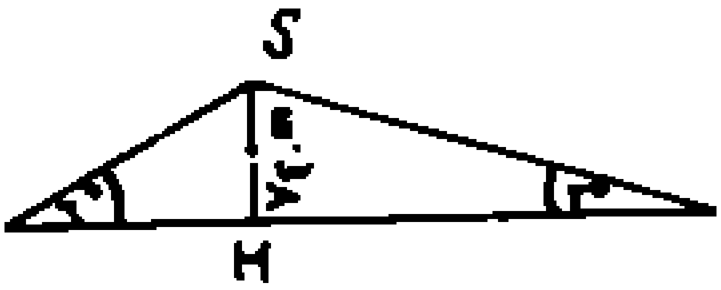
۱۱۱۶ك۴۷ـ از دونقطهٔ A و B واقع بر روی سطح زمین ، به فاصلهٔ $AB = l$ زوایای فراز رأس S برجی را اندازه گرفته‌ایم ، بترتیب زوایای α و β حاصل شده است، در صورتی‌که بدانیم نقاط A و B با نقطهٔ C پای برج تشکیل مثلث قائم‌الزاویه‌ای قائمه دررأس C می‌دهند مطلوب است محاسبه $CS = x$ ارتفاع برج برحسب l و خطوط مثلثاتی α و β . (محاسبات عددی $\alpha = ۷۵°$ و $\beta = ۱۵°$ و $l = ۵۰\sqrt{۱۴}$) .

۱۱۱۷ك۴۸ـ برای محاسبه عرض کانال مانش ، از بالونی که درارتفاع ۷۴۰ متری سطح دریا قرار دارد دریك زمان زوایای نشیب دونقطه ازساحل فرانسه وساحل انگلستان را

اندازه گرفته‌اند بترتیب زوایای °۲ و °۶ حاصل شده است ، مطلوبست محاسبهٔ عرض کانال

بر حسب کیلو متر در صورتی که بدانیم دو نقطهٔ ساحلی و بالون در یک صفحه قائم واقع

بوده‌اند .



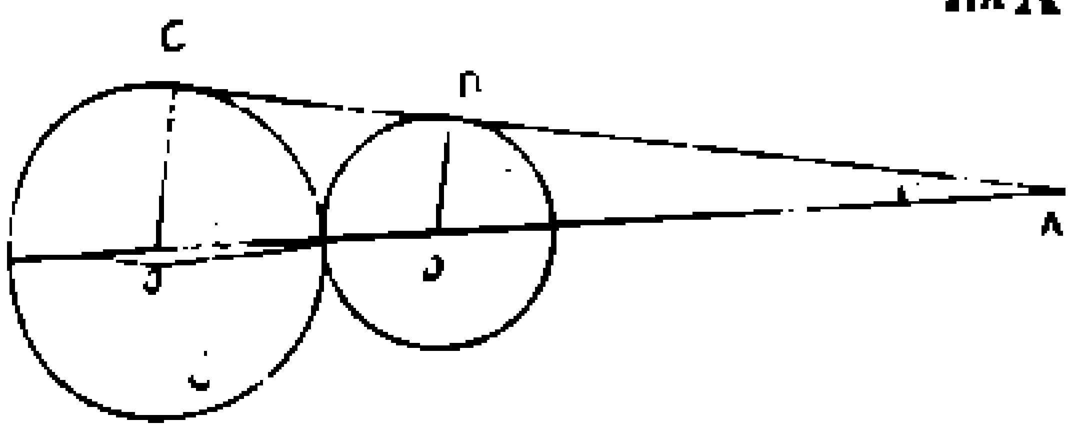
حل : مانند مساله (۱۱۱۲)
حل میشود

۱۱۱۸ك۲۹ـ دو دایرهٔ مماس‌مخارج مفروضند . درصورتی که شعاع یکی دو برابر شعاع

دیگری باشد زاویه بین دومماس مشترك خارج آنها راحساب کنید .

حل:

$$\sin A_1 = \frac{R}{AO'}$$



$$\sin A_1 = \frac{۲R}{AO}$$

ازتقسیم دورابطه

$$۱ = \frac{Ao}{۲Ao'} = \frac{۲R + Ao'}{۲Ao'}$$

$$۲Ao' = ۳R + Ao'$$

$$Ao' = ۳R \Rightarrow \frac{R}{\sin A_1} = ۳R \Rightarrow \sin A_1 = \frac{۱}{۳} = ۰/۳۳۳۳$$

$$A_1 \# ۲۰^\circ \Rightarrow CAC' = ۲A_1 \# ۴۰^\circ$$

۱۱۱۹ک۳۰ـ نیمدایره‌ای به قطر AB مفروض است ، از نقطهٔ A وتر AC را رسم کرده امتداد می‌دهیم تامماس نقطه B را در نقطه D قطع کند در صورتی که $AD=4AC$ باشد زاویه BAD را حساب کنید .

۱۱۲۰ک۳۱ـ در مثلث قائم‌الزاویه ABC $(\hat{C}=90^\circ)$ و $BC=3\,AC$ باضلع BC را به ۳ قسمت برابر تقسیم کرده ونقاط تقسیم را M و N می‌نامیم (M به C نزدیکتراست) : نقطه A را به دو نقطه M و N وصل می‌کنیم ، ثابت کنید :

$$\widehat{ABN}+\widehat{ANM}=\widehat{AMC}$$

۱۱۲۱ک۳۲ـ از نقطه O واقع بر روی زمین زوایای فراز قله‌های A و B دو کوه را بانقطه O دریک‌صفحه قائم قرار دارند اندازه گرفته‌ایم بترتیب برابر °۴۵ و °۳۰ شده‌اند اگر ۵۰۰ متر بسمت کوهها پیش رویم دو قلهٔ کوه را دریک امتداد بازاویه °۶۰ می‌بینم. ارتفاع دو کوه را ازسطح زمین تعیین کنید .

۱۱۲۲ک۳۳ـ نوع مثلثی را تعیین کنید که در آن، رابطه زیر برقراراست.

$$\frac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}=\sin A$$

حل :

$$\frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}=\sin A$$

$$\frac{\sin\left(\frac{180^\circ-A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{180^\circ-A}{2}\right)}=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\Longrightarrow\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$2\sin^2\frac{A}{2}=1\Longrightarrow 2\times\frac{1+\cos A}{2}=1\Longrightarrow\cos A=0\Longrightarrow A=90^\circ$$

۱۱۲۳ک۳۴ـ نوع مثلثی را تعیین کنید که در آن ، رابطه زیر برقرار است.

$$\cos A+\cos B=\sin C$$

حل :

$$2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}\Rightarrow\cos\frac{A-B}{2}=\cos\frac{C}{2}$$

$$A-B=C\Rightarrow A=B+C=180^\circ-A\Rightarrow A=90^\circ$$

پس مثلث قائم‌الزاویه است

۱۱۲۴ک۳۵- نوع مثلثی را تعیین کنید که درآن رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{\sin B}{\sin A+\sin C}=tg\frac{B}{2}$$

حل:

$$\frac{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}}=tg\frac{B}{2}\Rightarrow\frac{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A-C}{2}}=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$$

$$\cos\frac{B}{2}=\cos\frac{A-C}{2}\Rightarrow B=A-C\Rightarrow B+C=A\Rightarrow 180^\circ-A=A$$

پس مثلث قائم‌الزاویه است

$$A=90^\circ$$

۱۱۲۵ک۳۶- نوع مثلثی را تعیین کنید که در آن ، رابطه زیر برقرار است.

$$\sin B+\cos B=\sin C+\cos C$$

حل:

$$\sin B-\sin C=\cos C-\cos B$$

$$2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}=-2\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C-B}{2}=$$

$$=2\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}$$

$$\begin{cases}\sin\frac{B-C}{2}=0\Rightarrow B-C=0\Rightarrow B=C & \text{مثلث متساوی‌الساقین است}\\[2mm] \cos\frac{B+C}{2}=\sin\frac{B+C}{2}\Rightarrow tg\frac{B+C}{2}=1\Rightarrow\frac{B+C}{2}=45^\circ\end{cases}$$

$$B+C=90^\circ \Longrightarrow A=90^\circ$$

اگر دوطرف رابطه مسأله را به قوه ۲ برسانیم نتیجه میشود

$$\sin^2 B+\cos^2 B+2\sin B\cos B=\sin^2 C+\cos^2 C+2\sin C\cos C$$

$$1+\sin 2B=1+\sin 2C \Longrightarrow C=B$$ متساوی الساقین

پس مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین است

۱۱۲۶ـ۴۷ـ نوع مثلثی را تعیین کنید که در آن ، رابطه زیر برقرار است :

$$\frac{tg B}{tg C}=\frac{\sin^2 B}{\sin^2 C}$$

حل:

$$\sin^2 C\, tg B=\sin^2 B\, tg C$$

$$\frac{\sin^2 C\times \sin B}{\cos B}=\frac{\sin^2 B\sin C}{\cos C}\Longrightarrow \sin^2 C\sin B\cos C-\sin^2 B\sin C\cos B=0$$

$$\sin B\sin C(\sin C\cos C-\sin B\cos B)=0$$

$$\begin{cases} B \text{ یا } C=0 & \text{غیر ممکن} \\ \sin C\cos C-\sin B\cos B=0\Longrightarrow \sin 2C=\sin 2B\Longrightarrow B=C \end{cases}$$

پس مثلث متساوی الساقین است

۱۱۲۷ـ۴۸ـ نوع مثلثی را تعیین کنید که در آن، رابطه زیر برقرار است :

$$\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}=\sqrt{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

حل: میدانیم: $\sin A=\sin(B+C)=$ پس :

$$\frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B+C}{2}}=\sqrt{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

چون $\cos\frac{B-C}{2}$ و $\sin\frac{B+C}{2}$ مخالف صفراست پس :

$$\sqrt{2}\cos\frac{B+C}{2}=1\Longrightarrow \cos\frac{B+C}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{4}\Longrightarrow B+C=\frac{\pi}{2}\Longrightarrow A=\frac{\pi}{2}$$ مثلث قائم الزاویه است

۱۱۲۸ـ۴۹ـ نوع مثلثی را تعیین کنید که در آن ، رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{\sin B}{\cos C} = \sin A$$

حل :

$$\sin B = \sin A \cos C = \frac{1}{2}\,[\sin(A+C) + \sin(A-C)]$$

$$2\sin B = \sin B + \sin(A-C)$$

$$\sin B = \sin(A-C) \Rightarrow B = A - C \Rightarrow B + C = A$$

مثلث قائم‌الزاویه‌است: $180^\circ - A = A \Rightarrow A = 90^\circ$

۱۱۲۹ک۴۰ـ نوع مثلثی را تعیین کنید کەدر آن ، رابطه زیر برقرار است :

$$\frac{\sin B + \sin C}{\sin B - \sin C} = \operatorname{cotg}\frac{B-C}{2}$$

حل :

$$\frac{2\sin\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}}{2\sin\dfrac{B-C}{2}\cos\dfrac{B+C}{2}} = \operatorname{cotg}\frac{B-C}{2}$$

و یا :

$$tg\frac{B+C}{2}\operatorname{cotg}\frac{B-C}{2} = \operatorname{cotg}\frac{B-C}{2}$$

$$tg\frac{B+C}{2} = 1 = tg\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = \frac{\pi}{2}$$

پس مثلث در رأس A قائمه است .

درستی اتحادهای زیر را تحقیق کنید :

۱۱۳۰ـ $(1 + \sec 2\alpha + tg 2\alpha)(1 - \sec 2\alpha + tg 2\alpha) = 2 tg 2\alpha$

۱۱۳۱ـ $[\sec 2\alpha + \operatorname{cotg}(450^\circ + 2\alpha)]\operatorname{cotg}(225^\circ - \alpha) = 1$

۱۱۳۲ـ $\dfrac{\cos(3\pi - 2\alpha)}{2\sin^2(225^\circ + \alpha)} = tg\,(\alpha - 225^\circ)$

۱۱۳۳ـ $\dfrac{tg 2\alpha + \operatorname{cotg} 3\beta}{\operatorname{cotg} 2\alpha + tg 3\beta} = \dfrac{tg 2\alpha}{tg 3\beta}$

۱۱۳۴- $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 6\alpha+\cos 7\alpha=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2}\cdot\cos 4\alpha$

۱۱۳۵- $\sin 9\alpha+\sin 10\alpha+\sin 11\alpha+\sin 12\alpha=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\,\sin\frac{21}{2}\alpha$

۱۱۳۶- $\cos 2\alpha-\cos 3\alpha-\cos 4\alpha+\cos 5\alpha=-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\,\cos\frac{7}{2}\alpha$

۱۱۳۷- $\sin 4\alpha-\sin 5\alpha-\sin 6\alpha+\sin 7\alpha=-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\,\sin\frac{11}{2}\alpha$

۱۱۳۸- $\cos\alpha+\sin\alpha+\cos 3\alpha+\sin 3\alpha=2\sqrt{2}\cos\alpha\sin(45^\circ+2\alpha)$

۱۱۳۹- $tg\alpha+cotg\alpha+tg 3\alpha+cotg 3\alpha=\frac{8\cos^2 2\alpha}{\sin 6\alpha}$

۱۱۴۰- $(\sin\alpha)^{-1}+(tg\alpha)^{-1}=cotg\frac{\alpha}{2}$

۱۱۴۱- $\frac{\sin(90^\circ+2\alpha)}{1-\sin(3\alpha-\pi)}=cotg\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{3\alpha}{2}\right)$

۱۱۴۲- $\frac{\sin 2\alpha-\sin 3\alpha+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha-\cos 3\alpha+\cos 4\alpha}=tg 3\alpha$

۱۱۴۳- $2\sin^2(3\pi-2\alpha)\cos^2(5\pi+2\alpha)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{5\pi}{2}-8\alpha\right)$

۱۱۴۴- $\sin 2\alpha(1+tg 2\alpha\, tg\alpha)+\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}=tg 2\alpha+tg^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$

۱۱۴۵- $1-\sin 4\alpha+cotg(135^\circ-2\alpha)\cos 4\alpha=0$

۱۱۴۶- $\sin^6\frac{\alpha}{2}-\cos^6\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin^2\alpha-4}{4}\cos\alpha$

۱۱۴۷-

$\cos(270^\circ+4\alpha)+\sin(3\pi-8\alpha)-\sin(4\pi-12\alpha)=4\cos 2\alpha\cos 4\alpha\sin 6\alpha$

۱۱۴۸- $\frac{\cos(450^\circ-6\alpha)+\sin(\pi+4\alpha)+\sin(3\pi-\alpha)}{\sin(450^\circ+6\alpha)+\cos(4\alpha-2\pi)+\cos(\alpha+2\pi)}=tg\,\alpha$

۱۱۴۹- $$\frac{1+\operatorname{cotg}(2\alpha-270^\circ)\operatorname{cotg}(270^\circ+\alpha)}{\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha$$

۱۱۵۰- $$\sin\alpha+\sin(\alpha+840^\circ)+\sin(\alpha-480^\circ)=0$$

۱۱۵۱- $$\operatorname{cotg}^2\alpha-\operatorname{cotg}^2\beta=\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}$$

۱۱۵۲- $$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$$

۱۱۵۳- $$\frac{(\operatorname{tg}\alpha+\sec\alpha)(\cos\alpha-\operatorname{cotg}\alpha)}{(\cos\alpha+\operatorname{cotg}\alpha)(\operatorname{tg}\alpha-\sec\alpha)}=1$$

۱۱۵۴- $$\frac{\sin4\alpha}{1+\cos4\alpha}\times\frac{\cos2\alpha}{1+\cos2\alpha}=\operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$$

۱۱۵۵- $$\cos^2(\alpha-90^\circ)+\operatorname{cotg}^2(\alpha-270^\circ)=$$

$$\frac{1}{\sin^2(\alpha+90^\circ)}-\frac{1}{\sec^2(\alpha+180^\circ)}$$

۱۱۵۶- $$\frac{1-\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)}{1+\operatorname{cotg}(360^\circ-\alpha)}=\frac{\operatorname{tg}(180^\circ+\alpha)+1}{\operatorname{cotg}(270^\circ-\alpha)-1}$$

۱۱۵۷- $$\frac{\operatorname{tg}2\alpha\sec2\beta-\operatorname{tg}2\beta\sec2\alpha}{\sec2\alpha+\sec2\beta}=\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$$

۱۱۵۸- $$2[\operatorname{cosec}4\alpha-\operatorname{tg}(630^\circ+4\alpha)]+\operatorname{tg}(5\pi+\alpha)=\operatorname{cotg}\alpha$$

۱۱۵۹- $$\sin^2\left(\frac{15\pi}{8}-2\alpha\right)-\cos^2\left(\frac{17\pi}{8}-2\alpha\right)=\frac{-\cos4\alpha}{\sqrt{2}}$$

۱۱۶۰-

$$(\cos\alpha-\cos\beta)^2-(\sin\alpha-\sin\beta)^2=-4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\cos(\alpha+\beta)$$

۱۱۶۱- $$\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}-2\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{9\pi}{8}-2\alpha\right)=\frac{\sin4\alpha}{\sqrt{2}}$$

۱۱۶۲- $$\cos4\alpha-\sin4\alpha\operatorname{cotg}2\alpha=\cos2\alpha-2\cos^2\alpha$$

۱۱۶۳- $$\sin^2\left(\frac{9\pi}{8}+\frac{\alpha}{4}\right)-\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}+\frac{\alpha}{4}\right)=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2}}$$

-۱۱۶۴ $\cos 4\alpha \, tg 2\alpha - \sin 4\alpha = \dfrac{2 tg\alpha}{tg^2\alpha - 1}$

-۱۱۶۵ $\sin^2 2\alpha - \cos(60^\circ - 2\alpha)\sin(2\alpha - 30^\circ) = 0.25$

-۱۱۶۶ $\sin^2\alpha + \cos(60^\circ - \alpha)\cos(60^\circ + \alpha) = 0.25$

-۱۱۶۷ $\dfrac{tg 2\alpha}{tg^2 2\alpha - 1} \times \dfrac{1 - cotg^2 2\alpha}{cotg 2\alpha} = 1$

-۱۱۶۸ $\cos 4\alpha - \sin 4\alpha \times cotg 2\alpha = -1$

-۱۱۶۹ $\dfrac{1 - \cos 4\alpha}{\sec^2 2\alpha - 1} + \dfrac{1 + \cos 4\alpha}{cosec^2 2\alpha - 1} = 2$

-۱۱۷۰ $\dfrac{tg\alpha - \sec\alpha}{\cos\alpha - cotg\alpha} = tg\alpha \sec\alpha$

-۱۱۷۱

$\cos^2(45^\circ - \alpha) - \cos^2(60^\circ + \alpha) - \cos 75^\circ \times \sin(75^\circ - 2\alpha) = \sin 2\alpha$

-۱۱۷۲ $\dfrac{1 - 2\sin^2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \dfrac{1 - tg\alpha}{1 + tg\alpha}$

-۱۱۷۳ $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos\alpha + 1 - 2\sin^2 2\alpha} = 2\sin\alpha$

-۱۱۷۴ $\dfrac{cotg^2 2\alpha - 1}{2 cotg 2\alpha} - \cos 8\alpha \, cotg 4\alpha = \sin 8\alpha$

-۱۱۷۵ $\dfrac{\cos 4\alpha + 1}{cotg\alpha - tg\alpha} = \dfrac{1}{2}\sin 4\alpha$

-۱۱۷۶ $cotg(45^\circ + 2\alpha) = \dfrac{\cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha}$

-۱۱۷۷ $\dfrac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - 1}{\sin^6\alpha + \cos^6\alpha - 1} = \dfrac{2}{3}$

-۱۱۷۸ $4\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - \alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right) = \dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$

-۱۱۷۹ $cosec 2\alpha \, cosec(60^\circ - 2\alpha) \, cosec(60^\circ + 2\alpha) = 4 \, cosec 6\alpha$

-۱۱۸۰ $\dfrac{\cos 6\alpha - \cos 7\alpha - \cos 8\alpha + \cos 9\alpha}{\sin 6\alpha - \sin 7\alpha - \sin 8\alpha + \sin 9\alpha} = cotg \dfrac{15}{2}$

$$\left(\frac{\sqrt{tg\alpha}+\sqrt{cotg\alpha}}{\sin\alpha+\cos\alpha}\right)^2 = 2\,cosec\,2\alpha$$ -۱۲۰۵

$$\frac{\sqrt{cotg\alpha}+\sqrt{tg\alpha}}{\sqrt{cotg\alpha}-\sqrt{tg\alpha}} = cotg\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$$ -۱۲۰۶

$$cotg^2\alpha+cotg^2\beta-\frac{2\cos(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}+2=\frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$$ -۱۲۰۷

-۱۲۰۸

$$\sin2\alpha(2\cos4\alpha+1)cotg(30^\circ-2\alpha)cotg(30^\circ+2\alpha)=\sin6\alpha\,cotg2\alpha\,tg6\alpha$$

$$\sin(\pi+\alpha)\sin(240^\circ+\alpha)\sin(120^\circ+\alpha)=0/25\sin3\alpha$$ -۱۲۰۹

$$\frac{\sin6\alpha+\sin7\alpha+\sin8\alpha+\sin9\alpha}{\cos6\alpha+\cos7\alpha+\cos8\alpha+\cos9\alpha}=tg\frac{15}{2}\alpha$$ -۱۲۱۰

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)tg\frac{\alpha}{8}}{\sin\left(\frac{7}{2}\pi-\frac{\alpha}{4}\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{4}-3\pi\right)tg\frac{\alpha}{8}}=-tg\frac{\alpha}{8}$$ -۱۲۱۱

-۱۲۱۲

$$\frac{1+\cos(2\alpha-2\pi)+\cos(4\alpha+2\pi)-\cos(6\alpha-\pi)}{\cos(2\pi-2\alpha)+2\cos^2(2\alpha+\pi)-1}=2\cos2\alpha$$

$$cotg\alpha-tg\alpha-2tg2\alpha-4tg4\alpha=8cotg8\alpha$$ -۱۲۱۳

$$cotg\alpha-tg\alpha-2tg2\alpha=4cotg4\alpha$$ -۱۲۱۴

$$4\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)-2\cos^2(\alpha-\varphi)-\cos2\varphi=\cos2\alpha$$ -۱۲۱۵

$$\sin^2\varphi-\cos^2(\alpha-\varphi)+2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)=\cos^2\alpha$$ -۱۲۱۶

$$\cos^2\varphi+\cos^2(\alpha-\varphi)-2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)=\sin^2\alpha$$ -۱۲۱۷

$$tg6\beta-tg4\beta-tg2\beta=tg6\beta\,tg4\beta\,tg2\beta$$ -۱۲۱۸

$$\frac{\cos(4\alpha-810^\circ)}{cotg(225^\circ+2\alpha)[1-\cos(450^\circ+4\alpha)]}=tg4\alpha$$ -۱۲۱۹

$$\frac{cotg(45°+\alpha)[1+\cos(270°+2\alpha)]}{\cos(2\alpha-45°)}=cotg\,2\alpha$$ ۱۲۲۰-

$$\frac{2\sin^2 4\alpha-1}{2cotg(45°+4\alpha)\cdot\cos^2(225°-4\alpha)}=-1$$ ۱۲۲۱-

$$tg\,4\alpha-\sec 4\alpha=\frac{\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}$$ ۱۲۲۲-

$$\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=0{,}125(5+3\cos 4\alpha)$$ ۱۲۲۳-

$$\cos^8\alpha-\sin^8\alpha=0{,}25\cos 2\alpha(3+\cos 4\alpha)$$ ۱۲۲۴-

$$cotg(30°-\alpha)\times cotg(150°-\alpha)\times cotg(270°-\alpha)=tg\,3\alpha$$ ۱۲۲۵-

۱۲۲۶-

$$4\sin(2\alpha-270°)\times\sin(30°+2\alpha)\times\sin(30°-2\alpha)=\cos 6\alpha$$

$$\frac{1-2\cos^2 2\alpha}{2tg(2\alpha-45°)\times\sin^2(45°+2\alpha)}=1$$ ۱۲۲۷-

$$\frac{\sin 24°\cos 6°-\sin 6°\sin 66°}{\cos 21°\cos 39°-\sin 39°\cos 21°}=-1$$ ۱۲۲۸-

$$\frac{\sin 20°\cos 10°+\cos 160°\times\cos 100°}{\sin 21°\cos 9°+\cos 159°\cos 99°}=1$$ ۱۲۲۹-

$$\frac{\cos 63°\cos 3°-\cos 87°\cos 27°}{\cos 132°\cos 72°-\cos 42°\cos 18°}=-tg\,24°$$ ۱۲۳۰-

$$\frac{\cos 64°\cos 4°-\cos 86°\cos 26°}{\cos 71°\cos 41°-\cos 49°\cos 19°}=-1$$ ۱۲۳۱-

$$\frac{\cos 66°\cos 6°+\cos 84°\cos 24°}{\cos 65°\cos 5°+\cos 85°\cos 25°}=1$$ ۱۲۳۲-

$$\sin^2 70°\sin^2 50°\sin^2 10°=\frac{1}{64}$$ ۱۲۳۳-

$$\sin 15°\sin 75°=0{,}25$$ ۱۲۳۴-

$$cotg\,10°cotg\,50°cotg\,70°=cotg\,30°$$ ۱۲۳۵-

$$\frac{\sin 20°\sin 40°\sin 60°\sin 80°}{\sin 10°\sin 30°\sin 50°\sin 70°}=3$$ ۱۲۳۶-

-۱۲۳۷ $\sin\frac{3\pi}{10}-\sin\frac{\pi}{10}=\frac{1}{2}$

-۱۲۳۸ $\operatorname{cotg}60^\circ+\operatorname{tg}60^\circ+\operatorname{cotg}50^\circ+\operatorname{tg}50^\circ=\frac{8}{\sqrt{3}}\cos20^\circ$

-۱۲۳۹ $\operatorname{tg}9^\circ+\operatorname{tg}15^\circ-\operatorname{tg}27^\circ-\operatorname{cotg}27^\circ+\operatorname{cotg}9^\circ+\operatorname{cotg}15^\circ=8$

-۱۲۴۰ $$\frac{\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\cos(\alpha-450^\circ)}=1$$

-۱۲۴۱ $\cos70^\circ+8\cos20^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ=2\cos^2 25^\circ$

-۱۲۴۲
$$1-\cos(270^\circ-2\alpha)-\sin^2\frac{3\alpha}{2}+\cos^2\frac{3\alpha}{2}=2\sqrt{2}\sin\frac{3\alpha}{2}\sin\left(\frac{3\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

-۱۲۴۳ $$\frac{\cos(2\alpha-90^\circ)+\sin(3\pi-4\alpha)-\cos(450^\circ+6\alpha)}{4\sin(5\pi-3\alpha)\cos(\alpha-2\pi)}=\cos2\alpha$$

-۱۲۴۴ $$\frac{3-4\cos2\alpha+\cos4\alpha}{3+4\cos2\alpha+\cos4\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha$$

-۱۲۴۵
$$\operatorname{cotg}(270^\circ-2\alpha)+\operatorname{cotg}(210^\circ-2\alpha)+\operatorname{cotg}(150^\circ-2\alpha)=3\operatorname{tg}6\alpha$$

-۱۲۴۶
$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\left[1+\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right]\sec2\alpha+2\cos(4\alpha-2\pi)=\frac{\sin6\alpha}{\sin2\alpha}$$

-۱۲۴۷ $8\cos^4\alpha-4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha+3\cos\alpha+1=-2\sin\frac{7\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$

-۱۲۴۸ $\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma=$
$4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}$

-۱۲۴۹
$$\cos(450^\circ-6\alpha)\sin^3(\pi-2\alpha)-\cos(6\alpha-\pi)\sin^3(90^\circ-2\alpha)=\cos^3 4\alpha$$

-۱۲۵۰ $8\cos^4\alpha+4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha-3\cos\alpha+1=2\cos\frac{7\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

-۱۲۵۱

$$\frac{8\cos^4\alpha-4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha+3\cos\alpha+1}{8\cos^4\alpha+4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha-3\cos\alpha+1}=-tg\frac{7\alpha}{2}tg\frac{\alpha}{2}$$

-۱۲۵۲

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)}=tg\frac{\alpha+\beta}{2}tg\frac{\beta+\gamma}{2}tg\frac{\gamma+\alpha}{2}$$

$$cotg\alpha-tg\alpha-2tg2\alpha-4tg4\alpha\cdots-2^n\,tg2^n\alpha=2^{n+1}cotg\,2^{n+1}\alpha$$

-۱۲۵۴ $tg(90^\circ-\alpha)+tg(30^\circ-\alpha)+tg(150^\circ-\alpha)=3cotg3\alpha$

-۱۲۵۵ $\cos\frac{\pi}{33}\cos\frac{2\pi}{33}\cos\frac{4\pi}{33}\cos\frac{8\pi}{33}\cos\frac{16\pi}{33}=\frac{1}{32}$

-۱۲۵۶

$$2\sin\frac{2\pi}{17}+\sin\frac{4\pi}{17}-\sin\frac{6\pi}{17}-\frac{1}{2}\sin\frac{8\pi}{17}=8\sin^2\frac{2\pi}{17}\cos^2\frac{\pi}{17}$$

-۱۲۵۷ $\cos\frac{2\pi}{31}\cos\frac{4\pi}{31}\cos\frac{8\pi}{31}\cos\frac{16\pi}{31}\cos\frac{32\pi}{31}=\frac{1}{32}$

-۱۲۵۸ $tg20^\circ\sec20^\circ\,tg40^\circ\sec40^\circ\cdot tg60^\circ\sec60^\circ\,tg80^\circ\sec80^\circ=48$

-۱۲۵۹

$$\sin10^\circ\sin20^\circ\sin30^\circ\sin40^\circ\sin50^\circ\sin60^\circ\sin70^\circ\sin80^\circ=\frac{3}{256}$$

-۱۲۶۰

$$\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cdots\cos\frac{12\pi}{15}\cos\frac{13\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15}=-\frac{1}{2^{14}}$$

-۱۲۶۱

$$\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}=\frac{1}{2^7}$$

-۱۲۶۲

$$\sin10^\circ+\sin20^\circ+\sin30^\circ+\sin40^\circ+\sin50^\circ=0/5\sin25^\circ\operatorname{cosec}5^\circ$$

-۱۲۶۳ $cotg80^\circ cotg70^\circ+cotg70^\circ cotg30^\circ+cotg30^\circ cotg80^\circ=1$

-۱۲۶۴ $cotg70^\circ+4\cos70^\circ=\sqrt{3}$

-۱۲۶۵ $tg9^\circ - tg27^\circ - cotg27^\circ + cotg9^\circ = tg15^\circ + cotg15^\circ$

-۱۲۶۵ $\cos50^\circ + 8\cos200^\circ \cos220^\circ \cos80^\circ = 2\sin^2 65^\circ$

-۱۲۶۵ $\sin18^\circ \sin54^\circ = 0/25$

-۱۲۶۶ $\sin^2\left[\operatorname{arctg}3 - \operatorname{arccotg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}$

-۱۲۶۷ $\sin^2\left[\operatorname{arccotg}\frac{1}{2} - \operatorname{arccotg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{1}{2}$

-۱۲۶۸ $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) + tg\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}\right) = \frac{7}{5}$

-۱۲۶۹ $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) - tg\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}\right) = \frac{1}{5}$

-۱۲۷۰ $\cos(2\operatorname{arctg}2) - \sin(4\operatorname{arctg}3) = \frac{9}{25}$

-۱۲۷۱ $\arccos\frac{36}{85} - \arccos\frac{15}{17} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{4}{5}$

-۱۲۷۲ $\frac{\pi}{2} + \arccos\frac{36}{85} = \arccos\frac{15}{17} + \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$

-۱۲۷۳ $\cos(2\operatorname{arccotg}7) = \sin(4\operatorname{arccotg}3)$

-۱۲۷۴ $\cos\frac{11\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$

-۱۲۷۵ $\sin84^\circ \sin24^\circ \sin48^\circ \sin12^\circ = \frac{1}{16}\cos^2 18^\circ = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$

-۱۲۷۶

$\sin^5 x \cos^4 x = 6\sin x + 4\sin3x - 4\sin5x - \sin7x + \sin9x$

-۱۲۷۷ $tgx\sec x - \operatorname{cosec}x + cotg^2 x \operatorname{cosec}x + 2\cos x\, cotgx +$

$2\sin x = \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x$

-۱۲۷۸ $\frac{\sqrt{1-\sin2\alpha}}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} + \frac{2}{\sec\alpha + \operatorname{cosec}\alpha} = \sin\alpha + \cos\alpha$

-۱۲۷۹ $tg^2\alpha + \sec^2\beta = tg^2\beta + \sec^2\alpha$

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$$ -۱۲۸۰

$$\frac{1-\cos2\alpha+\sin2\alpha}{1+\cos2\alpha+\sin2\alpha}=tg\,\alpha$$ -۱۲۸۱

$$1+2\cos7\alpha=\sin10.5\alpha\,\mathrm{cosec}\,3.5\alpha$$ -۱۲۸۲

$$\frac{1-\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha(\sec\alpha-\mathrm{cosec}\,\alpha)}\times\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}=\sin\alpha$$ -۱۲۸۳

$$1-\mathrm{cotg}^2\alpha\,\mathrm{cotg}^2\beta=-\frac{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$$ -۱۲۸۴

$$tg^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\sin2\alpha}{1+\sin2\alpha}$$ -۱۲۸۵

$$\frac{3tg^2\frac{\alpha}{2}+10\,tg\frac{\alpha}{2}+3}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}=3+5\sin\alpha$$ -۱۲۸۶

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma}+\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\gamma\cos\alpha}=0$$ -۱۲۸۷

$$\sin\alpha(1+tg\,\alpha)+\cos\alpha(1+\mathrm{cotg}\,\alpha)=\sec\alpha+\mathrm{cosec}\,\alpha$$ -۱۲۸۸

$$\sin^2\alpha\,tg\,\alpha+\cos^2\alpha\,\mathrm{cotg}\,\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=tg\,\alpha+\mathrm{cotg}\,\alpha$$ -۱۲۸۹

$$\frac{2\sin^2(45^\circ-\alpha)}{\cos2\alpha}=\mathrm{cotg}(45^\circ+\alpha)$$ -۱۲۹۰

$$\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\sec2\alpha-tg\,2\alpha$$ -۱۲۹۱

$$\frac{2\sin\alpha-\sin2\alpha}{2\sin\alpha+\sin2\alpha}=tg^2\frac{\alpha}{2}$$ -۱۲۹۲

$$\mathrm{cosec}\,\alpha+\sec\alpha=2\sqrt{2}\cos(45^\circ-\alpha)\,\mathrm{cosec}\,2\alpha$$ -۱۲۹۳

$$tg\,\alpha+\mathrm{cotg}\,\alpha=2\,\mathrm{cosec}\,2\alpha$$ -۱۲۹۴

$$\frac{1+\sin2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$$ -۱۲۹۵

-۱۲۹۶ $\dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = tg(45^\circ + \alpha)$

-۱۲۹۷ $2\operatorname{cosec}4\alpha - \operatorname{cotg}2\alpha = tg\,2\alpha$

-۱۲۹۸ $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha \cdot tg\dfrac{\alpha}{2}} = 1 + \cos\alpha$

-۱۲۹۹ $tg\,2\alpha + \sec 2\alpha = \dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$

-۱۳۰۰ $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} - \dfrac{1 + 2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha(tg^2\alpha - 1)} = \dfrac{2}{1 + tg\,\alpha}$

-۱۳۰۱ $\dfrac{\sin^2(270^\circ + \alpha)}{\operatorname{cotg}^2(\alpha - 2\pi)} + \dfrac{\sin^2(-\alpha)}{\operatorname{cotg}^2(\alpha - 270^\circ)} = 1$

-۱۳۰۲ $\dfrac{\sin^2\alpha - tg^2\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{cotg}^2\alpha} = tg^6\alpha$

-۱۳۰۳ $\dfrac{\cos^3\alpha - \sin^3\alpha}{1 + \sin\alpha\cos\alpha} = \cos\alpha - \sin\alpha$

-۱۳۰۴ $tg(\alpha + \beta) - tg\,\alpha - tg\,\beta = tg(\alpha + \beta)\,tg\,\alpha\,tg\,\beta$

-۱۳۰۵ $8\cos^4\alpha = 3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha$

-۱۳۰۶ $2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 2\cos\dfrac{3\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$

-۱۳۰۷

$$\cos\alpha + \sin 2\alpha - \cos 3\alpha = 4\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\alpha}{2}\right)$$

-۱۳۰۸ $1 - 3tg^2\alpha = \dfrac{4\sin(30^\circ + \alpha)\sin(30^\circ - \alpha)}{\cos^2\alpha}$

-۱۳۰۹ $\sin 4\alpha + \cos 4\alpha \times \operatorname{cotg} 2\alpha = \dfrac{1 - tg^2\alpha}{2\,tg\,\alpha}$

۱۳۱۰-

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}-\frac{2\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$$

۱۳۱۱- $1+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha=4\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha$

۱۳۱۲- $\sin 2\alpha+\sin 4\alpha-\sin 6\alpha=4\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha$

۱۳۱۳- $$\frac{\sin\alpha+2\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\sin 3\alpha+2\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}=\frac{\sin 3\alpha}{\sin 5\alpha}$$

۱۳۱۴- $$\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\cos\alpha\cos\beta$$

۱۳۱۵- $$1+\frac{1}{1+\frac{1}{\sin\alpha}}=\frac{2\sin(15^\circ+\frac{\alpha}{2})\cos(15^\circ-\frac{\alpha}{2})}{\cos^2(45^\circ-\frac{\alpha}{2})}$$

۱۳۱۶- $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)=$

$$4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}$$

۱۳۱۷- $$\frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}\times\frac{1+cotg^2\alpha}{cotg^2\alpha}=\frac{1+tg^4\alpha}{tg^2\alpha+cotg^2\alpha}$$

۱۳۱۸- $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\sin^2(\alpha+\beta)=2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$

۱۳۱۹- $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)=\sin^2(\alpha+\beta)$

۱۳۲۰- $tg\alpha\, tg 2\alpha+tg 2\alpha\, tg 3\alpha+\cdots+tg(n-1)\alpha\, tg\, n\alpha=$

$$\frac{tg\, n\alpha}{tg\alpha}-n$$

۱۳۲۱- $$tg\alpha+tg\beta+tg\gamma-\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=tg\alpha\, tg\beta\, tg\gamma$$

۱۳۲۲- اگر $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$ باشد ثابت کنید $cotg\alpha+cotg\beta+cotg\gamma=cotg\alpha\, cotg\beta\, cotg\gamma$

۱۳۲۳- $\sec(45^\circ+\alpha)\sec(45^\circ-\alpha)=2\sec 2\alpha$

۱۳۲۴- $\sin(2\alpha+\beta)\, cosec\,\alpha-2\cos(\alpha+\beta)=\sin\beta\, cosec\,\alpha$

۱۳۲۵- $$2(cosec\, 2\alpha+cotg\, 2\alpha)=cotg\frac{\alpha}{2}-tg\frac{\alpha}{2}$$

-۱۳۲۶ $$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=tg(45^\circ+\alpha)$$

-۱۳۲۷ $$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=tg2\alpha+\sec2\alpha$$

-۱۳۲۸ $$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)=\frac{\sin2\alpha}{\sqrt2}$$

-۱۳۲۹ $$\frac{2\cos^2\alpha-1}{2tg(45^\circ-\alpha)\sin^2(45^\circ+\alpha)}=1$$

-۱۳۳۰ $$tg^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\sin2\alpha}{1+\sin2\alpha}$$

-۱۳۳۱ $$\frac{\cos2\alpha}{cotg^2\alpha-tg^2\alpha}=\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha$$

-۱۳۳۲ $$\frac{\sin\alpha+\cos(2\beta-\alpha)}{\cos\alpha-\sin(2\beta-\alpha)}=cotg\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)$$

-۱۳۳۳ $$\frac{1+\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=\frac{1+tg\alpha}{1-tg\alpha}=tg\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$$

-۱۳۳۴ $$\frac{\sin x+\cos(2y-x)}{\cos x-\sin(2y-x)}=\frac{1+\sin2y}{\cos2y}$$

-۱۳۳۵ $$tg^2\alpha-tg^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)\sec^2\alpha\sec^2\beta$$

-۱۳۳۶ $$\frac{tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}=cotg\alpha$$

-۱۳۳۷ $$tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=1$$

-۱۳۳۸ $$\frac{2(\sin2\alpha+2\cos^2\alpha-1)}{\cos\alpha-\sin\alpha-\cos2\alpha+\sin2\alpha}=cosec\alpha$$

-۱۳۳۹ $$\frac{\sin\alpha-\sin3\alpha+\sin5\alpha}{\cos\alpha-\cos3\alpha+\cos5\alpha}=tg3\alpha$$

-۱۳۴۰
$$\sin(a-b)+\sin(a-c)+\sin(b-c)=4\cos\frac{a-b}{2}\sin\frac{a-c}{2}\cos\frac{b-c}{2}$$

۱۳۴۱- $2(\sin^6 x+\cos^6 x)-3(\sin^4 x+\cos^4 x)+1=0$

۱۳۴۲- $\sin\alpha+\sin(\alpha+120^\circ)+\sin(\alpha+240^\circ)=0$

۱۳۴۳-

$$\sin^2(45^\circ+\alpha)-\sin^2(30^\circ-\alpha)-\sin 15^\circ\cos(15^\circ+2\alpha)=\sin 2\alpha$$

۱۳۴۴- $\dfrac{1-2\cos^2 x}{\sin x\cos x}=tg\,x-cotg\,x$

۱۳۴۵- $tg^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}$

۱۳۴۶- $\cos^2 x+\cos^2(\alpha+x)-2\cos\alpha\cos x\cos(\alpha+x)=\sin^2\alpha$

$$arctg(3+2\sqrt{2})-arctg\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$$

۱۳۴۷- $arc\cos\sqrt{\dfrac{2}{3}}-arc\cos\dfrac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\pi}{6}$

۱۳۴۸- $arc\sin\dfrac{4}{5}+arc\sin\dfrac{5}{13}+arc\sin\dfrac{16}{65}=\dfrac{\pi}{2}$

۱۳۴۹- $arc\cos\dfrac{1}{2}+arc\cos(-\dfrac{1}{7})=arc\cos(-\dfrac{13}{14})$

۱۳۵۰- $2\,arc\,tg\dfrac{1}{5}+arctg\dfrac{1}{4}=arctg\dfrac{32}{43}$

۱۳۵۱- $arctg\dfrac{1}{3}+arctg\dfrac{1}{5}+arctg\dfrac{1}{7}+arctg\dfrac{1}{8}=\dfrac{\pi}{4}$

معادلات زیر را حل کنید:

۱۳۵۲ $4\,arctg(x^2-3x-3)-\pi=0$ ج: $x=-1$ و 4

۱۳۵۳- $6\,arc\sin(x^2-6x+8{,}5)=\pi$ ج: $x=2$ و 4

۱۳۵۴- $arctg(x+2)-arctg(x+1)=\dfrac{\pi}{4}$ ج: $x=-1$ و -2

۱۳۵۵- $2\,arc\,tg\dfrac{1}{2}-arctg\,x=\dfrac{\pi}{4}$ ج: $x=\dfrac{1}{7}$

-۱۳۵۶ $\arcsin\frac{۲}{۳\sqrt{x}}-\arcsin\sqrt{۱-x}=\arcsin\frac{۱}{۳}$ $x=\frac{۲}{۳}$

-۱۳۵۷ $\operatorname{arctg}\frac{a}{b}-\operatorname{arctg}\frac{a-b}{a+b}=\operatorname{arctg}x$ ج: $x=۱$

-۱۳۵۸ $\arcsin ۳x=\arccos ۴x$ ج: $x=۰/۲$

-۱۳۵۹ $۲\arcsin x=\arcsin\frac{۱۰x}{۱۳}$ ج: $x=۰$

-۱۳۶۰ $x+y=\operatorname{arctg}\frac{۲a}{۱-a^{۲}}$ و $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=a^{۲}$ $(|a|<۱)$

معادلات زیر را حل کنید و جوابهای کلی آنها را بدست آورید:

-۱۳۶۱ $۱-\sin ۵x=(\cos\frac{۳x}{۲}-\sin\frac{۳x}{۲})^{۲}$

جواب: $x=k\pi$ و $(۲k+۱)\times ۲۲/۵^\circ$

-۱۳۶۲ $\sin x+\sin ۲x+\sin ۳x+\sin ۴x=۰$

جواب: $x=۷۲^\circ k$ و $۱۸۰^\circ(۲k+۱)$ و $۹۰^\circ(۲k+۱)$

-۱۳۶۳ $\sin(x+۳۰^\circ)+\cos(x+۶۰^\circ)=۱+\cos ۲x$

جواب: $x=۹۰^\circ(۲k+۱)$ و $۶۰^\circ(۶k\pm۱)$

-۱۳۶۴ $\sin x+\sin ۲x+\sin ۳x=\cos x+\cos ۲x+\cos ۳x$

جواب: $x=۱۲۰^\circ(۳k\pm۱)$ و $۲۲/۵^\circ(۴k+۱)$

-۱۳۶۵ $\cos ۲x-\cos ۸x+\cos ۶x=۱$

جواب: $x=(۲k+۱)\times ۲۲/۵^\circ$ و $k\times ۶۰^\circ$

-۱۳۶۶ $\cos x-\cos ۲x=\sin ۳x$

جواب. $x=k\times ۱۲۰^\circ$ و $(۴k-۱)\times ۹۰^\circ$ و $(۴k+۱)\times ۴۵^\circ$

-۱۳۶۷ $\sin(x-۶۰^\circ)=\cos(x+۳۰^\circ)$

جواب. $x=۶۰^\circ(۳k+۱)$

-۱۳۶۸ $\sin ۵x+\sin x+۲\sin^{۲}x=۱$

جواب: $x=۴۵^\circ(۲k+۱)$ و $۶۰^\circ k\pm۱۰^\circ$

-۱۳۶۹ $\sin^{۲}x(\operatorname{tg}x+۱)=۳\sin x(\cos x-\sin x)+۳$

جواب: $x = 45^\circ(4k-1)$ و $(3k\pm 1)60^\circ$

۱۳۷۰- $\cos 4x = -2\cos^2 x$

جواب: $x = 180^\circ k \pm 45^\circ$ و $180^\circ k \pm 60^\circ$

۱۳۷۱- $\sin x + \cos x = \operatorname{cosec} x$

جواب. $x = 90^\circ(2k+1)$ و $45^\circ(4k+1)$

۱۳۷۲- $\sin 3x = \cos 2x$

جواب: $x = 90^\circ(4k+1)$ و $18^\circ(4k+1)$

۱۳۷۳- $\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} = \frac{5}{8}$

جواب: $x = 90^\circ(3k\pm 1)$

۱۳۷۴- $2tg^2 x - \sec^2 x = 1$

جواب. $x = 45^\circ(2k+1)$

۱۳۷۵- $(1+\cos 4x)\sin 4x = \cos^2 2x$

جواب: $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ و $\frac{k\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{24}$

۱۳۷۶- $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x$

جواب. $x = K \times 90^\circ$

۱۳۷۷- $2\cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = 0$

جواب: $x = k\pi + 45^\circ$ و $k\pi - \operatorname{arctg} 2$

۱۳۷۸- $\cos^2 x + 3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x = 1$

جواب. $x = k\pi$ و $60^\circ(3k-1)$

۱۳۷۹- $6\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 5\cos^2 x = 2$

جواب: $x = k\pi + 45^\circ$ و $k\pi - \operatorname{arctg}(7 \div 4)$

۱۳۸۰- $\sin^2 x + 1/5\cos^2 x = 2/5\sin x \cos x$

جواب. $x = 45^\circ(4k+1)$ و $k\pi + \operatorname{arctg} 1/5$

۱۳۸۱- $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$

جواب $x = 360^\circ k + 90^\circ = 90^\circ(4k+1)$ و $360^\circ k - 30^\circ$

۱۳۸۲- $\sin x + \cos x = 1$

جواب $x = 90^\circ \times 4k$ و $90^\circ(4k+1)$

-۱۳۸۳ $\sin x + \cos x = 1 + \sin 2x$

جواب: $x = 45^\circ(4k-1)$ و $90^\circ(4k+1)$ و $90^\circ \times 4k$

-۱۳۷۴ $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}$

جواب: $x = 15^\circ(8k+1)$

-۱۳۸۵ $\sin x \sin 7x = \sin 3x \sin 5x \qquad x = K \times 45^\circ$

-۱۳۸۶ $\cos x \sin 7x = \cos 3x \sin 5x$

جواب: $x = K \times 90^\circ$ و $(2k+1)22{,}5^\circ$

-۱۳۸۷ $\sin x \sin 2x \sin 3x = 0{,}25 \sin 4x$

جواب $x = K \times 90^\circ$ و $(2k+1)22/5^\circ$

-۱۳۸۸ $2\cos^2 x + 4\cos x = 3\sin^2 x$

جواب $x = 2k\pi \pm \arccos 0{,}2(\sqrt{19} - 2)$

-۱۳۸۹ $5\cos 2x = 4\sin x$

جواب $x = k\pi + (-1)^k \arcsin \dfrac{-2 \pm \sqrt{54}}{10}$

-۱۳۹۰ $tg(45^\circ + x) + tg\, x - 2 = 0$

جواب $x = k\pi + \operatorname{arctg}(2 \pm \sqrt{3})$

-۱۳۹۱ $8 tg^2(x \div 2) = 1 + \sec x$

جواب $x = 2k\pi \pm \arccos(1 \div 3)$

-۱۳۹۲ $\dfrac{\cos(90^\circ - x)}{1 + \cos x} = \sec^2\dfrac{x}{2} - 1$

جواب $x = 2k\pi$ و $90^\circ(4k+1)$

-۱۳۹۳ $1 - \cos(\pi - x) + \sin\dfrac{\pi + x}{2} = 0$

جواب $x = \pi(2k+1)$ و $240^\circ(3k \pm 1)$

-۱۳۹۴ $2[1 - \sin(\dfrac{3\pi}{2} - x)] = \sqrt{3}\, tg\dfrac{\pi - x}{2}$

جواب $x = \pi(2k+1)$؛ $k\pi + (-1)^k \times 60^\circ$

-۱۳۹۵ $\sin x - \cos x - 4\cos^2 x \sin x = 4\sin^3 x$

جواب $x = k\pi - \operatorname{arctg}(1 \div 3)$

-۱۳۹۶ $\operatorname{cotg} x + \dfrac{\sin x}{1+\cos x} = 2 \qquad x = k\pi + (-1)^k \times 30^\circ$

-۱۳۹۷ $2\operatorname{cotg}(x-\pi) - (\cos x + \sin x)(\operatorname{cosec} x - \sec x) = 4$

جواب $x = 90^\circ k + (-1)^k \times 15^\circ$

-۱۳۹۸ $\sin(\pi - x) + \operatorname{cotg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{\sec x - \cos x}{2\sin x}$

جواب $x = 120^\circ(2k \pm 1)$

-۱۳۹۹ $\left(1 - \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right) \div \left(1 - \operatorname{cotg}\dfrac{x}{2}\right) = 2\sin\dfrac{x}{2}$

جواب $x = 240^\circ(2k \pm 1)$

-۱۴۰۰ $\sin(\pi - x) + \operatorname{cotg}(270^\circ + x) = \sec(-x) - \cos(2\pi - x)$

جواب $x = 180^\circ k$

-۱۴۰۱ $\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}(90^\circ + x) = \cos 2x \sec^2 x$

جواب $x = k\pi$ و $45^\circ(4k+1)$

-۱۴۰۲ $\sin^3 x(1 + \operatorname{cotg} x) + \cos^3 x(1 + \operatorname{tg} x) = \cos 2x$

جواب $x = 45^\circ(4k - 1)$

-۱۴۰۳ $\sin^3 x \cos 3x + \sin 3x \cos^3 x = 0/375$

جواب $x = 45^\circ k + (-1)^k 7/5^\circ$

-۱۴۰۴ $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x \qquad x = 60^\circ K$

-۱۴۰۵ $1 + \sin x + \cos x = 2\cos\left(\dfrac{x}{2} - 45^\circ\right)$

جواب $x = 360^\circ K - 90^\circ$ و $720^\circ K + 90^\circ$

-۱۴۰۶ $1 - \cos^2 2x = \sin 3x - \cos(90^\circ + x) \qquad x = 90^\circ K$

-۱۴۰۷ $1 - 2\cos x + \cos 2x = \dfrac{\operatorname{cosec}(\pi - x)}{\operatorname{cotg} 2x - \operatorname{cotg} x} \qquad x = 60^\circ(6K \pm 1)$

-۱۴۰۸ $[\cos x - \sin(x - \pi)]^2 + 1 = \dfrac{2\sin^2 x}{\sec^2 x - 1}$

جواب $x = K\pi - 45^\circ$

۱۴۰۹- $(\sin x+\cos x)^2=2\sin(45^\circ+x)\sin(45^\circ-x)$

جواب $x=45^\circ(4K-1)$ و $K\pi$

۱۴۱۰-

$$2-\sin x\cos 2x-\sin 2x\cos x=\left[\cos\left(45^\circ-\frac{3x}{2}\right)-\sin\left(45^\circ-\frac{3x}{2}\right)\right]^2$$

جواب $x=60^\circ(2K+1)$ و $30^\circ(4K+1)$

۱۴۱۱- $(1-tg\,x)(1+\sin 2x)=1+tg\,x$

جواب $x=45^\circ(4K-1)$ و $K\pi$

۱۴۱۲- $\cos x+\sin x=\cos 2x\div(1-\sin 2x)$

جواب $x=45^\circ(4K-1)$ و $2K\pi$ و $90^\circ(4K-1)$

۱۴۱۳- $(1+\sin 2x)(\cos x-\sin x)=1-2\sin^2 x$

جواب $x=45^\circ(2K+1)$ و $2K\pi$ و $90^\circ(4K+1)$

۱۴۱۴- $\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 2x}{4\cos^2 x}=\sin(x+30^\circ)\sin(x-30^\circ)$

جواب $x=30^\circ(6K\pm 1)$

۱۴۱۵-

$$\frac{\sin(60^\circ+x)+\sin(60^\circ-x)}{2}=\frac{tg\,x}{(1+tg^2x)^2}+\frac{cotg\,x}{(1+cotg^2x)^2}$$

جواب $x=180^\circ K+(-1)^k 60^\circ$

۱۴۱۶-

$$\sec^2 x-\left(\cos x+\sin x\, tg\frac{x}{2}\right)=\frac{\sin(x-30^\circ)+\cos(60^\circ-x)}{\cos x}$$

جواب $x=60^\circ(3K+1)$

۱۴۱۷- $2\sqrt{2}[\sin(45^\circ+x)-\sin(45^\circ-x)]=tg\frac{x}{2}+cotg\frac{x}{2}$

جواب $x=45^\circ(2K+1)$

۱۴۱۸- $2\sqrt{2}\sin(45^\circ+x)=(1+\cos 2x)\div(1+\sin x)$

جواب $x=2K\pi$ و $2(K\pi+\operatorname{arctg}2)$

۱۴۱۹- $$۱ - \frac{۲(\sin ۲x - \cos ۲x \, tg x)}{\sqrt{۴\sec^۲ x}} = \cos^۴ x - \sin^۴ x$$

جواب $x = ۱۸۰^\circ K \text{ و } ۱۸۰^\circ K + ۳۰^\circ$

۱۴۲۰- $x = ۱۸۰^\circ K \text{ و } ۱۸۰^\circ K \pm ۳۰^\circ$ $\quad \sin ۳x = ۴ \sin x \cos ۲x$

۱۴۲۱- $$\sec x + ۱ = \sin(\pi - x) - \cos x \, tg \frac{\pi + x}{۲}$$

جواب: $x = K\pi + ۴۵^\circ \text{ و } ۲k\pi + \pi$

۱۴۲۲- $$\frac{tg ۲x \, tg x}{tg ۲x - tg x} - ۲ \sin(۴۵^\circ + x) \sin(۴۵^\circ - x) = ۰$$

جواب $x = ۹۰^\circ K + ۲۲^\circ ۳۰'$

۱۴۲۳- $$tg(x - ۴۵^\circ) \, tg x \, tg(x + ۴۵^\circ) = \frac{۴\cos^۲ x}{tg \frac{x}{۲} - cotg \frac{x}{۲}}$$

$x = ۱۸۰^\circ K \text{ و } ۴۵^\circ(۲k + ۱)$

۱۴۲۴- $$\sin^۴ x + \sin^۴\left(x + \frac{\pi}{۴}\right) + \sin^۴\left(x - \frac{\pi}{۴}\right) = \frac{۹}{۸}$$

جواب: $x = K\pi \pm \frac{۱}{۲} \arccos\left(-۱ + \frac{\sqrt{۶}}{۲}\right)$

۱۴۲۵-

$$\frac{tg(x + ۴۵^\circ) + tg(x - ۴۵^\circ)}{۲} = tg(x - ۴۵^\circ) \, tg(x + ۴۵^\circ) \, tg x$$

جواب $x = ۶۰^\circ K$

۱۴۲۶- $tg(x + \alpha) + tg(x - \alpha) = ۲ \, cotg x$

جواب: $x = ۹۰^\circ(۲k + ۱) \text{ و } k\pi \pm ۰٫۵ \arccos(\sin^۲ \alpha)$

۱۴۲۷- $$\left(\sin \frac{x}{۲} - \cos \frac{x}{۲}\right)^۲ = \frac{۲}{tg \frac{x}{۲} - tg \frac{x + \pi}{۲}}$$

جواب: $x = ۱۸۰^\circ k \pm ۳۰^\circ$

-۱۴۲۸

$$\frac{\sin x}{\sin(۳۰^\circ+x)+\sin(۳۰^\circ-x)}=۱+tg\left(\frac{x}{۲}+۴۵^\circ\right)-tg\left(۴۵^\circ-\frac{x}{۲}\right)$$

جواب: $x=۴۵^\circ(۴k-۱)$

-۱۴۲۹ $\sin^۴x+\sin^۴(x+۴۵^\circ)=۰/۲۵$

جواب: $x=k\pi$ و $k\pi-۴۵^\circ$

-۱۴۳۰ $\cos۳x-\sin x=\sqrt{۳}(\cos x-\sin۳x)$

جواب: $x=۲۲/۵^\circ(۱+۴k)$ و $۱۵^\circ(۱+۱۲k)$

-۱۴۳۱ $۷+۴\sin x\cos x+۱/۵(tg x+cotg x)=۰$

جواب: $x=(-۱)^{k+۱}\frac{\pi}{۱۲}+\frac{k\pi}{۲}$

-۱۴۳۲ $\frac{۴cotg x}{۱+cotg^۲x}+\sin^۲۲x+۱=۰$

جواب: $x=۴۵^\circ(۴k-۱)$

-۱۴۳۳ $\frac{\sin^۴x-۴\sin^۲x}{\sin^۲۲x+۴\sin^۲x-۴}+۱=۲tg^۲x$

جواب: $x=۹۰^\circ k+۴۵^\circ$

-۱۴۳۴ $\sin z\cdot\sin(۶۰^\circ-z)\cdot\sin(۶۰^\circ+z)=\frac{۱}{۸}$

جواب: $z=(-۱)^k\times۱۰^\circ+۶۰^\circ k$

-۱۴۳۵ $\sec^۲۲t-cosec^۲۲t=(۸\div۳)$

جواب: $t=۹۰k\pm۳۰^\circ$

-۱۴۳۶ $tg۲t-tg t-۴\sin t=۰$

جواب: $t=k\pi$ و $۱۲۰^\circ k\pm۲۰^\circ$

-۱۴۳۷ $\sec۲t-۶\cos۲t=۴\sin۲t$

جواب: $t=\frac{\pi}{۱۲}(۴k-۱)$ و $\frac{k\pi}{۲}+\frac{۱}{۲}arctg۵$

۱۴۳۸- $cotg\,t - \sin t = 2\sin^2\frac{t}{2}$

جواب: $t = 45^\circ(4k+1)$ و $90^\circ(4k-1)$

۱۴۳۹- $8\cos z \cdot \cos(60^\circ - z) \cdot \cos(60^\circ + z) + 1 = 0$

جواب: $z = \pm 40^\circ + 120^\circ \times k$

۱۴۴۰- $\sin(90^\circ + 2x)\,cotg\,3x + \sin(\pi + 2x) - \sqrt{3}\cos 5x = 0$

جواب: $x = 18^\circ(2k+1)$ و $(-1)^k\,15^\circ + 60^\circ k$

۱۴۴۱- $\sin x \cos 2x + \cos x \cos 4x = \sin(45^\circ + 2x)\sin(45^\circ - 3x)$

جواب: $x = 15^\circ(4k-1)$

۱۴۴۲- $\sin 2x = \cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2}$

جواب: $x = 90^\circ(2k+1)$ و $k\pi + (-1)^k 30^\circ$

۱۴۴۳- $(1 + \cos 4x)\sin 2x = \cos^2 2x$

جواب: $x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$ و $(-1)^k\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$

۱۴۴۴- $cotg^4 2z + cosec^4 2z = 25 \qquad z = 90^\circ k \pm 15^\circ$

۱۴۴۵- $\sin^2 2z + \sin^2 3z + \sin^2 4z + \sin^2 5z = 2$

جواب:

$z = \frac{\pi}{4}(2k+1)$ و $\frac{\pi}{14}(2k+1)$

۱۴۴۶- $tg\,2x \cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2}\sin 5x = 0$

جواب: $x = 360^\circ K$ و $K\pi \pm 67{,}5^\circ$

۱۴۴۷- $cotg(270^\circ + x) - tg^2 x = (\cos 2x - 1)\sec^2 x$

جواب: $x = K\pi$ و $K\pi + 45^\circ$

۱۴۴۸- $\cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{3x}{2} - \sin x \cdot \sin 3x - \sin 2x \cdot \sin 3x = 0$

جواب: $x = 20^\circ(2K+1)$

-۱۴۴۹ $1-\sin 2x=\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2$

جواب: $x=K\pi$ و $45^\circ(2K+1)$

-۱۴۵۰ $2\operatorname{cotg}^2x\times\cos^2x+4\cos^2x-\operatorname{cotg}^2x-2=0$

جواب: $x=K\pi\pm45^\circ$

-۱۴۵۱ $2\sin^3x+2\sin^2x\cos x-\sin x\cos^2x-\cos^3x=0$

جواب: $x=K\pi-45^\circ$ و $K\pi\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$

-۱۴۵۲ $\sin 7x+\sin 9x=2[\cos^2(45^\circ-x)-\cos^2(45^\circ+2x)]$

جواب: $x=\frac{\pi}{2}(2K+1)$ و $\frac{2K\pi}{5}$ و $\frac{\pi}{11}(2K+1)$

-۱۴۵۳ $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}3x=0$ جو ، $x=60^\circ K$

-۱۴۵۴ $\sin(15^\circ+x)+\sin(45^\circ-x)=1$

جواب: $x=15^\circ+360^\circ\times K$

-۱۴۵۵ $\sec x+\operatorname{cotg}3x=\operatorname{cotg}(3x\div2)$

جواب: $x=K\pi+45^\circ$ و $90^\circ K+22/5^\circ$

-۱۴۵۶ $\sin x\cdot\sin 3x+\sin 4x\cdot\sin 8x=0$

جواب: $x=\frac{K\pi}{5}$ و $\frac{K\pi}{7}$

-۱۴۵۷ $2\operatorname{tg}^3x-2\operatorname{tg}^2x+3\operatorname{tg}x-3=0$

جواب: $x=K\pi+45^\circ$

$\cos x\cdot\cos 2x=\sin(45^\circ+x)\cdot\sin(45^\circ+4x)+\sin(135^\circ+4x)\times$
$\cos(315^\circ-5x)$

جواب: $x=K\pi$ و $\pi(2K+1)\div14$

-۱۴۵۹ $2+\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{cotg}\frac{x}{2}+\operatorname{cotg}x\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0$

جواب: $x=2K\pi\pm120^\circ$

-۱۴۶۰ $\sin 2x+\sin(\pi-8x)=\sqrt{3}\cos 3x$

جواب: $x=30^\circ(2K+1)$ و $(-1)^k9^\circ+36^\circ K$

-۱۴۶۱ $\frac{1}{2}(\cos 5x+\cos 7x)-\cos^2 2x+\sin^2 3x=0$

جواب: $x = \frac{\pi}{۲}(۲K+۱) \text{ و } \frac{۲K\pi}{۱۱}$

۱۴۶۲- $۲(\cos۴x - \sin x \cdot \cos۳x) = \sin۴x + \sin۲x$

جواب: $x = \pi(۴K+۱) \div ۱۶$

۱۴۶۳- $\sin x \cos x \cos۲x \cdot \cos۸x = ۰/۲۵ \sin۱۲x$

جواب: $x = ۲۲/۵^\circ K$

۱۴۶۴- $۳\sin^۲ ۲x + ۷\cos۲x - ۳ = ۰$

جواب: $x = ۴۵^\circ(۲K+۱)$

۱۴۶۵- $\sin۲x \cdot \sin۶x - \cos۲x \cdot \cos۶x = \sqrt{۲} \cdot \sin۳x \cdot \cos۸x$

جواب: $x = \frac{\pi}{۱۶}(۲K+۱) \text{ و } \frac{K\pi}{۳} + (-۱)^{K+۱} \frac{\pi}{۱۲}$

۱۴۶۶- $\sin۳x \cdot \cos۳x = \sin۲x$

جواب: $x = ۹۰^\circ K \text{ و } ۹۰^\circ K \pm ۱۵^\circ$

۱۴۶۷- $\cos۲x - ۵\sin x - ۳ = ۰$

جواب: $x = K\pi + (-۱)^{K+۱} \frac{\pi}{۶}$

۱۴۶۸- $۳\sin۲x + ۲\cos۲x = ۳$

جواب: $x = K\pi + ۴۵^\circ \text{ و } K\pi + \operatorname{arccotg} ۵$

۱۴۶۹- $\operatorname{cotg}\left(\frac{۳\pi}{۲} - x\right) - \operatorname{cotg}^۲ x + \frac{۱+\cos۲x}{\sin^۲ x} = ۰$

جواب: $x = ۴۵^\circ(۴K+۳)$

۱۴۷۰- $\cos۹x - \cos۷x + \cos۳x - \cos x = ۰$

جواب: $x = ۳۶^\circ K \text{ و } ۳۰^\circ(۲K+۱)$

۱۴۷۱- $۲\left(\operatorname{tg}\frac{t}{۲} - ۱\right) = \cos t$

جواب: $t = ۹۰^\circ(۴K+۱)$

۱۴۷۲- $\sin۳z - \cos۳z = \sqrt{\frac{۳}{۲}}$

جواب: $z=۳۵^\circ+۱۲۰^\circ\times K$ و $۵۵^\circ+۱۲۰^\circ\times K$

۱۴۷۳- $\sqrt{۳}\sin ۲x+\cos ۵x-\cos ۹x=۰$

جواب: $x=\frac{K\pi}{۲}$ و $\frac{K\pi}{۷}+(-۱)^{K+۱}\frac{\pi}{۲۱}$

۱۴۷۴- $۲\cos^۲ x+۵\sin x-۴=۰$

جواب: $x=(-۱)^{K}۳۰^\circ+K\pi$

۱۴۷۵- $\sin\frac{z}{۲}\cos\frac{۳z}{۲}-\frac{۱}{\sqrt{۳}}\sin ۲z=\sin\frac{۳z}{۲}\cos\frac{z}{۲}$

جواب: $z=K\pi$ و $۲K\pi\pm۱۵۰^\circ$

۱۴۷۶- $۸\cos^۴ x-۸\cos^۲ x-\cos x+۱=۰$

جواب: $x=۷۲^\circ K$ و $۱۲۰^\circ K$

۱۴۷۷-

$\sin(۴۵^\circ+۵x)\cos(۴۵^\circ+۲x)=\sin(۴۵^\circ+x)\sin(۴۵^\circ-۶x)$

جواب، $x=۴۵^\circ K$

۱۴۷۸- $\cos ۳x=۲\sin(۲۷۰^\circ+x)$

جواب: $x=۹۰^\circ(۲K+۱)$ و $K\pi\pm۶۰^\circ$

۱۴۷۹- $۵(۱+\cos x)=۲+\sin^۴ x-\cos^۴ x$

جواب: $x=۲K\pi\pm۱۲۰^\circ$

۱۴۸۰- $۱+\sin ۲x=(\cos ۳x+\sin ۳x)^۲$

جواب: $x=۹۰^\circ K$ و $۲۲/۵^\circ(۲K+۱)$

۱۴۸۱- $\sin ۳x=۲\cos(۹۰^\circ-x)$

جواب: $x=K\pi$ و $K\pi\pm۳۰^\circ$

۱۴۸۲- $\cos ۴x+۲\sin^۲ x=۰$

جواب: $x=۴۵^\circ(۲K+۱)$ و $K\pi\pm۳۰^\circ$

۱۴۸۳- $\sin x+\sin ۷x-\cos ۵x+\cos(۳x-۲\pi)=۰$

جواب $x=۴۵^\circ K$ و $۲۲/۵^\circ(۳+۴K)$

۱۴۸۴- $\cos^۴ ۲x+۶\cos^۲ ۲x=(۲۵\div۱۶)$

جواب: $x=K\pi\pm۳۰^\circ$ و $K\pi\pm۶۰^\circ$

۱۴۸۵- $۱+\cos t+\cos ۲t+\cos ۳t=۰$

جواب: $t=۹۰^\circ(۲K+۱)$ و $۶۰^\circ(۲K+۱)$

۱۴۸۶- $\cos ۲x=\sqrt{۲}(\cos x-\sin x)$

جواب: $x=K\pi+۴۵^\circ$

۱۴۸۷- $۱+\cos ۷x=(\sin\frac{۳x}{۲}-\cos\frac{۳x}{۲})^۲$

جواب: $x=۲۲/۵^\circ(۱+۴K)$ و $۹^\circ(۳+۴K)$

۱۴۸۸- $۲tg^۴ ۳x-۳tg^۲ ۳x+۱=۰$

جواب: $x=\frac{K\pi}{۳}\pm\frac{\pi}{۱۲}$ و $\frac{K\pi}{۳}\pm\frac{۱}{۳}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۴۸۹- $\sin ۲x-\sin ۳x+\sin ۸x=\cos(۷x+۲۷۰^\circ)$

جواب: $x=۳۶^\circ k$

۱۴۹۰- $۴tg^۲ ۳x-\sec^۲ ۳x=۲$

جواب: $x=۶۰^\circ K\pm۱۵^\circ$

۱۴۹۱- $\cos^۴ x+\cos^۲ x-۴\cos^۲\frac{x}{۲}=۰$

جواب: $x=\pi(۲K+۱)$

۱۴۹۲- $\sin ۹x=۲\sin ۳x$

جواب: $x=۶۰^\circ K$ و $۶۰^\circ K\pm۱۰^\circ$

۱۴۹۳- $(\sec z+\operatorname{cosec} z)(\sin z+\cos z)+۲=۰$

جواب: $z=(-۱)^{K+۱}\frac{\pi}{۱۲}+\frac{K\pi}{۲}$

۱۴۹۴- $\sin ۲z+\cos ۲z=\sqrt{۲}\sin ۳z$

جواب: $z=۴۵^\circ(۸K+۱)$ و $۹^\circ(۸K+۲)$

۱۴۹۵- $۶\sin^۲ x+۲\sin^۲ ۲x=۵$

جواب: $x=۴۵^\circ(۲K+۱)$

۱۴۹۶- $\sin ۳x+\sin ۵x=۲(\cos^۲ ۲x-\sin^۲ ۳x)$

جواب: $x=۹۰^\circ(۲K+۱)$ و $۱۰^\circ(۴K+۱)$

۱۴۹۷- $tg(90^\circ+x)-cotg^2x+cosec^2x(1+\cos 2x)=0$

جواب: $x=90^\circ(2K+1)$ و $45^\circ(4K+1)$

۱۴۹۸- $2\sin^2x-\cos 2x-\sin x=0$

$x=45^\circ(2k+1)$ و $90^\circ(4k-1)$

۱۴۹۹- $3\sin 5z-2\cos 5z=3$

جواب: $z=18^\circ+0/4K\pi$ و $0/4\,arctg5+0/4K\pi$

۱۵۰۰- $4\sin 2z+\frac{1}{2}\cos 2z=2$

جواب: $z=\frac{2}{3}arctg2+\frac{2K\pi}{3}$ و $\frac{2K\pi}{3}+\frac{2}{3}arctg\frac{2}{5}$

۱۵۰۱- $(\cos 6x-1)cotg3x=\sin 3x$

جواب: $x=120^\circ K\pm 20^\circ$

۱۵۰۲- $\frac{\sec(45^\circ+x)\cdot\sec(45^\circ-x)}{cosec(90^\circ+x)\cdot cosec(90^\circ-x)}=2$

جواب: $x=K\pi\pm 30^\circ$

۱۵۰۳- $1-\cos(\pi+x)-\sin\frac{3\pi+x}{2}=0$

جواب: $x=\pi(2K+1)$ و $4K\pi\pm 240^\circ$

۱۵۰۴- $9^{\cos x}=9^{\sin x}\cdot 3^{2\sec x}$

جواب: $x=K\pi$ و $K\pi-45^\circ$

۱۵۰۵- $\sin x-\sin 2x+\sin 5x+\sin 8x=0$

جواب: $x=\frac{K\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{7}(2K+1)$

۱۵۰۶- $2\sin z-\cos z=0/4$

جواب: $z=2\,arccotg3+2K\pi$ و $2K\pi-2\,arc\ldots$

۱۵۰۷- $\cos(90^\circ+5x)+\sin x=2\cos 3x$

جواب: $x=30^\circ(2K+1)$ و $45^\circ(4K-1)$

۱۵۰۸- $(1+\sin x)\times tg(45^\circ-\frac{x}{2})\quad \sec x-\cos x$

جواب: $x=K\pi\pm 45^\circ$

-۱۵۰۹ $\cos x-\sqrt{3}\sin x=\cos 2x$

جواب: $x=K\pi$ و $90^\circ K+(-1)^{K}+30^\circ$

-۱۵۱۰ $6\sin^2 x+\sin x\cos x-\cos^2 x=2$

جواب: $x=K\pi-45^\circ$ و $K\pi+\operatorname{arctg}(3\div 4)$

-۱۵۱۱ $\cos 7x+\sin 8x=\cos 3x-\sin 2x$

جواب: $x=36^\circ K$ و $90^\circ(4K-1)$ و $18^\circ(4K+1)$

-۱۵۱۲ $\sin^2 x-2\sin x\cos x=3\cos^2 x$

جواب: $x=K\pi-45^\circ$ و $K\pi+\operatorname{arctg}3$

-۱۵۱۳ $\cos 5x+\cos 7x=\cos(\pi+6x)$

جواب: $x=15^\circ(2K+1)$ و $2K\pi\pm 120^\circ$

-۱۵۱۴

$4\sin x\cos(90^\circ-x)+4\sin(\pi+x)\cos x+2\sin(270^\circ-x)\cos(\pi+x)=1$

جواب: $x=K\pi+45^\circ$ و $K\pi+\operatorname{arctg}(1\div 3)$

-۱۵۱۵ $\cos 6x=2\sin(270^\circ+2x)$

جواب: $x=45^\circ(2K+1)$ و $90^\circ K\pm 30^\circ$

-۱۵۱۶

$2\sin x\cos(270^\circ+x)-3\sin(\pi-x)\cos x+\sin(90^\circ+x)\cos x=0$

جواب: $x=45^\circ(4K+1)$ و $K\pi+\operatorname{arctg}0/5$

-۱۵۱۷ $(\sin 4t+\cos 4t)^2=16\sin 2t\cos^3 2t-8\sin 2t\cos 2t$

جواب: $t=\pi(4K+1)\div 16$

-۱۵۱۸ $\cos(2t-18^\circ)\operatorname{tg}50^\circ+\sin(2t-18^\circ)=0/5\sec 130^\circ$

جواب: $t=-31^\circ+180^\circ\times K$ و $89^\circ+180^\circ\times K$

-۱۵۱۹ $\operatorname{tg}\frac{t}{2}\cdot\operatorname{cotg}\frac{3t}{2}+\sec\frac{t}{2}\operatorname{cosec}\frac{3t}{2}=1$

جواب: $t=90^\circ(1+4K)$

-۱۵۲۰ $\frac{1}{\sqrt{3}-\operatorname{tg}t}-\frac{1}{\sqrt{3}+\operatorname{tg}t}=\sin 2t$

جواب: $t=90^\circ K+45^\circ$ و $K\pi$

۱۵۲۱- $\cos(۲۰^\circ+x)+\cos(۱۰۰^\circ-x)=\frac{۱}{۲}$

جواب $x=۱۰۰^\circ+۳۶۰^\circ\times K$ و $-۲۰^\circ+۳۶۰^\circ\times K$

۱۵۲۲-

$\cos t\times\sin(۹۰^\circ+۶t)+\cos(۹۰^\circ-t)\times\sin ۶t=\cos ۶t+\cos ۴t$

جواب: $t=۱۸^\circ(۲K+۱)$ و $۲K\pi\pm۶۰^\circ$

۱۵۲۳- $۱-\cos x=۲\sin\frac{x}{۲}$

جواب: $x=\pi(۴K+۱)$

۱۵۲۴- $\sin\frac{۷x}{۲}\cdot\cos\frac{۳x}{۲}+\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{۵x}{۲}+\sin ۲x\cdot\cos ۷x=۰$

جواب: $x=۳۰K$

۱۵۲۵- $\sin ۳x+\sin ۵x=\sin ۴x$

جواب: $x=۴۵^\circ K$ و $۲K\pi\pm۶۰^\circ$

۱۵۲۶- $\sin z-\sin^۲ z=\cos^۲ z-\cos z$

جواب: $z=۲K\pi$ و $۹۰^\circ(۴K+۱)$

۱۵۲۷- $\sin z+\sin ۲z+\sin ۳z=\cos z+\cos ۲z+\cos ۳z$

جواب: $z=۹۰^\circ K+۲۲/۵^\circ$ و $۲K\pi\pm۱۲۰^\circ$

۱۵۲۸- $\cot g\,x-\operatorname{tg}x+۲\left(\frac{۱}{\operatorname{tg}x+۱}+\frac{۱}{\operatorname{tg}x-۱}\right)=۴$

جواب: $x=\pi(۴K+۱)\div۱۶$

۱۵۲۹- $۱-\cos ۶x=\operatorname{tg}۳x$

جواب $x=۶۰^\circ K$ و $۱۵^\circ(۴K+۱)$

۱۵۳۰- $\sqrt{۲}\cos x+\cos ۲x+\cos ۴x=۰$

جواب: $x=۹۰^\circ(۲K+۱)$ و $۱۲۰^\circ K\pm۱۵^\circ$

۱۵۳۱- $\sin^۴ x+\cos^۴ x=\sin ۲x-۰/۵$

جواب: $x=۴۵^\circ+K\pi$

۱۵۳۲- $۲\cos ۲x+۲\operatorname{tg}^۲ x=۵$

جواب: $x=K\pi\pm۶۰^\circ$

-۱۵۲۳ $\sin 2x\cdot\sin 6x=\cos x\cos 3x$

جواب: $x=18^\circ(2K+1)$ و $30^\circ(2K+1)$

-۱۵۲۴ $\sin^4 2x+\cos^4 2x=\sin 2x\cos 2x$

جواب: $x=90^\circ K+22.5^\circ$

-۱۵۲۵ $\cos(3x-30^\circ)-\sin(3x-30^\circ)\cdot tg30^\circ=0.5\sec 210^\circ$

جواب: $x=\pm 40^\circ+120^\circ\times k$

-۱۵۲۶ $4\sin x+\cos x=4$

جواب: $x=90^\circ(4K+1)$ و $2K\pi+2\operatorname{arctg}0.6$

-۱۵۲۷ $2\sin^2 z+tg^2 z=2$ ج: $z=K\pi\pm 45^\circ$

-۱۵۲۸ $\cos 2x+\cos 6x+2\sin^2 x=1$

جواب: $x=15^\circ(2K+1)$

-۱۵۲۹ $\cos 3x\cos 6x=\cos 4x\cdot\cos 7x$

جواب: $x=18^\circ K$

-۱۵۴۰ $\sin 3x+0.5\sqrt{3}\sin 5x+0.5\cos 5x=0$

جواب: $x=75^\circ+180^\circ k$ و $45^\circ K-3^\circ 45'$

-۱۵۴۱ $\cot g^2 x+\operatorname{cosec}^2 x-3\cot g x-4=0$

جواب: $x=K\pi+135^\circ$ و $K\pi+30^\circ$ و $K\pi+150^\circ$

-۱۵۴۲ $\cos^2 3x+\cos^2 4x+\cos^2 5x=1.5$

جواب: $x=\frac{\pi}{16}(2K+1)$ و $K\pi\pm\frac{\pi}{3}$

-۱۵۴۳ $1+\sin x-\cos 5x-\sin 7x=2\cos^2 1.5x$

جواب: $x=22.5^\circ(2K+1)$ و $45^\circ(4K-1)$

-۱۵۴۴ $\frac{\sin z}{1+\cos z}=2-\cot g z$

جواب: $z=(-1)^K\cdot 30^\circ+K\pi$

-۱۵۴۵ $\sin(15^\circ+x)+\cos(45^\circ+x)+0.5=0$

جواب: $x=135^\circ+360^\circ\times K$ و $-105^\circ+360^\circ\times K$

-۱۵۴۶ $\cos 2x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}(\cos x+\sin x)$

جواب: $x=K\pi-45^\circ$ و $2K\pi-30^\circ$ و $+2K\pi-60^\circ$

۱۵۴۷- $2(1-\sin t)+\sin^4 t=1+\cos^4 t$

جواب: $t=(-1)^k 30^\circ+K\pi$ و $90^\circ(4K+1)$

۱۵۴۸- $tg(450^\circ+x)-2tg^2 x=(\cos 2x-1)\sec^2 x$

جواب: $x=K\pi-45^\circ$

۱۵۴۹- $\cos^2 0/5x+\cos^2 1/5x-\sin^2 2x-\sin^2 4x=0$

جواب: $x=45^\circ(2K+1)$ و $36^\circ(2K+1)$ و $(2K+1)\pi\div 7$

۱۵۵۰- $$\frac{\sin^2 x-2}{\sin^2 x-4\cos^2\frac{x}{2}}=tg^2\frac{x}{2}$$

جواب: $x=90^\circ(2K+1)$

۱۵۵۱- $\cos^2 x+\cos^2 2x-\cos^2 3x-\cos^2 4x=0$

جواب: $x=90^\circ K$ و $36^\circ K$

۱۵۵۲- $\sin 3x-4\sin x\cos 2x=0$

جواب : $x=K\pi$ و $K\pi\pm 30^\circ$

۱۵۵۳- $tg x+cotg x=2\sec 4x$

جواب: $x=(-1)^k\times 15^\circ+90^\circ K$ و $45^\circ(4K-1)$

۱۵۵۴- $\sin(90^\circ+3x)-\sin(\pi-5x)=\sqrt{3}(\cos 5x-\sin 3x)$

جواب $x=\pi(4K+1)\div 16$ و $15^\circ(12K-1)$

۱۵۵۵- $$\frac{1}{1+\cos^2 Z}+\frac{1}{1+\sin^2 Z}=\frac{16}{11}$$

جواب $Z=90^\circ K\pm 15^\circ$

۱۵۵۶- $$\frac{\cos x}{2tg\frac{x}{2}\times\cos^2\frac{x}{2}}-\frac{tg\frac{x}{2}\times tg x+1}{tg\frac{x}{2}+cotg x}=2\sqrt{3}$$

جواب: $x=15^\circ(1+6K)$

۱۵۵۷-

$$\cos 4x\times\cos(\pi+2x)-\sin 2x\times\cos(\frac{\pi}{2}-4x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x$$

جواب: $x=\frac{\pi}{۴}(۲K+۱)؛(-۱)^{K+۱}\times\frac{\pi}{۸}+\frac{K\pi}{۲}$

۱۵۵۸- ج: $x=۴۵^\circ K$ $\quad \sin x-\sin۳x-\sin۵x+\sin۷x=۰$

۱۵۵۹- $\sin۳x-\sin۷x=\sqrt{۳}\times\sin۲x$

جواب: $x=۹۰^\circ K؛۷۲^\circ K\pm۳۰^\circ$

۱۵۶۰- $\sqrt{۳}-tg\,x=tg(۶۰^\circ-x)$

جواب: $x=K\pi ، K\pi+۶۰^\circ$

۱۵۶۱- $\sin^۲x\sec^۴x-۴tg^۲x+۲\sec^۲x-۱۲=۰$

جواب: $x=K\pi\pm۶۰^\circ$

۱۵۶۲- $\sin^۲۳x+\sin^۲۴x=\sin^۲۵x+\sin^۲۶x$

جواب: $x=۹۰^\circ K ، ۲۰^\circ K$

۱۵۶۳- $(\sin۲t-cosec۲t)^۲+(\sec۲t-\cos۲t)^۲=۱$

جواب: $t=۲۲/۵^\circ(۲K+۱)$

۱۵۶۴- $\sin^۴x+\cos^۴x=\cos^۲۲x+۰/۲۵$

جواب: $x=۲۲/۵^\circ(۲K+۱)$

۱۵۶۵- $\sin۲z-۴\cos۲z=۴$

جواب: $z=۹۰^\circ(۲K+۱) ، K\pi+arctg۴$

۱۵۶۶- $۳+۲\sin۲x=tg\,x+cotg\,x$

جواب: $x=(-۱)^k\times۱۵^\circ+۹۰^\circ K$

۱۵۶۷- $\sin^۲(۲۲/۵^\circ+t)=\sin t+\sin^۲(۲۲/۵_\circ-t)$

جواب: $t=K\pi ، K\pi\pm۴۵^\circ$

۱۵۶۸-

$$\sin^۳\frac{x}{۲}-\sin^۲\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}-۳\sin\frac{x}{۲}\cos^۲\frac{x}{۲}+۳\cos^۳\frac{x}{۲}=۰$$

جواب: $x=۲K\pi+۱۳۵^\circ ، ۲K\pi\pm\pi$

۱۵۶۹- $tg(x-۱۵^\circ)\times cotg(x+۱۵^\circ)=۱\div۳$

جواب: $x=۴۵^\circ(۴K+۱)$

۱۵۷۰- $\sin^۳x(۱+cotg\,x)+\cos^۳x(۱+tg\,x)=۲\sqrt{\sin x\cos x}$

جواب: $x=2K\pi+45^\circ$

-۱۵۷۱

$$tg^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\times tg\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\times cotg\frac{x}{2}+cotg^2\frac{x}{2}+\sin x=4$$

جواب : $x=90^\circ(2K+1)$ و $(-1)^{K+1}\ arc\sin\frac{2}{3}+K\pi$

-۱۵۷۲ $tg(120^\circ+3x)-tg(140^\circ-x)=2\sin(80^\circ+2x)$

جواب: $x=60^\circ\times K-40^\circ$

-۱۵۷۳ $\sin^2x+2\sin^2\frac{x}{2}-2\sin x\times\sin^2\frac{x}{2}+cotg\,x=0$

جواب: $x=45^\circ(4K-1)$

-۱۵۷۴ $\frac{\cos^2z(1+cotg\,z)-3}{\sin z-\cos z}=3\cos z$

جواب $z=45^\circ(4K-1)$ و $K\pi\pm30^\circ$

-۱۵۷۵ $\frac{1}{2cotg^2t+1}+\frac{1}{2tg^2t+1}=\frac{15\cos4t}{8+\sin^22t}$

جواب: $t=90^\circ K\pm15^\circ$

-۱۵۷۵ $\sin^3Z\cos Z-\sin Z\cos^3Z=\sqrt{2}\div8$

جواب: $Z=(-1)^{K+1}\frac{\pi}{16}+\frac{K\pi}{4}$

-۱۵۷۷ $\frac{6\cos^22t+2\sin^22t}{3\cos2t-\sin2t}=\cos4t$

جواب : $t=90^\circ K-0/5arctg3$

-۱۵۷۸ $\cos Z\times\cos2Z\cos4Z\cos8Z=1\div16$

جواب: $z=\frac{2K\pi}{15}$ و $K\neq15l$ و $\frac{\pi}{17}(2K+1)$ و $K\neq\frac{17l-1}{2}$

-۱۵ . $\frac{\sin^3\frac{x}{2}-\cos^3\frac{x}{2}}{2+\sin x}=\frac{1}{3}\cos x$

جواب: $x=90^\circ(4K+1)$

-۱۵۸۰ $tg^2 t-\frac{2\sin 2t+\sin 4t}{2\sin 2t-\sin 4t}=2\,cotg\,2t$

جواب: $t=45^\circ(2K+1)$

-۱۵۸۱

جواب: $x=90^\circ K+(-1)^k\frac{\pi}{6}$

$\sin^2 x\cdot tg\,x+\cos^2 x\cdot cotg\,x+2\sin x\cdot\cos x=4\sqrt{3}\div 3$

-۱۵۸۲

$cotg\,x+cotg\,15^\circ+cotg(x+25^\circ)=cotg\,15^\circ\times cotg\,x\cdot cotg(x+25^\circ)$

جواب: $x=25^\circ+90^\circ\times K$

-۱۵۸۳ $40\left(\sin^3\frac{t}{2}-\cos^3\frac{t}{2}\right)=\sin t\left(16\sin\frac{t}{2}-25\cos\frac{t}{2}\right)$

جواب: $t=2K\pi+2\,arctg\,0/8$

-۱۵۸۴

$\frac{(\sin x+\cos x)^2-2\sin^2 x}{1+cotg^2 x}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)\right]$

جواب: $x=22/5^\circ(3+4K)$ و $90^\circ(1+4K)$

-۱۵۸۵ $cosec\,t-cosec\,2t=cosec\,4t$

جواب: $t=\frac{\pi}{7}(2K+1)$ و $K\neq 7l+3$

-۱۸۵۶ $\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}+2\times\frac{1+tg\,x}{1-tg\,x}-3=0$

جواب: $x=K\pi$ و $K\pi+arctg\,2$

-۱۵۸۷ $cotg^2 2x+\frac{3(\cos 3x-\cos x)}{\sin 3x-\sin x}+2=0$

جواب: $x=22/5(2K+1)$

-۱۵۸۸ ج: $tg^4 3t=\sin^2 6t$ $\quad t=60^\circ K$ و $60^\circ K\pm 15^\circ$

-۱۵۸۹ ج: $\frac{1-\sin^6 Z\cdot\cos^6 Z}{1-\sin^4 Z-\cos^4 Z}=2\cos^2 2Z$ $\quad Z=\frac{K\pi}{3}\pm\frac{\pi}{18}$

۱۵۹۰- ج:
$$cotg\,x - tg\,x = \frac{\cos x - \sin x}{0/5\sin 2x} \quad x = K\pi + 45^\circ$$

۱۵۹۱- ج:
$$\frac{cotg\,2Z}{cotg\,Z} + \frac{cotg\,Z}{cotg\,2Z} + 2 = 0 \quad z = K\pi \pm 60^\circ$$

۱۵۹۲- ج:
$$\sec^2 2x \times tg\,2x + cosec^2 2x \times cotg\,2x = \frac{8\cos^2 4x}{\sin^2 4x} + 10\,cosec\,4x + 4\sqrt{3}$$

جواب:
$$x = (-1)^{K+1}\,15^\circ + 45^\circ K$$

۱۵۹۳-
$$\frac{\cos x}{cotg^2\frac{x}{2} - tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{2\,cotg\,x}{1 + cotg^2 x}\right)$$

جواب:
$$x = 22/5^\circ(4K+1)$$

۱۵۹۴-
$$\frac{2(\cos 2x + cotg\,2x)}{cotg\,2x - \cos 2x} - 2(\sin 2x + 1) = 0$$

جواب:
$$x = (-1)^{K+1}\,15^\circ + 90^\circ K$$

۱۵۹۵- ج:
$$\sin 2x + 2\,cotg\,x = 3 \qquad x = 45^\circ + K\pi$$

۱۵۹۶-
$$2\cos 12x + 3\cos 4x + 3\cos 5x - 8\cos x \times \cos^2 4x = 0$$

جواب:
$$x = 15^\circ K$$

۱۵۹۷-
$$(\sin x + \cos x)^4 + (\sin x - \cos x)^4 = 3 - \sin 4x$$

جواب:
$$x = \pi(1 + 4K) \div 16$$

۱۵۹۸-
$$tg^2 t + 6\,cosec\,2t = 8\,cosec^2 2t - 3\,cotg\,t$$

جواب:
$$t = K\pi \pm 30^\circ$$

۱۵۹۹-
$$2\sin x\cos^2(90^\circ - x) + 3\cos^2(90^\circ + x)\cos x - 5\cos^2 x\sin(90^\circ + x) = 0$$

جواب:
$$x = 45^\circ(4K+1)$$

۱۶۰۰-
$$tg^4 x + cotg^4 x = \frac{82}{9}(tg\,x \times tg\,2x + 1)\cdot\cos 2x$$

جواب: $x = 90^\circ K \pm 20^\circ$

-۱۶۰۱ $2\cos^6 2t - \cos^4 2t + 1/5 \sin^2 4t - 3\sin^2 2t = 0$

جواب: $t = 22/5^\circ(2K+1)$

-۱۶۰۲ $\sin 6x + 2 = 2\cos 4x$

جواب: $x = \frac{K\pi}{2} , (-1)^{K+1}\frac{\pi}{12} + \frac{K\pi}{2}$

-۱۶۰۳

$$\sin^2 t \times tg\, t + \cos^2 t \times cotg\, t - 2\sin t \times \cos t = 1 + tg\, t + cotg\, t$$

جواب: $x = (-1)^{K+1}\frac{\pi}{12} + \frac{K\pi}{2}$

-۱۶۰۴ $tg^2 2x + cotg^2 2x + 6\, cosec\, 2x = 8\, cosec^2 4x$

جواب: $x = K\pi \pm 30^\circ$

-۱۶۰۵ $\cos x \cos 2x \cdot \sin 3x = 0/25 \sin 2x$

جواب: $x = 90^\circ(2K+1) , 36^\circ K$

-۱۶۰۶ $\cos 9x - 2\cos 6x = 2$

جواب: $x = 30^\circ(2K+1) , 120^\circ K \pm 40^\circ$

-۱۶۰۷ $2\sin^5 2t - \sin^3 2t - 6\sin^2 2t + 3 = 0$

جواب: $t = 22/5^\circ(2K+1)$

-۱۶۰۸

$$\sin^6 2t + \cos^6 2t = \frac{3}{2}(\sin^4 2t + \cos^4 2t) + \frac{1}{2}(\sin t + \cos t)$$

جواب: $t = \pi(2K+1) , 90^\circ(4K-1)$

-۱۶۰۹

$$(\sec^2 2x + tg^2 2x)(cosec^2 2x + cotg^2 2x) = 4\, cosec^2 4x + 5$$

جواب: $x = 22/5^\circ(2K+1)$

-۱۶۱۰ $\sin 4Z + \sin^3 Z = \frac{3\sqrt{3}}{4}\sin 2Z$

جواب: $z = K\pi , 90^\circ(2K+1) , 2K\pi \pm 30^\circ$

-۱۶۱۱ $[\cos 2x + (\cos x + \sin x)^2](tg\, x + cotg\, x) = 0$

جواب: $x = 45^\circ(4K-1)$

-۱۶۱۲

$$2\sin 2x - \cos(90^\circ + 3x) - \cos 3x \cdot \sec 5x \cdot \cos(90^\circ - 5x) = 0$$

جواب: $x = 72^\circ K \pm 12^\circ$

-۱۶۱۳ $9^{1-\cos 6x} = \sqrt[\cot g\, 2x]{3} \qquad x = (-1)^K \frac{\pi}{36} + \frac{K\pi}{6}$

-۱۶۱۴ $2^{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \cos x} = 4 \qquad x = 2K\pi + 90^\circ$

-۱۶۱۵ $2^{\sin^2 x} + 4 \times 2^{\cos^2 x} = 6 \qquad$ ج: $x = K\pi + 90^\circ$

-۱۶۱۶ $3^{1 + \sin x + \dots + \sin^n x + \dots} = \sqrt[3]{9}$

جواب: $x = (-1)^{K+1}\, 30^\circ + K\pi$

-۱۶۱۷

$$2^{-1 + \cos x - \cos^2 x + \dots + (-1)^{m+1}\cos^m x + \dots} = \sqrt[3]{0.25}$$

جواب: $x = 2K\pi \pm 60^\circ$

-۱۶۱۸ $\cos Z + \sin Z = \sqrt{1 - 2\cos^2 Z}$

جواب: $Z = 90^\circ(4K+1)$ و $45^\circ(4K-1)$

-۱۶۱۹ $1 - \cos x = \sqrt{1 - \sqrt{4\cos^2 x - 7\cos^4 x}}$

جواب: $x = 2K\pi \pm 60^\circ$ و $90^\circ(2K+1)$

-۱۶۲۰

$$2\sqrt{\sec x} - \frac{\cos x}{\sqrt{\cos x} - \sqrt{1 - \cos x}} = \frac{\cos x}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{1 - \cos x}}$$

جواب: $x = 2K\pi$

۱۶۲۱- $۲\cot g\, t - ۲\, tg\, t + ۴\sin ۲t = ۰$ ج: $t = K\pi \pm ۶۰^\circ$

۱۶۲۲- $\frac{۱}{tg^۲ ۲x + \sec^۲ ۲x} + \frac{۱}{\cot g^۲ ۲x + \operatorname{cosec}^۲ ۲x} = \frac{۲}{۳}$

جواب: $x = ۲۲/۵(۲K+۱)$

۱۶۲۳- $tg\, ۳t + tg\, t = ۲\sin ۴t$

جواب: $t = \frac{K\pi}{۴}$ و $(K \neq ۴l+۲)$ و $K\pi \pm \frac{۱}{۲}\arccos \frac{\sqrt{۱۷}-۱}{۴}$

۱۶۲۴- $\sin(۳\pi - x) + tg(\pi + x) = (\sec x - \cos x) \div ۲\sin x$

جواب: $x = ۲K\pi \pm ۱۲۰^\circ$

۱۶۲۵- $۰/۵\sin ۴x \cdot \sin x + \sin ۲x \cdot \sin x = ۲\cos^۲ x$

جواب: $x = ۹۰^\circ(۲K+۱)$

۱۶۲۶- $\frac{۲(\cos^۳ t + \sin^۳ t)}{\cos^۳ t - \sin^۳ t} = \sec ۲t + \cos ۴t + ۱$

جواب: $t = K\pi \pm ۳۰^\circ$

۱۶۲۷- $tg\, t = \frac{\sin^۲ t + \sin ۲t - ۱}{\cos^۲ t - \sin ۲t + ۱}$

ج: $t = \frac{\pi}{۴}(۴K+۱)$ و $K\pi + \operatorname{arctg}\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ و $K\pi + \operatorname{arctg}\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$

۱۶۲۸- $\frac{\sin ۲t + ۲\cos^۲ t - ۱}{\cos t - \cos ۳t + \sin ۳t - \sin t} = \cos t$

جواب: $t = ۴۵^\circ(۴K+۱)$

۱۶۲۹- $\sin^۳ Z \times \sin ۳Z + \cos^۳ Z \times \cos ۳Z = \cos^۳ ۴Z$

جواب: $Z = ۶۰^\circ K$

۱۶۳۰-

$۲\sin^۳ t(\sin ۲t - ۳) - ۲\sin^۲ t(\sin ۲t - ۳) - ۱ = ۰$

جواب: $t = \frac{\pi}{۴}(۴K+۱)$ و $(-۱)^K \frac{۱}{۲}\arcsin(۱ - \sqrt{۳}) + \frac{K\pi}{۲}$

۱۶۳۱- $\cos x \times \cos ۲x \times \cos ۴x \times \cos ۸x = ۰/۱۲۵\cos ۱۵x$

جواب : $x=\frac{K\pi}{14}$ و $K\neq 14l$

-۱۶۳۲ $2\sin^4 x+1{/}25\sin^2 2x-\cos^4 x=\cos 2x\, x=K\pi\pm 30^\circ$

-۱۶۳۳ $\sin^2 t\cos 2t(\sin^4 2t+\cos^4 2t-1)=0{/}5\cos^2 4t$

جواب: $t=45^\circ K$

-۱۶۳۴ $\sin 2x-2\cos^2 x+4(\sin x-\cos x+\operatorname{tg} x-1)=0$

جواب : $x=45^\circ(4K+1)$

-۱۶۳۵ $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{cotg}^2 x)=1+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{cotg} 2x$

جواب : $x=45^\circ(2K+1)$ و $30^\circ(3K+1)$

-۱۶۳۶ $\operatorname{cotg}^4 x=\cos^2 2x+1$

جواب : $x=45^\circ(2K+1)$ و $90^\circ(2K+1)$

-۱۶۳۷ $\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}\times\cos^2\frac{x}{2}}-6\sec x=\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\operatorname{cotg}^2\frac{x}{2}$

جواب : $x=45^\circ(1+4K)$

-۱۶۳۸ $4\sin 2x\sin 5x\sin 7x-\sin 4x=0$

جواب: $x=90K^\circ$ و $7{/}5^\circ(2K+1)$

-۱۶۳۹ $\sin x+\cos x+\sin 2x+\sqrt{2}\sin 5x=\frac{2\operatorname{cotg} x}{1+\operatorname{cotg}^2 x}$

-۱۶۴۰ $$3\sin^3\frac{x}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)+3\sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}$$

جواب : $x=90^\circ(4K-1)$ و $2K\pi\pm 60^\circ$

-۱۶۴۱ $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1+\sin x}{\sin x}=\sqrt{2}\cos x$

جواب : $x=90^\circ(4K+1)$ و $(-1)^K 45^\circ+K\pi$

-۱۶۴۲ $\operatorname{tg}^2 Z+\operatorname{cotg}^2 Z-8\operatorname{cosec}^2 2Z=12$

جواب : $Z=(-۱)^{K+۱}\frac{\pi}{۱۲}+\frac{K\pi}{۲}$

۱۶۴۳- $\frac{۱}{tg۵x+tg۲x}-\frac{۱}{cotg۵x+cotg۲x}=tg۲x$

جواب: $x=۹۰^\circ(۲K+۱), K\neq ۵l+۲$

۱۶۴۴- $cotg\frac{z}{۲}-tg\frac{z}{۲}+۴sec۲z=(۴tg\frac{z}{۲})\div(tg^۲\frac{z}{۲}-۱)$

جواب: $z=۹۰^\circ K-۲۲/۵^\circ$

۱۶۴۵- $cotg^۴x=cos^۲۲x-۱$ ج: $x=۹۰^\circ(۲K+۱)$

۱۶۴۶- $\frac{۴sin^۲\frac{t}{۲}-۱}{cos t}=tg t(۱-۲cos t)$ $t=۲K\pi\pm۶۰^\circ$

۱۶۴۷-

$$۲sin^۲Z\cdot cos^۲(۹۰^\circ+Z)-\frac{۱}{۲}sin^۲۲z-۵cos^۴z+۲cos۲z=۰$$

جواب : $Z=K\pi\pm۶۰^\circ$

۱۶۴۸- $\frac{cos^۲۲t}{tg t}+\frac{cos^۲t}{tg۲t}=۰$ ج: $t=۴۵^\circ(۲K+۱)$

$\frac{sin۲t}{۱+cos۲t}\cdot\frac{sin t}{۱+cos t}=cosec t-۱$ ج: $t=۴۵^\circ+K\pi$

۱۶۵۰- $\frac{cos^۴۲x+sin^۴۲x}{cos^۲۲x-sin^۲۲x}-\frac{۱}{۲}cos۴x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}cosec۴x$

جواب: $x=۱۵^\circ(۲K+۱)$

۱۶۵۱- $sec^۴Z=\frac{۱۶۰}{۹}-۲cosec^۲Z(cotg۲Z\cdot cotgZ+۱)$

جواب : $Z=۹۰^\circ K\pm۳۰^\circ$

۱۶۵۲- $sec^۲t\cdot cosec^۲t-tg^۲t-cotg^۲t=۲\sqrt{۳}sec۲t$

جواب : $t=۳۰^\circ(۱+۲K)$

۱۶۵۳- $(\sin x-\cos x)^{۲}+tg\,x=۲\sin^{۲}x$ ج: $x=K\pi\pm۴۵^\circ$

۱۶۵۴- $\sin ۲t-\sin t=\dfrac{۸\cos t\cdot cotg\,۲t}{۴-cosec^{۲}t}$

جواب: $t=۴۵^\circ(۲K+۱)$ و $K\pi\pm۶۰^\circ$

۱۶۵۵-

$\sin^{۲}۲x\cdot\cos(۲۷۰^\circ-۲x)+۳\sin ۲x\cdot\sin^{۲}(۲۷۰^\circ+۲x)+۲\cos^{۳}۲x=۰$

جواب: $x=۲۲/۵^\circ(۴K-۱)$ و $۹۰^\circ K+۰/۵\,arctg\,۲$

۱۶۵۶- $tg(x+۱)\,cotg(۲x+۳)=۱$ ج: $z=K\pi-۲$

۱۶۵۷- $\dfrac{۴\sin^{۴}Z}{(۱+\cos ۲Z)^{۲}}-۲\sec^{۲}Z-۱=۰$ $z=K\pi\pm۶۰^\circ$

۱۶۵۸- $tg^{۲}\dfrac{Z}{۲}+cotg^{۲}\dfrac{Z}{۲}-۲=۴\,tg\,Z$ ج: $Z=۴۵^\circ+K\pi$

۱۶۵۹- $\cos^{۳}z\times\cos ۳z+\sin^{۳}z\times\sin ۳z=\sqrt{۲}\div۴$

جواب: $z=K\pi\pm۲۲/۵^\circ$

۱۶۶۰- $cotg\,x=\dfrac{\sin^{۲}x-۲\sin^{۲}(۴۵^\circ-x)}{\cos^{۲}x+۲\cos^{۲}(۴۵^\circ+x)}$

جواب: $x=۹۰^\circ(۲K+۱)$ و $۴۵^\circ(۴K+۱)$ و $K\pi-arctg\,۲$

۱۶۶۱- $\dfrac{۱}{tg\,۳z+tg\,۴z}+cotg^{۲}۷z=\dfrac{۱}{cotg\,۳z+cotg\,۴z}$

جواب: $z=\dfrac{\pi}{۱۴}(۲k+۱)$ و $۲k+۱\neq۷l$ و $\dfrac{\pi}{۲۸}(۳+۴k)$ و $۳+۴k$ و $۳+۴k\neq۷l$

۱۶۶۲- $(۲\cos ۲t+۵)\cos^{۴}t-(۲\cos ۲t+۵)\sin^{۴}t=۳$

جواب: $t=k\pi\pm۳۰^\circ$

۱۶۶۳- $tg\,z\times tg(z+۶۰^\circ)\times tg(z+۱۲۰^\circ)=\sqrt{۳}$

جواب: $z=-۲۰^\circ+۶۰^\circ\times k$

۱۶۶۴- $\cos ۳x+\cos\dfrac{۵x}{۲}=۲$ جواب: $x=۴k\pi$

۱۶۶۵- $1-\dfrac{2(\cos 2t-tg\,t\times\sin 2t)}{\sec^2 t}=\sin^4 t-\cos^4 t$ $\qquad t=K\pi$

۱۶۶۶- $2(\sin^6 x+\cos^6 x)-3(\sin^4 x+\cos^4 x)=\cos 2x$

جواب: $x=90^\circ+k\pi$

۱۶۶۷- $\cos^3 x+\dfrac{1}{2}\sin 2x-\cos x\sin^2 x+4\sin x+4=0$

جواب: $x=90^\circ(4k-1)$

۱۶۶۸- $\dfrac{2(\cos^3 x+2\sin^3 x)}{2\sin x+3\cos x}=\sin 2x$

جواب:

$$x=\frac{\pi}{4}(4K-1) \text{ و } K\pi+\operatorname{arctg}\frac{2+\sqrt{2}}{2} \text{ و } K\pi+\operatorname{arctg}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

۱۶۶۹- $tg\,\dfrac{3x}{2}-tg\,\dfrac{x}{2}=2\sin x$

جواب: $x=2K\pi$ و $2K\pi\pm\arccos\dfrac{\sqrt{17}-1}{4}$

۱۶۷۰-

$$\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}+\frac{1+tg\,x\cdot tg\,\frac{x}{2}}{cotg\,x+tg\,\frac{x}{2}}=1 \qquad x=K\pi+\operatorname{arctg}2$$:ج

۱۶۷۱- $\sin^3 x\cdot\cos 3x+\cos^3 x\cdot\sin 3x+0{,}375=0$

جواب: $x=(-1)^{K+1}\times\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{K\pi}{4}$

۱۶۷۲- $\sin 2z+5(\sin z+\cos z)+1=0$ $\qquad$ ج: $z=\dfrac{\pi}{4}(4K-1)$

۱۶۷۳- $\sin^3 2t+\cos^3 2t+\dfrac{1}{2}\sin 4t=1$

جواب: $t=K\pi$ و $45^\circ+K\pi$

-۱۶۷۳ $tgz \cdot tg۲z = tgz + tg۲z$

جواب: $z = K\pi$ و $K\pi - \text{arc}tg۳$

-۱۶۷۴ $\dfrac{\sin^۳ x + \cos^۳ x}{۲\cos x - \sin x} = \cos ۲x$

جواب: $x = ۴۵^\circ(۴K - ۱)$ و $۹۰^\circ(۲K + ۱)$ و $K\pi + \text{arc}tg\, ۰/۵$

-۱۶۷۶ $\dfrac{cotg۴t}{\sin^۲ t} + \dfrac{cotg\, t}{\sin^۲ ۴t} = ۰$

جواب: $t = ۳۰^\circ(۲K + ۱)$ و $(K \neq ۳n + ۱)$ و $۳۶^\circ K$ و $(K \neq ۵n)$

-۱۶۷۷ $tg^۲ x = ۳۶\cos^۲ ۲x$

$x = K\pi \pm \dfrac{۱}{۲}\,\text{arc}\cos \dfrac{\sqrt{۷۳} - ۷}{۱۲}$ و $K\pi \pm \dfrac{\pi}{۳}$ و $K\pi \pm \dfrac{۱}{۲}\text{arc}\cos\left(-\dfrac{۱}{۳}\right)$

-۱۶۷۸ $cotgx - tgx - ۲tg۲x - ۴tg۴x + ۸ = ۰$

جواب: $x = ۲۲/۵^\circ K + ۳\pi \div ۸$

-۱۶۷۹ $۴\sin^۳ x\cos ۳x + ۴\cos^۳ x \cdot \sin ۳x = ۳\sin ۲x$

جواب: $x = K\pi$ و $۳۰^\circ(۲K + ۱)$

$۲\cos z \cdot \sin^۲(۲۷۰^\circ - z) - ۵\sin^۲ z\cos^۲ z + \sin z\cos^۲(۲۷۰^\circ + z) = \cos ۲z$

جواب: $z = K\pi \pm ۶۰^\circ$

-۱۶۸۱ $\sin ۲x \cdot \sin ۶x\cos ۴x + ۰/۲۵\cos ۱۲x = ۰$

جواب: $x = ۲۲/۵(۲K + ۱)$ و $۹۰^\circ K \pm ۱۵^\circ$

-۱۶۸۲ $۲\sin ۲x + ۳tgx - ۵ = ۰$ ج: $x = ۴۵^\circ + K\pi$

-۱۶۸۳ $۵\sin^۴ ۲z - ۴\sin^۲ ۲z \cdot \cos^۲ ۲z - \cos^۴ ۲z + ۴\cos ۴z = ۰$

جواب: $z = ۹۰^\circ K \pm ۲۲/۵^\circ$ و $۹۰^\circ K \pm ۳۰^\circ$

-۱۶۸۴ $۱ + tg۲x \cdot tg۵x - \sqrt{۲}tg۲x\cos ۳x\sec ۵x = ۰$

جواب: $x = K\pi \pm ۳۰^\circ$ و $(۱-)۹۰^\circ K + ۲۲/۵^\circ$

-۱۶۸۵ $\cos^۶ x + \sin^۶ x - \cos^۲ ۲x = ۱ \div ۱۶$

جواب: $x = ۹۰^\circ K \pm ۱۵^\circ$

-۱۶۸۶ $\dfrac{۱}{\sin^۲ ۲x} + tgx - cotgx - ۲ = ۰$

جواب: $x = ۶۷/۵^\circ + ۹۰^\circ K$ و $۹۰^\circ K + ۰/۵\text{arc}cotg۳$

-۱۶۸۷ $tg5z-tg3z-2tg2z=0$

جواب: $z=K\pi$ و $\pi(2K+1)\div 16$

-۱۶۸۸ ج: $x=8K\pi$ $\quad cos2x+cos\frac{3x}{4}-2=0$

-۱۶۸۹ $(cotgz-1)(1+sin2z)=1+cotgz$

جواب: $z=-45^\circ+K\pi$

-۱۶۹۰ $tgx\cdot\frac{3-tg^2x}{1-3tg^2x}=sin6x$

جواب: $x=60^\circ K$ و $15^\circ(2K+1)$

-۱۶۹۱ $sin^4 2t+sin^4(45^\circ+2t)=0/25$

جواب: $t=60^\circ K$ و $60^\circ K-15^\circ$

$cos10x+2cos^2 4x+6cos3x\cdot cosx=cosx+8cosx\cdot cos^3 3x$

جواب: $x=2K\pi$

-۱۶۹۳ $1+sin\frac{t}{2}\cdot sint-cos\frac{t}{2}\cdot sin^2t=2cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)$

جواب: $t=K\pi$

-۱۶۹۴ $\frac{4sin(30^\circ+x)\cdot sin(150^\circ+x)}{cos^2x}+2tgx=0$

جواب: $x=45^\circ(4K+1)$ و $K\pi-arctg(1\div 3)$

-۱۶۹۵ $4cos^2t-1=cotgt(1+2cos2t)sint$

جواب: $t=K\pi\pm 60^\circ$

-۱۶۹۶ $(sinx+cosx)^4=2(1+sin^2x)-(sinx-cosx)^4$

جواب : $x=K\pi$ و $K\pi\pm 60^\circ$

-۱۶۹۷ $sec^4z=64cos^2 2z$

جواب: $z=K\pi\pm arccos\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ و $K\pi\pm 60^\circ$

-۱۶۹۸ $4sin5x\cdot cos5x(cos^4x-sin^4x)=sin4x$

جواب: $x=45^\circ K$ و $45^\circ(2K+1)$

-۱۶۹۹ $\frac{tg4z}{tg2z}+\frac{tg2z}{tg4z}+\frac{5}{2}=0$

جواب: $z=90°K\pm 0.5\,arctg\sqrt{2}$ و $90°K\pm 0.5\,arctg\sqrt{5}$

-۱۷۰۰ $\frac{tgx+cotgx}{cotgx-tgx}=6\cos2x+4\sin2x$

جواب: $x=22.5°+90°K$ و $90°K+0.5\,arctg5$

-۱۷۰۱ $tg5x-2tg3x=tg^2 3x\,tg5x$ ج: $x=K\pi$

-۱۷۰۲ $\sqrt{3}(1+tg2x\cdot tg3x)=tg2x\cdot sec3x$

جواب: $x=+K\pi\pm 60°$

-۱۷۰۳ $sec^6 z-tg^6 z-\frac{7}{3})(\sin z+\cos z+2)=0$

جواب: $z=K\pi\pm 30'$

-۱۷۰۴ $tg2x-cotg3x+cotg5x=0$

جواب: $x=18°(2K+1)$ و $30°(2K+1)$

-۱۷۰۵ $sec2t+cosec2t+sec2t\cdot cosec2t-5=0$

جواب: $t=K\pi+arctg\,0.5$ و $K\pi+arctg(1\div 3)$

$\cos(22°-t)\cos(82'-t)+\cos(112°-t)\times\cos(172°-t)$

$=\frac{1}{2}(\sin t+\cos t)$

جواب: $t=360°\times K\pi$ و $90°(4K+1)$

$\sin4x(3\sin4x-2\cos4x)=\sin^2 2x-16\sin^2 x\cos^2 x\cos^2 2x+\cos^2 2x$

جواب- $x=\frac{\pi}{16}(4K+1)$ و $-\frac{1}{4}arctg\frac{1}{3}+\frac{K\pi}{4}$

-۱۷۰۸ $\cos3z-\cos^3 z+\frac{3}{4}\sin2z=0$

جواب: $z=90°(2K+1)$ و $K\pi$ و $(-1)^K 30°+K\pi$

-۱۷۰۹ $tg(t^2-t)\cdot cotg2=1$

جواب: $t=0.51\pm\sqrt{9+4K\pi}$ و $K\geqslant 0$

-۱۷۱۰ $\frac{۲\sin x-\sin ۲x}{۲\sin x+\sin ۲x}+\cot g^۲\frac{x}{۲}=\frac{۱۰}{۳}$

جواب: $x=k\pi\pm ۶۰^\circ$

-۱۷۱۱ $۴(\sin t\cdot\cos^۵ t+\cos t\cdot\sin^۵ t)+\sin^۳ ۲t=۱$

جواب: $t=(-۱)^k\, ۱۵+۹۰^\circ K$

-۱۷۱۲ $\sin^۴ x-\sin^۲ x+۴(\sin x+۱)=۰$ ج: $x=۲k\pi-۹۰^\circ$

-۱۷۱۳ $\frac{\sin^۲ t-tg^۲ t}{\cos^۲ t-\cot g^۲ t}+۲tg^۳ t+۱=۰$

جواب: $t=۴۵^\circ(۴k-۱)$

-۱۷۱۴ $\frac{tg\, t}{\cos^۲ ۵t}-\frac{tg\, ۵t}{\cos^۲ t}=۰$ $t=k\pi$ و $۱۵^\circ(۲k+۱)$

-۱۷۱۵ $\frac{۱+\sin ۲x+\cos ۲x}{۱+\sin ۲x-\cos ۲x}+\sin x(۱+tg\, x\cdot tg\frac{x}{۲})=۴$

جواب: $x=(-۱)^k\, ۱۵^\circ+۹۰^\circ K$

-۱۷۱۶ $\sin ۲Z-\sin ۶z+۲=۰$ $Z=-۴۵^\circ+k\pi$

-۱۷۱۷

$\sin^۲(t+۴۵^\circ)-\sin^۲(t-۳۰^\circ)-\sin ۱۵^\circ\times\cos(۲t+۱۵^\circ)=۰/۵\sin ۶t$

جواب: $t=۹۰^\circ k$ و $\pm ۱۵^\circ+۹۰^\circ\times k$

-۱۷۱۸ جواب: $x=k\pi$ $۳tg۳x-۴tg۲x=tg^۲۲x\times tg۳x$

-۱۷۱۹ $\frac{۵\sin x-۵tg\, x}{\sin x+tg\, x}+۴(۱-\cos x)=۰$

جواب: $x=۲k\pi\pm\arccos ۰/۲۵$

-۱۷۲۰ $۴\cos x=\sqrt{۳}\cot g\, x+۱$

جواب: $x=۶۰^\circ(۶k+۱)$ و $۴۰^\circ(۱+۳k)$

-۱۷۲۱ $\sin^۳ x(۱-\cot g\, x)+\cos^۳ x(۱-tg\, x)=۱/۵\cos ۲x$

جواب: $x=۴۵^\circ(۲k+۱)$

۱۷۲۲- $\frac{\cos^{۲}(۹۰^\circ-۲t)}{۱+\cos ۲t}=\sec^{۲}۲t-۱$

جواب: $t=k\pi ، k\pi\pm ۰/۵\arccos ۰/۵(-\sqrt{۵}+۱)$

۱۷۲۳- $۴\cos x\cos ۲x\cos ۳x=\cos ۶x$

جواب: $x=۴۵^\circ(۲k+۱) ، k\pi\pm ۶۰^\circ$

۱۷۲۴- $۱+\frac{۲(\cos ۲Z\cdot tgZ-\sin ۲Z)}{\sec^{۲}Z}=\cos ۲Z$

جواب: $Z=k\pi ، ۴۵^\circ(۴k+۱)$

۱۷۲۵- $(\cos x-\sin x)^{۲}+\cos^{۴}x-\sin^{۴}x=۰/۵\sin ۴x$

جواب: $x=۹۰^\circ(۲k+۱) ، ۴۵^\circ(۴k+۱)$

۱۷۲۶- $cotg\,x(۱-۰/۵\cos ۲x)=۱$ جواب: $x=k\pi+۴۵^\circ$

۱۷۲۷- $\cos^{۲}(x+۴۰^\circ)+\cos^{۲}(x-۴۰^\circ)-\sin ۱۰^\circ\times\cos ۲x=\sin ۲x$

جواب: $x=۴۵^\circ(۴k+۱)$

۱۷۲۸- $۲\cos^{۲}\frac{x}{۲}(۱-\sin x)+\cos^{۲}x=۰$

جواب: $x=۹۰^\circ(۴k+۱)$

۱۷۲۹- $tg۶x\cos ۲x-\sin ۲x-۲\sin ۴x=۰$

جواب: $x=۶۰^\circ K\pm ۱۰^\circ ، ۹۰^\circ K$

۱۷۳۰- $\cos ۸x-۲\cos ۴x+۲\cos ۲x=۸\cos x\cdot\cos^{۳}۳x-۰/۵$

جواب: $x=۲۶^\circ K\pm ۶^\circ$

۱۷۳۱- $tgx\cdot tg(x+۱)=۱$

جواب: $x=۹۰^\circ k+۴۵^\circ-۰/۵$

۱۷۳۲- $\frac{۸cosec^{۲}۲x+۱}{\sec^{۲}x+tg^{۲}x}=cotg^{۲}x+\frac{۴}{۳}$

جواب: $x=k\pi\pm ۶۰^\circ$

۱۷۳۳- $۲+\sin t=۳tg(t\div ۲)$ جواب: $t=۹۰^\circ(۱+۴k)$

۱۷۳۴- $tg(۳۵^\circ+x)cotg(۱۰^\circ-x)=(۲\div ۳)$

$x=arctg۱\div ۳-۳۵^\circ+۱۸۰^\circ\times k ، -arctg۲-۳۵^\circ+۱۸۰^\circ\times k$

۱۷۳۵- $۲tgx+tg۲x+۲tgx\cdot tg۳x+tg۲x\cdot tg۳x=۰$

جواب : $x=k\pi, \frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}, k\neq\frac{3l+2}{2}, k\pi\pm\operatorname{arctg}\sqrt{3}$

۱۷۳۶- $\sin^4 2x+\sin^3 2x\cos 2x-8\sin 2x\cos^3 2x-8\cos^4 2x=0$

جواب: $x=+90^\circ K-22{,}5, 90^\circ K+0{,}5\operatorname{arctg}2$

۱۷۳۷- $\cos t(1-\operatorname{tg}t)(\sin t+\cos t)=\sin t$

جواب : $t=(1-)^k+k\pi+30^\circ$

۱۷۳۸- $1+\sin Z+\cos Z+\sin 2Z+\cos 2Z=0$

جواب: $Z=k\pi-45^\circ, 2k\pi\pm120^\circ$

۱۷۳۹- $\operatorname{cotg}(x-25^\circ)+\operatorname{tg}(3x+15^\circ)=2\sin(2x-50^\circ)$

جواب:

$$x=115^\circ+180^\circ\times k, 70^\circ+90^\circ\times k, 55^\circ+180^\circ\times k, -5^\circ+180^\circ\times k$$

۱۷۴۰- $\operatorname{tg}^2x+\operatorname{cotg}^2x+3\operatorname{tg}x+3\operatorname{cotg}x+4=0$

جواب: $x=+k\pi-45^\circ$

۱۷۴۱- $\operatorname{tg}2t=\operatorname{cotg}t-4\cos t\cos 2t$

جواب: $t=30^\circ(2k+1), 22{,}5^\circ(4k+1)$

۱۷۴۲- $\cos 2x=\cos^2 1{,}5x$ ج: $x=2k\pi, k\pi\pm30^\circ$

۱۷۴۳- $(\operatorname{tg}t-\operatorname{cotg}t+2\operatorname{tg}2t)(1+\cos 4t)=4\sin 4t$

جواب: $t=36^\circ(2k+1), k\neq0{,}5(5l-1)$

۱۷۴۴- $\sin x(\cos x-2)+\operatorname{tg}x=2-\cos x-\sec x$

جواب: $x=2k\pi$

۱۷۴۵- $(\cos^2x+\sec^2x)(1+\operatorname{tg}^2 2y)(3+\sin 4Z)=4$

جواب: $x=k\pi, y=90^\circ k, Z=30^\circ(4k-1)$

۱۷۴۶- $$\frac{1+\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^2x+\cdots+\operatorname{tg}^nx+\cdots}{1-\operatorname{tg}x+\cdots+(-1)^nx+\cdots}=1+\sin 2x$$

جواب : $x=k\pi$

۱۷۴۷- $\operatorname{tg}x-\sin 2x-\cos 2x(1-2\sec x)=0$

جواب : $x=45^\circ(2k+1)$

۱۷۴۸- $$\frac{1-\sin t+\cdots+(-1)^n\sin^nt+\cdots}{1+\sin t+\cdots+\sin^nt+\cdots}=\frac{1-\cos 2t}{1+\cos 2t}$$

جواب: $t=(-۱)^k ۳۰^\circ+k\pi$

۱۷۴۹- $\sqrt{۳}\sin t-\sqrt{۲\sin^۲ t-\sin ۲t+۳\cos^۲ t}=۰$

جواب: $t=۴۵^\circ(۱+۸k)$ و $-\operatorname{arctg}۳+\pi(۲k+۱)$

۱۷۵۰- $\sqrt[۳]{\sin^۲ x}+\sqrt[۳]{\cos^۲ x}=\sqrt[۳]{۴}$ $\qquad x=۴۵^\circ(۲k+۱)$

۱۷۵۱- $۲\sin^۲ t=\sqrt{\sin^۲ t-۱۶\sin^۲ t\cos^۲ t\cos^۲ ۲t+\cos^۲ t}$

جواب: $x=\frac{\pi}{۴}(۲k+۱)$ و $k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$ و $k\pi\pm\frac{۱}{۲}\arccos\frac{\sqrt{۱۷}-۱}{۴}$

۱۷۵۲-

$\cos Z\sqrt{\operatorname{tg}^۲ Z-\sin^۲ Z}+\sin Z\sqrt{\operatorname{cotg}^۲ Z-\cos^۲ Z}=۲\sin Z$

جواب: $Z=k\pi+\frac{\pi}{۶}$ و $\arcsin\frac{۱-\sqrt{۳}}{۲}+k\pi$

۱۷۵۳- $\cos x+\sqrt{۱/۵-\cos^۲ x}-\cos x\sqrt{۱/۵-\cos^۲ x}=۱$

جواب: $x=۲k\pi$ و $k\pi\pm۴۵^\circ$

۱۷۵۴- $\sqrt[۵]{۰/۵-\sin x}+\sqrt[۵]{۰/۵+\sin x}=۱$ $\qquad x=k\pi\pm۳۰^\circ$

۱۷۵۵- $\sqrt{۱+\sin x}-\sqrt{۱-\sin x}=۱+\cos x$

جواب: $x=\pi(۲k+۱)$ و $۲k\pi+\arccos(\sqrt{۵}-۲)$

۱۷۵۶- $\sqrt{۱+۲\operatorname{cotg} x}+\sqrt{\frac{\operatorname{tg} x}{۳+\operatorname{tg} x}}=\frac{۵}{۲}$

جواب: $x=k\pi+۴۵^\circ$ ؛ $k\pi-\operatorname{arctg}۴$

۱۷۵۷- $\sqrt[4]{0/5-\cos 2x}+\sqrt[4]{0/5+\cos 2x}=1$

جواب: $x=90^\circ K\pm 30^\circ$

۱۷۵۸- $\sin x+\sqrt{2-\sin^2 x}+\sin x\sqrt{2-\sin^2 x}=3$

جواب: $x=90^\circ(1+4k)$

۱۷۵۹- $\sin x=\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}$ ،

جواب: $x=2k\pi+90^\circ$

۱۷۶۰- $\sqrt[3]{2-tg x}+\sqrt[3]{7+tg x}=3$

جواب: $x=45^\circ(4k+1)$ و $k\pi-\mathrm{arc}tg 6$

۱۷۶۱- $\sqrt{4\cos^2 x+1}+\sqrt{4\sin^2 x+3}=4$ $\quad x=k\pi\pm 30^\circ$

۱۷۶۲- $\sqrt[3]{\sin^2 x}-\sqrt[3]{\cos^2 x}=\sqrt[3]{2\cos 2x}$

جواب: $x=45^\circ(2k+1)$

۱۷۶۳- $\sqrt{\cos^2 x+0/5}+\sqrt{\sin^2 x+0/5}=2$

جواب: $x=45^\circ(2k+1)$

۱۷۶۴- $\cos x+\sqrt{\sin^2 x-2\sin 2x+4\cos^2 x}=0$

جواب: $x=45^\circ(5+8k)$ و $\mathrm{arc}tg 3+\pi(2k+1)$

۱۷۶۵- $\sqrt{\cos 2x}+\sqrt{1+\sin 2x}=2\sqrt{\sin x+\cos x}$

جواب: $x=45^\circ(4k-1)$ و $2k\pi$

-۱۷۶۶ $\dfrac{1-2\cos^2 x}{\sin x\cos x}+2tg2x+cotg^2 4x=3$

جواب: $x=\dfrac{\pi}{16}(3+4k)$ و $\dfrac{k\pi}{4}+\dfrac{1}{4}\,arccotg\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

-۱۷۶۷ $\sqrt[3]{10+8\sin^2 x}-\sqrt[3]{8\cos^2 x-1}=1$

جواب: $x=k\pi\pm 60^\circ$

-۱۷۶۸

$cosec2x\sqrt{tg^2x+cotg^2x+2}+cotg2x\sqrt{tg^2x+cotg^2x-2}=4\cos^2 2x$

جواب: $x=k\pi+67/5^\circ$

-۱۷۶۹ $\sqrt{1-2\sin 4x}+\sqrt{6}\cos 2x=0$

جواب: $x=k\pi+67/5^\circ$ و $0/5\,arctg 50+90^\circ(2k+1)$

-۱۷۷۰ $\sin\pi\sqrt{t}+\sin\pi t=0$

جواب $t=\dfrac{1-\sqrt{1+8k}}{2}+2k$ و $\dfrac{3+\sqrt{5+8k}}{2}+2k$ و $k\geqslant 0$

-۱۷۷۱ $(\cos^2 x+2\sin^2 x-2\sin x+1)(\sin x+\cos x)=0$

جواب: $x=45^\circ(4k-1)$

-۱۷۷۲ $4cotg^2 2x-12cotg2x+cotg2x+tg^2x-14=0$

جواب: $x=90^\circ k+67/5^\circ$ و $90^\circ K\pm 15^\circ$

-۱۷۷۳ ج: $x=k\pi$ $\quad \sec^4 x+\cos^4 x=1+\cos 2x-2\sin^2 2x$

-۱۷۷۴ $\sec^4 x+8\sec x-7=0$

جواب: $x=2k\pi\pm arccos\dfrac{-2}{\sqrt{3}+\sqrt{8\sqrt{3}-2}}$

۱۷۷۵– $\sin^{10}2x+\cos^{10}2x=2\dfrac{\sin^{6}2x+\cos^{6}2x}{4\sin^{2}6x+\sin^{2}6x}$

جواب: $x=30^\circ K$

۱۷۷۶– ج: $\operatorname{cotg}^{4}2z=\cos^{2}4z+1 \qquad z=22/5(2k+1)$

۱۷۷۷– $\left(2+\dfrac{1}{\cos^{2}x}\right)(4-2\cos^{4}x)=1+5\sin 3y$

جواب: $x=k\pi$ و $y=30^\circ(2k+1)$

۱۷۷۸– $\sqrt{6}\sin x\times\cos x=0/5(\sin x-\cos x)$

جواب:

$x=2k\pi-15^\circ$ و $2k\pi-75^\circ$ و $0/5\arcsin 1\div 3+\pi(2k+1)$ و $-$

$-0/5\arcsin 1\div 3+90^\circ(4k+1)$

۱۷۷۹– $18\cos^{2}x+5(3\cos x+\sec x)+2\sec^{2}x+5=0$

جواب: $x=2k\pi\pm 120^\circ$ و $2k\pi\pm\arccos(-2\div 3)$

۱۷۸۰ $\operatorname{tg}(\pi\operatorname{cotg} t)=\operatorname{cotg}(\pi\operatorname{tg} t)$

$t=\dfrac{(-1)^k}{2}\arcsin\dfrac{4}{2k+1}+\dfrac{K\pi}{2}$ و $k\geqslant\dfrac{3}{2}$ و $k\leqslant-\dfrac{5}{2}$

۱۷۸۱– $\sec^{4}x-2\sec^{2}x-12\operatorname{tg}x-16=0$

$x=k\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{1+\sqrt{6\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}$ و $k\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{1-\sqrt{6\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}$

ج: $\sin^{8}2x+\cos^{8}2x=41\div 128 \qquad x=45^\circ K\pm 15^\circ$

۱۷۸۳– $2(1-\sin x-\cos x)+\operatorname{tg}x+\operatorname{cotg}x=0$

جواب: $x=\dfrac{\pi}{4}(4k-1)$ و $2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\pm\arccos\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4}$

۱۷۸۴– $\dfrac{\operatorname{tg}t}{2-\sec^{2}t}(\sin 3t-\sin t)=\dfrac{2}{\operatorname{cotg}^{2}t-3}$

جواب: $t=120^\circ(3k\pm 1)$

۱۷۸۵– $\operatorname{tg}(\pi\cos t)=\operatorname{cotg}(\pi\sin t)$

جواب: $t=45^\circ\pm\arccos(\sqrt{2}\div 4)+k\pi$

۱۷۸۶- $\operatorname{tg}x+\operatorname{cotg}x-\cos 4x=3$

جواب: $x=\frac{\pi}{4}(4k+1) , (-1)^k\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{k\pi}{2}$

۱۷۸۷- $\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{tg}^2 3x\cdot\operatorname{tg}^2 5x=\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}^2 3x-\operatorname{tg}^2 5x$

جواب: $x=k\pi , \pi(4k+1)\div 32$

۱۷۸۸- $(5+2\operatorname{cosec}^2 x)(2-\sin^4 x)=7+\cos 2y$

جواب: $x=90^\circ(2k+1) , y=k\pi$

۱۷۸۹ $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}x-2\operatorname{cotg}^2 x-2\operatorname{cotg}x-2=0$

جواب: $x=k\pi\pm 60^\circ$

۱۷۹۰- $\cos^4 x+2\cos x-1=0$

جواب: $x=2k\pi\pm\arccos\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2\sqrt{2}-1}-1\right)}{2}$

۱۷۹۰- $\frac{1-\cos 2x+\cdots+(-1)^n\cos^n 2x+\cdots}{1+\cos 2x+\cdots+\cos^n 2x+\cdots}=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^4 x$

جواب. $x=k\pi\pm 60^\circ$

۱۷۹۲- $2(\operatorname{tg}x-\sin x)+3(\operatorname{cotg}x-\cos x)+5=0$

جواب: $x=k\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{2} , 2k\pi+\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}-2}{2}$

۱۷۹۳- $\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{cotg}^2 x+\operatorname{cotg}^3 x-4=0 \quad x=45^\circ(4k+1)$

۱۷۹۴- $\cos\sqrt{x}=\cos x$

جواب: $x=2k\pi+0/5\left(1\pm\sqrt{1+8k\pi}\right) , k\geqslant 0$

۱۷۹۵- ج: $|\sin t+\cos t|=\sqrt{2} \qquad t=k\pi+45^\circ$

۱۷۹۶- $\operatorname{tg}^2 x\cdot\operatorname{tg}^2 3x\cdot\operatorname{tg}4x=\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 3x+\operatorname{tg}4x$

جواب: $x=k\pi , 45^\circ(2k+1)$

۱۳۹۷- $\cos 4x+\sin\frac{5x}{2}=2$ ج: $x=\pi(1+4k)$

۱۳۹۸- $\sqrt{3}\cos t=1+\cot t$

$t=0/5\arcsin 2\div 3+90^\circ(4k-1)$ و $-0/5\arcsin 2\div 3+\pi(2k+1)$

۱۳۹۹-

$\cos^2 x^2(\tan x^2+2\tan x)+\tan^2 x(1-\sin^2 x^2)(2-\tan x\cdot\tan x^2)=0$

جواب: $x=-1\pm\sqrt{1+k\pi}\,,\ k\geqslant 0$

۱۸۰۰- $\dfrac{1-\tan x+\cdots+(-1)^n\tan^n x+\cdots}{1+\tan x+\cdots+\tan^n x+\cdots}=1+\sin 2x$

جواب: $x=k\pi$

۱۸۰۱- $\cot t-\cos t=2\cos^2(t\div 2)$

جواب:

$t=\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2k\pi$ و $2k\pi+\frac{3\pi}{2}-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

۱۸۰۲- $\tan^2 x\cdot\cot^2 2x\cdot\cot 3x=\tan^2 x-\cot^2 2x+\cot 3x$

جواب: $x=30^\circ(2k+1),\ k\neq 3l+1$ و $45^\circ(4k+1)$

۱۸۰۳- $(4-\cos 2x)(2+3\sin y)=12+13\sec^2 3z$

جواب: $x=90^\circ(2k+1)$ و $y=90^\circ(4k+1)$ و $z=60^\circ k$

۱۸۰۴- $(2\sin x-1)(\cos^4 x+2\cos^3 x+2\cos^2 x-2\cos x+1)=0$

جواب: $x=(-1)^k+k\pi+30^\circ$

۱۸۰۵- $1+\sqrt{3}\sin t=\tan t$

جواب:

$t=-0/5\arcsin 2\div 3+90^\circ(4k+1)$ و $0/5\arcsin 2\div 3+\pi(2k+1)$

۱۸۰۶- $2\tan x+\tan\frac{x}{2}+4\cot 2x=\cot 3x$ $x=36^\circ k,\ k\neq 5l$

۱۸۰۷- $2\sin^2 x+\sin x+\operatorname{cosec} x+2\operatorname{cosec}^2 x=6$

جواب: $x=(-1)^{k+1}30^\circ+k\pi$ و $\frac{\pi}{2}(1+4k)$

۱۸۰۸- $2 tg\,\pi t^2 - tg\,\pi t + tg\,\pi t \cdot tg^2 \pi t^2 = 0$

$t = 0$ و $\dfrac{1+\sqrt{1+8k}}{4}$ و $k > 0$ و $k \neq l(2l+1)$ و $\dfrac{1-\sqrt{1+8k}}{4}$

و $k \neq l(2l-1)$ و $l > 0$

۱۸۰۹- $\sin^3 x + 2\cos^3 x + 2\sin^2 x - \cos x + 1 = 0 \quad x = \pi(2k+1)$

۱۸۱۰- $|\sin t| + |\cos^2 t| = 1{,}2$

جواب: $t = 90^\circ K \pm 2\,\text{arctg}\, 0{,}5$

۱۸۱۱- $$\frac{3 tg x - tg^3 x}{2 - \sec^2 x} = \frac{4 + 2\cos 1{,}2x}{\cos 3x + \cos x}$$

جواب: $x = \dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{10 k\pi}{3}, k \neq \dfrac{3l+1}{2}$ و k و l

۱۸۱۲- $12\sec^2 x + \dfrac{10}{3} cotg^2 x + 10\left(2 tg x + \dfrac{cotg x}{3}\right) = 1$

جواب: $x = k\pi - 45^\circ$ و $k\pi - \text{arctg}\, 1 \div 6$

۱۸۱۳- $\sin^5 x + \cos^5 x = 2 - \sin^4 x \qquad x = 90^\circ(1+4k)$

۱۸۱۴- $3 tg 2x - 4 tg 3x = tg^2 3x \cdot tg 2x$

جواب: $x = k\pi$ و $k\pi \pm \text{arctg} \sqrt{0{,}6}$

۱۸۱۵- $cotg\, 2\pi t^2 + cotg\, 3\pi t = 0$

جواب: $t = 0{,}5(-3 \pm \sqrt{4+2k})$ و $k \geqslant 1$ و $k \neq 2(l^2 - 1)$

۱۸۱۶- $$(3 - tg^2 x)(\cos 3x + \cos x) = \frac{4\cos 3x}{tg 2x}$$

جواب: $x = 15^\circ(4k+1)$ و $k \neq (3l+1) \div 2$

۱۸۱۷- $$\frac{1 + \sin t + \cdots + \sin^n t + \cdots}{1 - \sin t + \cdots + (-1)^n \sin^n t + \cdots} = \frac{4}{1 + tg^2 t}$$

جواب: $t = (-1)^k 30^\circ + k\pi$

-۱۸۱۸ $|tg2t+cotg2t|=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ج: $t=45^\circ k\pm 15^\circ$

-۱۸۱۹ $(3-\sin x)(4-cosec^2 x)=12+\cos^2 y$

جواب: $x=90^\circ(4k-1)$ و $y=90^\circ(2k+1)$

-۱۸۲۰ $4-4(\cos z-\sin z)-\sin 2z=0$

جواب: $z=2k\pi$ و $90^\circ(4k-1)$

-۱۸۲۱ $\frac{1}{4}tg\frac{t}{4}+\frac{1}{2}tg\frac{t}{2}+tg\,t=2\sqrt{3}+\frac{1}{4}cotg\frac{t}{4}$

جواب: $t=15^\circ(5+6k)$

-۱۸۲۲ $\frac{2tg\,t-tg^3 t}{1-tg^2 t}(\cos 3t+\cos t)=2\sin 5t$

جواب: $t=k\pi$ و $22/5^\circ(2k+1)$

-۱۸۲۳ $tg\,x-\sin 2x-\cos 2x+2(2\cos x-\sec x)=0$

جواب: $x=45^\circ(2k+1)$

-۱۸۲۴ $5\sin 2z-11(\sin z+\cos z)+7=0$

جواب: $z=2k\pi+45^\circ\pm\arccos\sqrt{2}\div 10$

-۱۸۲۵ $cosec5x-cotg\,x=tg\frac{x}{2}$

جواب: $x=30^\circ(2k+1)$

-۱۸۲۶ $4\cos^2 2t-tg4t=cotg2t$

جواب: $t=45^\circ(2k+1)$ و $\pi(4k+1)\div 16$

-۱۸۲۷ $\frac{\sin^2 x-tg^2 x}{\cos^2 x-cotg^2 x}-tg^6 x+tg^4 x-tg^2 x=0$

جواب: $x=45^\circ(2k+1)$

-۱۸۲۸ $\sin^{10}x+\cos^{10}x=29\div 64$ $x=90^\circ K\pm 22/5^\circ$

-۱۸۲۹ $\sin 2x+\sin 3x=3\sin x$

جواب: $x=K\pi$ و $2K\pi\pm\arccos(\sqrt{17}-1)\div 4$

-۱۸۳۰ $\cos^2 x+\cos^2\frac{3x}{4}+\cos^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{4}=2$

جواب: $x=(2k+1)\pi$ و $0/4(2k+1)\pi$

۱۸۳۱- $\sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x = 0/5$

جواب:

۱۸۳۲- $x = 22/5^\circ(2k+1)$ و $k\pi \pm 30^\circ$

$\cos 3x \cos 4x + \sin 2x \sin 5x = 0/5(\cos 2x + \cos 4x)$

جواب: $x = 90^\circ(2k+1)$ و $0/4k\pi$

۱۸۳۳- $1 - \sin^4 x - \frac{5}{4}\cos^4 x = 0$

جواب: $x = 90^\circ(2K+1)$ و $K\pi \pm 30^\circ$

۱۸۳۴- ج: $x = (2k+1)90^\circ$ $\qquad 8\cos^4 x - \cos 4x = 1$

۱۸۳۵- $\sin(2x - 15^\circ) + \cos(2x - 15^\circ) = \sqrt{2}\cos(3x + 30^\circ)$

جواب: $x = 2k\pi - 90^\circ$ و $72^\circ k + 6^\circ$

$\cos^2(x-\gamma) + \cos^2(0/5x + \beta - \gamma) - 2\cos(0/5x - \beta)\cos(x-\gamma)$
$\cos(0/5x + \beta - \gamma) = 0/75$

جواب: $x = 2k\pi + 2\beta \pm 120^\circ$

$4\sin^2 x \cos x - 3\sin x \cos^2 x + 5\cos^3 x - 6\cos x = 0$

جواب: $x = (K + 0/5)\pi$ و $k\pi - 45^\circ$ و $k\pi - \operatorname{arctg} 0/5$

۱۸۳۹- $(\cos 5x + \cos 7x)^2 = (\sin 5x + \sin 7x)^2$

جواب: $x = 15^\circ K + 7/5^\circ$ و $K\pi + 90^\circ$

۱۸۴۰- $x = 2k\pi$ و $2k\pi + 1$ $\qquad \sin(x-1) = \sin x - \sin 1$

۱۸۴۱- $4\sin x \sin 2x \sin 3x = \sin 4x$

جواب: $x = 90^\circ K$ و $45^\circ k + 22/5^\circ$

۱۸۴۲- $\sin 2x \sin 4x \sin 6x = 0/25 \sin 4x$

جواب: $x = 90^\circ K + 18^\circ K + 9^\circ$

۱۸۴۳- $\sin 9x + \sin 5x + 2\sin^2 x = 1$

جواب: $x = \frac{2k+1}{4}\pi$ و $\frac{k\pi}{7} + (-1)^k \frac{\pi}{42}$

۱۸۴۴- $(1 + \sin x)(1 - 2\sin x)^2 = (1 - \cos x)(1 + 2\cos x)^2$

جواب: $x = 60^\circ K + 15^\circ$

۱۸۴۵- $4\cos x \cos(60^\circ - x)\cos(60^\circ + x) = \cos 2x \qquad x = 36^\circ K$

۱۸۴۶- $\sin ۵x = ۱۶\sin^۵ x$ ج: $x = k\pi$ و $k\pi \pm ۳۰^\circ$

۱۸۴۷- $\sin x - \cos x = ۴\sin x \cos ۲x$ ج: $x = k\pi + ۴۵^\circ$

۱۸۴۸- $۳\sin x + ۴\cos x = ۵$ $x = ۲k\pi + \arcsin ۰/۶$

۱۸۴۹- $۲\sin ۱۷x + \cos ۷x = \sqrt{۳}\sin(\pi + ۷x)$

جواب: $x = \frac{۱۲k-۱}{۱۴۴}\pi$ و $\frac{۱۲k+۷}{۶۰}\pi$

۱۸۵۰- $۳\sin x + ۴\cos x - ۵\sin ۷x = ۰$

جواب: $x = \frac{k\pi}{۳} + \frac{۱}{۶}\mathrm{arctg}\frac{۴}{۳}$ و $\frac{۲k+۱}{۸}\pi - \frac{۱}{۸}\mathrm{arctg}\frac{۴}{۳}$

۱۸۵۱- $۵\sin ۲x + ۱۲\sin(۲x - ۹۰^\circ) + ۱۳\sin ۶x = ۰$

جواب: $x = \frac{k\pi}{۴} + \frac{\alpha}{۸}$ و $\frac{۲k+۱}{۴}\pi - \frac{\alpha}{۴}$ و $\alpha = \mathrm{Arctg}\frac{۱۲}{۵}$

۱۸۵۲- $(\sin x - \cos x)^۲ + \sin^۲ x + \sin^۲(x + ۴۵^\circ) = ۱/۲۵$

جواب: $x = k\pi$ و $k\pi + ۴۵^\circ$

۱۸۵۳- $\sin^۲ x + \sin^۲(x + ۴۵^\circ) + \sin^۲(x - ۴۵^\circ) = ۹ \div ۸$

جواب : $x = k\pi \pm ۰/۵\arccos ۰/۵(\sqrt{۶} - ۲)$

۱۸۵۴- $(\cos x - \sin x)^۲ = \cos x + \sin x$

جواب: $x = ۲k\pi$ و $۲k\pi + ۹۰^\circ$

۱۸۵۵- $\sin^۲ x + \sin x \cos x + \cos^۲ x = ۱$

جواب: $x = ۲k\pi$ و $۲k\pi + ۹۰^\circ$

۱۸۵۶- $۵(۱ - \sin ۲x) - ۱۶(\sin x - \cos x) + ۳ = ۰$

جواب: $x = k\pi + ۴۵^\circ + (-۱)^k \arcsin ۰/۱\sqrt{۲}$

۱۸۵۷- $\sin^۳ x + \cos^۳ x = ۱$ ج: $x = ۲k\pi$ و $۲k\pi + ۹۰^\circ$

۱۸۵۸- $۱ + \sin^۳ x + \cos^۳ x = ۱/۵\sin ۲x$

جواب: $x = (۲k + ۱)\pi$ و $۲K\pi - ۹۰^\circ$

۱۸۵۹- $\sin ۲x \cos ۵x - \sin ۳x \cos ۴x = ۱$

جواب: $x = ۲k\pi + ۹۰^\circ$

۱۸۶۰- $\sin ۳x \cos ۱۰x = ۱$ $x = ۲K\pi + ۹۰^\circ$

۱۸۶۱- $\sin ۳x - \cos ۳x = ۱ - ۴(\cos x - \sin x)$

جواب: $x = k\pi + ۴۵^\circ$

-۱۸۶۲ $\sin x \sin 3x \sin 5x = 1$ ج: $x = 2k\pi - 90°$

-۱۸۶۳ $\cos 6x + \cos 4x + \cos 2x + 0/5 = 0$

جواب: $x = K\pi \div 7$ و $k \neq 7n$

-۱۸۶۴ $\sin^{15}x + \cos^{17}x = 1$

جواب: $x = 2k\pi$ و $2k\pi + 90°$

-۱۸۶۵ $\sin^2 x + 0/25 \sin^2 3x = \sin x \sin^2 3x$

جواب: $x = k\pi$ و $k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}$

-۱۸۶۶ $8\cos x = \sqrt{3}\,\mathrm{cosec}\,x + \sec x$

-۱۸۶۷ $2(\sin x + \cos x)^2 = tg(45° + x)$

-۱۸۶۸ $\cot g^2 x - tg^2 x = 16\cos 2x$

جواب: $x = 90°K + 45°$ و $45°K \pm 15°$

-۱۸۶۹ $tg(120° - x) + tg(60° - x) = 2\sin 2x$

جواب: $x = 90°K$ و $K\pi \pm 60°$

۱۸۷۰ $tg(270° - 2x) - \cos 2x = 2\sqrt{3}\cos^2(x + 45°)$

جواب: $x = 90°K + 15°$ و $K\pi + 45°$

-۱۸۷۱ $\sin x(3 tg x + \cot g x) = 5$ $x = 2k\pi \pm 60°$

-۱۸۷۲ $tg x + tg(x + 45°) + tg(x + 90°) + tg(x + 135°) = 4$

جواب: $x = K\pi \div 4 - \pi \div 16$

-۱۸۷۳ $tg(x + 60°) + tg(x - 60) = 2\cot g x$

جواب: $x = K\pi + 90°$ و $K\pi \pm 0/5 \arccos 0/75$

-۱۸۷۴ $\cot g 8x \cot g 10x = -1$

-۱۸۷۵ $tg(60° + x) tg(60 - x) = 2\cos 2x - 1$

جواب: $x = 90°K + 45°$

-۱۸۷۶ $tg x = tg^3(45° - \frac{x}{2})$

جواب: $x = k\pi + (-1)^k \arcsin(1 \div 3)$

-۱۸۷۷ $(\sin x + \cos x)(1 + tg^2 x) = 4\sin x(1 - tg^2 x)$

جواب: $x = k\pi - 45°$

-۱۸۷۸ $(\sin x + \cos x)(2 - \sin^2 2x) = 2(1 - tg^8 x)\cos^7 x$

جواب: $x = k\pi - 45°$ و $k\pi$

۱۸۷۹- $\sin x + 3tg\, x = 3$

جواب: $x = k\pi + \frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin \frac{3-\sqrt{10}}{\sqrt{3}}$

۱۸۸۰- $cotg\, x = tg\, x + 2tg\, 2x + 4tg\, 4x$

جواب: $x = \pi(2K+1) \div 16$

۱۸۸۱- $cotg\, x + \frac{\sin x}{1+\cos x} = 2$

۱۸۸۲- $\frac{\cos x}{1+\sin x} = 2 - tg\, x$

۱۸۸۳- $1 - 2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x = \frac{2tg\, 2x}{1+tg^2 2x}$

۱۸۸۴- $tg\left(x - \frac{\pi}{4}\right) tg\, x\, tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4\cos^2 x}{tg\frac{x}{2} - cotg\frac{x}{2}}$

۱۸۸۵- $\cos x = \frac{2tg\, x}{1+tg^2 x}$

۱۸۸۶- $\frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = cotg\, 2x$

۱۸۸۷- $\frac{\cos x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} + 2tg\, x = 0$

۱۸۸۸- $2\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\cos 2x - 3\cos x}$

۱۸۸۹- $2\sqrt{3}\sin x \sin\frac{x}{2} = \sqrt{1+\cos x}$

۱۸۹۰- $\sin 4x \sin x - \sin 3x \sin 2x = 0/5\cos 3x + (1 + \cos x \cdot 0/5)$

۱۸۹۱- $\sqrt{tg\, x + \sin x} + \sqrt{tg\, x - \sin x} = 2\sqrt{tg\, x \cos x}$

$\sqrt{17\sec^2 x + 16\left(\frac{1}{2} tg\, x \sec x - 1\right)} = 2tg\, x(1 + 4\sin x)$

-۱۸۹۲

-۱۸۹۳ $\sin^2 x = 3\sin x\cos x \qquad x = K\pi$ و $\operatorname{arctg}3 + K\pi$

-۱۸۹۴ $4\sin^2 x\cos x - 4\sin x\cos^2 x + \cos^3 x = 0$

جواب: $x = K\pi + 90^\circ$ و $K\pi + \operatorname{Arctg} 0.5$

-۱۸۹۵ $\sin x - \cos x - 4\cos^2 x\sin x = 4\sin^3 x$

جواب: $x = K\pi - \operatorname{Arctg}(1 \div 3)$

-۱۸۹۶ $\sin^3 x(1 - \operatorname{cotg} x) - \cos^3 x(1 - \operatorname{tg} x) = 0 \qquad x = K\pi + 45^\circ$

-۱۸۹۷ $\sec x = 4\sin x + 6\cos x$

جواب: $x = K\pi + \operatorname{Arctg}5$ و $K\pi + 45^\circ$

-۱۸۹۸ $\sin x - \cos x = 1 - \sin 2x$

جواب: $x = K\pi + 45^\circ$ و $2K\pi + 90^\circ$ و $2K\pi + \pi$

-۱۸۹۹ $\sin 2x + \sqrt{2}\sin(x - 45^\circ) = 1$

جواب: $x = K\pi + 45^\circ$ و $2K + 90^\circ$ و $2K\pi + \pi$

-۱۹۰۰ $2\cos 2x - 8\cos x + 7 = \sec x$

جواب: $x = 2K\pi$ و $2K\pi \pm 60^\circ$

-۱۹۰۱ $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \sin x\left(\operatorname{tg} x \operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1\right)$

جواب: $x = K\pi + 90^\circ$

-۱۹۰۲ $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2 \qquad x = K\pi + 45^\circ$

-۱۹۰۳

$\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x \quad x = K\pi + 45^\circ$ و $2K\pi + 45^\circ$

-۱۹۰۴ $8\sin x\cos 2x\sin(60^\circ - x)\sin(60^\circ + x) = 1$

جواب: $x = (2K + 1)\times 15^\circ$

-۱۹۰۵ $\dfrac{\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{1 + \cos x}}{\cos x} = 4\sin x$ و $0 < x < 2\pi$

-۱۹۰۶ $2(\log_2 \sin x)^2 + \log_2(1 - \cos 2x) = 2$

-۱۹۰۷ $\log^2 \sin x - 2a\log\sin x - a^2 + 2 = 0$

-۱۹۰۸

$$\sqrt[3]{\log(10\sin x) - \log\cos x} + \sqrt[3]{\log(10\cos x) - \log\sin x} = 2$$

-۱۹۰۹ $\log_{\sqrt{2}\sin x}(1+\cos x)=2$

-۱۹۱۰ $\log_{\sin x}\frac{4}{3}=-2$

-۱۹۱۱ $\log_{\frac{1}{8\cos^2 x}}\sin x=0/5$

-۱۹۱۲ $\log_{\sin^2 x}3=\log_2\sin x$

-۱۹۱۳ $81^{\sin^2 x}+81^{\cos^2 x}=30$

-۱۹۱۴ $4^{tg^2 x}+2^{\frac{1}{\cos^2 x}}-80=0$

-۱۹۱۵ $(0/5)^{\cos 2x}-\frac{1}{4^{\sin^2 x}}=\frac{1}{2}$

-۱۹۱۶ $\frac{1}{2}+16^{\sin x}=\frac{6}{16\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$

-۱۹۱۷ $1+2^{tg x}=3\times 4^{\frac{\sin(45^\circ-x)}{\sqrt{2}\cos x}}$

-۱۹۱۸ $4^{\sin x}+a\times 2^{\sin x}+a^2-1=0$

جواب	صورت
-۱۹۱۹ $\frac{K\pi}{2}+(-1)^k\frac{\pi}{12}$	$4^{\sin x\cos x}=\sqrt{2}$

۱۹۲۰- $0/5 \times 2^{\cos x} = 1$ $\qquad 2K\pi$

۱۹۲۱- $9^{|\cos x|} = 3$ $\qquad K\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$0/25^{|\sin x|} = 2\sqrt{2}$

۱۹۲۲- $2^{\log_2 \sin x} = 1$ $\qquad 2K\pi \pm \frac{\pi}{2}$

۱۹۲۳- $5^{1+\log_5 \cos x} = 2/5$ $\qquad 2K\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۱۹۲۴- $3^{\log_3 |\cos x|} = 0/5$ $\qquad K\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۱۹۲۵- $a^{\log_a \sin x} - b^{\log_b \cos x} = 0$ $\qquad K\pi \pm \frac{\pi}{4}$

۱۹۲۶- $\sqrt{2}^{\log_{\sqrt{2}} \cos x} = 1$ $\qquad 2K\pi$

۱۹۲۷- $0/5^{-2\log_2 \sin x} + \cos x = 1/25$ $\qquad 2K\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۱۹۲۸- $\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2$ $\qquad x = K\pi + 45^\circ$

۱۹۲۹- $\sin^2 2^{\sqrt{-x}} = \frac{1}{2}$ $\qquad x = -\log_2^2 (K\pi \pm \frac{\pi}{4})$

۱۹۳۰- $25^{\log_{0/2} (\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 5)} = \frac{1}{9}$

جواب: $x = K\pi - 45^\circ$ و $K\pi - \mathrm{arctg}(2 \div 3)$

۱۹۳۱- $\cos 7x + \sin^2 2x = \cos^2 2x - \cos x$

جواب: $x=(2k+1)\pi$ و $2K\pi-90^\circ$

۱۹۳۲- $\sin 2x \sin 5x+\cos x\cos 7x=0$

جواب: $x=2k\pi+90^\circ$

۱۹۳۳- $4\cos\frac{8x}{2}\cos\frac{4x}{2}\cos\frac{2x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{4}$

جواب: $x=2K\pi+90^\circ$

۱۹۳۴- $\sin 2x\cos x-\cos x=-\sin x(1+\cos 2x)$

جواب: $x=k\pi+45^\circ$

۱۹۳۵- $$\frac{(\cos x+\sin x)^2-\sin 2x}{\cos^4 x+\frac{1}{4}\sin^2 2x}=2$$

جواب: $x=2k\pi-90^\circ$

۱۹۳۶- $tg\,3x-tg\,x=4\sin x$

جواب: $x=\frac{k\pi}{2}$ و $k\neq 4n$

۱۹۳۷- $tg(45^\circ+x)=1+\sin 2x$

جواب: $x=2k\pi$ و $2k\pi+90$

۱۹۳۸- $\cos^2 x+\sin^2(x+\alpha)-2\cos x\cos\alpha\cos(x+\alpha)=\sin^2\alpha$

جواب: $x=k\pi$ و $k\pi+(-1)^k 30^\circ$

۱۹۳۹- $\sin^{10}x+\cos^{10}x=\frac{29}{16}\cos^4 2x$

جواب: اگر $a=0$ باشد: $x=\frac{2k-1}{2}\pi$ و $k\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$

$$0>a\geqslant -1 \text{ و } 0<a\leqslant 4 \rightarrow x=k\pi+\operatorname{arctg}\frac{2\pm\sqrt{(a+1)(4-a)}}{a}$$

اگر باشد $a>4$ و باشد $a<-1$ اگر.

۱۹۴۰- $\sin(\pi\cos x)=\cos(\pi\sin x)$

$$\frac{۱}{۸} \leqslant a \leqslant ۱ \Longrightarrow x = \frac{k\pi}{۲} \pm \arccos \sqrt{\sqrt{۸+۸a} - ۲}$$

جواب:

۱۹۴۱- جواب: $۲\sin ۲x = ۳(\sin x + \cos x)$

۱۹۴۲- جواب: $۲\sin^۲ \frac{x}{۲} \sin^۲ \frac{x}{۶} = (x - \frac{۱}{x})^۲ + ۲ \geqslant ۲$

۱۹۴۳- $x^۲ + ۲x\sin(xy) + ۱ = ۰$

جواب: $x = (۶n+۱)۱۵^\circ$ و $(۳n-۲)۶۰^\circ$

۱۹۴۴- $۶\arcsin\sqrt{x} = \pi$

جواب: $x = K\pi - ۴۵^\circ$ و $K\pi \pm ۳۰^\circ$

۱۹۴۵- $۲\arcsin x + \arccos x = ۴$

جواب: $x = ۹۰^\circ K + ۴۵^\circ$ و $۴۵^\circ K \pm ۱۵^\circ$

۱۹۴۶- اگر $tg\alpha = \frac{\sqrt{۶}}{۲}$ باشد حاصل عبارت $A = \frac{tg\alpha + cotg\alpha}{tg\alpha - cotg\alpha}$ رابدست آورید.

جواب: ۵

۱۹۴۷- اگر $tg\alpha = \frac{۱}{۳}$ باشد حاصل عبارت $B = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$ را بدست آورید.

جواب: ۰/۵ −

۱۹۴۸- اگر $tg\alpha = ۱/۲$ باشد حاصل عبارت $C = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$ را بدست آورید.

جواب: ۰/۱ −

۱۹۴۹- اگر $\alpha = ۵۰^\circ$ باشد حاصل عبارت $D = tg\alpha(\cos\alpha + tg\alpha)$ را بدست آورید

جواب: ۱/۷۶۶۰

۱۹۵۰- اگر $\sin\alpha + \cos\alpha = p$ باشد حاصل عبارت $E = \sin^۴\alpha + \cos^۴\alpha$ را بدست آورید.

جواب: $E = p^۲ - ۰/۵p^۴ + ۰/۵$

۱۹۵۱- اگر $\sin\alpha + \cos\alpha = p$ باشد $\sin\alpha - \cos\alpha$ چقدر است.

جواب: $\pm\sqrt{۲ - p^۲}$

۱۹۵۲- اگر $\sin\alpha + \cos\alpha = p$ باشد $\sin^۳\alpha + \cos^۳\alpha$ چقدر است.

جواب: $۰/۵p(۳ - p^۲)$

۱۹۵۳- اگر $tg\alpha+cotg\alpha=m$ باشد $tg^2\alpha+cotg^2\alpha$ چقدر است.

جواب: m^2-2

۱۹۵۴- اگر $tg\alpha+cotg\alpha=m$ باشد $tg\alpha-cotg\alpha$ چقدر است.

جواب: $\pm\sqrt{m^2-4}$

۱۹۵۵- اگر $tg\alpha+cotg\alpha=m$ باشد $tg^3\alpha+cotg^3\alpha$ چقدر است.

جواب: $m(m^2-3)$

۱۹۵۶- اگر $\sin x\cos x=0/4$ باشد عبارت $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ چقدر است.

جواب: ۳

۱۹۵۷- اگر $tg\,y+cotg\,y=5$ باشد عبارت $tg^2y+\sec y\,cosec\,y+cotg^2y$ چقدر است.

جواب: ۲۸

۱۹۵۸- اگر $tg(\alpha+\beta)=4tg\beta$ باشد ثابت کنید $5\sin\alpha=3\sin(\alpha+2\beta)$

۱۹۵۹- اگر $a\neq b$ و $ab>0$ باشد ثابت کنید هیچگاه $\cos\alpha=\frac{a^2+b^2}{2ab}$ نمیشود

حل: $$\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{a^2+b^2-2ab+2ab}{2ab}=\frac{(a-b)^2}{2ab}+1>1$$

چون $\cos\alpha$ حداکثر مساوی یك میشود و کسر بالا بزرگتر از یك است پس نمیتواند مساوی $\cos\alpha$ شود

۱۹۶۰- معادله $\sin^2x^2+\sin^2 2x^2=\sin^2 3x^2+\sin^2 4x^2$ را حل کنید:

راهنمائی: اگر جملات دو طرف تساوی را بر حسب cos دو برابر قوس نوشته و آنها را بصورت حاصل ضرب در آوریم نتیجه میشود:

$2\cos x^2\sin 2x^2\sin 5x^2=0$ که حل آن آسانست

$$x=\pm\sqrt{\frac{K\pi}{5}}\ \text{و}\ \pm\sqrt{\frac{(2K+1)\pi}{2}}\ \text{و}\ \pm\sqrt{\frac{K\pi}{2}}$$

۱۹۶۱- اگر $tg\frac{\beta}{2}=4tg\frac{\alpha}{2}$ باشد ثابت کنید $tg\frac{\beta-\alpha}{2}=\frac{3\sin\alpha}{5-3\cos\alpha}$

۱۹۶۲ـ اگر $2\beta = \alpha + \gamma$ و $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$ باشد ثابت کنید رابطه زیر برقرار است

$$\sin^2\alpha = \sin\beta(\sin\gamma + \sin\beta)$$

۱۹۶۳ـ اگر $\alpha = \beta+\gamma$ باشد درستی رابطهٔ زیر را تحقیق کنید

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

۱۹۶۴ـ اگر $A+B+C+D = 180^\circ$ باشد درستی تساوی زیر را تحقیق کنید

$$\cot g A + \cot g B + \cot g C + \cot g D = \frac{\sin(A+B)\sin(A+C)\sin(A+D)}{\sin A \sin B \sin C \sin D}$$

تذکر: مسائل زیر از کتابی است که استاد محترم جناب آقای غلامرضا بهنیا ترجمه شده است میباشد.

۱۹۶۵ـ هرگاه A و B دو زاویه حاده مثبت باشند و داشته باشیم

$3\sin^2 A + 2\sin^2 B = 1$ و $3\sin 2A - 2\sin 2B = 0$ ثابت کنید: $A + 2B = 90^\circ$ است

۱۹۶۶ـ بفرض $a > 1$ و $\dfrac{1+2a\cos\beta+a^2}{a^2-1} = \dfrac{a^2-1}{1+2a\cos\alpha+a^2}$ ثابت کنید

$$tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2} = \pm\frac{1+a}{1-a}$$

۱۹۶۷ـ بفرض آنکه $x+y+Z = \dfrac{K\pi}{2}$ باشد بازاء چه مقادیر صحیح K عبارت زیر به x و y و z بستگی نخواهد داشت.

$$tg x\, tg y + tg y\, tg z + tg z\, tg x$$

۱۹۶۸ـ بفرض آن که $m\sin(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-\beta)$ باشد ثابت کنید عبارت زیر به α و β بستگی ندارد:

$$y = \frac{1}{1-m\sin 2\alpha} + \frac{1}{1-m\sin 2\beta}$$

۱۹۶۹ـ اگر رابطه زیر برقرار باشد

$$\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos(x+a)}{b} = \frac{\cos(x+2\alpha)}{c} = \frac{\cos(x+3\alpha)}{d}$$

ثابت کنید $(a+c)c = (b+d)b$ میباشد

۱۹۷۰ـ بفرض آن که $\cos x \neq 0$ و $\cos z = \cos x \cos y$ باشد ثابت کنید.

$$tg\frac{z+x}{2}\,tg\frac{z-x}{2} = tg^2\frac{y}{2}$$

۱۹۷۱ـ بفرض آن‌که $|A|<1$ و $\sin\alpha = A\sin(\alpha+\beta)$ باشد ثابت کنید :

$tg(\alpha+\beta) = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta - A}$ میباشد

۱۹۷۲ـ بفرض آنکه $tg x + tg y + tg Z = tg x\, tg y\, tg Z$ باشد ثابت کنید .

$x+y+Z = k\pi$ که در آن $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

۱۹۷۳ـ بفرض آن‌که $\dfrac{\cos\alpha}{a} = \dfrac{\sin\alpha}{b}$ باشد ثابت کنید عبارت $A = a\cos 2\alpha + b\sin 2\alpha$

به α و β بستگی ندارد .

۱۹۷۴ـ بفرض آن‌که $3\sin\beta = \sin(2\alpha+\beta)$ باشد ثابت کنید .

$tg(\alpha+\beta) = 2tg\alpha$ میباشد

۱۹۷۵ـ ثابت کنید بازاء جمیع مقادیر α تساوی زیر برقرار نیست .

$\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha = 1$

۱۹۷۶ـ اگر $tg\alpha$ و $tg\beta$ ریشه‌های معادله $ax^2+bx+c=0$ باشد عبارت زیر را بر حسب a و b و c محاسبه کنید.

$y = a\sin^2(\alpha+\beta) + b\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) + c\cos^2(\alpha+\beta)$

۱۹۷۷ـ بفرض آنکه $a>0$ و $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ و $tg^2\alpha - a\,tg\alpha + 1 = 0$ باشد $\cos 2\alpha$ را حساب کنید.

۱۹۷۸ـ بفرض آنکه $x \neq (2n+1)\pi$ و $\dfrac{\cos x - \cos\alpha}{\cos x - \cos\beta} = \dfrac{\sin^2\alpha\cos\beta}{\sin^2\beta\cos\alpha}$ باشد ثابت کنید:

$tg\dfrac{x}{2} = \pm tg\dfrac{\alpha}{2}\, tg\dfrac{\beta}{2}$

۱۹۷۹ـ اگر $a+b+c = 2p$ باشد ثابت کنید:

$1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a\cos b\cos c =$

$4\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)$

۱۹۸۰ـ بفرض آن‌که $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ و n عددی صحیح باشد ثابت کنید.

$\sin 2n\alpha + \sin 2n\beta + \sin 2n\gamma = (-1)^{n+1}\, 4\sin n\alpha\sin n\beta\sin n\gamma$

۱۹۸۱ـ ثابت کنید: $\cos 24 + \cos 48 - \cos 12 = \dfrac{1}{2}$

۱۹۸۱ـ ثابت کنید: $\sin 47 + \sin 61 - \sin 11 - \sin 25 = \cos 7$

۱۹۸۲ـ حاصل عبارت $\frac{1 - 4\sin 10 \sin 70}{2\sin 10}$ را بدون استفاده از جدول بدست آورید.

۱۹۸۳ـ بفرض آنکه $tg\beta = \frac{n \sin\alpha \cos\alpha}{1 - n\sin^2\alpha}$ باشد ثابت کنید:

$$tg(\alpha - \beta) = (1 - n)tg\alpha$$

۱۹۸۴ـ بفرض آنکه $tgx = \frac{\sin\alpha \sin\theta}{\cos\theta - \cos\alpha}$ باشد ثابت کنید:

$$tg\theta = \frac{\sin\alpha \sin x}{\cos x \pm \cos\alpha}$$

۱۹۸۵ـ بفرض آنکه $\sqrt{2}\cos A = \cos B + \cos^3 B$ و $\sqrt{2}\sin A = \sin B - \sin^3 B$

باشد ثابت کنید: $\pm\sin(A - B) = \cos 2B = \frac{1}{2}$

۱۹۸۶ـ اگر θ و x ریشه‌های معادله $\sin\theta + \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \cos\theta)$

باشد ثابت کنید. $\sin 2\theta + \sin 2x = 0$ است.

۱۹۸۷ـ از تساوی $\frac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta} + \frac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta} = 1$ نتیجه بگیرید:

$$\frac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha} = 1$$

۱۹۸۸ـ بفرض اینکه $\cos(A + B)\sin(C + D) = \cos(A - B)\sin(C - D)$
باشد ثابت کنید:

$$cotg A \, cotg B \, cotg C = cotg D$$

۱۹۸۹ـ بفرض آنکه $A + B + C = \pi$ و $\cos A = \cos B \cos C$ باشد ثابت کنید:

$cotg B \, cotg C = \frac{1}{2}$ است.

۱۹۹۰ـ بفرض آنکه $\frac{tg\gamma}{tg\beta} = \frac{tg(\alpha + \beta - \gamma)}{tg(\alpha - \beta + \gamma)}$ باشد ثابت کنید:

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 0$$

۱۹۹۱- بفرض آنکه $\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\beta\cos\gamma}+tg\beta tg\gamma$ باشد ثابت کنید:

$$\frac{1}{\cos\gamma}=\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}+tg\alpha tg\beta$$ و $$\frac{1}{\cos\beta}=\frac{1}{\cos\gamma\cos\alpha}+tg\gamma tg\alpha$$

۱۹۹۲- بفرض آنکه $\cos(\theta+x)=\frac{\sin^2 x\cos\theta-\cos^2 x\sin\theta}{\cos x\, tg\beta}=$

$\frac{\sin^2\theta\cos x-\cos^2\theta\sin x}{\cos\theta\, tg\alpha}=$ باشد ثابت کنید $=\frac{\sin^2\beta\cos\alpha-\cos^2\beta\sin\alpha}{\cos\beta\, tg\, x}$

$$=\frac{\sin^2\alpha\cos\beta-\cos^2\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\, tg\theta}$$

۱۹۹۳- بفرض آنکه $\cos(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C$ باشد ثابت‌کنید.

$$8\sin(A+B)\sin(B+C)\sin(C+A)+\sin 2A\sin 2B\sin 2C=0$$

حاصل هر یك ازعبارات‌زیررا بدست آورید:

جواب:		صورت
۱۹۹۴-	$\frac{1}{3}$	$\cos(\arccos\frac{1}{3})$
۱۹۹۵-	$0/45$	$\cos(\arccos 0/45)$
۱۹۹۶-	$\frac{2\pi}{3}$	$\arccos(\cos\frac{2\pi}{3})$
۱۹۹۷-	$\frac{\pi}{2}$	$\arccos[\cos(-\frac{3\pi}{2})]$
۱۹۹۸-	$\frac{2}{9}$	$\sin(\arcsin\frac{2}{9})$
۱۹۹۹-	$0/8$	$\cos(\arcsin 0/6)$
۲۰۰۰-	$\frac{21}{20}$	$tg(\arcsin\frac{21}{29})$

۲۰۰۱-	$\frac{8}{15}$	$cotg\left(\arcsin \frac{15}{17}\right)$
۲۰۰۲-	$0/96$	$\sin[\arccos(-0/28)]$
۲۰۰۳-	$2/4$	$tg\left(\arccos \frac{5}{13}\right)$
۲۰۰۴-	$4 \div 3$	$cotg(\arccos 0/8)$
۲۰۰۵-	$\frac{-15}{17}$	$\sin\left[arctg\left(-1\frac{7}{8}\right)\right]$
۲۰۰۶-	$40 \div 41$	$\cos(arctg\, 0/225)$
۲۰۰۷-	$2 \div 7$	$tg(arccotg\, 3/5)$
۲۰۰۸-	$\frac{60}{61}$	$\sin\left(arccotg \frac{11}{60}\right)$
۲۰۰۹-	$-21 \div 29$	$\cos[arctg(-1/05)]$
۲۰۱۰-	$\frac{-\pi}{8}$	$arctg\left(tg \frac{7\pi}{8}\right)$
۲۰۱۱-	$\frac{5\pi}{14}$	$\arccos\left(\sin \frac{15\pi}{7}\right)$
۲۰۱۲-	$\frac{-7}{25}$	$\cos\left(2\arcsin \frac{4}{5}\right)$
۲۰۱۳-	$\frac{1}{5}$	$tg\left(\frac{1}{2}\arcsin \frac{5}{13}\right)$
۲۰۱۴-		$tg41^\circ tg42^\circ tg43^\circ tg44^\circ \cdots tg49^\circ$
۲۰۱۵-		$cotg5^\circ cotg15^\circ cotg25^\circ \cdots cotg75^\circ cotg85^\circ$

درستی اتحادهای زیر را تحقیق کنید

۲۰۱۶- $4\sin^3 x \cos 3x + 4\sin 3x \cos^3 x = 3\sin 4x$

۲۰۱۷- $\cos^3 x \cos 3x + \sin^3 x \sin 3x = \cos^3 2x$

۲۰۱۸- $\frac{\cos 3x + \sin 3x}{\cos x - \sin x} = 1 + 2\sin 2x$

-۲۰۱۹ $$\frac{\sin 3x+\sin^3 x}{\cos^3 x-\cos 3x}=\operatorname{cotg} x$$

-۲۰۲۰ $$\frac{\cos^3 x-\cos 3x}{\cos x}+\frac{\sin^3 x+\sin 3x}{\sin x}=3$$

-۲۰۲۱ $$\frac{\operatorname{cotg} x\operatorname{cotg} 2x}{\operatorname{cotg} x-\operatorname{cotg} 2x}-\frac{\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} 2x}=\operatorname{cotg} 2x$$

-۲۰۲۲ $$\operatorname{tg} 2x-\sec x\sin x=\operatorname{tg} x\sec 2x$$

-۲۰۲۳ $$\operatorname{tg} 2x+\cos x\operatorname{cosec} x=\operatorname{cotg} x\sec 2x$$

-۲۰۲۴ $$\frac{1}{\operatorname{tg} 3x+\operatorname{tg} x}-\frac{1}{\operatorname{cotg} 3x+\operatorname{cotg} x}=\operatorname{cotg} 4x$$

-۲۰۲۵ $$\cos 3x+\sin 2x-\sin 4x=\cos 2x(1-2\sin x)$$

-۲۰۲۶ $$\cos 3x\sin 2x-\cos 4x\sin x=\sin x(2\cos^2 x-1)$$

-۲۰۲۷ $$\cos 5x\cos 2x-\cos 4x\cos 3x=-2\sin^2 x\cos x$$

-۲۰۲۸ $$\sin 4x\cos x-\sin 3x\cos 2x=\sin x(1-2\sin^2 x)$$

-۲۰۲۹ $$\cos x+\cos y+\cos z+\cos(x+y+z)=4\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+z}{2}\cos\frac{y+z}{2}$$

-۲۰۳۰ $$\sin\alpha\cos(\beta+\gamma)\sin\beta\cos(\alpha+\gamma)=\cos\gamma\sin(\alpha-\beta)$$

-۲۰۳۱ $$\cos\alpha\cos(\beta+\gamma)-\cos\beta\cos(\alpha+\gamma)=\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)$$

-۲۰۳۲ $$(\cos x-\sin x)(\cos 2x-\sin 2x)=\cos x-\sin 3x$$

-۲۰۳۳ $$\sin 2x+\cos 2x=(1-\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg} x)\cos^2 x$$

-۲۰۳۴ $$\sin 4x=4\operatorname{tg} x(1-\operatorname{tg}^2 x)\cos^4 x$$

-۲۰۳۵ $$\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)+\cos(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)$$
$$\cos(\gamma+\theta)\sin(\gamma-\theta)+\cos(\alpha+\theta)\sin(\theta-\alpha)=0$$

عبارات زیر را قابل محاسبه لگاریتم نمائید

-۲۰۳۶ $$1-\sin\left(\frac{\alpha}{2}-3\pi\right)-\cos^2\frac{\alpha}{4}+\sin^2\frac{\alpha}{4}$$

جواب: $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{4}\sin\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi}{4}\right)$

-۲۰۳۷ ح : $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos(2\alpha-2\pi)\cdot \operatorname{cotg}\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)}+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

-۲۰۳۸ $\frac{\cos^2\left(\pi+\frac{\alpha}{4}\right)\left[1+tg^2\left(\frac{2\alpha}{4}-\frac{2\pi}{2}\right)\right]}{\operatorname{cosec}\left(\frac{9}{2}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)\left[tg^2\left(\frac{5\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)-tg^2\left(\frac{3}{4}\alpha-\frac{7\pi}{2}\right)\right]}$

جواب: $\frac{1}{8}$

-۲۰۳۹ $\frac{\sin\left(2\pi+\frac{\alpha}{4}\right)\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{8}-\cos\left(2\pi+\frac{\alpha}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{4}-2\pi\right)\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{8}+\cos\left(\frac{7\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)}$

جواب: $-tg\frac{\alpha}{8}$

-۲۰۴۰ $\cos\alpha(1+\sec\alpha+tg\alpha)(1-\sec\alpha+tg\alpha)$

جواب: $2\sin\alpha$

۲۰۴۱ $\sin^2\alpha(1+\operatorname{cosec}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha)(1-\operatorname{cosec}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha)$

جواب: $\sin 2\alpha$

-۲۰۴۲ $\frac{1-\cos(8\alpha-3\pi)}{tg2\alpha-\operatorname{cotg}2\alpha}-\frac{1}{2}\sin 8\alpha$

-۲۰۴۳ $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}$

جواب: $\frac{1}{4}\sin\frac{3}{2}\alpha$

-۲۰۴۴ $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}+2\beta\right)-\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}-2\beta\right)$

جواب: $-\sin\alpha \times \sin 4\beta$.

۲۰۴۵- $\dfrac{\sec 2x+\sin 2x\, tg\, 2x}{1+\cos 4x}+\dfrac{1}{4\sin^2(45^\circ-x)\cot g(45^\circ-x)}$

جواب: $\sec^3 2x$

۲۰۴۶- $\cos^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1$ $\qquad -\sin 2\alpha\cdot\sin 4\beta$

۲۰۴۷- $\sin^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1$

جواب: $-\cos 2\alpha\cos 4\beta$

۲۰۴۸- $(\cos\alpha-\cos 2\beta)^2+(\sin\alpha+\sin 2\beta)^2$.

جواب: $4\sin^2\dfrac{\alpha+2\beta}{2}$.

۲۰۴۹- ج: $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}tg\alpha$. $\qquad \dfrac{(1-\cos 2\alpha)\cos(45^\circ+2\alpha)}{2\sin^2 2\alpha-\sin 4\alpha}$

۲۰۵۰- $\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{8}-\dfrac{\alpha}{4}\right)-\cos^2\left(\dfrac{11\pi}{8}+\dfrac{\alpha}{4}\right)$.

جواب: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\dfrac{1}{2}$

۲۰۵۱- ج: $2tg\alpha$ $\qquad \cot g\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)+\cot g\left(135^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

۲۰۵۲- $\dfrac{1+\cot g 2\alpha\cot g\alpha}{tg\alpha+\cot g\alpha}$ $\qquad 0/5\cot g\alpha$

۲۰۵۳- جواب: $tg\dfrac{m+n}{2}\alpha$ $\qquad \dfrac{\cos m\alpha-\cos n\alpha}{\sin n\alpha-\sin m\alpha}$

۲۰۵۴- $\sin^2(\alpha-270^\circ)(1-tg^2\alpha)tg(45^\circ+\alpha)\sec^2(45^\circ-\alpha)$

جواب: 2

۲۰۵۵- جواب: $0/5\sec^2\alpha$ $\qquad 1-\dfrac{1}{1-\cos\acute{e}c(2\alpha+270^\circ)}$

۲۰۵۶- جواب: $\cot g\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ $\qquad \dfrac{\sec\alpha+\sec\beta}{tg\alpha\sec\beta+tg\beta\sec\alpha}$

۲۰۵۷- $\dfrac{tg(۲۷۰^\circ-\alpha)+tg^{۲}(۹۰^\circ+\alpha)}{cotg^{۲}(\frac{۵}{۲}\pi-\alpha)+cotg(۲۷۰^\circ+\alpha)}$

جواب: $cotg^{۲}\alpha$

۲۰۵۸- $۱-\dfrac{۱}{۱-cos\acute{e}c(۹۰^\circ+\alpha)}$ $\qquad \frac{۱}{۲}cos\acute{e}c^{۲}\frac{\alpha}{۲}$

۲۰۵۹- $\dfrac{۱-tg(\pi-۲\alpha)\,tg\alpha}{tg(۲۷۰^\circ-\alpha)+tg\alpha}$ $\qquad \dfrac{ta^{۳}}{۲}$

۲۰۶۰- جواب: ۱ $\qquad \dfrac{cotg^{۲}(\alpha+۹۰^\circ)cos^{۲}(\alpha-۹۰^\circ)}{cotg^{۲}(\alpha-۹۰^\circ)-cos^{۲}(\alpha+۹۰^\circ)}$

۲۰۶۱- $\dfrac{cotg(۲۷۰^\circ-\alpha)}{۱-tg^{۲}(\alpha-۱۸۰^\circ)}\times\dfrac{cotg^{۲}(۳۶۰^\circ-\alpha)-۱}{cotg(۱۸۰^\circ+\alpha)}$ $\qquad$ ۱

جواب: ۱

۲۰۶۲- جواب: ۱ $\qquad \dfrac{cos^{۲}(\alpha-۲۷۰^\circ)}{cos\acute{e}c^{۲}(\alpha+۹۰^\circ)-۱}+\dfrac{sin^{۲}(\alpha+۲۷۰^\circ)}{s\acute{e}c^{۲}(\alpha-۹۰^\circ)-۱}$

۲۰۶۳ $\dfrac{[۱+tg^{۲}(\alpha-۹۰^\circ)][cos\acute{e}c^{۲}(\alpha-۲۷۰^\circ)-۱]}{[۱+cotg^{۲}(\alpha+۲۷۰^\circ)]s\acute{e}c^{۲}(\alpha+۹۰^\circ)}$

جواب: $sin^{۲}\alpha$

۲۰۶۴- جواب: $\qquad \dfrac{sin^{۲}(۹۰+\alpha)-cos^{۲}(\alpha-۹۰^\circ)}{tg^{۲}(۹۰^\circ+\alpha)-cotg^{۲}(\alpha-۹۰^\circ)}$ $\qquad \frac{۱}{۴}sin^{۲}۲\alpha$

۲۰۶۵- $\dfrac{tg\frac{\alpha}{۲}-cotg\frac{\alpha}{۲}}{tg\frac{\alpha}{۲}+cotg\frac{\alpha}{۲}}$ $\qquad -cos\alpha$

۲۰۶۶- $\dfrac{cos^{۲}\alpha-cotg^{۲}\alpha+۱}{sin^{۲}\alpha+tg^{۲}\alpha-۱}$ $\qquad cotg^{۲}\alpha$

۲۰۶۷- $\dfrac{cos^{۲}(۲\alpha-۹۰^\circ)+cotg^{۲}(۹۰^\circ+۲\alpha)+۱}{sin^{۲}(۲\alpha-۲۷۰^\circ)+tg^{۲}(۲۷۰^\circ+۲\alpha)+۱}$ $\qquad tg$

-۲۰۶۸ $\dfrac{\sin^2(4\alpha-90^\circ)}{\operatorname{cotg}(270^\circ-2\alpha)+\operatorname{tg}(270^\circ+2\alpha)}$

جواب: $-\frac{1}{4}\sin 8\alpha$

$$\frac{1}{2\operatorname{tg}(270^\circ-\alpha)\cos^2(\alpha-90^\circ)}+\frac{1-\cos(4\alpha-\pi)}{\sin^2 2\alpha}-$$
$$-\frac{1}{2\operatorname{cotg}(\alpha+270^\circ)\sin^2(\alpha-270^\circ)}$$

جواب: $2\operatorname{cosec}^2 2\alpha$

-۲۰۷۰ $\dfrac{\cos^2\alpha+2\sin^2(\alpha-\pi)}{\cos^2(\alpha-4\pi)}+\dfrac{\cos^2\alpha+4\sin\alpha+\sin^2(\alpha+\pi)}{\cos\alpha(4\sin\alpha+1)}$

جواب : $2\sec^2\alpha$

-۲۰۷۱ $\sin(2\alpha-270^\circ)+\cos(2\alpha-480^\circ)+\cos(120^\circ+2\alpha)$

جواب :

-۲۰۷۲ $\dfrac{4\sin^2(\alpha-5\pi)-\sin^2(2\alpha+\pi)}{\cos^2(2\alpha-270^\circ)-4+4\sin^2\alpha}$

جواب : $-\operatorname{tg}^4\alpha$

-۲۰۷۳ $\sin^2\left(\frac{9\pi}{8}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{17\pi}{8}-\alpha\right)$ $\qquad \dfrac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}$

-۲۰۷۴ $\operatorname{cotg}(4\alpha-\pi)[\cos^4(225^\circ-2\alpha)-\sin^4(405^\circ-\alpha)]$

جواب : $\sin 4\alpha$

-۲۰۷۵ $\dfrac{\sin^2(225^\circ-2\alpha)-\cos^2(225^\circ-2\alpha)}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(2\pi-\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right]\sin(\alpha-\pi)}$

جواب : $4\cos 2\alpha$

-۲۰۷۶ $\dfrac{\operatorname{tg}(225^\circ-\alpha)(1+\sin 2\alpha)}{\cos(450^\circ-2\alpha)}$ جواب: $\operatorname{cotg} 2\alpha$

-۲۰۷۷ $\dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 4\alpha-\operatorname{tg} 2\alpha}$ جواب: $\cos 4\alpha$

-۲۰۷۸ جواب 2

$$\frac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha}+\frac{\cos(6\alpha-\pi)}{\cos 2\alpha}$$

-۲۰۷۹ جواب $\operatorname{cotg} 2\alpha$

$$\frac{1+\cos(4\alpha-2\pi)+\cos(4\alpha-90^\circ)}{1+\cos(4\alpha+\pi)+\cos(4\alpha+270^\circ)}$$

-۲۰۸۰

$$\frac{\sin(2\alpha+2\pi)+2\sin(4\alpha-\pi)+\sin(6\alpha+4\pi)}{\cos(6\pi-2\alpha)+2\cos(4\alpha-\pi)+\cos(6\alpha-4\pi)}$$

جواب $\operatorname{tg} 4\alpha$

-۲۰۸۱-جواب : $\sin^2\alpha$

$$\frac{4\sin(450^\circ+\alpha)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)-\operatorname{cotg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}$$

-۲۰۸۲

$$\frac{\sin(2\alpha+\beta)+\sin(2\alpha-\beta)-\cos(270^\circ-2\alpha)}{\cos(2\alpha+\beta)+\cos(2\alpha-\beta)-\sin(270^\circ+2\alpha)}$$

جواب: $\operatorname{tg} 2\alpha$

-۲۰۸۳

$$\frac{\cos 3\alpha+\cos 4\alpha+\cos 5\alpha}{\sin 3\alpha+\sin 4\alpha+\sin 5\alpha}$$

جواب: $\operatorname{cotg} 4\alpha$

-۲۰۸۴

$$\frac{\cos^2\left(\frac{5\pi}{2}-2\alpha\right)+4\cos^2\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)-4}{1+\cos(4\alpha-\pi)-8\sin^2(5\pi-\alpha)}$$

جواب : $0/5\operatorname{cotg}^4\alpha$

-۲۰۸۵ $\sin^2 22/5^\circ+\cos^2 67/5^\circ+\sin^2 112/5^\circ+\cos^2 157/5^\circ$

جواب 2

-۲۰۸۶ جواب 4 $\quad \operatorname{tg} 435^\circ+\operatorname{tg} 375^\circ$

-۲۰۸۷ جواب $2\sqrt{3}$ $\quad \operatorname{tg} 255^\circ-\operatorname{tg} 195^\circ$

-۲۰۸۸ جواب $\frac{7}{25}$ $\quad \sin\left[\frac{3\pi}{2}-2\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right]$

-۲۰۸۹ جواب $2\sqrt{3}$ $\quad \operatorname{cotg}\frac{13\pi}{12}-\operatorname{cotg}\frac{5\pi}{12}$

چند قاعده برای حل معادلات مثلثاتی
در حالات خاص
و مسائل انتخابی از امتحانات دبیرستانهای ایران

قاعده۱	(حالت خاص)ـ هرگاه سینوس زاویه‌ای مساوی صفر باشد آن زاویه برابر $k\pi$ می‌باشد: $\sin x = 0 \Longrightarrow x = k\pi$
قاعده۲	(حالت خاص)ـ هرگاه سینوس زاویه‌ای برابر ۱+ باشد آن زاویه برابر $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ می‌باشد: $\sin x = 1 \Longrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$
قاعده۳	(حالت خاص)ـ هرگاه سینوس زاویه‌ای برابر ۱− باشد آن زاویه برابر $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ می‌باشد: $\sin x = -1 \Longrightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$
قاعده۴	(حالت خاص)ـ اگر کسینوس زاویه‌ای مساوی صفر باشد آن زاویه برابر است با $k\pi$ باضافه $\frac{\pi}{2}$

$$\cos x = 0 \Longrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

قاعده۵	(حالت خاص) ـ اگر کسینوس زاویه‌ای مساوی یك باشد آن زاویه برابر است با: $2k\pi$ $\cos x = 1 \Longrightarrow x = 2k\pi$
قاعده۶	(حالت خاص)ـ هرگاه کسینوس زاویه‌ای مساوی -1 باشد آن زاویه برابر است با : $2k\pi+\pi$ $\cos x = -1 \Longrightarrow x = 2k\pi+\pi$
قاعده ۱ و ۸ ۹ و ۱۰	$\cos^2 x = \cos^2\alpha \Longrightarrow x = k\pi \pm \alpha$ $\sin^2 x = \sin^2\alpha \Longrightarrow x = k\pi \pm \alpha$ $tg^2 x = tg^2\alpha \Longrightarrow x = k\pi \pm \alpha$ $cotg^2 x = cotg^2\alpha \Longrightarrow x = k\pi \pm \alpha$ مانند مثالهای زیر : $\cos^2 x = \frac{3}{4} = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \cos^2\frac{\pi}{6} \Longrightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ $\sin^2 x = \frac{3}{4} = \sin^2\frac{\pi}{3} \Longrightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ $tg^2 x = 1 = tg^2\frac{\pi}{4} \Longrightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ $cotg^2 x = 3 = cotg^2\frac{\pi}{6} \Longrightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

معادلات زیر را حل کرده وجوابهای کلی آنها را بدست آورید:

-۲۰۹۱ $\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6})\cos(x+15^\circ)=0$

حل : $\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6})=0 \Longrightarrow \frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}=K\pi \Longrightarrow x=2K\pi-\frac{\pi}{3}$

$\cos(x+15^\circ)=0 \Longrightarrow x+15^\circ=K\pi+90^\circ \Longrightarrow x=K\pi+75^\circ$

۲۰۹۲- $\sin^2 2x - \sin 2x = 0$

حل: $\sin 2x(\sin 2x - 1) = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0$

$2x = K\pi \Rightarrow x = 90^\circ K$ و $\sin 2x - 1 = 0 \Rightarrow \sin 2x = 1$

$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

۲۰۹۳- $2\cos^2 x - \cos 2x - 2 = 0$

$2\cos^2 x - (2\cos^2 x - 1) - 2 = 0 \Rightarrow \cos^2 x = 1 = \cos^2 0^\circ \Rightarrow x = k\pi$

۲۰۹۴- $2\cos^2 x - 1 = 0$

حل: $\cos^2 x = \frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \cos^2\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

۲۰۹۵- $4\sin^3(x + 15^\circ) - 3\sin(x + 15^\circ) = 0$

حل: $\sin(x + 15^\circ)[4\sin^2(x + 15^\circ) - 3] = 0$

$\sin(x + 15^\circ) = 0 \Rightarrow x + 15^\circ = k\pi \Rightarrow x = k\pi - 15^\circ$

$4\sin^2(x + 15^\circ) - 3 = 0 \Rightarrow \sin^2(x + 15^\circ) = \frac{3}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$\sin^2(x + 15^\circ) = \sin^2 60^\circ \Rightarrow x + 15^\circ = k\pi \pm 60^\circ$

$x = k\pi + 45^\circ$ و $k\pi - 75^\circ$

۲۰۹۶- $\cos^2(x + 30^\circ) - \cos(x + 30^\circ) = 0$

حل: $\cos(x + 30^\circ)[\cos(x + 30^\circ) - 1] = 0$

$\cos(x + 30^\circ) = 0 \Rightarrow x + 30^\circ = k\pi + 90^\circ \Rightarrow x = k\pi + 60^\circ$

$\cos(x + 30^\circ) - 1 = 0 \Rightarrow \cos(x + 30^\circ) = 1 \Rightarrow x + 30^\circ = 2k\pi$

$x = 2k\pi - 30^\circ$

۲۰۹۷- $\sin^2(60^\circ + 2x) + \cos(30^\circ - 2x) - 2 = 0$

جواب: $x = K\pi + 15^\circ$

۲۰۹۸- $\sin^3 2x - \sin 2x = 0$

جواب: $x = \frac{k\pi}{2}$, $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4}$

۲۰۹۹- $2\cos^3 2x - \cos 2x = 0$

جواب: $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8}$

-۲۱۰۰ $\cos^{۲}(x+۴۵^\circ)-\cos(x+۴۵^\circ)=۲$

جواب $x=۲k\pi-۴۵^\circ$

-۲۱۰۱ $۲\sin^{۲}x+\cos x-۱=۰$

جواب: $x=۲k\pi$ و $۲k\pi\pm ۱۲۰^\circ$

قاعده ۱۳ و ۱۴

دوفرمول زیررا بخاطر بسپارید

$$\sin x+\cos x=\sqrt{۲}\sin(x+۴۵^\circ)=\sqrt{۲}\cos(x-۴۵^\circ)$$

$$\sin x-\cos x=\sqrt{۲}\sin(x-۴۵^\circ)=-\sqrt{۲}\cos(x+۴۵^\circ)$$

معادلات زیر راحل کرده و جوابهای کلی آنهارا بدست آورید:

-۲۱۰۲ $\sin x-\cos x=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

حل: $\sqrt{۲}\sin(x-۴۵^\circ)=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

$\sin(x-۴۵^\circ)=\frac{۱}{۲}=\sin ۳۰^\circ \Rightarrow x=۲k\pi+۷۵^\circ$ و $۲k\pi+۱۹۵^\circ$

-۲۱۰۳ $\cos x-\sin x=\sqrt{۲}\cos ۲x$

حل: $\sqrt{۲}\cos(x+۴۵^\circ)=\sqrt{۲}\cos ۲x \Rightarrow \cos ۲x=\cos(x+۴۵^\circ)$

$x=۲k\pi+۴۵^\circ$ و $k\times ۱۲۰^\circ-۱۵^\circ$

-۲۱۰۴ $\sin ۲x+\cos ۲x=\sqrt{۲}\sin x$

حل: $\sqrt{۲}\sin(۲x+۴۵^\circ)=\sqrt{۲}\sin x \Rightarrow \sin(۲x+۴۵^\circ)=\sin x$

$x=۲k\pi-۴۵^\circ$ و $k\times ۱۲۰^\circ+۴۵^\circ$

-۲۱۰۵ $\sqrt{۲}\sin(x+۱۵^\circ)+\sqrt{۲}\sin(۷۵^\circ-x)=\sqrt{۳}$

حل: $\sqrt{۲}\sin(x+۱۵^\circ)+\sqrt{۲}\cos(x+۱۵^\circ)=\sqrt{۳}$

$۲\sin(x+۱۵^\circ+۴۵^\circ)=\sqrt{۳} \Rightarrow \sin(۶۰^\circ+x)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sin ۶۰^\circ$

$x=۲k\pi$ و $۲k\pi+۶۰^\circ$

-۲۱۰۶ $\sqrt{۲}\sin(x+۲۰^\circ)+\sqrt{۶}\cos(x+۲۰۰^\circ)=۲$

حل: $\sqrt{۲}\sin(x+۲۰^\circ)+\sqrt{۶}\cos(\pi+۲۰^\circ+x)=۲$

$\sqrt{۶}\sin(x+۲۰^\circ)-\sqrt{۶}\cos(x+۲۰^\circ)=۳$

$۲\sqrt{۳}\sin(x+۲۰^\circ-۴۵^\circ)=۳\Rightarrow\sin(x-۲۵^\circ)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sin ۶۰^\circ$

$x=۲K\pi+۸۵^\circ$ و $۲K\pi+۱۴۵^\circ$

۲۱۰۷- $\sin x+\sin x\cos x+\cos^2 x=۱$

حل: $\sin x(۱+\cos x)+\cos^2 x-۱=۰$

$(۱+\cos x)\sin x+(\cos x+۱)(\cos x-۱)=۰$

$(۱+\cos x)(\sin x+\cos x-۱)=۰\Rightarrow ۱+\cos x=۰\Rightarrow\cos x=-۱$

$x=۲K\pi+\pi$ و $\sin x+\cos x-۱=۰\Rightarrow\sin x+\cos x=۱$

$a^2+b^2\geq c^2\Rightarrow ۱+۱\geq ۱\Rightarrow ۲>۱$ پس معادله دارای جواب است

$\sqrt{۲}\sin(x+۴۵^\circ)=۱\Rightarrow\sin(x+۴۵^\circ)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin ۴۵^\circ$

$x=۲K\pi$ و $۲K\pi+۹۰^\circ$

۲۱۰۸- $\sin^3 x+\cos^3 x=۱$

حل: $\sin^3 x+\cos^3 x-۱=۰\Rightarrow\sin^3 x+\cos^3 x-\sin^2 x-\cos^2 x=۰$

$-\sin^2 x(۱-\sin x)-\cos^2 x(-\cos x+۱)=۰$

$-(۱-\cos^2 x)(۱-\sin x)-(۱-\sin^2 x)(۱-\cos x)=۰$

$-(۱-\cos x)(۱-\sin x)[(۱+\cos x)+(۱+\sin x)]=۰$

$-(۱-\cos x)(۱-\sin x)(\sin x+\cos x+۲)=۰$

$۱-\cos x=۰\Rightarrow\cos x=۱\Rightarrow x=۲K\pi$

$۱-\sin x=۰\Rightarrow\sin x=۱\Rightarrow x=۲K\pi+۹۰^\circ$

$\sin x+\cos x+۲=۰\Rightarrow\sin x+\cos x=-۲$

$a^2+b^2\geq c^2\Rightarrow ۱+۱\geq ۴\Rightarrow ۲<۴$

۱

مسائل انتخابی از امتحانات دبیرستانهای ایران

مسائل انتخابی امتحانات دبیرستان البرز

از دستگاه (۱) رابطه (۲) را نتیجه بگیرید.

۲۱۰۹- $$\left\{ \frac{a}{\sin t} + \frac{b}{\cos t} = C ,\ \frac{a'}{\sin t} + \frac{b'}{\cos t} = C' \right. \quad (1)$$

$$\frac{1}{(ab'-ba')^2} \qquad \frac{1}{(bc'-cb')^2} + \frac{1}{(a'c-c'a)^2} \quad (2)$$

۲۱۱۰- اگر رابطه $\sin(2x+y) = 5\sin y$ برقرار باشد ثابت کنید

$$2tg(x+y) \qquad 3tg\,x$$

۲۱۱۱- ثابت کنید درهر مثلث رابطه زیر برقرار است.

$$\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C = 3\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}$$

۲۱۱۲- اگر $a\sin^2\alpha - b\cos^2\alpha = a - b$ باشد عبارت زیر را برحسب a و b بدست آورید:

$$K = b\sin^2\alpha + a\cos^4\alpha$$

۲۱۱۳- دایره (C) و نقطه M روی آن مفروضند سه متحرک A و B و C در یک لحظه ودر یک جهت از نقطه M روی این دایره حرکت می‌کنند متحرک A و B و C در هر دقیقه ۱۰۰ گراد و B در هر دقیقه $\frac{\pi}{3}$ رادیان و C در هردقیقه 30° طی می‌کند پس از چه مدت برای اولین بار بهم می‌رسند.

۲۱۱۴- درصورتی که بدانیم $\cos(a-b) = 3\sin(a+b)$ ثابت کنید که

$$tg(60^\circ + a) = 2tg(45^\circ - b)$$

۲۱۱۵- درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید

$$Arccotg3 + Arccotg4 + Arccotg5 + Arccotg47 = Arccotg1$$

۲۱۱۶- بفرض اینکه کمانهای x و y حاده باشند وداشته باشیم

$$\cos x + tg y \sin x = 3 \text{ و } \sin x - tg y \cos x = 4$$

مقادیر $tg x$ و $tg y$ را محاسبه نمائید.

۲۱۱۷- ضرایب a و b را چنان حساب کنید که رابطه زیر بازاء جمیع مقادیر x برقرار باشد:

$$\frac{a\cos x}{\sin x - \cos x} + \frac{b\sin x}{\sin x + \cos x} = \frac{4(tg^2 x + 1)}{tg^2 x - 1}$$

۲۱۱۸- درمعادله زیر قوس α را طوری حساب کنید که جوابهای معادله یک تصاعد عددی تشکیل دهند:

$$x^4 + \frac{1}{3}x^2\sin\alpha + \frac{1}{300}\cos\frac{\pi}{3} = 0$$

۲۱۱۹ـ اگر $tg\gamma = 0{,}75$ و انتهای کمان γ در ربع سوم باشد حاصل عددی عبارت زیر را حساب کنید.

$$K = tg\,2400^\circ - \frac{\left[tg\left(\frac{7\pi}{2}-\gamma\right) - cotg\left(\frac{7\pi}{2}+\gamma\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2\left[\sin\left(\gamma+\frac{9\pi}{2}\right) - \cos\left(\gamma-\frac{9\pi}{2}\right)\right]}$$

۲۱۲۰ـ معادله زیر را حل نموده وجوابهای بین صفر و 2π راحساب کنید.

$$tg\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) + 2cotg\left(\frac{\pi}{4}-2x\right) = \sqrt{3}$$

۲۱۲۱ـ درستی اتحاد زیر را تحقیق کنید:

$$\left[\cos\left(\alpha-\frac{11\pi}{2}\right) + \cos(12\pi-\alpha)\right]\left[tg(\alpha+11\pi) - tg\left(\frac{13\pi}{2}+\alpha\right)\right] +$$

$$\frac{1}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)} + \frac{1}{\sin\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)} \Rightarrow 0$$

(هر سئوال ۵ نمره)

مسائل انتخابی از امتحانات گروه فرهنگی کارون

صحت اتحاد های زیر را تحقیق کنید:

۲۱۲۲ـ $tg(\arcsin 0) + cotg(\arccos 0) = \cos(\arcsin 1)$

۲۱۲۳ـ $\cos\left\{2\arccos\left[tg\left(2\arccos\frac{1}{x}\right)\right]\right\} = \sqrt{2-x^2}$

$\mathrm{arctg}\,1 + \mathrm{arctg}\,2 + \mathrm{arctg}\,3 = \pi$

۲۱۲۴ـ $\mathrm{arctg}\,m + \mathrm{arctg}\,n = \mathrm{arc}[illegible] \frac{mn}{\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}$

۲۱۲۵- $2\,\mathrm{Arctg}\,\frac{2}{3} - \mathrm{Arcsin}\,\frac{3}{5} = \mathrm{Arcsin}\,\frac{33}{65}$

۲۱۲۶- $\mathrm{arctg}(\mathrm{cotg}\,A) - \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,A) = k\pi + \frac{\pi}{2} - 2A$

۲۱۲۷- $4\cos 3a \sin^3 a + 4\sin 3a \cos^3 a = 3\sin^4 a$.

۲۱۲۸- $\sin a \sin 5a = \sin^2 3a - \sin^2 2a$

۲۱۲۹- $\left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{5\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{1}{8}$

معادلات زیر را حل کنید

۲۱۳۰- $(\sin^3 x\cos x - \cos^3 x\sin x)^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{64}$

۲۱۳۱- $\mathrm{tg}\,x + \frac{1}{\cos x} = \sqrt{3}$

۲۱۳۲- $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\sin x\right) = \mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\cos x\right)$

۲۱۳۳- $\sin 10x - \sin 3x = \sin 4x$

۲۱۳۴- $\sin(\pi\cos x) = \cos(\pi\sin x)$

۲۱۳۵- $\mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,2x = \mathrm{tg}\,3x$

۲۱۳۶- $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$

۲۱۳۷- $\sin x\sin 3x = \cos 2x$

۲۱۳۸- $\sin^3 x + \cos^4 x = \cos 4x$

۲۱۳۹- $\mathrm{tg}^{\frac{p}{q}}x + \mathrm{cotg}^{\frac{p}{q}}x = 2$

۲۱۴۰- $\sin^4 x + \sin^4\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{4}$

۲۱۴۱- $\sin\left(3x - \frac{\pi}{8}\right) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{8} - x\right)$

۲۱۴۲- $\sin^3 x - 2\sqrt{3}\cos^3 x + 3\sin x = 1 + 3\sin^2 x$

۲۱۴۳- $\cos 2x + \frac{\sqrt{3}+1}{2}(\sin x + \cos x) = 0$

۲۱۴۴- $2\cos a \sin^3 x - 2\sin a \cos^3 x = \sin(x - a)$

۲۱۴۵-

۲۱۴۶- $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}\sin x \cos x$

۲۱۴۷- $\mathrm{arctg}\frac{x+1}{x-1} + \mathrm{arctg}\frac{x-1}{x} = K\pi + \mathrm{arctg}(-7)$

از هریك از روابط زیر رابطه دیگر را بدست آورید:

۲۱۴۸- $tg^2 a = 1 + 2tg^2 b \Longrightarrow \cos 2a + \sin^2 b = 0$

۲۱۴۹- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta \Longrightarrow \sin^2(\alpha+\beta) = \sin^2\alpha + \sin^2\beta$

۲۱۵۰- ثابت‌کنید که اگر $\sin x = \sin^2 y$ باشد رابطه $1 - \cos 4y = 4(\cos 2x - \cos 2y)$ برقرار است.

۲۱۵۱- $\sin(y - x)\sin(y + x) = \sin^2 x \Longrightarrow \cos 2x = \cos^2 y$

۲۱۵۲- $tg\, x = \frac{1 - \cos y}{\sin y} \Longrightarrow tg\, 2x = tg\, y$

اگر A و B و C زوایای مثلثی باشند روابط زیر را ثابت‌کنید:

۲۱۵۳- $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

۲۱۵۴- $\sin A + \sin B - \sin C = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

۲۱۵۵- $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$

۲۱۵۶- $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = 1 - 4\sin A\sin B\sin C$

۲۱۵۷- $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$

۲۱۵۸- $\frac{\cos A}{\sin B\sin C} + \frac{\cos B}{\sin C\sin A} + \frac{\cos C}{\sin A\sin B} = 2$

-۲۱۵۹ $\frac{tg\,B+tg\,C}{\sin 2A}=\frac{tg\,C+tg\,A}{\sin 2B}=\frac{tg\,A+tg\,B}{\sin 2C}$

-۲۱۶۰

$$1+\frac{\sin C\cos B}{\sin A\sin^2 B}+\frac{\sin A\cos C}{\sin B\sin^2 C}+\frac{\sin B\cos A}{\sin C\sin^2 A}=(cotg\,A+cotg\,B+cotg\,C)^2$$

نوع مثلثی را تعیین کنید که در آن یکی از روابط زیر برقرار باشد

-۲۱۶۱ $\sin A\cos^2\frac{B}{2}=\sin\frac{B}{2}\cos^2\frac{A}{2}$

-۲۱۶۲ $\frac{tg\,B}{tg(C-B)}=\frac{\sin A}{\sin(C-B)}$

-۲۱۶۳ $\sin B=2\sin C\cos A$

-۲۱۶۴ $\frac{\sin B}{\cos C}=\sin A+\cos A\,cotg\,B$

-۲۱۶۵ $\sin C=\cos A+\cos B$

صحت اتحادهای زیر را تحقیق کنید:

-۲۱۶۶ $\cos\frac{\pi}{16}+\cos\frac{3\pi}{16}+\cos\frac{5\pi}{16}+\cos\frac{7\pi}{16}=\frac{1}{2\sin\frac{15\pi}{16}}$

-۲۱۶۷ $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}}=cotg\,\frac{\pi}{16}$

-۲۱۶۸ $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$

-۲۱۶۹ $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}\quad\frac{1}{2}$

-۲۱۷۰ $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}\quad\frac{1}{2}$

۲۱۷۱- $\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}=-\frac{1}{2}$

۲۱۷۲- $\sin 3\sin 33\sin 42\sin 57\sin 78\sin 87=\frac{1}{64}$

۲۱۷۳- $\sin 15\sin 25\sin 35\sin 85=\frac{1}{16}$

$\sin 5\sin 25\sin 35\sin 55\sin 65\sin 85=\frac{1}{16}$

۲۱۷۴- $\sin 10\cdot\sin 20\cdot\sin 30\cdot\sin 40\cdot\sin 50\cdot\sin 60\cdot\sin 70\cdot\sin 80=3\times 2^{-8}$

کنکور آریامهر

۲۱۷۵- $\sin 12\sin 48\sin 54\sin 72=\cos 12\cos 48\cos 54\cos 72$

۲۱۷۶- $tg 6\, tg 42\, tg 66\, tg 78=1$

عبارات زیر راقابل محاسبه بوسیله لگاریتم نمائید:

۲۱۷۷- $\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha+\cos^2 3\alpha+\cos^2 4\alpha-2$

۲۱۷۸- $\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha+\sin^2 3\alpha-\frac{3}{2}$

۲۱۷۹- $\sin 75+\sqrt{3}\cos 75+1$

۲۱۸۰- $\sin^2 x+\sqrt{3}\cos^2 x-\sin(x+\frac{\pi}{3})$

وبازاء $x=30$ مقدارفوق را تا $\frac{1}{10}$ تقریب حساب کنید.

۲۱۸۱- $y=\frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x+\cos x}$

مجموع‌های زیر راحساب کنید:

۲۱۸۲- $S=(1+\frac{1}{\cos x})(1+\frac{1}{\cos 2x})+(1+\frac{1}{\cos 4x})+\cdots$

$+(1+\frac{1}{\cos^n 2x})$

۲۱۸۳- $S=\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots\cdots+\sin nx$

۲۱۸۴ـ اولا ضرایب A و B را طوری تعیین کنید که رابطه زیر همواره برقرار باشد.

$$\frac{1}{\sin a} = A\,\mathrm{cotg}\frac{a}{2} + B\,\mathrm{cotg}\,a$$

ثانیا مجموع زیر را حساب کنید.

$$S = \frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\sin 2a} + \frac{1}{\sin 4a} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^n a}$$

۲۱۸۵ـ اولا ثابت کنید که $\frac{\sin 2a}{\sin a \sin 3a} = \mathrm{cotg}\,a - \mathrm{cotg}\,3a$ ثانیاً مجموع زیر را حساب کنید.

$$S = \frac{1}{\sin a \sin 3a} + \frac{1}{\sin 3a \sin 5a} + \cdots + \frac{1}{\sin(2n-1)a \sin(2n+1)a}$$

۲۱۸۶ـ مجموع زیر راحساب کنید.

$$S = \cos a \cos 3a + \cos 3a \cos 5a + \cos 5a \cos 7a + \cdots + \cos(2n-1)a\cos(2n+1)a$$

ثانیاً درازاء $a = 15$ و $n = k$ مقدار S را حساب کنید.

$$S = \sin^2\theta \sin 2\theta + \frac{1}{2}\sin^2 2\theta \sin 4\theta + \frac{1}{2^2}\sin^2 4\theta \sin 8\theta + \cdots$$

۲۱۸۷ـ مربع ABCD مفروض است از نقطه A بکمک نقطه دلخواه ضلع DC مانند M وصل می‌کنیم؛ نیمساز زاویه $\widehat{MAB}$ را رسم کرده تا ضلع BC را در نقطه N قطع کند ثابت کنید

$$\overline{AM} = \overline{DM} + \overline{BN}$$

۲۱۸۸ـ عبارت زیر را بکمک زاویه معین قابل محاسبه لگاریتمی نمائید و زاویه x را بدست آورید.

$$tg^2 x = \frac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{b}$$

$$S = (1-q)\cos x + 2\sqrt{q}\sin x + 1 + q$$

۲۱۸۹ـ مقدار عددی عبارات زیر را بدست آورید $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{3\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9} = ?$

$$\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5}=1$$

۲۱۹۰ـ مطلوبست تعیین اندازه زاویه‌ای برحسب هرسه واحد مثلثاتی کمان بقسمی که خارج قسمت مجموع بر تفاضل آن برحسب گرادو درجه برابر اندازه آن برحسب رادیان بر $\frac{\pi}{95}$ باشد.

۲۱۹۱ـ ثابت کنید درهر مثلث منفرجه

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma<2$$

مسائل انتخابی از امتحانات ثلث اول دبیرستانهای هدف

۲۱۹۲ـ اگر داشته باشیم

$$\left(\frac{1}{\sin x}-m\right)\left(\frac{1}{\cos x}+m\right)=\frac{1-m}{\sin x\cos x}$$

مطلوبست محاسبه $\sin x-\cos x$ و $\sin x\cdot\cos x$ برحسب m

۲۱۹۳ـ اتحاد زیررا ثابت کنید:

$$\cos^{-6}x-1=tg^2x(tg^4x+3tg^2x+3)$$

۲۱۹۴ـ اگر داشته باشیم.

$$\begin{cases}a\sin x+b\cos x=p \quad و \quad b\sin x+a\cos x=q \quad و \quad tgx+cotgx=\dfrac{ab}{p+q}\end{cases}$$

ثابت کنید رابطه زیر محقق است:

$$\frac{p-2}{q}+\frac{q-2}{p}=\frac{a^2+b^2}{pq}$$

مسائل انتخابی ازامتحانات ثلث دوم دبیرستان‌هدف

۲۱۹۵ـ درمثلث ABC داریم $tg\,2A + tg\,B = 2$ و $A - B = \pi \div 4$ زوایای مثلث را برحسب درجه معلوم کنید وتحقیق کنید که این مثلث یك زاویه ۴۵° درجه دارد.

۲۱۹۶ـ اولا عبارت مثلثاتی $S = \dfrac{3 - 4\sin^2 2\alpha}{4\cos^2\alpha - 3}$ را قابل محاسبه بلگاریتم کنید

۲۱۹۷ـ اگر A و B و C زوایای مثلثی باشند ثابت کنید رابطه زیر محقق است.

$$\sin\frac{C-A}{2} = -\cos\frac{B+2C}{2}$$

۲۱۹۸ـ جوابهای معادله‌مثلثاتی‌زیررا بین ۰ و$(-\pi)$ حساب‌کنید.

$$4\sin 2x \sin(x + 150^\circ)\sin(3x + 150^\circ) = \sin 4x$$

۲۱۹۹ـ اگردرمثلث ABC رابطه:

$$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sqrt{3}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = \frac{7}{4}$$

برقرار باشد ثابت‌کنید این مثلث یك زاویه ۱۲۰° درجه دارد .

۲۲۰۰ـ تحقیق‌کنید که عبارت زیر بستگی به x ندارد.

$$4\sin(60^\circ + x)\sin(60^\circ - x) + 4\sin^2 x$$

۲۲۰۱ـ درستی اتحاد زیر راثابت‌کنید:

$$\frac{\cos^2 y - \cos^2 x}{\sin x\cos x - \sin y\cos y} = tg(x + y)$$

۲۲۰۲ـ اولاثابت‌کنید که تساوی $\dfrac{K+2}{tg\,2x} - \dfrac{2K-1}{cotg\,2x} = K$ را همواره میتوان بصورت $a \cdot \sin^2 2x + b \cdot \cos^2 2x = c \cdot \sin 4x$ تبدیل کرد ثانیاً مقادیر a و b و c رابرحسب K معلوم‌کنید.

۲۲۰۳ـ جوابهای‌معادله مثلثاتی زیررا بین صفر و 2π حساب کنید.

$$\frac{tg(45^\circ - x)}{tg(45^\circ + x)} = 1 - \sin 2x$$

۲۲۰۴ـ اگردرمثلث ABC رابطه:

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1+\cos A\cos B$$

برقرار باشد نوع مثلث رامعلوم کنید.

۲۲۰۵ـ معلوم کنیدعبارت $y=\frac{(1+\sin x)^2}{\sin x(1-\sin x)}$ در ازاء چهمقدار از x ماکزیمم ودر ازاءچهمقداراز x مینیمم است

۲۲۰۶ـ اگر داشته باشیم.

$$\left(\frac{1}{K}-\sin^2 x\right)\left(\frac{1}{K}-\cos^2 x\right)=\frac{2\sin x\cos x}{K}$$

مطلوبست محاسبه $\sin 2x$ برحسب K $(K>0)$

۲۲۰۷ـ معادله $2\sin 3x\sin x=1$ راحل کنید.

۲۲۰۸ـ معادله $\sin 2x+\cos 2x+\sin x+\cos x+1=0$ راحل کنید

۲۲۰۹ـ اگرداشته باشیم $\sin x+\sin y=\sin x\sin y$ مطلوبست مقدارعددی عبارت زیر

$$A=\left(\cos\frac{x-y}{2}-\sin\frac{x+y}{2}\right)^2$$

۲۲۱۰ـ اگر $tg(b-c)=\frac{3\sin 2C}{5-3\cos 2C}$ باشد ثابت کنید $tg b=4tg c$

مطلوبست اثبات تساوی زیر

۲۲۱۱ـ $$\mathrm{Arctg}\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}-\mathrm{Arctg}\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\pi}{2}-\alpha$$

وبازاء $\alpha=30$ صحت تساوی‌زیررا تحقیق کنید .

۲۲۱۲ـ اگر انتهای دوکمان x و y در ربع دوم و

$$\cos 2y=-\frac{3\sqrt{10}}{10}\ ,\ \cos 2x=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

باشد حساب کنید $\cos(x-y)$ راو معلوم کنیدکه‌انتهای کمان $(x-y)$ در کدام ناحیه قرار دارد .

۲۲۱۳ـ مطلوبست تعین مقدار b به فرض اینکه‌رابطه

$$\mathrm{arctg}\frac{2b-1}{b+2}-\mathrm{arctg}\frac{1}{4}=\frac{2\pi}{3}$$ برقرار باشد .

۲۲۰۵- درستی اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید

$$\cos 2a(\sin 6a+\sin^2 2a)+\sin 2a(\cos 6a-\cos^2 2a)=0/75\sin 8a$$

۲۲۰۶- بفرض آنکه $\cos 2x=\frac{1}{\sqrt{2}+2}$ و $\cos 2y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\cos 2Z=\frac{2}{1+\sqrt{2}}$ باشد مطلوبست اثبات رابطه

$$tg^2x+tg^2y+tg^2Z=1$$

۲۲۰۷- اگر در مثلثی رابطه

$$\sin^2A+\sin^2C-\sin^2B=\sin A\sin C$$

بر قرار باشد ثابت کنید که این مثلث یك زاویه ۶۰° دارد

درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید:

۲۲۰۸- $$\frac{1}{64}\left(1-2\cos 4x+\frac{1+\cos 8x}{2}\right)=\sin^4x\cos^4x$$

۲۲۰۹- $$\frac{\cos 2x+\cos 7x}{\cos 3x+\cos 6x}+\frac{\cos 6x-\cos x}{\cos 5x-\cos 2x}=\frac{2\sin 4x}{\sin 3x}$$

۲۲۱۰- $$\sin a(\cos 2a+\cos 4a+\cos 6a)=\sin 3a\cos 4a$$

۲۲۱۱- اولا جوابهای معادله $tg^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-2\cotg\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+2=0$ را بین صفر و 2π حساب کنید ثانیا بوسیله ترسیم دردایره مثلثاتی کمانهائی که میتواندجواب این معادله باشند مشخص کنید و فرمول کلی این کمانهارا بنویسید

۲۲۱۲- اولا تحقیق کنید بازاء چه مقادیر b عبارت $\frac{2-3b}{6}$ میتواندکسینوس زاویه x گردد ثانیا b را طوری تعیین کنید که زاویه $x=45°$ گردد.

۲۲۱۳- عبارت $\sin^4\alpha(1-\cotg^2\alpha)-\cos^4\alpha(1-tg^2\alpha)$ را بر حسب $tg\alpha$ تبدیل ومقدار عددی آنرا درازاء $tg\alpha=\sqrt{2}+1$ حسابکنید

۲۲۱۴- مقدار عددی a را ازدو رابطه زیر حسابکنید

$$\sin x+2\cos x=a \quad \text{و} \quad 2\sin x-\cos x=a-1$$

مسائل امتحانی ثلث سوم دبیرستانهای هدف

۲۲۱۵ـ درستی این اتحاد مثلثاتی را ثابت کنید

$$\frac{1}{2}\,cotg^2\alpha\left(\frac{tg\alpha+\sin\alpha}{cotg\alpha-\cos\alpha}+\frac{tg\alpha-\sin\alpha}{cotg\alpha+\cos\alpha}\right)=tg^2\alpha+tg\alpha+1$$

۲۲۱۶ـ بفرض اینکه در مثلث ABC رابطه $\sin(270^\circ+A+B)=\cos(90^\circ-A-C)$ برقرار باشد ثابت کنید که مثلث قائم‌الزاویه است وزاویه قائمه را مشخص کنید .

۲۲۱۷ـ اگر A و B و C زوایای مثلثی باشند که در روابط زیر صدق نمایند این زوایا را برحسب رادیان حساب کنید

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2} \quad و \quad \frac{\sin A}{\sin B}=2-\sqrt{3}$$

۲۲۱۸ـ مثلث قائم‌الزاویه AMN که در آن

$\hat{M}=90^\circ$ و $MN=12a$ و $AM=3a$ می‌باشد بر MN دو نقطه P و Q بقسمی اختیار می‌کنیم $MP=3a$ و $MQ=5a$ باشند ثابت کنید که

$$\widehat{ANM}+\widehat{AQM}=\widehat{APM}$$

۲۲۱۹ـ معادله مثلثاتی زیر را حل کنید وجوابهای کلی وجوابهای بین ۰ و ۳۶۰° را معلوم کنید .

$$\frac{1+\cos 2x+\cos 4x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}=-\sqrt{3}$$

۲۲۲۰ـ اگر a و b دو کمان حاده و رابطه $\cos^2 a-2\,tg\,a\,tg(\frac{\pi}{4}-b)-1=0$ مفروض باشد اولا ـ رابطه‌ای بین کمانهای a و b مشخص کنید ثانیاً بفرض اینکه

$$\sin a-\cos a=2\sqrt{2}\sin b\cos b$$

باشد کمانهای a و b را معلوم کنید .

۲۲۲۱ـ رابطه‌ای بدست آورید از a و b در صورتیکه میدانیم

$$tg\,x+\sin x=a \quad و \quad tg\,x-\sin x=b$$

۲۲۲۲ـ اگر $tg\,x-cotg\,x=8\div 2$ باشد خطوط مثلثاتی کمان x واقع در ربع سوم را حساب کنید

۲۲۲۳ـ رابطه‌ای بدست آورید از a و b در صورتیکه میدانیم

$tg\,x + \sin x = a$ و $tg\,x - \sin x = b$

۲۲۲۴ـ عبارت $S = \frac{x+y}{x-y}$ مفروض است

اولا بفرض $x = cotg\,3a$ و $y = cotg\,6a$ از عبارت مفروض عبارت زیررا نتیجه بگیرید

$$S = 4\cos(3\alpha + 30)\cos(3\alpha - 30) \qquad (1)$$

ثانیاً در ازاء $\alpha = 20$ مقدار عددی عبارت مفروض و عبارت (۱) را جداگانه بدون استفاده از جدول لگاریتم حساب کنید ودرازاء $\alpha = 8°10'15''$ مقدارعددی عبارت مفروض وعبارت (۱) راباستفاده ازجدول لگاریتم محاسبه کنید

مسائل انتخابی از امتحانات ثلث دوم دبیرستانهای خوارزمی و مرجان

۲۲۲۵ـ عبارت زیر را قابل محاسبه بالگاریتم بکنید

$$\sin^2 x + \sqrt{3}\cos^2 x - \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

۲۲۲۶ـ درستی رابطه زیررا تحقیق کنید

$$\frac{1}{2}\mathrm{Arc}\cos\left(-\frac{7}{25}\right) + 2\,\mathrm{Arc}tg\,\frac{1}{5} + \mathrm{Arc}\sin\frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$$

۲۲۲۷ـ اتحاد زیر را اثبات کنید.

$$\left(\frac{\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2} - \cos\frac{a}{2}}\right)^2 + cotg^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{6 - 2\cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

۲۲۲۸ـ اگر A و B و C زوایای مثلثی باشند ثابت کنید .

$$\frac{\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C}{\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C - 1} = -cotg\,A\,cotg\,B\,tg\,C$$

معادلات زیر را حل کنید

$$3 - 3\cos x = \sin^2 x(3 - 2\cos x)$$

۲۲۲۹- $16\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x = \cos 3x \div \sin x$

۲۲۳۰- $\arcsin mx = 2\,\mathrm{arctg}\, nx$

۲۲۳۱- k و $tg\,a$ را بقسمی تعیین کنید که تساوی زیر به ازاء جمیع مقادیر x بر قرار باشد $3\sin x + 4\cos x = k\sin(x + a)$

۲۲۳۲- اتحاد $\mathrm{cotg}\frac{x}{2} - \mathrm{cotg}\,x = \frac{1}{\sin x}$ را ثابت کنید و سپس مجموع زیر را حساب کنید

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^n x}$$

۲۲۳۳- بازاء چه مقادیر از K کسر زیر به x بستگی ندارد

$$1 = \frac{(3-k)\sin x - (3k-1)\cos x}{(2+3k)\cos x + (2+k)\sin x}$$

۲۲۳۴- از دستگاه زیر رابطه مستقلی از x بین m و n بدست آورید

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = m \\ \sin^3 x + \cos^3 x = n \end{cases}$$

مسائل انتخابی ثلث سوم دبیرستانهای خوارزمی

معادلات زیر حل کنید

۲۲۳۵- $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$

۲۲۳۶- $\cos 2x + 2\sin 2x\sin(x + 45^\circ) = 0$

۲۲۳۷- اگر $tg\,\lambda = t$ باشد ثابت کنید برای $tg\frac{\lambda}{2}$ دو جواب بحاصل ضرب -1 بدست می‌آید (اثبات را باسه روش جبری مثلثاتی هندسی انجام دهید)

۲۲۳۸- اگر $a\sin x\sin y + b\cos x\cos y = 0$ باشد تحقیق کنید که عبارت

$$\frac{1}{a\sin^2 x + b\cos^2 x} + \frac{1}{a\sin^2 y + b\cos^2 y}$$

بمقادیر x و y بستگی ندارد

مسائل انتخابی ثلث سوم دبیرستان دارالفنون

معادلات زیر را حل کنید:

۲۲۲۹- $2\cos 5x + 3\cos 3x + 4\cos x = 0$

۲۲۳۰- $2\,\mathrm{cotg}\,\frac{\pi}{12}\cos^2\left(\frac{\pi}{5} - 2x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{5} + 8x\right) = 1$

۲۲۳۱- $\sin(x + 15^\circ) + \cos(75^\circ - x) = 1$

۲۲۳۲- عبارت زیر را بحاصل ضرب بدل کنید (قابل محاسبه با لگاریتم نمائید)

۲۲۳۳- $2(\cos^3 x + \sqrt{3}\sin^3 x) - 3\cos(x + 60^\circ)$

با استفاده از جدول لگاریتم مطلوبست محاسبه z از رابطه زیر

$$Z = \frac{tg\,31^\circ 12' 30'' + tg\,15^\circ 11' 30''}{\mathrm{cotg}\,58^\circ 42' 30'' - \mathrm{cotg}\,74^\circ 48' 30''}$$

۲۲۳۴- اگر در مثلثی $\frac{\sin(B - C)}{\sin B - \sin C} = \sin B + \sin C$ باشد

نوع مثلث را معلوم کنید.

مسائل انتخابی دبیرستانهای دکتر نصیری - فیروز بهرام

ادیب - سخن - علوی - علمیه - بابکان

درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید:

۲۲۳۵- $\frac{1 - 2\cos x + \cos 2x}{1 + 2\cos x + \cos 2x} = -tg^2\frac{x}{2}$

۲۲۳۶- $\mathrm{Arctg}\,1 + 2\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{2} + \mathrm{Arctg}\,\frac{1}{3} + 2\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{4} = \mathrm{Arctg}\left(-\frac{22}{31}\right)$

۲۲۳۷- $\mathrm{cotg}\,x - \mathrm{cotg}\,y = \mathrm{cotg}\,z - \mathrm{cotg}\,t$

۲۲۳۸- $tg^2\varphi + \mathrm{cotg}^2\varphi = \frac{3 + \cos 4\varphi}{\sin^2 2\varphi}$

-۲۲۴۹ $tg9^\circ - tg27^\circ - tg63^\circ + tg81^\circ = 4$

-۲۲۵۰ $\frac{1}{\sin 20^\circ} + \frac{1}{\sin 40^\circ} + \frac{1}{\sin 80^\circ} = 2\,cotg\,20^\circ$

-۲۲۵۱ $\sin^2 \frac{\pi}{24} + \sin^2 \frac{7\pi}{24} + \sin^2 \frac{13\pi}{24} + \sin^2 \frac{19\pi}{24} = 2$

-۲۲۵۲ $\frac{\sin 2x - 2\sin^2 x}{\sin 2x - \cos 2x + 1} = tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

-۲۲۵۳ $2\,arc\,tg\frac{1}{5} + Arctg\,\frac{7}{17} = \frac{\pi}{4}$

معادلات زیر را حل کنید:

-۲۲۵۴ $(3+2\sqrt{2})^{\cos^2 x} + (3-2\sqrt{2})^{\sin^2 x} = \frac{2(2-\sqrt{2})}{(3-2\sqrt{2})}$

-۲۲۵۵ $(m-1)\cos^2\frac{3\pi x}{2} - (3-m)\cos\frac{3\pi x}{2} + m - 2 = 0$

۲۲۵۶ $\sin x + \cos x = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$

-۲۲۵۷ $\sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x = \frac{3}{2}$

-۲۲۵۸ $2\cos 2z - 4\sin z + 1 = 0$

-۲۲۵۹ $\sin\left(3x - \frac{\pi}{8}\right) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{8} - x\right)$

-۲۲۶۰ $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$

-۲۲۶۱ $2\cos 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 1$

-۲۲۶۲ $\cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x = 0/25$

-۲۲۶۳ $8\sin^4 x + 8\cos^4 x = 5$

-۲۲۶۴ $\sin x \cos x + \sin x = \cos^2 x + \cos x$

۲۲۶۵- $tg(x+45^\circ)+tg(x-45^\circ)=-tg^2\frac{x}{2}$ و $1+\sin^2 2x=4\sin^2 x$

۲۲۶۶- بکمک حل معادله $tg^3x-3(2+\sqrt{3})tg^2x-3tgx+2+\sqrt{3}=0$ خطوط مثلثاتی قوس $2x$ واز آن کمان x را حساب کنید .

عبارات زیر را قابل محاسبه لگاریتم نمائید :

۲۲۶۷- $S=\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x+\cos 5x+\cos 6x+\cos 7x$

۲۲۶۸- $\cos 55^\circ\cos 175^\circ+\cos 175^\circ\cos 295^\circ+\cos 295^\circ\cos 415^\circ$

۲۲۶۹- $\left\{tg 35^\circ+tg 20^\circ+2\right.$ و $\sin 70^\circ+8\cos 20\cdot\cos 40\cdot\cos 80$

۲۲۷۰- $\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5}$

۲۲۷۱- ریشه‌های معادله $\cos 3x=m(1+\cos 2x)$ را قابل محاسبه به لگاریتمی کنید بازاء چه مقدار m یکی از ریشه‌های معادله فوق $x=2Arctg\frac{1}{2}$ می‌شود .

به کمک آن خلاصه عبارت زیر را بدست آورید .

$g=\cos x+2\cos 2x+3\cos 3x+\cdots+n\cos nx$

۲۲۷۲- بفرض آنکه $5\cos 2x+12\sin 2x=5$ و $8\cos 4y+15\sin 4y=8$ باشد مقادیر عددی $tg(2x+y)$ و $cotg(2y-x)$ را محاسبه کنید

۲۲۷۳- هرگاه x و y دو کمان متغیر و مجموع آنها مقدار ثابت $2a$ باشد ماکزیمم و می‌نیمم عبارتهای زیر را ضمن تعیین و مقادیر x و y را برحسب a حساب کنید

$A=1-\sin^2x-\sin^2y$ و $B=1-\cos^2x-\sin^2y$

۲۲۷۴- مثلث قائم‌الزاویه ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ به ارتفاع AH میانه AM مفروض است اولا ثابت کنید $\widehat{MAH}=C-B$

ثانیا . طول AH و AM و HM وسپس BH رابرحسب سینوس وکسینوس زاویه $(C-B)$

محاسبه کنید و رابطهٔ زیر را از آن نتیجه بگیرید $tg\,B=\frac{\cos(B-C)}{\sin A+\sin(C-B)}$

ثالثاً . اگر در مثلث ABC رابطهٔ فوق ما بین زوایا برقرار باشد ثابت کنید مثلث قائم‌الزاویه است

۲۲۷۵ـ اگر a و b دو زاویه مثبت و حاده و مجموع آنها °۷۵ باشد و داشته باشیم $tg\,a\,tg\,b=\frac{\sqrt{3}}{3}$ اولاً $tg\,a+tg\,b$ ثانیاً $tg\,a$ و $tg\,b$ سپس زوایای a و b را پیدا کنید

۲۲۷۶ـ اگر $\sin A+\sin B=2\sin(A+B)$ باشد ثابت کنید

$$tg\frac{A}{2}\,tg\frac{B}{2}=\frac{1}{3}$$

ثابت کنید در هر مثلث روابط زیر برقرار است

۲۲۷۷ـ $$\cot g\,A\cot g\,B+\cot g\,B\cot g\,C+\cot g\,C\cot g\,A=1$$

۲۲۷۸ـ $$\frac{\sin C\cos B}{\sin A\sin^2 B}=\cot g^2 B+\cot g\,A\cot g\,B$$

۲۲۷۹ـ $$1+\frac{\sin C\cos B}{\sin A\cos^2 B}+\frac{\sin A\cos C}{\sin B\sin^2 C}+\frac{\sin B\cos A}{\sin C\sin^2 A}=(\cot g\,A+\cot g\,B+\cot g\,C)^2$$

۲۲۸۰ـ ثابت کنید

$$2\,\mathrm{Arc}\cot g\frac{1}{2}-\mathrm{Arc}\cot g\,2+\mathrm{Arc}\cot g\frac{13}{9}=\frac{3\pi}{4}$$

۲۲۸۱ـ هرگاه در مثلثی رابطهٔ زیر برقرار باشد ثابت کنید که مثلث قائم‌الزاویه است

$$\frac{\cos(C-B)}{\sin A+\sin(C-B)}=tg\,B$$

۲۲۸۲ـ بین دو رابطهٔ زیر خطوط مثلثاتی x را حذف کرده رابطه‌ئی بر حسب a و b بدست آورید

$$\begin{cases} tg\,x+\cos x=a \\ tg\,x-\cos x=b\end{cases}$$

۲۲۸۳ـ ثابت کنید مقدار زیر به a بستگی ندارد

$$\frac{2\sin(a+45^\circ)}{\cos a}+\frac{2\cos(a+45^\circ)}{\sin a}+\frac{\sqrt{2}(\sin a\cos a-1)}{\sin a\cos a}$$

۲۲۸۴ـ به حسب آنکه مجموع مربعات سینوسهای زاویای یك مثلث بزرگتر یا مساوی یا کمتر از ۲ باشد نوع مثلث را مشخص کنید .

۲۲۸۵ـ اگر $x=۳۶°$ باشد ثابت کنید

$$\cos ۲x+۲\cos ۴x+۳\cos ۶x+۴\cos ۸x=-۲/۵$$

۲۲۸۶ـ بفرض آنکه $\dfrac{\sin(\gamma+\theta)}{\sin(\gamma-\theta)}=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$ باشد ثابت کنید

$$\cot g\alpha+\cot g\beta\cot g\gamma=\cot g\theta$$

۲۲۸۷ـ اگر $tg\,x=\dfrac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}-۱}$ و $tg\,y=\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$ باشد ثابت کنید

$$x-y=K\pi+۴۵°$$

۲۲۸۸ـ اگر داشته باشیم $tg(x-y)=\dfrac{۲\sin ۲y}{۵-۲\cos ۲y}$ ثابت کنید

$tg\,x=tg$ است

۲۲۸۹ـ اگر $\cos x=\cos a\times\cos b$ باشد ثابت کنید

$$tg\frac{x+a}{۲}\,tg\frac{x-a}{۲}=tg^{۲}\frac{b}{۲}$$

۲۲۹۰ـ تحقیق کنید اگر درمثلثی رابطه $\sin ۳A+\sin ۳B+\sin ۳C=۰$ باشد یکی یا ۶۰° می باشد

۲۲۹۱ - هرگاه $tg\alpha=\dfrac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}-۱}$ و $tg\beta=\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$ باشد مطلوبست محاسبه کمانهای حسب رادیان درصورتی که داشته باشیم $tg\dfrac{۳x}{۸}=tg(\alpha-\beta)$

۲۲۹۲ـ هرگاه $tg^{۲}A=۱+۲tg^{۲}B$ باشد ثابت کنید

$$\cos ۲A+\sin^{۲}B=۰$$

۲۲۹۳ـ تحقیق کنید عبارت $\sin^{۲}a+\sin x\sin(۲a+x)-\sin a\sin(۲a+x)$ بستگی ندارد

۲۲۹۴ـ حاصل عبارت زیر را بدون استفاده ازجدول بدست آورید

$$\frac{۱-۴\sin ۱۰°\sin ۷۰°}{۲\sin ۱۰°}$$

۲۲۹۵ـ بفرض آنکه $\cos 2x = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ و $\cos 2y = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ و $\cos 2Z = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ باشد ثابت کنید

$$tg^2 x + tg^2 y + tg^2 Z = 1$$

۲۲۹۶ـ ثابت کنید عبارت $\dfrac{1+\cos x+\sin x+\sin x\cos x}{1-\sin x-\cos x+\sin x\cos x}$ به عبارت $\left(\dfrac{1+cotg\dfrac{x}{2}}{1-tg\dfrac{x}{2}}\right)^2$ قابل تبدیل میشود

۲۲۹۷ـ ثابت کنید درصورتی که x و y زوایای حاده و

$$\cos x = \frac{2a}{1+a^2} \quad \text{و} \quad \cos y = \frac{1-a^2}{1+a^2}$$

باشد رابطه $tg\dfrac{x}{2} + tg\dfrac{y}{2} + tg\dfrac{x}{2}\,tg\dfrac{y}{2} = 1$ برقرار است

۲۲۹۸ـ ثابت کنید عبارت $A = (1+\sin x)(3\sin x+4\cos x+5)$ مربع کامل است

۲۶۹۹ـ اگر $\dfrac{\cos x+\cos y}{\sin x+\sin y} = a$ باشد ثابت کنید

$$\operatorname{Arccos}\frac{a^2-1}{a^2+1} = x+y$$

۲۳۰۰ـ ثابت کنید که اگر رابطه $\cos 2y = \dfrac{\cos 2x - a}{1 - a\cos 2x}$ برقرار باشد خواهیم داشت

$$\frac{tg^2 y}{tg^2 x} = \frac{1+a}{1-a}$$

مسائل انتخابی از امتحانات دبیرستانهای آذر رهنما

درستی اتحادهای زیر را تحقیق کنید:

۲۳۰۱- $tg\left(Arctg\frac{2a-b}{b\sqrt{3}}+arctg\frac{2b-a}{a\sqrt{3}}\right)=\sqrt{3}$

۲۳۰۲- $\sin^4 A=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2A+\frac{1}{8}\cos 4A$

۲۳۰۳- $Arc\,tg\frac{x-2}{x+1}-arctg\frac{2x-1}{2}=\frac{3\pi}{4}$

۲۳۰۴- $4\cos 2a\sin^2 a+4\sin 2a\cos^2 a=2\sin 4a$

۲۳۰۵- $1+\frac{2tg^2x}{\cos^2x}-\frac{1}{\cos^4x}=tg^4x$

۲۳۰۶- ثابت کنید که اگر $x+y+Z=90^\circ$ باشد اتحاد زیر برقرار است
$tgx\,tgy+tgy\,tgZ+tgZ\,tgx=1$

معادلات زیر را حل کنید:

۲۳۰۷- $2\cos x=4\cos\frac{x}{2}-2$

۲۳۰۸- $\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=0$

۲۳۰۹- $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$ و $\sin\left(4x+\frac{3\pi}{4}\right)=1$

۲۳۱۰- $\sin x+\cos x=\frac{2-\sin x}{\cos x}$

۲۳۱۱- اگر $\sin(\alpha+\beta-\gamma)$ و $\sin(\gamma+\alpha-\beta)$ و $\sin(\beta+\gamma-\alpha)$ سه جمله متوالی یك تصاعد عددی باشند ثابت کنید $tg\alpha$ و $tg\beta$ و $tg\gamma$ تشکیل یك تصاعد عددی خواهند داد.

۲۳۱۲- مثلث قائم‌الزاویه ABC که $A=90^\circ$ و $2a=AB$ و $AC=10a$ است مفروض است بر AC نقاط D و E را چنان اختیار می‌کنیم که $AE=2a$ و $AD=3a$ ثابت کنید که $\widehat{AEB}=\widehat{ADB}+\widehat{ACB}$

۲۳۱۳ـ اگر در مثلث ABC رابطهٔ زیر برقرار باشد ثابت کنید یکی از زوایای مثلث ۶۰° است

$$\cos 2B + \cos 2C - \cos 2A = 1 - 2\sin B \sin C$$

۲۳۱۴ـ اگر بین زوایای مثلث ABC رابطهٔ زیر برقرار باشد مثلث قائم‌الزاویه است

$$\frac{\sin B}{\cos C} = \sin A + \cos A \operatorname{cotg} B$$

۲۳۱۵ـ m و $tg\beta$ را بقسمی تعیین نمائید که تساوی زیر بازای جمیع مقادیر t برقرار باشد

$$3\sin t + 4\cos t = m\sin(t+\beta)$$

۲۳۱۶ـ اگر $\cos b = \frac{5}{12}$ و $tg\, a = -2$ باشد و انتهای دو کمان a و b در ربع چهارم باشد مقدار $\sin(2a - b)$ را حساب کنید.

مسائل انتخابی از امتحانات دبیرستانهای اصفهان

۲۳۱۷ـ ثابت کنید اگر در مثلثی که رابطهٔ $\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = 0$ برقرار باشد مثلث قائم‌الزاویه است.

معادلات زیر را حل کنید:

۲۳۱۸ـ $\cos 3x = 4\cos^2 x$

۲۳۱۹ـ $tg\, 5x = tg\, x\, tg(60° - x) \operatorname{cotg}(30° - x)$

۲۳۲۰ـ $\sin^4 2x + \cos^4 2x + \cos 4x = 0$

۲۳۲۱ـ $\sin^3 x = \cos x - \sin x$

$2\sin x = \cos\frac{3x}{2} - 1$

۲۳۲۲ـ $\sin^2 2x - \sin^2 x = \sin 3x \cos x$

۲۳۲۳ـ $\sin 2x + \sin x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$

۲۳۲۴ـ $\cos 3x - \cos 5x + \cos 7x = 0$

درستی اتحادهای زیر را تحقیق کنید:

۲۳۲۵ـ $\sin A(tg\, 2A \operatorname{cotg} A + 1) = \sin 3A(tg\, 2A \operatorname{cotg} A - 1)$

۲۳۲۶- $\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ = \cos 7^\circ$

۲۳۲۷- $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = (\sin 8x) \div 2\sin x$

۲۳۲۸- $tg^2 a + cotg^2 a = \dfrac{3 + \cos 4a}{\sin^2 2a}$

$\sin 6a = 2\sin a(16\cos^5 a - 16\cos^3 a + 3\cos a)$

مطلوبست محاسبه A و B و C برای آنکه رابطه زیر اهمواره برقرار باشد

۲۳۲۹- $\cos^4 x = A\cos 4x + B\cos 2x + C$

۲۳۳۰- در صورتیکه $a + b + c + d = 2\pi$ باشد عبارت

$\sin a + \sin b + \sin c + \sin d$ را قابل محاسبه به لگاریتم نمائید.

۲۳۳۱-مطلوبست تعیین رابطه‌ای بین x و y که بستگی به α نداشته باشد اگر داشته باشید

$x\sin\alpha + y\cos\alpha = \sin 4\alpha$ و $x + y = 2\sin 2\alpha(\cos\alpha - \sin\alpha)$

۲۳۳۲- شخصی برجی را بزاویه °۴ دید چون نیم کیلومتر به‌برج نزدیك شدآنرا بزاویه °۸ دید ودرصورتیکه $tg 8^\circ = 0{,}14$ باشد ارتفاع برج و فاصله شخص راقبل از نزدیك شدن به‌پای برج حساب کنید.

۲۳۳۳-نوع مثلثی راتعیین‌کنید درآن رابطه $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$ برقرار است.

۲۳۳۴-مطلوبست محاسبه $\sin 7{,}5^\circ$.

۲۳۳۵-اگر $\sin 2a$ و $\sin 2b$ و $\sin 2C$ تشکیل تصاعد عددی بدهند ثابت‌کنید. $tg(a+b)$ و $tg(c+a)$ و $tg(b+c)$ نیز تشکیل تصاعد عددی می‌دهند.

۲۳۳۶-اگر $\sin x = \dfrac{a-b}{a+b}$ باشد مطلوبست محاسبه $cotg\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)$

در صورتیکه داشته باشیم

۲۳۳۷- $K^2\sin^2(x+y) = \sin^2 x + \sin^2 y - 2\sin x \sin y \cos(x-y)$

ثابت کنیدداریم $tg x = \dfrac{1 \pm K}{1 \mp K} tg y$

مسائل انتخابی از امتحانات دبیرستانهای شهرستان

تبریز - مشهد - قم

درستی اتحادهای زیر را تحقیق کنید:

۲۳۳۷- $\sin 3a \sin^3 a + \cos 3a \cos^3 a = \cos^3 2a$

۲۳۳۸- $\sin^4 x(3 - 2\sin^2 x) + \cos^4 x(3 - 2\cos^2 x) = 1$

۲۳۳۹- $\frac{1 - \sin a}{\cos a} + \frac{\cos a}{1 + \sin a} = 2tg\left(\frac{x}{4} - \frac{a}{2}\right)$

معادلات زیر را حل کنید:

۲۳۴۰- $\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = /75$

۲۳۴۱- $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = a$

۲۳۴۲- $\cos 2x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}(\cos x - \sin x)$

۲۳۴۳- $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$

۲۳۴۴- $2\cos\frac{x}{3} - \sin\frac{x}{2} = 2$

۲۳۴۵- $\sin 3x = 3\sin^2 x - \cos^2 x$

۲۳۴۶- $1 + \sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x - \cos 2x + \cos 3x$

عبارات زیر را قابل محاسبه بلگاریتم نمائید:

۲۳۴۷- $\sin A + \sin B - \sin C$

۲۳۴۸- $tg35 + tg20 + 2$

۲۳۴۹- $\sin^2 a + \sin^2 b - \sin^2(a + b)$

۲۳۵۰- $x\,tg\alpha + y\,cotg^2\alpha = x^2 + y^2$ و $y\,tg\alpha + x\,cotg^2\alpha = 2xy$

۲۳۵۱- $\sin(2x+y) = 5\sin y$ و $2tg(x+y) = 3tg x$

۲۳۵۲- $Arc\sin\frac{3}{5} + Arc\cos\frac{12}{13} + Arctg\frac{16}{63} = \frac{\pi}{2}$

۲۳۵۳- از رابطه: $\cos x = \frac{\cos\alpha - m}{1 - m\cos\alpha}$ ، $tg\frac{x}{2}$ را بر حسب $tg\frac{\alpha}{2}$ حساب کنید:

۲۳۵۴- بفرض آنکه $tg x = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 + tg\alpha\, tg\beta}$ باشد ثابت کنید:

۲۳۵۵- $\sin 2x = \frac{\sin^2\alpha + \sin 2\beta}{1 + \sin 2\alpha \sin 2\beta}$

$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$

۲۳۵۶- بین روابط زیر x را حذف کنید.

$$\begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = a \text{ و } \cos x - \frac{1}{\cos x} = b \end{cases}$$

۲۳۵۷- در صورتیکه $x - y = \frac{\pi}{6}$ و $\sin^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{y}{2} = \frac{3}{4}$ باشد مطلوبست محاسبه کمانهای x و y

درستی اتحادهای زیر را تحقیق کنید:

۲۳۵۸- $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} \times \frac{\cos x}{1+\cos x} = tg\frac{x}{2}$ ، $\frac{2\sin a}{\cos a + \cos 3a} = tg 2a - tg a$

۲۳۵۹- $Arctg(2\sqrt{3} + \sqrt{7}) + Arctg(2\sqrt{3} - \sqrt{7})$

$$\cos Arctg\sqrt{3} + cotg\, Arc\sin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$$

۲۳۶۰- $\frac{2\cos 65\cos 35 - \cos 100}{2\sin 65\sin 35 - \sin 10} = 1$

۲۳۶۱- $\frac{\cos A}{\sin B \times \sin C}+\frac{\cos B}{\sin A \cdot \sin C}+\frac{\cos C}{\sin B \cdot \sin A}=2$

معادلات زیر را حل کنید:

۲۳۶۲- $2-7\cos^2 x \sin x-3\sin^3 x=0$

۲۳۶۳- $\frac{1-\cos 2x}{2\sin x}=\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$

۲۳۶۴- $2\sin^4 2x-\sin^3 2x\sin 4x=2\sin^2 2x-\sin 4x$

۲۳۶۵- $1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$

۲۳۶۶- $tg\,(x+\frac{\pi}{4})cotg(2x+\frac{\pi}{4})=1$

۲۳۶۷- $x^2\sin 2a-2(\sin a+\cos a)+2=0$

۲۳۶۸- درصورتی که x جواب جاده معادله $tg^2 x-8\,tg x+1=0$ باشد مطلوبست محاسبه $\sin(\frac{3\pi}{2}-4x)\,tg(\frac{25\pi}{4}+2x)$

۲۳۶۹- $2\cos^2(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{5})+\sin(\frac{2\pi}{5}-x)=0$

۲۳۷۰- $\sin(x+\frac{\pi}{4})+\cos^2(\frac{x}{2}+\frac{5\pi}{12})=\frac{1}{4}$

۲۳۷۱- $x+cotg x=2\sqrt{2}$

رابطه مستقلی بین x و y بدست آورید:

۲۳۷۲- $Arcsin\,(-\frac{1}{2})+2Arctg\,(-\frac{\sqrt{3}}{3})]$

$\cos\alpha+\cos 3\alpha$ و $y=3\sin\alpha-\sin 3\alpha$

۲۳۷۳- در مثلث قائم‌الزاویه BAC $(A=90°)$ و زاویه $C=45°$ میباشد اگر AC را باندازه ۲ سانتیمتر از طرف C تا D امتداد دهیم زاویه ADB برابر $20°$ میشود مطلوبست محاسبه اضلاع مثلث ABC (بکمک روابط مثلثاتی)

۲۳۷۴- نوع مثلثی را تعیین کنید که درآن رابطه زیر برقرار باشد.

$\frac{\sin B}{\cos C}=\sin A+\cos A\cdot cotg B$

$$A=\sin\left(\frac{5\pi}{12}+3x\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-3x\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{12}+3x\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}-3x\right)$$

۲۳۷۵ـ اگر $\sin\alpha+\cos\alpha=K$ باشد مطلوبست محاسبه عبارت $\sin^{-3}\alpha+\cos^{-3}\alpha$ برحسب k

۲۳۷۶ـ ثابت کنید عبارت زیر بستگی به x ندارد

$$S=tg\left(x+\frac{\pi}{3}\right)tg\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+tg\,x\,tg\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+tg\,x\,tg\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

۲۳۷۷ـ بفرض آنکه $\cos x+\cos^2 x=\sqrt{2}\cos y$ باشد ثابت کنید.

$$9\sin^2(x-y)=1$$

۲۳۷۸ـ بفرض آنکه $\cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ باشد مطلوبست تعیین خطوط مثلثاتی $2x$

۲۳۸۹ـ اگر $\cos x=\frac{\sqrt{5-1}}{4}$ باشد مطلوبست $\sin 5x$

۲۳۸۰ـ هرگاه $\cos 4x=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ باشد مقدار $\cos x$ را حساب کرده و سپس کمان حاده x را تعیین کنید

ثانیاً مقدار عددی عبارت $tg\,2x\,cotg\,x-tg\,x\,tg\,2x$ را بدست آورید.

۲۳۸۱ـ مقدار عددی b را طوری حساب کنید که عبارت زیر مستقل از x باشد

$$m=\frac{(2b+5)\sin x+(b-3)\cos x}{(2b+5)\cos x+(b-3)\sin x}$$

۲۳۸۲ـ درصورتی که داشته باشیم $tg\,x-cotg\,x=\frac{7}{12}$ و انتهای کمان درربع اول باشد $\sin x$ را محاسبه کنید:

$$K\sin\left(\frac{x}{2}+\varphi\right)=2\sin\frac{x}{2}+2\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}$$

۲۳۸۴ـ اگر $A+B+C=\pi$ باشد تساوی زیر را ثابت کنید

$$\frac{\cos A}{\sin B\sin C}+\frac{\cos B}{\sin A\sin C}+\frac{\cos C}{\sin A\sin B}=2$$

۲۳۸۵ـ ثابت کنید که عبارت زیر بستگی به x ندارد.

$$\cos^2 x-2\cos x\cos a\cos(a+x)+\cos^2(a+x)$$

۲۳۸۶ـ ثابت کنید اگر $\cos x=\frac{a}{b+c}$ و $\cos y=\frac{b}{a+c}$ و $\cos z=\frac{c}{a+b}$ باشد رابطه زیر برقرار است.

$$tg^2\frac{x}{2}+tg^2\frac{y}{2}+tg^2\frac{z}{2}=1$$

۲۳۸۷ـ اگر $A=1+\sin^2\alpha$ و $B=1+\cos^2\alpha$ باشد ثابت کنید.

$$2(A^3+B^3)+9B^2=27(1+\cos^4\alpha)$$

۲۳۸۸ـ مطلوبست محاسبه $tg\frac{x}{2}$ از رابطه

$$\cos a\cos x-\sin a\cos b\sin x=\cos b$$

۲۳۸۹ـ اگر $tg(\alpha+\beta)=3$ و $tg(\alpha-\beta)=2$ باشد اولا اندازه زاویه α را حساب کنید ثانیاً $tg^2\beta$ را محاسبه نمائید.

۲۳۹۰ـ ثابت کنید اگر در مثلث ABC رابطه $\sin^2A=\sin B(\sin B+\cos C)$ برقرار باشد زاویه A دوبرابر زاویه B می‌باشد.

مسائل انتخابی از امتحانات دبیرستانهای اهواز و آبادان

معادلات زیر را حل کنید:

۲۳۹۱ـ $2tg(x-\frac{\pi}{6})=tg x$ و $\sin(x+\frac{\pi}{7})=\sqrt{3}\sin(\frac{19\pi}{12}-x)$

۲۳۹۲ـ $\frac{1+tg x}{1-tg x}-1=2\sin x\cos x$

۲۳۹۳ـ $\frac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}{\cos x+\cos 2x+\cos 3x}=2+\sqrt{3}$

۲۳۹۴ـ $(tg^2 2x-3)(\sin^2 2x-\cos 2x+\frac{1}{4})=0$

۲۳۹۵- $2m\sin^2 x+\sin 2x+(m-1)\cos^2 x=2$

m را طوری تعیین کنید که $x'+x''=\frac{\pi}{4}$ گردد

۲۳۹۶- $m\sin 2x+(3-2m)\cos 2x=m$

۲۳۹۷- چه رابطه بین a و b باید وجود داشته باشد تا مجموع ریشه‌های معادله زیر برابر $\frac{5\pi}{12}$ باشد

$a\sin 2x+b\cos 2x=\sqrt{3}$

۲۳۹۸- $\cos 4x+6\cos^2 x-4=0$

۲۳۹۹- $\frac{1}{tg\frac{x}{2}}+\frac{1}{\sin x}=2$

۲۴۰۰- $\sin 5x-\sin x+\cos 4x+\cos 2x=0$

۲۴۰۱- $\cos 2x+2\sin x+1=0$

۲۴۰۲- $tg 2x=tg x\, tg(x-45^\circ)\, tg(45^\circ+x)$

۲۴۰۳- $\sin 2x+\sqrt{3}-2\cos x-\sqrt{3}\sin x=0$

۲۴۰۴- $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3x}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$

۲۴۰۵- $\frac{\sin 2\theta-\cos 2\theta}{\sqrt{2}}=2\sin^2\theta-1$

۲۴۰۶- اگر $\sin x=\frac{4}{5}$ و $\sin y=-\frac{3}{5}$ باشد ثابت کنید $x+y=\frac{\pi}{2}+2K\pi$ است

و ثانیاً، خطوط مثلثاتی قوس $y-x$ را حساب کنید (انتهای x در ربع دوم و انتهای y در ربع چهارم است.)

۲۴۰۷- خطوط مثلثاتی کمان $-\frac{24\pi}{3}$ را حساب کنید

۲۴۰۸- از روابط زیر کمانهای x و y و z را حساب کنید.

$2x+3y-2z=\frac{5\pi}{12}$ و $x+2y+z=180^\circ$ با $5x-y+3z=\frac{950K}{3}$

۲۴۰۹- از تساوی زیر a و b و c را تعیین کنید.

$$\sin^8 x+\cos^8 x = a\cos^2 4x + b\cos 4x + c$$

۲۴۱۰- از رابطه $tg x = \dfrac{tg y + tg z}{1 + tg y\, tg z}$ رابطه $\dfrac{\sin 2y + \sin 2z}{1+\sin 2y \sin 2z} = \sin 2x$

را نتیجه بگیرید.

۲۴۱۱- اگر $\sin x = \dfrac{3}{5}$ و $\sin y = \dfrac{7}{25}$ و $cotg z = \dfrac{5}{12}$ بوده و x و y و z زوایای حاده باشند حساب کنید. $\cos(2x+y+z)$ را

۲۴۱۲- رابطه زیر را ثابت کنید.

$$Arctg 1 + Arctg 2 + Arctg 3 = 180^\circ$$

۲۴۱۳- در مثلث قائم‌الزاویه ABC که $A = 90^\circ$ میانه BM باضلع AC زاویه 105° میسازد وطول این میانه مساوی ۸متر است پیدا کنید اضلاع مثلث ABC و tg زوایای B و C را

۲۴۱۴- درصورتیکه $tg\alpha = -\dfrac{5}{12}$ باشد وانتهای کمان α درربع دوم باشد خطوط مثلثاتی کمان $(-\alpha)$ را حساب کنید.

۲۴۱۵- درصورتیکه $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ باشد وانتهای کمان α درربع اول باشد، مطلوبست محاسبه خطوط مثلثاتی کمان $(\pi+\alpha)$ را

۲۴۱۶- درتابع $y = \dfrac{4(x-x^3)}{x^4-6x^2+1}$ وتابع $y = tg 4a$ مقدار x رابرحسب خطوط مثلثاتی a بساده‌ترین صورت بدست آورید.

۲۴۱۷- اگر $x' = tg\alpha$ و $x'' = tg\beta$ ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2+px+q=0$ باشند عبارت زیر رابرحسب p و q حساب کنید.

$$\sin^2(\alpha+\beta) + P\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) + p\cos^2(\alpha+\beta)$$

۲۴۱۸- ثابت کنید که $Arctg x + Arctg y = Arc\cos \dfrac{1-xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}$

۲۴۱۹ـ مطلوبست تعیین رابطه‌ای بین a و b و c درصورتیکه داشته باشیم

$tg\,a + tg\,b + tg\,c = tg\,a\, tg\,b\, tg\,c$

۲۴۲۰ـ مطلوبست تعیین خطوط مثلثاتی کمان ۱۴۲۷٫۵° و همچنین محاسبه $tg4x$ و $cotg4x$ برحسب tgx

می‌دانیم که

$cos(a+b) = cos\,a\,cos\,b - sin\,a\,sin\,b$ و $sin(a+b) = sin\,a\,cos\,b + cos\,a\,sin\,b$ چرا؟

۲۴۲۱ـ درصورتی که بدانیم $sin\,\alpha = -\frac{7}{12}$ و $tg\beta = \frac{5}{12}$ باشد وزوایای α و β حاده باشند مطلوبست محاسبه هریك ازعبارات زیر

الف ـ $tg[\pi - (\alpha+\beta)]$

ب ـ $cos(\pi - \alpha + \beta)$

۲۴۲۲ـ نوع مثلثی را تعیین کنید که بین زوایای آن رابطه زیر برقرار باشد.

$cos\,A + cos\,B = sin\,C$

۲۴۲۳ـ از رابطه زیر مقدار K و نسبتهای مثلثاتی زاویه φ را چنان تعیین کنید که تساوی زیر همواره برقرار باشد.

$4\,sin\,x + 3\,cos\,x = K\,sin(x+\varphi)$

۲۴۲۴ـ ثابت کنید $cos\frac{\pi}{16} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

۲۴۲۵ـ ثابت کنید $8(sin^2 42 - cos^2 78) = \sqrt{5}+1$

۲۴۲۶ـ بفرض آنکه x و y حاده باشند مقادیرشان رااز رابطه زیر بدست آورید:

$x + y = \frac{\pi}{3}$ و $tg\,x + tg\,y = 2 - \sqrt{3}$

۲۴۲۷ـ بفرض آنکه $A+B+C = 90°$ باشد ثابت کنید.

$sin^2A + sin^2B + sin^2C + 2\,sin\,A\,sin\,B\,sin\,C = 1$

۲۴۲۸ـ اگر $tg\alpha$ و $tg\beta$ و $tg\gamma$ ریشه‌های معادله $x^3 - mx^2 - mx + 1 = 0$ باشند ثابت کنید مجموع سه زاویه α و β و γ بمقدار m بستگی ندارد.

۲۴۲۹ـ مجموع n جمله از رشته زیر را حساب کنید:

$$S=\operatorname{Arctg}\frac{1}{17}+\operatorname{Arctg}\frac{1}{41}+\cdots+\operatorname{Arctg}\frac{1}{5n^2+9n+3}$$

درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید:

۲۴۳۰ـ $\dfrac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}{\cos x+\cos 2x+\cos 3x}=\operatorname{tg}2x$

۲۴۳۱ـ $\sin 4A+\sin 4B+\sin 4C=-4\sin 2A\sin 2B\sin 2C$

۲۴۳۲ـ $\dfrac{1}{2}(\sin^8 x+\cos^8 x-1)=\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x\cos^2 x-2)$

۲۴۳۳ـ $\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\sin 7x=\dfrac{\sin^2 4x}{\sin x}$

۲۴۳۴ـ $2\operatorname{tg}2x=\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}-\dfrac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}$

۲۴۳۵ـ $\dfrac{\sin 2a}{1+\cos 2a}\times\dfrac{\cos a}{1+\cos a}=\operatorname{tg}\dfrac{a}{2}$

۲۴۳۶ـ $\dfrac{\sin 2x-\operatorname{tg}x\cos 2x}{\cos 2x+\operatorname{tg}x\sin 2x}=\operatorname{tg}x$

هر یك از عبارات زیر را قابل محاسبه به لگاریتم کنید:

۲۴۳۷ـ $4\sin^2 x-3$

۲۴۳۸ـ $8\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ+2\sin 70^\circ$

۲۴۳۹ـ $\dfrac{2}{\sin a}-\dfrac{2}{\cos a}$ و $\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{cotg}^2 x$ و $\cos^2 9x-\cos^2 a$ و $4-2\sqrt{3}$

مسائلی از امتحانات دبیرستانهای شیراز

معادلات زیر را حل کنید:

۲۴۴۰ـ $x^2\operatorname{tg}^2 a-2(2+\operatorname{tg}^2 a)x+\operatorname{tg}^2 a=0$

۲۴۴۱ـ $\sin(x+30^\circ)\sin(x-30^\circ)=0{,}25$

۲۴۴۲- $\sin^2 x + (m-1)\sin x \cos x - m\cos^2 x = 0$

۲۴۴۳- $\cos^2(x+20^\circ) + \cos^2(x-20^\circ) + \cos^2 x = 2$

۲۴۴۴- $8(\sin^4 x + \cos^4 x) = \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x + 6$

۲۴۴۵- $\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = 3 \div 8$

۲۴۴۶- $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$

۲۴۴۷- $tg\, x - 12\, tg^2 x + 4\, tg\, x + 8\, cotg\, 8x = cotg\, 5x$

۲۴۴۸- $\sin 3x - \cos 3x + \sin 2x + \cos 2x + \sin x - \cos x + 1 = 0$

۲۴۴۹- $12\sin(x-65) + 5\sin(x+25) + 13\sin(7x+36) = 0$

۲۴۵۰- $tg\, \frac{5x}{7} + cotg\, \frac{7}{5}x = 1 - \sec\frac{5x}{7}\, cosec\, \frac{7x}{5}$

$3\sin^2 x + 2\cos x = 0$

درستی اتحادهای زیر را تحقیق کنید:

۲۴۵۱- $1 + 2\sin 2x - 2\cos 4x = 16\cos(x-27)\cos(x+9) \times$
$\times \sin(x+27)\sin(x-9)$

۲۴۵۲- $\dfrac{\sin x \sin 2x + \sin 2x \sin 5x + \sin 3x \sin 10x}{\sin x \cos 2x + \sin 2x \cos 5x + \sin 3x \cos 10x} = tg\, 7x$ ۹

۲۴۵۳- اگر A، B و C زوایای مثلثی باشند ثابت کنید

$$(1 + tg\,\frac{A}{4})(1 + tg\,\frac{B}{4})(1 + tg\,\frac{C}{4}) = 2(1 + tg\,\frac{A}{4}\, tg\,\frac{B}{4}\, tg\,\frac{C}{4})$$

۲۴۵۴- $tg\,6 \times tg\,66 \times tg\,42 \times tg\,78 = 1$

۲۴۵۵- $\dfrac{tg(90 - a)\cos a}{cotg\, a - \sin(270 - a)} = \dfrac{cotg\, a - \cos a}{cotg\, a \times \cos a}$

۲۴۵۶- $\dfrac{\sin(30 + x) - \cos(60 + x)}{\sin(30 + x) + \cos(30 + x)} = \sqrt{3}\, tg\, x$

۲۴۵۷- $cotg\, x - tg(45^\circ - \frac{x}{4}) = \dfrac{1 - 2\sin\frac{x}{2}}{\sin x}$

عبارت زیر را قابل محاسبه بلگاریتم نمائید:

۲۴۵۸- $2\cos 2a+\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)\cos a+\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin x+\sin 2x}+\frac{1}{\sin x+\sin 2x\sin 2x}+\cdots+$$

$$+\frac{1}{\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx}$$

۲۴۶۰- $\cos a+\cos 3a+\cos 5a+\cdots+\cos(2n+1)a$

۲۴۶۱- $1+\sin x+\cos x+\sin x\cos x$

۲۴۶۲- بین روابط زیر a را حذف نمائید

$$\begin{cases} x=2\cos\alpha+\cos 2\alpha \\ y=2\sin\alpha-\sin 2\alpha \end{cases}$$

۲۴۶۳- اگر در مثلثی رابطه

$$(\sin A+\sin B+\sin C)(\sin A+\sin B-\sin C)=3\sin A\sin B$$

برقرار باشد ثابت کنید که $C=60^\circ$ است

۲۴۶۴- اگر $x-y\neq 2k\pi$ باشد و

$$\frac{\cos x}{\cos\alpha}+\frac{\sin x}{\sin\alpha}=\frac{\cos y}{\cos\alpha}+\frac{\sin y}{\sin\alpha}=1$$

باشد ثابت کنید

$$\frac{\cos x\cos y}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin x\sin y}{\sin^2\alpha}+1=0$$

۲۴۶۵- اگر $x+y+z=xyz$ باشد بطریق مثلثاتی ثابت کنید که

$$(xy+yz+xz-1)^2=(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)$$

۲۴۶۶- از رابطه $\frac{tg(a-b)}{tga}+\frac{\sin^2 x}{\sin^2 a}=1$ رابطهٔ $tg^2 x=tga\cdot tgb$ را نتیجه بگیرید

۲۴۶۷- نوع مثلثی را تعیین کنید که در آن $\frac{1}{8}=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ باشد

۲۴۶۸ـ هرگاه $tg3x=\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}$ برقرار باشد بفرض آنکه $tg\varphi=\frac{b}{a}$ باشد عبارت بالا را قابل محاسبه لگاریتم نموده وزاویه x بر حسب φ حساب کنید

۲۴۶۹ـ

$$\frac{x^2}{2\sin^2(\frac{1}{2}\,Arctg\,\frac{x}{y})}+\frac{y^2}{2\cos^2(\frac{1}{2}\,Arctg\,\frac{y}{x})}$$

۲۴۷۰ـ اگر A و B و C زوایای مثلثی باشند $\sin A$ و $\sin B$ و $\sin C$ تشکیل تصاعد عددی بدهند روابط زیر را تحقیق کنید

$$tg\,\frac{B}{2}\,tg\,\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$$

۲۴۷۱ـ ثابت کنید که عبارت زیر به مقدار a و b بستگی ندارد

$$\frac{\sin b\cos a(tga+tgb)}{1-\cos(a+b)}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\cos b\sin\frac{a+b}{2}}$$

۲۴۷۲ـ درصورتی که $\sin x=\frac{3}{5}$ و $\sin y=\frac{7}{25}$ و $\cos z=-\frac{15}{13}$ وزوایای x و y حاده وانتهای کمان z در ربع دوم باشد مقدار عبارت $\sin(x+y-z)$ را حساب کنید

۲۴۷۳ـ اگر A و B و C زوایای مثلثی باشند و $\sin A$ و $\sin B$ و $\sin C$ تشکیل تصاعد عددی بدهند رابطه زیر را تحقیق کنید

$$4(1-\cos B)(1-\cos C)=\cos B+\cos C$$

۲۴۷۴ـ اگر A و B و C زوایای مثلث ABC باشند و $\sin A$ و $\sin B$ و $\sin C$ تشکیل تصاعد عددی بدهند رابطه زیر را تحقیق کنید

$$tg\,\frac{A}{2}=\frac{\sin B}{2-\cos B}$$

۲۴۷۵ـ ثابت کنید عبارت زیر مقداری است ثابت و به x بستگی ندارد

$$\cos^2(x+45)+\cos^2(x+90)+\cos^2x+\sin x\cos x+0{,}5$$

۲۴۷۶ـ اگر مثلث ABC رابطه $\sin A+\sin C=2\sin B$ محقق باشد می‌توان نتیجه گرفت

$$tg\frac{A}{2}tg\frac{c}{c}=\frac{1}{3}$$

۲۴۷۷ـ اگر $x+y+a+b=\pi$ و $\frac{\cos x}{\cos y}=\frac{\cos a}{\cos b}$ باشد ثابت کنید

$$tg x\, tg b+tg a\, tg y=2$$

۲۴۷۸ـ در مربع مستطیل ABCD قاعده AB برابر ۲a وارتفاع AD برابر a میباشد خط AE با AB زاویه ۳۰° و خط AF با AB زاویه ۷۵° میسازد مطلوبست محاسبه اندازه اضلاع مساحت ذوزنقه ABEF برحسب a

۲۴۷۹ـ مطلوبست تعیین اندازه یك كمان بنا برآنكه بدانیم تفاضل عكس اندازه‌های آن برحسب گراد ودرجه مساوی است با اندازه آن برحسب رادیان تقسیم بر 2π

۲۴۸۰ـ ثابت کنید عبارت $\frac{a(x^2-1)-x(a^2-1)}{x^2+1}$ بازاء $x=tg\alpha$ و $a=tg\beta$ بصورت زیر نوشته میشود $\frac{\sin(2\alpha-2\beta)}{2\cos^2\beta}$

۲۴۸۱ـ زوایای مثلثی ۴x درجه و $\frac{70x}{9}$ گراد و $\frac{\pi x}{20}$ رادیان است حساب کنید زوایای این مثلث را برحسب درجه

۲۴۸۲ـ درمثلث قائم‌الزاویه ABC (قائم در A) داریم $m=\frac{b+a}{c}$ اولا مطلوبست محاسبه $tg\frac{B}{2}$ برحسب m ثانیاً ـ اگر $tg\frac{B}{2}=\frac{m-1}{m+1}$ باشد مطلوبست محاسبه خطوط مثلثاتی زوایای B و C

۲۴۸۳ـ ثابت کنید که اگر α کمانی باشد که انتهایی از آن در ربع اول است داریم

$$tg\alpha+cotg\alpha\geq 2$$

۲۴۸۴ـ مقادیر x را طوری تعیین کنید که عبارت $2\sin x-\sqrt{3}\cos x$ ماکزیمم باشد

۲۴۸۵ـ اگر سه زاویه x و y و Z حاده بوده و رابطه $x+y+Z=\pi$ صدق کند ثابت کنید

$$tg x\cdot tg y\cdot tg Z\geq 3\sqrt{3}$$

«مسائل انتخابی از امتحانات بندر پهلوی ـ رشت»

معادلات زیر را حل کنید:

۲۴۸۶- $\sin mx - \sin(m+2)x + \sin(m+4)x = 0$

۲۴۸۷- $\sin x - 2\cos\frac{x}{3} + \sin\frac{x}{3} = 0$

۲۴۸۸- $\sin(x+52) + \cos(x-36) + 1 = 0$

۲۴۸۹- $tg\, x + tg\, 2x = tg\, 3x$

۲۴۹۰- $tg\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2\, cotg\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$

عبارت زیر را قابل محاسبه لگاریتم کنید:

۲۴۹۱- $S = 1 + \cos 72 + \cos 144 + \cos 72 \cos 144$

درستی اتحادهای زیر را تحقیق کنید:

۲۴۹۲- $\frac{\sin(x+a)}{\sin x} - \frac{\sin(x+a)}{\sin x} = \frac{\sin a(1+tg^2 x)}{tg\, x}$

۲۴۹۳- $\left(1 + tg^2\frac{x}{2}\right)(1+\cos x) + \left(1 + cotg^2\frac{x}{2}\right)(1-\cos x) = 4$

۲۴۹۴- $arctg\sqrt{\frac{a(a+b+c)}{bc}} + arctg\sqrt{\frac{b(a+b+c)}{ac}} + arctg\sqrt{\frac{c(a+b+c)}{ab}} = \pi$

۲۴۹۵- A و B و C را چنان بیابید که رابطه زیر همواره برقرار باشد

$$\frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x - 1} \equiv A \sin x + B \cos x + C$$

۲۴۹۶ـ مطلوبست تعیین رابطه‌ای مستقل از α بین a و b و c از

$$\begin{cases} a\cos\alpha + b\sin\alpha = c(\cos^2\alpha - 1) \\ 2a\sin\alpha - 2b\cos\alpha = 2c\sin\alpha\cos\alpha \end{cases}$$

۲۴۹۷ـ اگر $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ و α حاده باشد از رابطه زیر x را بر حسب α محاسبه نمائید

$$tg\,x = \frac{1 + 2\sqrt{3}}{1 - 2\sqrt{3}}$$

۲۴۹۸ـ اگر $\cos(x + y) = \cos x \cos y$ باشد ثابت کنید

$$tg^2x + tg^2g + 3\,tg\,x\,tg\,g = 1$$

۲۴۹۹ـ اگر $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cdots + \cos 2nx = k$ باشد ثابت کنید

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \cdots + \sin^2 nx = \frac{n - k}{2}$$

۲۵۰۰ـ در مثلث ABC اگر رابطه $tg\,A = m$ و $tg\,B = m + 1$ برقرار باشد m را طوری پیدا کنید که $C = \frac{\pi}{4}$ باشد (بحث)

۲۵۰۱ـ اگر $\cos 3x + \cos 5x + \cos 7x + \cdots + \cos(2m + 1)x = k$ باشد ثابت کنید

$$\cos x\cos 2x + \cos 2x\cos 3x + \cos 3x\cos 4x + \cdots + \cos nx\cos(n + 1)x = \frac{n\cos x + k}{2}$$

۲۵۰۲ـ اگر درمثلثی ABC رابطه $\sin A + \sin B + \sin(B - C) = 0$ برقرار است اندازه زاویه C را بدست آورید

۲۵۰۳ـ اگر $5\,tg(2x + y) = cotg(x - 2y)$ ثابت کنید رابطه زیر برقرار باشد

$$\frac{\cos(x + 3y)}{\cos(3x - y)} = 1/5$$

۲۵۰۴ـ اگر $tg(2x + \frac{3\pi}{7}) = \frac{1}{7}$ باشد مطلوبست محاسبه $tg(\frac{5\pi}{6} - x)$

۲۵۰۵ـ مقدار عددی عبارت زیر را بیابید

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos 3\pi$$

۲۵۰۶ـ هرگاه $2a^2-4a+1=\cos\frac{2x}{5}$ باشد ثابت کنید (x زاویه منفرجه است)

$$\frac{\cos^2\frac{x}{10}}{a}+\frac{\sin^2\frac{x}{10}}{2-a}=1$$

۲۵۰۷ـ ثابت کنید عبارت زیر بستگی به a و b ندارد

$$\frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{\left(\cos\frac{a+b}{2}+\sin\frac{a-b}{2}\right)\left(\cos\frac{a+b}{2}-\sin\frac{a-b}{2}\right)}$$

۲۵۰۸ـ از رابطه $y:\ \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$ رابطه $\sin 2y = x^2$ را بدست آورید

مسائل انتخابی از امتحانات دبیرستانهای

(تفرش، اراک ـ بروجرد)

درستی اتحادهای زیر را تحقیق کنید :

۲۵۰۹ـ $\cos^2 2a-\sin^2 a=\cos a\cos 3a$

۲۵۱۰ـ $\operatorname{Arccos}\left(-\frac{44}{125}\right)=2\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$

۲۵۱۱ـ $\frac{4\cos 7x}{\sin 9x-\sin 5x}=\operatorname{tg}x+\operatorname{cotg}x$

۲۵۱۲- $arctg\frac{۲}{۳} + \arccos\frac{۴}{۵} - arccotg\frac{۲۳}{۱۱} = \frac{\pi}{۴}$

معادلات زیر را حل کنید:

۲۵۱۳- $tg x = ۲\sqrt{۳}(۱ - \cos x)$

۲۵۱۴- $۲\cos ۴x - ۴(\cos^۲ x - \sqrt{۲}\sin^۲ x) + ۴ - \sqrt{۲} = ۰$

۲۵۱۵- $\cos ۳x + ۲\cos x = ۰$

۲۵۱۶- $\cos(۲x - \frac{۲\pi}{۳}) + ۲\cos^۲(\frac{\pi}{۶} - \frac{x}{۲}) = ۰$

۲۵۱۷- $۲\cos^۲(x + ۱۲۰^\circ) - \sqrt{۳}\cos(x - ۱۵۰^\circ) - ۲ = ۰$

۲۵۱۸- $\sin x + \sin ۲x - \sin ۳x = ۰$

۲۵۱۹- $\frac{\cos(\pi + ۲x)}{\sin(۲x - \pi)} + \frac{\cos(۲\pi + ۲x)}{\sin(۲x - ۲\pi)} + \frac{\cos(۳\pi + ۲x)}{\sin(۲x - ۳\pi)} - tg x = ۰$

عبارات زیر را قابل محاسبه بلگاریتم نمائید:

۲۵۲۰- $(\sin x + \sin y)^۲ + (\cos x - \cos y)^۲ - ۱$

۲۵۲۱- $۱ - \sin^۲ x - \sin^۲ y$

۲۵۲۲- درصورتی که $\cos x = \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۴}$ باشد مطلوبست مقدار $\cos ۴x$ و از آنجا کمان ساده x را تعیین کنید

۲۵۲۳- اگر $tg^۲ x\, cotg^۲ y - cotg^۲ y = ۲$ باشد ثابت کنید

$\cos ۲y - ۱ = ۲\cos ۲x$

۲۵۲۴- ثابت کنید که عبارت زیر مربع کامل است

$A = (۱ - \sin x)(۵\sin x - ۱۲\cos x + ۱۳)$

۲۵۲۵- دو پارامتر a و b را چنان تعیین کنید تا رابطه زیر بازاء جمیع مقادیر x برقرار باشد

$۴cotg^۲ x = \cos x(\frac{b}{۱ + \cos x} + \frac{a}{۱ - \cos x})$

۲۵۲۶- از رابطه $(۱ + a\cos x)(۱ - a\cos y) = ۱ - a^۲$ رابطه

$$\frac{tg^2\frac{x}{2}}{tg^2\frac{y}{2}}=\frac{1+a}{1-a}$$

۲۵۲۷ـ سری زیر را حساب کنید:

$$S=\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{3\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+$$
$$+\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+\cos\frac{n\pi}{n}$$

۲۵۲۸ـ رابطه‌ای مستقل از α را بدست آورید:

$x=\sin 2\alpha+1$ و $y=\sin\alpha+\cos\alpha$

۲۵۲۹ـ اگر $A+B+C=\pi$ باشد ثابت کنید که

$$tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}+tg\frac{A}{2}tg\frac{C}{2}=1$$

۲۵۳۰ـ اگر داشته باشیم $tgx+cotgx=\frac{49\sqrt{6}}{60}$ خطوط مثلثاتی کمان حاده x را بدست آورید

۲۵۳۱ـ مطلوبست تعیین اعداد A و B و C بطریقی که همواره رابطه زیر محقق باشد

$$\frac{2}{\sin x\cos x(\sin x+\cos x)}=\frac{A}{\sin x}+\frac{2B}{\cos x}+\frac{3C}{\sin x+\cos x}$$

۲۵۳۲ـ ثابت کنید اگر $x+y=45^\circ$ باشد رابطه زیر محقق است

$$(1+tgx)(1+tgy)=2$$

۲۵۳۳. از رابطه $\frac{tg(a-b)}{tga}+\frac{\sin^2 x}{\sin^2 a}=1$ رابطه $tg^2x=tga\,tgb$ را نتیجه بگیرید:

۲۵۳۴ـ رابطه زیر را بر حسب $tg\frac{x}{2}$ بنویسید $a\cos x+b\sin x+c$

۲۵۳۵ـ اگر مجموع دو کمان x و y برابر 60° باشد و مجموع تانژانت آن دو کمان $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ باشد اولاً $tg(x+y)$ را حساب کنید و از روی آن tgx و tgy را بدست آورید ثانیاً کمانهای x و y را نیز حساب کنید

۲۵۳۶ـ مثلث قائم‌الزاویه ABC ($A=90^\circ$) مفروض است میانه BM را رسم میکنیم این میانه باضلع AC زاویه 105° می‌سازد وطول آن ۸ متر است مطلوبست اندازه اضلاع مثلث تانژانت زوایای B و C

از رابطه

$$a^2 \sin^2(x+y)=\sin^2 x+\sin^2 y-2\sin x\sin y\cos(x-y)$$

۲۵۳۷ـ رابطه زیر را نتیجه بگیرید.

$$tg\,x=\frac{1\pm a}{1\mp a}\,tg\,y$$

(مسائل انتخابی از امتحانات دبیرستانهای کرمانشاه همدان)

درستی تساوی‌های زیر را تحقیق کنید:

۲۵۳۸ـ $\dfrac{2\sin(x+y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}=tg\,x+tg\,y$

۲۵۳۹ـ $\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=tg\,\dfrac{x}{2}$

۲۵۴۰ـ در هر مثلث $\dfrac{\sin A+\sin B-\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}=tg\,\dfrac{A}{2}\,tg\,\dfrac{B}{2}$

۲۵۴۱ـ $\sin x+\sin y-\sin(x+y)=4\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{y}{2}\sin\dfrac{x+y}{2}$

۲۵۴۲ـ $\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x=0/5\sin 8x\,cosec\,x$

۲۵۴۳ـ $\cos^6 x-\sin^6 x=\dfrac{1}{4}\cos 2x(3+\cos^2 2x)$

۲۵۴۴ـ $tg\,9-tg\,27-tg\,63+tg\,81=4$

۲۵۴۵ـ $\sin^3 A+\sin^3(120^\circ+A)+\sin^3(240^\circ+A)=-0/75\sin 3A$

معادلات زیر را حل کنید:

۲۵۴۶ـ $\cos 2x-5\cos x-2=0$

۲۵۴۷ـ $\cos(x+60^\circ)+\sin(x+30^\circ)=0/5\sqrt{3}$

سوالات امتحانی مثلثات کلاس دوم ریاضی خرداد ۴۶ — مدت ۱/۵ ساعت

س ۱. درجه و گراد و رادیان را تعریف کرده و $\frac{3\pi}{4}$ رادیان را به درجه و گراد تبدیل کنید. (۲/۵)

س ۲ – روابط مثلثاتی دو کمان بتفاضل ۱۸۰° را بدست آورید. (۲/۵)

س ۳ – نسبت‌های مثلثاتی ۲۲/۵ را با استفاده از رابطهٔ $\cos 2a =$ بدست آورید. (۲)

س ۴ – کسر زیر را ساده کنید. (۲/۵)

$$\frac{\sin a + \sin 3a + \sin 5a}{\cos a + \cos 3a + \cos 5a}$$

س ۵ – معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید و جوابهای محصور بین ۰ و 2π را بدست آورید: $\cos^2 x - \sqrt{2}\cos x = 0$ (۲/۵)

س ۶ – درستی اتحادهای زیر را تحقیق کنید.

$$\cos(x-y) + \sin(x+y) = (\sin x + \cos x)(\sin y + \cos y)$$ (۴)

$$\left(\frac{1}{\sin x} - \sin x\right)\left(\frac{1}{\cos x} - \cos x\right) = \frac{\tan x}{1+\tan^2 x}$$

س ۷ – مطلوبست تعیین نوع مثلثی که در آن رابطهٔ زیر برقرار شود.

$$\sin B + \cos B = \sin C + \cos C$$ (۳)

ناظر امتحانات:

دبیر مربوطه: بهروزی