



مؤسسه انتشارات علمی

# آشنایی با المپیاد ریاضی

یحیی تائبش

رامین تکلویغش، امیر جعفری، کسری رفیع

پیمان کسای، رضا ناصر عصر، بهرنگ نوحی



# آشنایی با المپیاد ریاضی

یحیی تابش

رامین تکلوییغش، امیر جعفری، کسری رفیع  
پیمان کسائی، رضاناظر عصر، بهرنگ نوحی



مؤسسه انتشارات علمی

دانشگاه صنعتی شریف

آشنایی با المپیاد ریاضی

تألیف دکتر یحیی تابش

رامین تکلویغش، امیر جعفری، کسری رفیع  
پیمان کسایی، رضاناظر عصر، بهرنگ نوحی

ویراسته بردیا حسام

چاپ دوم، ۱۳۸۰

شمارگان: ۲۰۰۰۰

بها: ۱۰۰۰۰۰ ریال

لیتوگرافی، چاپ، و صحافی: چاپخانه دانشگاه صنعتی شریف

حق چاپ برای مؤسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف محفوظ است.

شابک: ۹۶۴-۶۳۷۹-۱۰-۹

ISBN 964-6379-10-9

آشنایی با المپیاد ریاضی [یحیی تابش ... [و دیگران]؛ ویراسته بردیا حسام. - تهران: دانشگاه صنعتی شریف،  
مؤسسه انتشارات علمی، ۱۳۷۸.

پنج، ۲۰۱ ص:؛ مصور، جدول.

چاپ اول: ۱۳۷۷. بها: ۸۰۰۰۰ ریال.

فهرست نویسی بر اساس اطلاعات فیبا (فهرست نویسی پیش از انتشار)

چاپ دوم: ۱۳۸۰. بها: ۱۰۰۰۰۰ ریال

۱. المپیادها (ریاضیات). ۲. ریاضیات - مسائل، تمرینها و غیره. ۳. ریاضیات - مسابقه ها. الف. تابش، یحیی،

۱۳۲۹ - ب. حسام، بردیا، ۱۳۵۶ - ، ویراستار. ج. دانشگاه صنعتی شریف. مؤسسه انتشارات علمی.

۳۷۳/۲۳۸

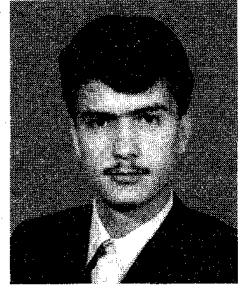
LB ۳۰۶۰/۲۴/۲۵

۲۷۷-۳۴۸

کتابخانه ملی ایران

این کتاب با استفاده از سهمیه کاغذ تخصیص داده شده وزارت فرهنگ و ارشاد اسلامی چاپ شده است.

این کتاب به یاد و باگرامیداشت خاطره عزیز  
 از دست رفته‌مان زنده‌یاد رضا صادقی  
 دانشجوی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه  
 صنعتی شریف که در سانحه دلخراش  
 تصادف نخبگان ریاضی کشور جان سپرد  
 منتشر می‌شود.



رضا صادقی  
 (۱۳۵۶-۱۳۷۶)

### گزیده‌ای از زندگی پرافتخار رضا صادقی

- دریافت مدال طلای یازدهمین المپیاد ملی ریاضی، ۱۳۷۲.
- دریافت مدال نقره سی و پنجمین المپیاد بین‌المللی ریاضی، هنگ‌کنگ، ۱۳۷۳.
- دریافت مدال طلای دوازدهمین المپیاد ملی ریاضی، ۱۳۷۳.
- دریافت مدال طلای سومین المپیاد ملی ریاضی، ۱۳۷۳.
- دریافت مدال طلای سی و ششمین المپیاد بین‌المللی ریاضی، کانادا، ۱۳۷۴.
- دانشجوی برگزیده دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف، ۷۷-۱۳۷۶.
- بورسیه مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات، ۱۳۷۴-۱۳۷۶.
- مدرس دوره‌های آموزشی المپیاد ریاضی، باشگاه دانش‌پژوهان جوان، ۷۶-۱۳۷۴.
- مدرس تمرین ریاضی عمومی ۱، دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف، ۷۶-۱۳۷۵.
- ارائه مقاله «اعداد ساختنی-جهان منتهی»، در اولین سمینار ریاضی دانشجویان کشور،  
 ۲۴/۱۲/۷۶، دانشگاه شهید چمران اهواز.

برای یاد بود و گرامیداشت خاطره رضا صادقی تصمیم گرفته شد از سال ۱۳۷۷ به بعد هر  
 ساله جایزه‌ای به نام جایزه رضا صادقی در مورد مسائل برگزیده برای ارسال به المپیاد بین‌المللی  
 ریاضی از طرف باشگاه دانش‌پژوهان جوان و دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف  
 به برگزیدگان اهدا شود.

## فهرست مطالب

| صفحه | عنوان                              |
|------|------------------------------------|
|      | پیشگفتار مؤلفان                    |
| ۱۰   | فصل ۱ هنر حل مسأله                 |
| ۱    | ۱-۱ جستجو برای الگو                |
| ۳    | ۲-۱ رسم شکل                        |
| ۵    | ۳-۱ صورتبندی مسأله معادل           |
| ۷    | ۴-۱ تغییر مسأله                    |
| ۸    | ۵-۱ انتخاب نمادهای مناسب           |
| ۹    | ۶-۱ استفاده از تقارن               |
| ۱۱   | ۷-۱ تجزیه به حالت‌های ساده‌تر      |
| ۱۲   | ۸-۱ کار عقب‌رونده                  |
| ۱۴   | ۹-۱ بررسی نقیض                     |
| ۱۴   | ۱۰-۱ زوجیت                         |
| ۱۵   | ۱۱-۱ بررسی حالت‌های حدی            |
| ۱۷   | ۱۲-۱ تعمیم                         |
| ۱۹   | فصل ۲ اصل استقرا و اصل لانه کبوتری |
| ۱۹   | ۱-۲ استقرا با $P(k)$               |
| ۲۱   | ۲-۲ استقرا با $P(k+1)$             |
| ۲۲   | ۳-۲ استقرای قوی و تعمیم            |

|     |     |   |
|-----|-----|---|
| ۲۴  | ۴-۲ | رابطه‌های بازگشتی                         |
| ۲۵  | ۵-۲ | اصل لاتِه کیوتِری                         |
| ۳۱  |     | فصل ۳ دنباله‌ها                           |
| ۳۱  | ۱-۳ | دنباله‌های اعداد                          |
| ۳۴  | ۲-۳ | همگرایی دنباله‌ها                         |
| ۳۸  | ۳-۳ | دنباله‌های همگرای مهم                     |
| ۳۹  | ۴-۳ | دنباله‌های بازگشتی                        |
| ۴۷  | ۵-۳ | دنباله‌های متناوب عددی                    |
| ۵۳  | ۶-۳ | دو دنباله خاص                             |
| ۵۶  | ۷-۳ | سریها                                     |
| ۷۳  |     | فصل ۴ یادآوریهایی از نظریهٔ اعداد مقدماتی |
| ۸۵  |     | فصل ۵ مباحث پیشرفته‌تر در نظریهٔ اعداد    |
| ۸۵  | ۱-۵ | توابع حسابی                               |
| ۹۲  | ۲-۵ | قانون تقابل مربعی                         |
| ۱۰۱ | ۳-۵ | اندیس                                     |
| ۱۰۵ |     | فصل ۶ نامساویهای هندسی ۱                  |
| ۱۰۶ | ۱-۶ | اتحادهای مهم                              |
| ۱۱۱ | ۲-۶ | نامساویهای $R$ ، $r$ و $p$                |
| ۱۱۹ |     | فصل ۷ نامساویهای هندسی ۲                  |
| ۱۱۹ | ۱-۷ | نامساویهای مهم                            |
| ۱۲۰ | ۲-۷ | اتحادهای مهم                              |
| ۱۲۲ | ۳-۷ | مرکز نقاط                                 |
| ۱۲۸ | ۴-۷ | نامساوی ارویش-موردل                       |
| ۱۳۳ |     | فصل ۸ ریاضیات گسسته                       |
| ۱۳۳ | ۱-۸ | آنالیز ترکیبی و شمارش                     |

|     |                 |
|-----|-----------------|
| ۱۴۳ | ۲-۸ نظریه گراف  |
| ۱۵۶ | ۳-۸ قضیه دیلورث |
| ۱۵۷ | ۴-۸ توابع مولد  |

|     |  |
|-----|--|
| ۱۶۵ | فصل ۹ اعداد مختلط                            |
| ۱۶۵ | ۱-۹ اعداد مختلط                              |
| ۱۶۷ | ۲-۹ نمایش هندسی اعداد مختلط                  |
| ۱۶۹ | ۳-۹ فرمول اویلر                              |
| ۱۷۰ | ۴-۹ تبدیلهای هندسی با استفاده از اعداد مختلط |

|     |  |
|-----|--|
| ۱۷۷ | فصل ۱۰ هندسه                             |
| ۱۷۸ | ۱-۱۰ چند قضیه                            |
| ۱۸۵ | ۲-۱۰ زیرمیانها و نقطه‌های بروکار در مثلث |

## بسم الله الرحمن الرحيم

### پیشگفتار مؤلفان

المیپاد ریاضی آوردگاه حل مسأله است. در واقع مسأله سرچشمه جوشان ریاضیات و موجب شادابی و سرزندگی محیط علمی است و با توجه به نقشی که حل مسأله در فراگیری ریاضیات دارد، ایجاد زمینه و انگیزه برای حل مسأله‌ای که به دقت طرح شده‌اند، فرآیند فراگیری ریاضیات را شتاب می‌بخشد. در این راستا احساس رضایت حاصل از یک تلاش فکری بزرگ است که ذهنهای جوان را به خلاقیت و نوآوری رهنمون می‌شود.

سابقه تاریخی مسابقات ریاضی به ۱۸۹۴ میلادی بازمی‌گردد که مسابقات ریاضی دانش‌آموزی در کشور مجارستان آغاز شد و پس از آن رفته‌رفته، کشورهای دیگر به منظور تشویق و ترغیب دانش‌آموزان به فراگیری ریاضیات به برگزاری مسابقات ریاضی دست زدند تا اینکه در سال ۱۹۵۹ میلادی کشور رومانی به ابتکار برگزاری اولین المپیاد بین‌المللی ریاضی دست زد، در اولین المپیاد فقط ۶ کشور حضور داشتند ولی به مرور کشورهای بیشتری به المپیاد پیوستند به طوری که در حال حاضر بیش از ۸۰ کشور با تیم‌هایی متشکل از ۶ دانش‌آموز دبیرستانی در المپیاد شرکت می‌کنند، و المپیاد بین‌المللی ریاضی معتبرترین مسابقه بین‌المللی دانش‌آموزی است.

مسابقات دانش‌آموزی در کشور ما نیز جایگاه ویژه‌ای یافته است. اولین مسابقه ریاضی دانش‌آموزی در فروردین ۱۳۶۲ بین دانش‌آموزان برگزیده سرتاسر کشور برگزار شد و برای اولین بار در سال ۱۳۶۶ تیمی به المپیاد بین‌المللی ریاضی اعزام شد، توفیق تیم‌های اعزامی در المپیاد بین‌المللی ریاضی موجب رونق این مسابقات و علاقه‌مندی دانش‌آموزان زیادی به شرکت در المپیاد ملی ریاضی شده است، این امر نوعی آموزش غیررسمی بسیار ارزنده را بین دانش‌آموزان کشور ما رایج کرده است که دستاوردهای بسیار ارزنده‌ای در تقویت بنیه علمی و ایجاد روحیه دانش‌آموزی به همراه داشته است، روحیه‌ای که نویدبخش آینده است.

کتاب حاضر مجموعه‌ای است که برای آشنایی با مباحث المپیاد ریاضی بسیار مفید است و در واقع حاصل تجربه دست‌اندرکاران المپیاد و کسانی است که سابقه عضویت در تیم‌های المپیاد ریاضی را در سال‌های قبل داشته‌اند. این کتاب به دانش‌آموزان علاقه‌مند تقدیم می‌شود.



## هنر حل مسأله

استراتژی‌ها و شگردهای حل مسأله را «مکاشفه» می‌نامند. هر چند که این استراتژی‌ها را نمی‌توان به طور دقیق و کامل طبقه‌بندی کرد ولی، تجربه‌های حل مسأله را می‌توان مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار داد. عمده‌ترین تجربه‌های حل مسأله را در ۱۲ بخش زیرین ذکر می‌کنیم:

۱. جستجو برای الگو
۲. رسم شکل
۳. صورتبندی مسأله معادل
۴. تغییر مسأله
۵. انتخاب نمادهای مناسب
۶. استفاده از تقارن
۷. تجزیه به حالت‌های ساده‌تر
۸. کار عقب‌رونده
۹. بررسی نقیض
۱۰. زوجیت
۱۱. بررسی حالت‌های حدی
۱۲. تعمیم

### ۱-۱ جستجو برای الگو

همواره کار حل مسأله را با نوعی ادراک شهودی از مسأله شروع می‌کنیم و با بررسی چند حالت خاص به سوی الگوسازی برای حل کامل آن جلو می‌رویم.

## ■ مثال ۱-۱

فرض کنید  $S_{n,0}$ ،  $S_{n,1}$  و  $S_{n,2}$  نشان دهنده حاصل جمع سه جمله سه جمله از روی سطر  $n$ ام مثلث خیام باشد که از چپ و با عنصر اول، دوم، و سوم شروع می‌کنیم. بر اساس این روند حدسی برای مقدار  $S_{100,1}$  ارائه کنید.

حل. چند سطر از مثلث خیام را در نظر می‌گیریم و با بررسی آن دنبال الگویی می‌گردیم که قابل تعمیم باشد.

جدول ۱-۱

| مثلث خیام |   |    |    |    |    | $n$ | $S_{n,0}$ | $S_{n,1}$ | $S_{n,2}$ |
|-----------|---|----|----|----|----|-----|-----------|-----------|-----------|
|           |   |    |    |    |    | ۰   | ۱+        | ۰         | ۰         |
|           |   | ۱  | ۱  |    |    | ۱   | ۱         | ۱         | ۰-        |
|           |   | ۱  | ۲  | ۱  |    | ۲   | ۱         | ۲+        | ۱         |
|           |   | ۱  | ۳  | ۳  | ۱  | ۳   | ۲-        | ۳         | ۳         |
|           |   | ۱  | ۴  | ۶  | ۴  | ۱   | ۴         | ۵         | ۶+        |
|           | ۱ | ۵  | ۱۰ | ۱۰ | ۵  | ۱   | ۵         | ۱۱        | ۱۰-       |
|           | ۱ | ۶  | ۱۵ | ۲۰ | ۱۵ | ۶   | ۱         | ۲۲+       | ۲۱        |
| ۱         | ۷ | ۲۱ | ۳۵ | ۳۵ | ۲۱ | ۷   | ۱         | ۴۳        | ۴۲-       |

با بررسی جدول فوق می‌بینیم که در هر سطر دو عدد مساوی وجود دارد و عدد سوم یا یک واحد بیشتر است یا یک واحد کمتر. از طرف دیگر داریم

$$S_{n,0} + S_{n,1} + S_{n,2} = 2^n$$

و با در نظر گرفتن دوره افزایش و کاهش، که طول آن ۶ است، به دست می‌آید

$$S_{100,0} = S_{100,1} = S_{100,2} - 1$$

و همچنین نتیجه می‌شود

$$S_{100,1} + S_{100,1} + S_{100,1} + 1 = 2^{100}$$

پس

$$S_{100,1} = \frac{2^{100} - 1}{3}$$

## ■ مثال ۲-۱

فرض کنید  $x_1, x_2, x_3, \dots$  دنباله‌ای از اعداد حقیقی ناصفر باشد که در رابطه زیر صدق می‌کند

$$x_n = \frac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2} - x_{n-1}} \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

### رسم شکل ۳

شرط لازم و کافی روی  $x_1$  و  $x_2$  به دست آورید برای اینکه به ازای  $n$  های به اندازه کافی بزرگ،  $x_n$  عدد صحیح باشد.

حل. برای درک بهتر مسأله چند جمله از دنباله را محاسبه می‌کنیم

$$x_2 = \frac{x_1 x_2}{2x_1 - x_2}, \quad x_3 = \frac{x_1 x_2}{3x_1 - 2x_2}, \quad x_4 = \frac{x_1 x_2}{4x_1 - 3x_2}$$

با بررسی جملات فوق می‌توانیم یک الگوی کلی حدس بزنیم که به سادگی با استقرا قابل اثبات است:

$$x_n = \frac{x_1 x_2}{(n-1)x_1 - (n-2)x_2}$$

به عبارت دیگر

$$x_n = \frac{x_1 x_2}{(x_1 - x_2)n + (2x_2 - x_1)}$$

حال اگر  $x_1 \neq x_2$ ، می‌بینیم که (به ازای  $n$  های بزرگ) قدرمطلق مخرج از صورت بیشتر می‌شود و لذا  $x_n$  نمی‌تواند عدد صحیح باشد. در نتیجه اگر  $x_1 = x_2$ ، آنگاه کلیه جملات دنباله مساوی است. بدین ترتیب به ازای هر  $n$ ،  $x_n$  عدد صحیح است اگر و فقط اگر  $x_1 = x_2$ . ■

### تمرین

۱. دنباله  $2, 7, 1, 4, 7, 4, 2, 8, \dots$  بدین ترتیب ساخته می‌شود که با  $2, 7$  شروع می‌کنیم و حاصل ضرب جملات متوالی را تشکیل می‌دهیم و برحسب آنکه حاصل یک رقمی یا دورقمی باشد، یک جمله یا دو جمله به دنباله اضافه می‌شود. ثابت کنید رقم ۶ بینهایت بار در این دنباله ظاهر می‌شود.

۲. فرض کنید  $S_1$  دنباله اعداد صحیح و مثبت  $1, 2, 3, 4, \dots$  باشد.  $S_{n+1}$  را بدین گونه تعریف می‌کنیم که با افزودن ۱ به جملاتی که بر  $n$  بخش پذیرند، از  $S_n$  حاصل شود. پس مثلاً

$$S_2 : 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

$$S_3 : 3, 3, 5, 5, 7, 7, \dots$$

مقادیر  $n$  را طوری تعیین کنید که  $(n-1)$  جمله اول  $S_n$  برابر  $n$  باشد.

### ۲-۱ رسم شکل

در هر مسأله‌ای که امکانپذیر باشد، رسم یک شکل (اعم از هندسی، یا یک نمودار و غیره) می‌تواند در یافتن حل مسأله الهام‌بخش باشد و رابطه بین اجزاء مسأله را بهتر نمایان سازد.

## ■ مثال ۳-۱

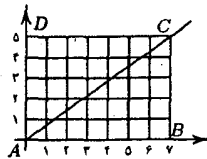
اگر  $a$  و  $b$  اعدادی صحیح و مثبت و بدون عامل مشترک باشند، نشان دهید

$$\left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{2a}{b}\right] + \left[\frac{3a}{b}\right] + \dots + \left[\frac{(b-1)a}{b}\right] = \frac{1}{2}(a-1)(b-1)$$

( $[x]$  جزء صحیح  $x$  است).

حل. اگر  $b = 1$ ، آنگاه تساوی به طور بدیهی برقرار است، ولی اینکه چگونه شکل ۱-۱ می‌تواند به حل این مسأله کمک کند چندان روشن نیست. با کمی دقت می‌بینیم که دو متغیر مستقل  $a$  و  $b$  وجود دارد و مقادیر  $a/b$ ،  $2a/b$ ،  $3a/b$ ، ...، مقادیر تابع  $f(x) = ax/b$ ، در اعداد صحیح و مثبت می‌باشند. آیا می‌توانیم مقادیر  $[a/b]$ ،  $[2a/b]$ ، ... را به طور هندسی توجیه کنیم؟ برای مثال مقادیر  $a = 5$  و  $b = 7$  را در نظر می‌گیریم. هر یک از نقاط  $P_k = (k, 5k/7)$ ،  $k = 1, 2, \dots, 6$ ، روی خط  $y = 5x/7$  قرار دارند. مقدار  $[5k/7]$  برابر با تعداد نقاط مربوط روی خط عمودی گذرا بر  $P_k$  است که بالای محور  $x$ ها و زیر  $P_k$  قرار می‌گیرد، بنابراین  $\sum_{k=1}^6 [5k/7]$  برابر تعداد نقاطی است که درون مثلث  $ABC$  قرار می‌گیرد، که برابر  $12 = \frac{1}{2}(4 \times 6)$  است. در حالت کلی نیز نتیجه به دست آمده درست است و این فرض که  $a$  و  $b$  عامل مشترک ندارند نتیجه می‌دهد که هیچ نقطه‌ای از شبکه روی خط  $y = ax/b$  قرار نمی‌گیرد. اکنون روشن است که

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{b-1} \left[\frac{ka}{b}\right] &= \frac{1}{2}(\text{تعداد نقاط درون مستطیل } ABCD) \\ &= \frac{1}{2}(a-1)(b-1) \end{aligned}$$



شکل ۱-۱

## تمرین

۱. با استفاده از شکل، صحت روابط زیر را نشان دهید

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i a_j = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n a_i a_j, \quad \sum_{j=0}^n \sum_{i=j}^n a_i a_j = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n a_i a_j$$

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_i a_j - \sum_{i=1}^n a_i^2$$

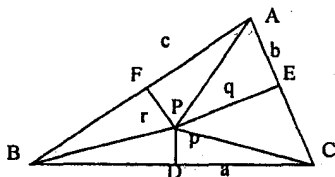
۲. پاره خطی با طول ثابت، روی یک نیمدایره تغییر وضعیت می دهد به طوری که وسط پاره خط و تصویر ابتدا و انتهای پاره خط، روی قطر نیمدایره تشکیل یک مثلث می دهند. ثابت کنید این مثلث متساوی الساقین است.

### ۳-۱ صورتبندی مسأله معادل

در دو بخش قبل دیدیم که گام نخست در حل مسأله عبارت است از جمع آوری داده ها، جستجو، فهمیدن مسأله، برقراری ارتباط بین اجزاء، حدس زدن، و تجزیه و تحلیل؛ ولی اگر همه این کارها به روش معقولی میسر نباشند چه کنیم؟ یعنی اینکه، ممکن است کارهای محاسباتی خیلی پیچیده باشد و یا به سادگی نتوانیم حالت های خاص را مطرح کنیم تا به بینش لازم برسیم. آنچه در چنین شرایطی توصیه می شود این است که مسأله را با مسأله ای معادل ولی ساده تر جایگزین کنیم. راه کلی در این گونه معادل سازی به بینش و تجربه های عمومی باز می گردد، ولی کارهایی از قبیل دستکاری های جبری یا مثلثاتی، و تفسیر مجدد مسأله با زبانی دیگر می تواند مؤثر باشد.

#### ■ مثال ۴-۱

$P$  نقطه ای دلخواه داخل یک مثلث  $ABC$  است. پای عمودهای واصل از  $P$  بر ضلعهای  $BC, CA, AB$  را به ترتیب  $D, E, F$  و می نامیم. کلیه  $P$  هایی را پیدا کنید که  $\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$  مینیمم باشد.



شکل ۴-۱

حل. طولهای  $BC, AC, AB$  را به ترتیب با  $a, b, c$ ، و همچنین طولهای  $PD, PE, PF$  را نیز به ترتیب با  $p, q, r$  نشان می دهیم. می خواهیم مقدار  $a/p + b/q + c/r$  را مینیمم کنیم. دقت کنید که

$$\begin{aligned} \text{مساحت } \triangle ABC &= \text{مساحت } \triangle BCP + \text{مساحت } \triangle CAP + \text{مساحت } \triangle ABP \\ &= \frac{1}{2}ap + \frac{1}{2}bq + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}(ap + bq + cr) \end{aligned}$$

پس  $ap + bq + cr$ ، مستقل از محل نقطه  $p$ ، مقدار ثابتی است. پس به جای مینیمم کردن  $a/p + b/q + c/r$  کافی است مقدار  $(ap + bq + cr)(a/p + b/q + c/r)$  را مینیمم کنیم. می دانیم که

$$\begin{aligned} (ap + bq + cr) \left( \frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} \right) &= a^2 + b^2 + c^2 + ab \left( \frac{p}{q} + \frac{q}{p} \right) \\ &\quad + bc \left( \frac{q}{r} + \frac{r}{q} \right) + ac \left( \frac{p}{r} + \frac{r}{p} \right) \\ &\geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \\ [2mm] &= (a + b + c)^2 \end{aligned}$$

(نامساوی از آنجا ناشی می شود که به ازای هر دو عدد مثبت  $x$  و  $y$ ،  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ ، و تساوی وقتی است که  $x = y$ ). در نتیجه مقدار  $(ap + bq + cr) \left( \frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} \right)$  وقتی مینیمم است که برابر  $(a + b + c)^2$  باشد، و این فقط هنگامی است که  $p = q = r$ . لذا مقدار موردنظر، یعنی  $\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r}$  وقتی مینیمم می شود که  $p$  مرکز دایره محیطی مثلث باشد.

### ■ مثال ۱-۵

عدد صحیح و مثبت  $n$  مفروض است. تعداد چهارتاییهای  $(a, b, c, d)$  از اعداد صحیح و مثبت را تعیین کنید که در آنها  $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq n$ .

حل. ایده کلیدی که مسأله را روشن می سازد این است که تناظر یک به یکی بین چهارتاییهای موردنظر و زیرمجموعه های چهار عضوی مجموعه  $\{0, 1, \dots, n+3\}$  وجود دارد. فرض کنید چهارتایی  $(a, b, c, d)$  که  $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq n$ ، با زیرمجموعه  $\{a, b+1, c+2, d+3\}$  متناظر شده باشد؛ به سادگی دیده می شود که این تناظر یک به یک است، یعنی هر چهارتایی موردنظر ما دقیقاً با یک زیرمجموعه چهار عضوی مجموعه  $\{0, 1, \dots, n+3\}$  متناظر می شود و برعکس. لذا عدد موردنظر عبارت است از  $\binom{n+4}{4}$ .

### تمرین

۱. به چند طریق عدد  $10$  را می توان به صورت مجموع  $5$  عدد صحیح غیر منفی (با در نظر گرفتن ترتیب) نوشت؟

۲. فرض کنید  $a(n)$  نشاندهنده تعداد روشهای بیان یک عدد صحیح و مثبت  $n$  به صورت مجموعی از  $1$ ها و  $2$ ها (با در نظر گرفتن ترتیب) باشد و  $b(n)$  نشانگر تعداد روشهای بیان یک عدد صحیح و مثبت  $n$  به صورت مجموعی از اعداد صحیح بزرگتر از  $1$ ، بازم با در

نظر گرفتن ترتیب. مثلاً جدول زیر نشان می‌دهد که  $a(4) = 5$  و  $b(6) = 5$ .

| $a$ - جمع     | $b$ - جمع |
|---------------|-----------|
| ۱ + ۱ + ۲     | ۴ + ۲     |
| ۱ + ۲ + ۱     | ۳ + ۳     |
| ۲ + ۱ + ۱     | ۲ + ۴     |
| ۲ + ۲         | ۲ + ۲ + ۲ |
| ۱ + ۱ + ۱ + ۱ | ۶         |

الف) با یافتن تناظر یک به یکی بین  $a$ -جمعها و  $b$ -جمعها نشان دهید که به ازای هر  $n$ ،  
 $a(n) = b(n + 2)$

ب) نشان دهید  $a(1) = 1$  و  $a(2) = 2$ ، و به ازای هر  $n > 2$

$$a(n) = a(n-1) + a(n-2)$$

### ۴-۱ تغییر مسأله

در بعضی مسائل می‌توانیم مسأله مورد نظر را به مسأله دیگری تبدیل کنیم؛ این دو مسأله لزوماً معادل یکدیگر نیستند، ولی حل مسأله دوم، حل مسأله اول را نتیجه می‌دهد (عکس این رابطه لزوماً برقرار نیست). به مثالی از این دست توجه می‌کنیم.

#### ■ مثال ۶-۱

اعداد مثبت  $a, b, c, d$  مفروض‌اند. ثابت کنید

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c} + \frac{b^2 + c^2 + d^2}{b + c + d} + \frac{c^2 + d^2 + a^2}{c + d + a} + \frac{d^2 + a^2 + b^2}{d + a + b} \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

حل. نظر به تقارنی که در مسأله وجود دارد کافی است ثابت کنیم به ازای کلیه مقادیر صحیح  $x, y, z$  و

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x + y + z} \geq \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2)$$

برای حل این نامساوی هم، بدون از دست دادن عمومیت مسأله، می‌توانیم فرض کنیم  $x + y + z = 1$ ، زیرا در غیر این صورت کافی است مقادیر زیر را در نظر بگیریم

$$x = x/(x + y + z), \quad Y = y/(x + y + z), \quad Z = z/(x + y + z)$$

پس مسأله اصلی به مسأله زیر تبدیل می‌شود:

اعداد مثبت  $X, Y, Z$  و  $Z = 1$  که  $X + Y + Z = 1$  مفروضند. ثابت کنید

$$X^2 + Y^2 + Z^2 \geq \frac{1}{3}(X^2 + Y^2 + Z^2)$$

حل مسأله اخیر به خواننده واگذار می‌شود.

### تمرین

۱. ثابت کنید اعداد صحیح و مثبت  $x, y, z$  وجود ندارند که

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$$

## ۵-۱ انتخاب نمادهای مناسب

از نخستین گامها در حل مسأله‌های ریاضی، تبدیل مسأله به صورتی «نمادین» می‌باشد. در انتخاب نمادها باید هر ایده کلیدی را ملحوظ داشته، آن را با نمادی بیان کنیم. بی‌دقتی در انتخاب نمادها ممکن است به از بین رفتن یا مبهم شدن بعضی از روابط منجر شود.

### ■ مثال ۱-۷

اگر  $n$  عدد صحیح و مثبتی باشد که  $2n + 1$  مربع کامل است، نشان دهید  $n + 1$  به صورت مجموع دو مربع کامل متوالی قابل بیان است.

حل. انتخاب نمادهای مناسب، مسأله را بسیار ساده می‌کند. فرض کنید  $s^2 = 2n + 1$ ، که  $s$  یک عدد صحیح است. چون  $s^2$  یک عدد فرد است، پس  $s$  نیز فرد است. فرض کنید  $t$  نیز یک عدد صحیح باشد که  $s = 2t + 1$ ؛ در این صورت

$$2n + 1 = (2t + 1)^2$$

و از اینجا

$$n = 2t^2 + 2t$$

پس

$$n + 1 = t^2 + (t + 1)^2$$

### ■ مثال ۱-۸

فرض کنید  $1 < a < -1$  و

$$a_n = \left( \frac{1 + a_{n-1}}{2} \right)^{1/2}, \quad n > 0$$



اگر  $A_n = 4^n(1 - a_n)$ ، آنگاه وقتی  $n \rightarrow +\infty$ ،  $A_n$  به چه مقداری میل خواهد کرد؟

حل. تلاش برای اینکه  $a_n$  را بر حسب  $a$  بنویسیم به محاسبات پیچیده‌ای می‌انجامد. در اینجا ایده کلیدی این است که متوجه شویم یک زاویه یکتای  $0 < \theta < \pi$  وجود دارد که  $a = \cos \theta$ ، و در نتیجه

$$a_1 = \left( \frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^{1/2} = \cos \frac{\theta}{2}$$

$$a_2 = \left( \frac{1 + \cos(\theta/2)}{2} \right)^{1/2} = \cos \frac{\theta}{4}$$

$$a_n = \cos \left( \frac{\theta}{2^n} \right)$$

پس

$$A_n = 4^n \left( 1 - \cos \frac{\theta}{2^n} \right)$$

$$= \frac{4^n \sin^2 \frac{\theta}{2^n}}{1 + \cos \frac{\theta}{2^n}} = \frac{\theta^2}{1 + \cos \frac{\theta}{2^n}} \left( \frac{\sin \frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}} \right)^2$$

■ که در نتیجه وقتی که  $n$  به  $+\infty$  میل نماید،  $A_n$  به  $\frac{\theta^2}{2}$  همگرا می‌شود.

## ۶-۱ استفاده از تقارن

وجود تقارن در یک مسأله موجب می‌شود که با عملیات کمتری مسأله را به جواب برسانیم. مثلاً حاصل ضرب زیر را در نظر بگیرید

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

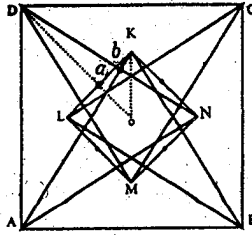
چون هر یک از فاکتورها نسبت به  $a$ ،  $b$ ، و  $c$  تقارن دارد، پس در حاصل ضرب نیز باید چنین تقارنی موجود باشد. پس مثلاً اگر  $a^2$  در حاصل ضرب موجود باشد، باید  $b^2$  و  $c^2$  نیز موجود باشد. مشابهاً اگر  $a^2b$  نیز در حاصل ضرب موجود باشد، باید  $a^2c$ ،  $b^2c$ ،  $b^2a$ ،  $c^2a$ ، و  $c^2b$  نیز با ضرایب یکسانی ظاهر شوند. پس واضح است که حاصل ضرب به شکل زیر است

$$A(a^3 + b^3 + c^3) + B(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + C(abc)$$

که به سادگی دیده می‌شود  $A = 1$ ،  $B = 0$  و  $C = -3$ .

■ مثال ۹-۱

مثلثهای متساوی‌الاضلاع  $ABK$ ،  $BCL$ ،  $CDM$ ، و  $DAN$  را درون مربع  $ABCD$  بنا می‌کنیم. ثابت کنید وسطهای چهار پاره خط  $KL$ ،  $LM$ ،  $MN$ ، و  $NK$  و وسطهای ۸ پاره خط  $AK$ ،  $BL$ ،  $CK$ ،  $DM$ ،  $DN$ ،  $AN$ ، و یک دوازده ضلعی منتظم می‌باشند.



شکل ۳-۱

حل. دوازده رأس مورد نظر روی شکل ۳-۱ مشخص شده‌اند؛ دوتا از این رأسها را با  $a$  و  $b$  علامت گذاشته‌ایم.

با در نظر گرفتن تقارن شکل کافی است نشان دهیم  $\angle bOK = 15^\circ$ ،  $\angle aOb = 30^\circ$ ، و  $|aO| = |bO|$ .

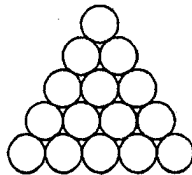
دقت کنید که  $AN$  بخشی از عمود منصف  $BK$  است و لذا  $|KN| = |NB|$ . با استفاده از تقارن نتیجه می‌شود که  $MBN$  یک مثلث متساوی‌الاضلاع است و لذا  $\angle CBN = 15^\circ$ . حال مثلث  $DBN$  را در نظر می‌گیریم. دقت کنید که  $Ob$  وسطهای اضلاع  $DB$  و  $DN$  را به یکدیگر وصل می‌کند، پس  $Ob$  با  $BN$  موازی است و طول آن نصف طول  $BN$  است. پس، اگر طول  $BN$  را  $s$  بگیریم،  $|Ob| = s/2$  و  $\angle bOK = 15^\circ$ . اکنون به سادگی دیده می‌شود که

$$\angle aOb = \angle DOK - \angle bOK = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$$

■ و  $|Oa| = |KN|/2 = s/2$

### تمرین

۱. ۱۵ سکه را مطابق شکل زیر روی هم چیده‌ایم. این سکه‌ها را به‌طور دلخواه رنگ سیاه یا سفید می‌زنیم. ثابت کنید ۳ سکه هم‌رنگ وجود دارد که مرکزهای آنها رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع است.



شکل ۴-۱

تجزیه به حالت‌های ساده‌تر ۱۱

۲. نقطه  $P$  داخل یک مثلث متساوی‌الاضلاع  $ABC$  قرار دارد. از  $P$  بر سه ضلع عمودهایی رسم می‌کنیم و پای عمودها را  $D$ ،  $E$ ، و  $F$  می‌نامیم. جای قرار گرفتن  $P$  را طوری تعیین کنید که مقدار  $PD + PE + PF$ ، (الف) ماکزیمم شود، (ب) مینیمم شود.

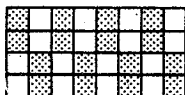
## ۷-۱ تجزیه به حالت‌های ساده‌تر

گاهی اوقات می‌توان یک مسئله را به تعدادی مسئله ساده‌تر و کوچکتر تبدیل کرد که هر کدام از این مسائل ساده‌تر را می‌توان جداگانه در نظر گرفت.

■ مثال ۱-۱۰

یک مستطیل را در یک صفحه شبکه‌بندی شده (نظیر کاغذ شطرنجی) طوری قرار می‌دهیم که رأس‌های آن بر نقاط شبکه منطبق باشد. ثابت کنید مساحت مستطیل برابر است با  $I + \frac{1}{4}B$ ، که  $I$  و  $B$  به ترتیب برابر تعداد نقاط شبکه در داخل و روی محیط مستطیل است.

حل. هر مثلث در صفحه شبکه‌بندی شده در یکی از این دسته‌ها قرار می‌گیرد



## شکل ۵-۱

دسته ۱. مثلث‌هایی قائم‌الزاویه که اضلاعشان موازی محورهای مختصات است.  
 دسته ۲. مثلث‌هایی با زوایای حاده که یک ضلعشان موازی یکی از محورهاست (چنین مثلثی را می‌توان به صورت حاصل جمع دو مثلث از دسته اول در نظر گرفت).  
 دسته ۳. مثلث‌هایی که می‌توان آنها را به صورت تفاضل دو مثلث از دسته ۱ در نظر گرفت.  
 دسته ۴ و دسته ۵. مثلث‌هایی هستند که هیچ یک از اضلاع آنها موازی محور  $x$ ها نیست.  
 اثبات مسئله اصلی را با در نظر گرفتن حالت‌های ساده‌تر جلو می‌بریم. نخست مستطیل  $ABCD$  از دسته ۱ را در نظر بگیرید. فرض کنید اضلاع  $AB$  و  $AD$  به ترتیب مشتمل بر تعداد  $a$  و  $b$  نقطه از شبکه باشند (بدون در نظر گرفتن نقاط انتهایی آنها). در این صورت

$$\begin{aligned} I + \frac{1}{4}B - 1 &= ab + \frac{1}{4}(2a + 2b + 4) - 1 \\ &= ab + a + b + 1 = (a + 1)(b + 1) \\ &= \text{مساحت } ABCD \end{aligned}$$

هر یک از حالات دیگر را نیز می‌توان به صورت مجموعه‌ای از حالت ۱ در نظر گرفت، و از آنجا نتیجه مطلوب حاصل می‌شود. جزئیات را به خواننده واگذار می‌کنیم. ■

## تمرین

۱. فرض کنید

$$S = \{i(3, 8) + j(4, -1) + k(5, 4) \mid i, j, k \in \mathbb{Z}\}$$

و

$$T = \{m(1, 5) + n(0, 7) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

ثابت کنید  $S = T$ .۲.  $F(x)$  را طوری پیدا کنید که به ازای هر  $x$  و  $y$ ,

$$F(x)F(y) - F(xy) = x + y$$

## ۸-۱ کار عقب‌رونده

کار عقب‌رونده یعنی اینکه نتیجه موردنظر را مفروض گرفته شروع به استنتاجهایی از آن کنیم تا به یک مسأله حل شده برسیم؛ در این صورت می‌توانیم گامهای معکوسی را در نظر بگیریم تا به نتیجه مطلوب دست پیدا کنیم.

■ مثال ۱۱-۱

اگر  $a, b, c$  طول اضلاع یک مثلث باشند، نشان دهید

$$3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 \leq 4(ab + bc + ca)$$

حل. نامساوی سمت چپ را در نظر می‌گیریم

$$3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2$$

پس

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0$$

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$$

که این رابطه اخیر برای هر سه مقدار  $a, b, c$  درست است.

حال نامساوی سمت راست را در نظر بگیرید

$$(a + b + c)^2 \leq 4(ab + bc + ca)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + bc + ca)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq a(b + c) + b(a + c) + c(b + a)$$

رابطهٔ اخیر از آنجا برقرار است که مجموع هر دو ضلع در مثلث از اندازهٔ ضلع سوم بزرگتر است. ■

■ مثال ۱-۱۲

در یک مسابقهٔ دوره‌ای با  $n$  بازیکن  $p_1, \dots, p_n$  ( $n > 1$ )، هر بازیکن یک مسابقه با هر یک از بازیکنان دیگر برگزار می‌کند. قوانین مسابقه به گونه‌ای است که حالت تساوی به وجود نمی‌آید. فرض کنید  $W_r$  و  $L_r$  به ترتیب تعداد بردها و باختهای بازیکن  $p_r$  باشد. نشان دهید

$$\sum_{r=1}^n W_r^2 = \sum_{r=1}^n L_r^2$$

حل. فرض کنید  $\sum_{r=1}^n W_r^2 = \sum_{r=1}^n L_r^2$  در این صورت

$$\sum_{r=1}^n (W_r^2 - L_r^2) = 0$$

$$\sum_{r=1}^n (W_r - L_r)(W_r + L_r) = 0$$

ولی  $W_r + L_r = n - 1$  پس به ازای هر  $r$

$$(n - 1) \sum_{r=1}^n (W_r - L_r) = 0$$

$$\sum_{r=1}^n (W_r - L_r) = 0$$

$$\sum_{r=1}^n W_r = \sum_{r=1}^n L_r$$

■ رابطهٔ اخیر درست است چون تعداد کل بردهای  $n$  بازیکن برابر تعداد کل باختهاست.

تمرین

۱.  $a, b, c$  سه عدد حقیقی مثبت هستند که  $a < b + c$ . نشان دهید

$$\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$$

۲. اگر  $a, b, c$  و طول اضلاع یک مثلث باشند ثابت کنید  $\frac{1}{a+c}, \frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+b}$  و نیز می‌توانند طول اضلاع یک مثلث باشند.

### ۹-۱ بررسی نقیض

استفاده از تناقض، یعنی مفروض گرفتن نادرستی حکم و با استنتاج به نتیجه نادرست یا متناقض رسیدن، از روشهای آشنا در ریاضیات است.

#### ■ مثال ۱-۱۳

$a, b, c$  و اعدادی صحیح و فرد هستند؛ ثابت کنید معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  نمی‌تواند ریشه گویا داشته باشد.

حل. فرض کنید  $p/q$  یک ریشه گویا باشد. بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض می‌کنیم  $p$  و  $q$  هر دو اعداد زوجی نباشند. نخست نشان می‌دهیم که هیچ یک از دو مقدار  $p$  و  $q$  زوج نیستند. فرض کنید  $p$  زوج باشد؛ از  $a(p/q)^2 + b(p/q) + c = 0$  درمی‌یابیم که  $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$ . چون  $ap^2 + bpq$  زوج است پس  $cq^2$  نیز باید زوج باشد، که غیرممکن است چون  $c$  و  $q$  هر دو فرد هستند. با فرض اینکه  $q$  زوج باشد نیز به تناقض مشابهی می‌رسیم. پس  $p$  و  $q$  هر دو فرد هستند و  $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$  ولی این رابطه یعنی اینکه حاصل جمع سه عدد فرد برابر صفر شده است، که غیرممکن است. ■

#### تمرین

۱. ثابت کنید اعداد صحیح و مثبت  $a, b, c$  و  $n$  وجود ندارند که  $a^n + b^n + c^n = 2^n abc$ .

### ۱۰-۱ زوجیت

ایده ساده زوج و فرد بودن یکی از ابزارهای بسیار قوی در حل مسأله است که کاربردهای وسیعی دارد.

#### ■ مثال ۱-۱۴

تعداد ۹ نقطه را روی شبکه‌ای در فضای سه‌بعدی در نظر می‌گیریم. ثابت کنید دست‌کم یکی از خطوط واصل بین این نقاط از یکی از نقاط شبکه خواهد گذشت.

حل. فقط ۸ شکل مختلف از لحاظ زوج بودن و فرد بودن مختصات نقاط روی شبکه وجود دارد

(فرد، فرد، فرد)، ...، (فرد، زوج، زوج)، (زوج، زوج، زوج)

## بررسی حالت‌های حدی ۱۵

چون تعداد نقاط ۹ است، پس دست‌کم دو تا از آنها یک شکل از لحاظ زوج و فرد بودن دارند؛ نقطه وسط خط واصل بین این دو نقطه نیز یک نقطه شبکه خواهد بود، که نقطه مطلوب است.

■

### ■ مثال ۱-۱۵

فرض کنید  $n$  یک عدد فرد بزرگتر از یک، و  $A$  یک ماتریس متقارن  $n \times n$  باشد. فرض کنید در هر سطر و در هر ستون  $A$  جایگشتی از اعداد صحیح  $1, \dots, n$  قرار گرفته باشد. ثابت کنید اعداد  $1, \dots, n$  باید در روی قطر اصلی  $A$  ظاهر شوند.

حل. چون  $A$  متقارن است، عناصر خارج از قطر دوبار ظاهر می‌شوند و هر عددی دقیقاً  $n$  مرتبه ظاهر می‌شود. اکنون این مطلب که می‌دانیم  $n$  فرد است نتیجه مطلوب را حاصل می‌کند.

■

## تمرین

۱. فرض کنید  $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$  مجموعه‌ای از اعداد صحیح با خاصیت زیر باشند: اگر هر یک از  $a_i$ ها از دسته فوق حذف شوند، می‌توانیم باقیمانده را به دو دسته تقسیم کنیم که حاصل جمع اعضای دو دسته مساوی باشند.

$$\text{ثابت کنید } a_1 = a_2 = \dots = a_{2n+1}.$$

۲. فرض کنید  $a_1, a_2, \dots, a_n$  جایگشت دلخواهی از  $1, 2, \dots, n$  باشند. ثابت کنید اگر  $n$  فرد باشد، آنگاه حاصل ضرب

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2) \dots (a_n - n)$$

یک عدد زوج است.

## ۱۱-۱ بررسی حالت‌های حدی

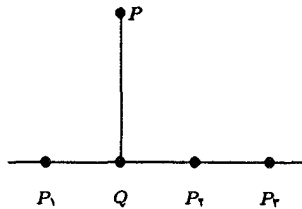
در برخورد اولیه با مسأله بعضی اوقات تغییر دادن پارامترها بین حدهای پایین و بالای ممکن آنها، ایده‌هایی برای حل مسأله به همراه خواهد داشت.

### ■ مثال ۱-۱۶

تعدادی متناهی نقطه در صفحه مفروض است که همه آنها روی یک خط قرار ندارند. ثابت کنید خطی وجود دارد که دقیقاً از دو تا از آن نقاط می‌گذرد.

حل. فرض کنید  $P$  یک نقطه و  $L$  یک خط باشد؛ فاصله  $P$  از  $L$  را با  $d(P, L)$  نشان می‌دهیم. فرض کنید  $S$  مجموعه فاصله‌های مثبت  $d(P, L)$  باشد که روی مجموعه نقاط مفروض، و  $L$  روی مجموعه خطهایی که دست‌کم از دو نقطه مفروض می‌گذرند ولی از  $P$  نمی‌گذرند، تغییر می‌کنند. مجموعه  $S$  غیرتهی و متناهی است (زیرا کلیه نقاط روی یک خط قرار ندارند و تعدادشان متناهی است)، پس  $S$  دارای عضو مینیمال است؛ این عضو مینیمال را  $d(P, M)$  می‌گیریم. نشان می‌دهیم که  $M$  خط مطلوب است و دقیقاً از دو نقطه می‌گذرد.

فرض کنید  $M$  از سه نقطه مثل  $P_1, P_2, P_3$  و  $P_3$  بگذرد، و فرض کنید  $Q$  نقطه‌ای روی  $M$  باشد که نزدیکترین فاصله را به  $P$  دارد. لااقل دو تا از نقطه‌ها، مثل  $P_2$  و  $P_3$ ، در یک سمت  $Q$  قرار می‌گیرند (یا ممکن است یکی از آنها بر  $Q$  منطبق باشد)؛ فرض می‌کنیم  $P_2$  به  $Q$  نزدیکتر است تا  $P_3$  (شکل ۱-۶ را ببینید). حال اگر خط گذرا بر  $P$  و  $P_2$  را با  $N$  نشان دهیم، آنگاه  $d(P_2, N) < d(P_2, M)$ ، که متناقض با انتخاب  $M$  است، لذا نتیجه می‌شود که  $M$  فقط می‌تواند از دو نقطه بگذرد.



شکل ۱-۶

### ■ مثال ۱-۱۷

فرض کنید  $A$  مجموعه  $2n$  نقطه در صفحه باشد که هیچ سه‌تایی از آنها روی یک خط قرار ندارند. فرض کنید  $n$  تا از نقطه‌ها به رنگ قرمز و  $n$  تای دیگر به رنگ آبی هستند. درستی یا نادرستی گزاره زیر را ثابت کنید.

« $n$  پاره خط راست بسته وجود دارد که هیچ‌کدام نقطه مشترکی ندارند و ابتدای و انتهای هر کدام نقطه‌ای از  $A$  با رنگهای متفاوت هستند.»

حل. اگر تقاطع خطوط را کنار بگذاریم راههای متعددی وجود دارد که می‌توانیم  $n$  نقطه قرمز رنگ را با نقاط آبی رنگ جفت کرده،  $n$  پاره‌خط بسته تشکیل دهیم. به هر چنان جفت‌هایی مجموع کل طول پاره‌خط‌های آن بیکربندی را نسبت می‌دهیم. چون فقط تعدادی متناهی از این جفت‌سازها وجود دارد، لذا یکی از این بیکربندیها طول مینیمال را داراست. این مجموعه از پاره‌خطها نقطه مشترکی نخواهند داشت: اگر پاره‌خط‌های  $R_1B_1$  و  $R_2B_2$  متقاطع باشند که  $R_1$  و  $R_2$  قرمز و



$B_1$  و  $B_2$  آبی هستند، آنگاه می‌توانیم بپیکربندی جدید  $R_1 B_2$  و  $R_2 B_1$  را در نظر بگیریم که طول کمتری دارا خواهد بود.

## تمرین

۱. ثابت کنید حاصل ضرب  $n$  عدد صحیح متوالی همواره بر  $n!$  بخش پذیر است.
۲. نشان دهید یک عدد گویای  $c/d$ ،  $d < 100$ ، وجود دارد که به ازای  $k = 1, 2, \dots, 99$

$$\left[ k \frac{c}{d} \right] = \left[ k \frac{73}{100} \right]$$

## ۱۲-۱. تعمیم

معمولاً ساده‌سازی یک مسأله راهگشای حل آن است، ولی در بعضی مسائل حالت تعمیم یافته مسأله سهلتر قابل حل است و حالت مورد نظر را می‌توان به‌عنوان یک حالت خاص نتیجه گرفت. در واقع ایده تعمیم، و در کنار آن مجردسازی، ویژگی خاص ریاضیات نوین است.

## ■ مثال ۱۸-۱

مطلوب است محاسبه مقدار  $\sum_{k=1}^n \frac{k^r}{2^k}$ .

حل. به‌جای محاسبه مجموع مورد نظر، مقدار  $S(x) = \sum_{k=1}^n k^r x^k$  را حساب می‌کنیم؛ مقدار  $S(\frac{1}{2})$  مقدار مطلوب خواهد بود. داریم

$$\sum_{k=1}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad x \neq 1$$

با مشتق‌گیری از طرفین نتیجه می‌شود

$$\sum_{k=1}^n k x^{k-1} = \frac{1 - (n+1)x^n + n x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

طرفین را در  $x$  ضرب می‌کنیم، مجدداً مشتق می‌گیریم، و دو مرتبه طرفین را در  $x$  ضرب می‌کنیم؛ بدست می‌آید

$$S(x) = \sum_{k=1}^n k^r x^k = \frac{x(1+x) - x^{n+1}(nx - x - 1)^2 - x^{n+2}}{(1-x)^3}$$

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{k^r}{2^k} = 6 - \left( \frac{n^2 + 4n + 6}{2^n} \right)$$

تمرین

۱. کدامیک از دو مقدار زیر بزرگتر است:

$$\sqrt{60} \text{ یا } \sqrt{7} + 2$$

## اصل استقرا و اصل لانه کبوتری

### ۱-۲ استقرا با $P(k)$

فرض کنید  $P(n)$  گزاره‌ای درباره‌ی  $n$  باشد و  $a$  عددی صحیح باشد. بنابر اصل استقرای ریاضی، اگر الف)  $P(a)$  درست باشد؛

ب) به ازای هر عدد صحیح  $k, k \geq a$ ، درستی  $P(k+1)$  از درستی  $P(k)$  نتیجه شود، آنگاه  $P(n)$  به ازای هر  $n \geq a$  درست است.

■ مثال ۱-۲  
ثابت کنید

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}, \quad n \in \mathbb{N}$$

حل. درستی رابطه به ازای  $n=1$  به سادگی مشهود است. فرض کنید رابطه برای  $k$  درست باشد؛ می‌خواهیم درستی آن را برای  $k+1$  نتیجه‌گیری کنیم

$$(a+b)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a^i b^{k-i}$$

$$(a+b)^k (a+b) = \left[ \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a^i b^{k-i} \right] (a+b)$$

$$[2pt] = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a^{i+1} b^{k-i} + \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a^i b^{k-i+1}$$

در مجموع اول تغییر  $۱ + i = j$  را وارد می‌کنیم؛ به دست می‌آید

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k}{j-1} a^j b^{k+1-j} + \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a^i b^{k+1-i} \\ &= \left[ \sum_{j=1}^k \binom{k}{j-1} a^j b^{k+1-j} + a^{k+1} \right] + \left[ \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} a^i b^{k+1-i} + b^{k+1} \right] \\ &= a^{k+1} + \left[ \sum_{i=1}^k \left[ \binom{k}{i-1} + \binom{k}{i} \right] a^i b^{k+1-i} \right] + b^{k+1} \\ &= a^{k+1} + \sum_{i=1}^k \binom{k+1}{i} a^i b^{k+1-i} + b^{k+1} \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} a^i b^{k+1-i} \end{aligned}$$

■ (با توجه به رابطه  $\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i} = \binom{k+1}{i}$ )، حال با توجه به اصل استقرا اثبات کامل است.

### ■ مثال ۲-۲

عدد صحیح و مثبت  $n$  و عدد حقیقی  $x$  مفروض است. ثابت کنید

$$[x] + \left[ x + \frac{1}{n} \right] + \left[ x + \frac{2}{n} \right] + \dots + \left[ x + \frac{n-1}{n} \right] = [nx]$$

حل. هرچند که عدد صحیح  $n$  به‌عنوان یک پارامتر در این مسأله ظاهر شده است، ولی استقرا روی  $n$  برای یک  $x$  ثابت راه به‌جایی نخواهد برد (البته روی  $x$  هم که نمی‌توانیم استقرا به‌کار ببریم).

ایده اصلی عبارت است از اینکه حکم موردنظر را به ازای هر  $x$  در زیربازه  $\left[ \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right]$ ،  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  اثبات کنیم. ابتدا فرض کنید  $x$  به زیربازه  $\left[ 0, \frac{1}{n} \right]$  تعلق داشته باشد. در این صورت به ازای  $0, 1, \dots, n-1$ ،  $i = 0$ ،  $\left[ x + \frac{i}{n} \right] = 0$ ، و در نتیجه  $\sum_{i=0}^{n-1} \left[ x + \frac{i}{n} \right] = 0$ . علاوه بر این می‌دانیم که  $[nx] = 0$ ، لذا حکم در «نخستین» زیربازه درست است. حال فرض کنید که حکم در زیربازه  $\left[ \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right]$  که  $k$  عددی صحیح و مثبت است برقرار باشد، و البته  $x$  عددی حقیقی است که در این زیربازه تغییر می‌کند. در این صورت

$$[x] + \left[ x + \frac{1}{n} \right] + \left[ x + \frac{2}{n} \right] + \dots + \left[ x + \frac{n-1}{n} \right] = [nx]$$

با اضافه کردن  $\frac{1}{n}$  به  $x$  (حاصل عددی است در بازه  $\left[ \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right]$ )، هر یک از جملات فوق، بجز آخرین جمله، به جمله‌ای در سمت راستشان تبدیل می‌شوند، و جمله آخری هم به  $[x+1]$  تبدیل می‌شود که مقدار  $[x]$  را یک واحد اضافه می‌کند؛ لذا در مجموع به سمت چپ یک واحد اضافه

استقرا با  $P(k+1)$  ۲۱

شده است. حال با تغییر  $x$  در  $[nx]$  به  $x + \frac{1}{n}$  نیز سمت راست را یک واحد اضافه کرده‌ایم؛ لذا به ازای هر  $x$  در بازه  $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$  رابطه درست است. با بحث مشابهی برای مقادیر منفی  $x$  نیز نتیجه مورد نظر اثبات می‌شود و لذا بنابر اصل استقرا اثبات کامل می‌گردد. ■

تمرین

۱. ثابت کنید به ازای  $n = 1, 2, 3, \dots$  معادله  $x^2 + y^2 = z^n$  دارای یک جواب صحیح و مثبت  $(x, y, z)$  می‌باشد.

## ۲-۲ استقرا با $P(k+1)$

گاهی اوقات در استفاده از استقرا بهتر است که ابتدا  $P(k+1)$  را در نظر گرفته، سپس به طور بازگشتی به  $P(k)$  برسیم. هر چند که معمولاً روشهای جلورونده و عقب‌رونده قابل تبدیل به یکدیگرند، ولی بعضی اوقات یکی از روشها سهولت کار را بیشتر می‌کند.

■ مثال ۳-۲

ثابت کنید  $\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2}$  به ازای هر  $n = 0, 1, 2, \dots$  یک عدد صحیح است.

حل. به ازای  $n = 0$  صحت حکم واضح است. فرض کنید حکم به ازای  $n = k$  درست باشد؛ باید ثابت کنیم

$$\frac{(k+1)^5}{5} + \frac{(k+1)^4}{4} + \frac{(k+1)^3}{3} - \frac{k+1}{2}$$

یک عدد صحیح است. داریم

$$\frac{k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1}{5} + \frac{k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1}{4} + \frac{k^3 + 3k^2 + 3k + 1}{3} - \frac{k+1}{2}$$

که برابر است با

$$\left( \frac{k^5}{5} + \frac{k^4}{4} + \frac{k^3}{3} - \frac{k}{2} \right) + (k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k) + (k^3 + 3k^2 + 2k) + (k^2 + k) + 1$$

که برانتر سمت چپ بنابر فرض استقرا عدد صحیح است و بقیه هم که اعداد صحیح هستند. پس بنابر اصل استقرا اثبات کامل است (دقت کنید که اگر با  $P(k)$  شروع می‌کردیم کار خیلی دشوار می‌شد). ■

## تمرین

۱. فرض کنید  $Q$  مجموعه اعداد گویا باشد. کلیه توابع  $f$  از  $Q$  به  $Q$  را پیدا کنید که در دو رابطه زیر صدق کند:

$$f(1) = 2$$

(ب) به ازای هر  $x$  و  $y$  در  $Q$ ,

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) +$$

## ۳-۲ استقرای قوی و تعمیم

فرض کنید  $P(n)$  گزاره‌ای درباره  $n$  باشد و  $a$  یک عدد صحیح باشد. طبق استقرای قوی، اگر الف)  $P(a)$  درست باشد؛

ب) به ازای هر  $k, k \geq a$ ، درستی  $P(k+1)$  از درستی  $P(a), P(a+1), \dots, P(k)$  نتیجه شود؛

آنگاه  $P(n)$  به ازای هر  $n \geq a$  درست است.

در اینجا در واقع از فرض قویتری که عبارت است از درستی  $P(a), P(a+1), \dots, P(k)$  استفاده می‌شود. هر چند که این نوع استقرا با استقرایی که قبلاً ذکر کردیم معادل است، ولی پاره‌ای اوقات صورت اخیر موجب سهلتر شدن کار می‌شود.

بعضی اوقات در حل یک مسأله اگر صورت تعمیم یافته آن را مدنظر قرار دهیم خیلی ساده‌تر به راه حل اصلی آن دسترسی پیدا می‌کنیم. در به‌کارگیری استقرا نیز چنین است: چون ممکن است مثلاً عبارتهای  $P(1), P(2), P(3), \dots$  اطلاعات کافی به همراه نداشته باشند تا نتیجه‌گیری استقرایی را امکان‌پذیر سازند، در چنین مواردی باید حکم موردنظر را به صورت تعمیم یافته‌ای، مثلاً  $Q(n)$  (به طوری که  $Q(n), P(n)$  را نتیجه دهد)، بیان کنیم و آنگاه با توجه به  $Q(1), Q(2), \dots$  روش استقرایی را اعمال کنیم.

## ■ مثال ۲-۴

فرض کنید  $F_i$ ،  $i$ امین جمله دنباله فیبوناچی باشد؛ ثابت کنید

$$F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$$

حل. این رابطه به ازای  $n = 1$  درست است. فرض کنید رابطه به ازای عدد صحیح  $k$  نیز درست باشد؛ در این صورت

$$\begin{aligned} F_{k+2}^2 + F_{k+1}^2 &= (F_{k+1} + F_k)^2 + F_{k+1}^2 \\ &= F_{k+1}^2 + 2F_{k+1}F_k + F_k^2 + F_{k+1}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (F_{k+1}^r + F_k^r) + ({}^2F_{k+1}F_k + F_{k+1}^r) \\ &= F_{r_{k+1}} + ({}^2F_{k+1}F_k + F_{k+1}^r) \end{aligned}$$

مرحله آخر البته از فرض استقرا نتیجه شده است. حال کار تمام می‌شود اگر بتوانیم نشان دهیم که  $F_{r_{k+1}} + F_{r_{k+2}} = F_{r_{k+2}}$  زیرا در این صورت  ${}^2F_{k+1}F_k + F_{k+1}^r = F_{r_{k+2}}$  و اثبات کامل می‌شود. حال برای اثبات رابطه  $F_{r_{k+1}}F_k + F_{k+1}^r = F_{r_{k+2}}$  مجدداً از استقرا استفاده می‌کنیم. به ازای  $n = 1$  رابطه درست است. حال فرض کنید رابطه برای  $k$  درست باشد؛ داریم

$$\begin{aligned} {}^2F_{k+2}F_{k+1} + F_{k+2}^r &= {}^2(F_{k+1} + F_k)F_{k+1} + F_{k+2}^r \\ &= {}^2F_{k+1}^r + {}^2F_{k+1}F_k + F_{k+2}^r \\ &= ({}^2F_{k+1}F_k + F_{k+1}^r) + (F_{k+1}^r + F_{k+2}^r) \\ &= F_{r_{k+2}} + (F_{k+1}^r + F_{k+2}^r) \end{aligned}$$

می‌بینیم که به مسأله قبلی بازگشته‌ایم: آیا  $F_{r_{k+2}} = F_{k+1}^r + F_{k+2}^r$ ؟ اگر این رابطه برقرار باشد آنگاه

$$F_{r_{k+2}} + (F_{k+1}^r + F_{k+2}^r) = F_{r_{k+2}} + F_{r_{k+2}} = F_{r_{k+2}}$$

و استقرا کامل خواهد بود. ولی مسأله دوری شده است: درستی اولی به درستی دومی بستگی دارد و برعکس، درستی دومی به درستی اولی ربط دارد.

حال به طریق زیر می‌توان این دشواری را برطرف کرد: گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید

$$P(n) : F_{n+1}^r + F_n^r = F_{r_{n+1}}$$

$$Q(n) : {}^2F_{n+1}F_n + F_n^r = F_{r_{n+2}}$$

$P(1)$  و  $Q(1)$  هر دو درست هستند. با توجه به بحث فوق می‌دانیم که  $P(k)$  و  $Q(k)$  هر دو  $P(k+1)$  را نتیجه می‌دهند و  $Q(k)$  و  $P(k+1)$ ،  $Q(k+1)$  را نتیجه خواهد داد؛ لذا نتیجه می‌شود که  $P(k)$  و  $Q(k)$ ،  $P(k+1)$  و  $Q(k+1)$  را نتیجه می‌دهند و اثبات کامل می‌شود. ■

### تمرین

۱. نشان دهید هر عدد صحیح و مثبت را می‌توان به صورت حاصل جمع جملات متمایزی از دنباله فیبوناچی نوشت.

۲. ثابت کنید که اگر  $A_1 + \dots + A_n = \pi$  و  $0 < A_i \leq \pi$ ،  $i = 1, \dots, n$ ، آنگاه

$$\sin A_1 + \dots + \sin A_n \leq n \sin \frac{\pi}{n}$$

## ۴-۲ رابطه‌های بازگشتی

رابطه‌های بازگشتی به صورت «حلقه» یا الگوریتم‌هایی مطرح می‌شوند که می‌گویند چگونه می‌توانیم جمله  $(n+1)$ ام رابطه‌ای را که به عدد صحیح  $n$  مرتبط می‌شود به دست بیاوریم. در واقع از مهمترین فایده‌هایی که از روابط بازگشتی حاصل می‌شود کم شدن تعداد پارامترهاست.

## ■ مثال ۲-۵

فرض کنید  $Q_n$  نمایش دهنده تعداد راههایی باشد که  $n$  مهره رخ را می‌توانیم در یک صفحه شطرنج  $n \times n$  قرار دهیم به طوری که یکدیگر را نزنند (یعنی در هر سطر و هر ستون فقط یک مهره قرار گیرد). بدین ترتیب، ترتیب چیدن مهره‌ها نسبت به قطر صفحه، که از گوشه چپ و پایین به گوشه راست و بالا در نظر گرفته می‌شود، تقارن دارد. نشان دهید

$$Q_n = Q_{n-1} + (n-1)Q_{n-2}$$

حل. مهره رخ در اولین سطر، ممکن است در اولین خانه سمت چپ قرار داشته باشد و ممکن است قرار نداشته باشد؛ اگر قرار گیرد آنگاه  $Q_{n-1}$  راه برای قرار دادن  $n-1$  مهره رخ وجود دارد و اگر قرار نگیرد، ممکن است هر یک از  $n-1$  خانه دیگر را در سطر اول اشغال نماید و در این صورت با توجه به تقارن (نسبت به قطر موردنظر)،  $n-2$  رخ باقیمانده ممکن است  $Q_{n-2}$  وضعیت متفاوت داشته باشند. با توجه به این نکات نتیجه مطلوب حاصل است. ■  
نکته. در واقع مثال فوق نوعی نگرش هندسی به جایگشت‌های  $1, 2, \dots, n$  می‌باشد.

## تمرین

۱. فرض کنید  $P_n$  تعداد نواحی حاصل از قرار گرفتن  $n$  خط راست در صفحه باشد به طوری که هیچ سه خطی از یک نقطه نگذرند و هیچ دوتایی با یکدیگر موازی نباشند. ثابت کنید

$$P_{n+1} = P_n + (n+1)$$

۲. اعداد  $1, 2, \dots, n$  در جهت حرکت عقربه‌های ساعت روی یک دایره قرار گرفته‌اند. از عدد  $1$  شروع می‌کنیم و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت یک در میان اعداد را حذف می‌کنیم تا فقط یک عدد باقی بماند (مثلاً اگر  $n=5$ ، به ترتیب اعداد  $1, 4, 2, 5$  و  $3$  حذف می‌شوند و  $3$  باقی می‌ماند). فرض کنید  $f(n)$  آخرین عدد باقیمانده باشد. نشان دهید

$$f(2n) = 2f(n) - 1$$

$$f(2n+1) = 2f(n) + 1$$



## ۲-۵ اصل لانه کبوتري

وقتي تعداد زيادي شىء را بخواهيم بين تعداد كمى مجموعه تقسيم كنيم، به يكي از مجموعه ها يك حداقلى مى رسد؛ اين امر در واقع مبتنى بر اصل لانه کبوتري مى باشد.

### اصل لانه کبوتري

اگر  $k \geq 1$  شىء  $k$  بين  $n$  جعبه تقسيم شود، يكي از جعبه ها لاقبل مشتمل بر  $k + 1$  شىء خواهد بود.

اين اصل حتى وقتى  $k$  برابر يك باشد نيز ابزاري قوي در اثبات قضايای وجودى است. مثالهاى زير ايده هاىي از چگونگى کاربرد اين اصل به دست مى دهند.

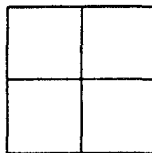
### ■ مثال ۲-۶

مجموعه اى از  $n + 1$  عدد صحيح و مثبت كه هيچ کدام از  $2n$  بزرگتر نيست، مفروض است. ثابت كنيد حداقل يكي از اعضاى اين مجموعه بر عضو ديگرى از مجموعه بخش پذير است.

حل. اعداد مفروض را با  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  نشان مى دهيم و فرض مى كنيم كه به ازاي هر  $i$ ،  $x_i = 2^{n_i} y_i$  كه  $n_i$  يك عدد صحيح غير منفي است و  $y_i$  عددى فرد است. فرض مى كنيم  $T = \{y_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$  يعنى  $T$  مجموعه اى از  $n + 1$  عدد فرد مى باشد كه هر کدام از  $2n$  كوچكتر است. ولي تعداد اعداد فرد كوچكتر از  $2n$  فقط  $n$  تاست، لذا بنا بر اصل لانه کبوتري دو عضو اين مجموعه بايد با يكديگر مساوى باشند، مثلاً فرض مى كنيم  $y_i = y_j$ ،  $i < j$ . پس  $x_i = 2^{n_i} y_i$  و  $x_j = 2^{n_j} y_j$  و  $x_j = 2^{n_j} y_i$  اگر  $n_i \leq n_j$  آنگاه  $x_i$  بر  $x_j$  بخش پذير است، و اگر  $n_i > n_j$  برعكس.

### ■ مثال ۲-۷

پنج نقطه  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  داخل مربعى به ضلع ۱ مفروض اند. فاصله بين نقطه  $P_i$  و نقطه  $P_j$  را با  $d_{ij}$  نشان مى دهيم. ثابت كنيد دست كم يكي از  $d_{ij}$  ها كمتر از  $\frac{\sqrt{5}}{4}$  است.



شکل ۲-۱

حل. با رسم محورهای تقارن مربع، كه موازى اضلاع آن مى باشند، مربع را به چهار مربع مساوى يكديگر تقسيم مى كنيم (شکل ۲-۱). بنا بر اصل لانه کبوتري دو تا از نقطه ها به يكي از مربعها تعلق

دارند (نقطه‌ای که روی مرز قرار گیرد، به هر دو مربع متعلق است)؛ فاصله بین این دو نقطه کمتر از  $\frac{\sqrt{2}}{3}$  است.

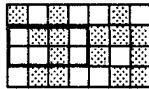
### ■ مثال ۲-۸

مجموعه دلخواهی از  $10^6$  عدد طبیعی بین ۱ تا  $999,999$  را مفروض می‌گیریم. ثابت کنید دو زیرمجموعه مجزا و غیرتهی از این مجموعه وجود دارد که مجموع اعضایشان مساوی است.

حل. با  $10^6$  عدد انتخاب شده می‌توانیم  $10^6 - 1 = 999,999$  زیر مجموعه متمایز و غیر تهی بسازیم. مجموع اعضای هر یک از این زیرمجموعه‌ها کمتر از  $1,000,000$  است زیرا حتی  $999,999 < 999,999 + 999,998 + \dots + 999,999$ . پس بنا بر اصل لانه‌کیوتی دو زیرمجموعه متمایز  $A$  و  $B$  وجود دارند که دارای مجموع یکسانی هستند. با کنار گذاشتن اعضای مشترک این دو مجموعه، دو مجموعه متمایز  $X = A - (A \cap B)$  و  $Y = B - (A \cap B)$  به دست می‌آیند که مجموع یکسانی دارند. البته دقت می‌کنیم که  $X$  و  $Y$  هیچ‌کدام تهی نیستند زیرا اگر  $A$  یا  $B$  تهی باشد، باید یا  $A \subset B$  و یا  $B \subset A$ ، که غیرممکن است.

### ■ مثال ۲-۹

یک صفحه شبکه‌ای  $4 \times 7$  را در نظر می‌گیریم و خانه‌های آن را به‌طور دلخواه رنگ سیاه یا سفید می‌زنیم. ثابت کنید که این رنگ‌آمیزی به هر ترتیبی که باشد شامل مستطیلی است (شکل ۲-۲) که مربعهای ۴ گوشه آن از یک رنگ هستند.



شکل ۲-۲

حل. چنین مستطیلی حتی روی صفحه  $13 \times 7$  نیز وجود دارد؛ ترکیب رنگ‌آمیزی هر ستون شبکه غیر از صورت‌های زیر نمی‌تواند باشد.



شکل ۲-۳

فرض کنید یکی از ستونها از نوع ۱ باشد؛ اگر یکی از ۶ ستون باقی‌مانده از نوع ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ باشد؛ ۴ باشد کار تمام می‌شود. پس فرض کنید هر یک از ستونهای ۶ گانه از نوع ۵، ۶، ۷، ۸ باشد؛

در این صورت بنا بر اصل لانه‌کیوتری دوتا از این ستونها یکسان می‌شوند و لذا کار تمام است. اگر ستون ۸ را هم در آغاز در نظر می‌گرفتیم با بحث مشابهی به نتیجه می‌رسیدیم. پس فرض کنید ستونهای ۱ و ۸ اصلاً ظاهر نگردند؛ در این صورت ۷ ستون را باید با ۶ نوع بیوشانیم، که باز هم با استفاده از اصل لانه‌کیوتری نتیجه می‌شود که دو ستون باید مشابه باشند، و کار تمام می‌شود. ■

### تمرین

۱. فرض کنید  $x$  یک عدد حقیقی باشد. ثابت کنید بین اعداد

$$x, 2x, \dots, (n-1)x$$

یک عدد وجود دارد که با یک عدد صحیح حداکثر  $\frac{1}{n}$  فاصله دارد.

۲. ثابت کنید اگر در یک مهمانی  $n$  نفر حضور داشته باشند، دو نفر از آنها یک تعداد از مهمانان حاضر را می‌شناسند.

### تمرینهای تکمیلی

۱. اگر  $u_0 = 2, u_1 = 3$  و به ازای همه مقادیر طبیعی  $k, u_{k+1} = 3u_k - 2u_{k-1}$  ثابت کنید به ازای هر  $n$

$$u_n = 2^n + 1$$

۲. اگر  $i^2 = -1$  ثابت کنید

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad (\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin(nx)$$

۳. اگر  $a + b > 0$  و  $n$  عددی طبیعی باشد، ثابت کنید

$$(a + b)^n \leq 2^{n-1}(a^n + b^n)$$

۴. اگر  $f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$  و  $\alpha + \beta = 1$  و  $\forall x, y, \forall \alpha, \beta > 0$  ثابت کنید

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n > 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1, \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$

۵. تعدادی شکل محدب در صفحه قرار دارند به طوری که هر سه‌تای آنها اشتراک دارند. ثابت کنید همه آنها اشتراک دارند.

۶. ثابت کنید در مجموعه عددهای صحیح به شکل  $2^k - 3$  که  $k = 2, 3, \dots$  زیرمجموعه‌ای نامتناهی وجود دارد که هر دو عضو آن نسبت به هم اول هستند.

۷. تعداد  $n \geq 3$  نقطه در صفحه داده شده است.  $d$  را بیشترین فاصله بین دو نقطه دلخواه از این  $n$  نقطه می‌گیریم. فاصله‌ای از دو نقطه را که برابر  $d$  باشد، قطر این دستگاه نقطه‌ها می‌نامیم. ثابت کنید تعداد این قطرها نمی‌تواند از  $n$  تجاوز کند.

۸. ثابت کنید هر عدد طبیعی را که از  $n!$  بزرگتر نباشد می‌توان به صورت مجموعی از عددهای طبیعی متمایز نوشت، به نحوی که تعداد جمله‌های مجموع از  $n$  تجاوز نکند و در ضمن هر جمله مجموع، مقسوم‌علیهی از  $n!$  باشد.

۹. تعداد  $s$  نقطه در فضا داده شده است. اگر آنها را بر صفحات مختصات تصویر کنیم تعداد آنها  $s_1, s_2, s_3$  می‌شود. ثابت کنید  $s^2 \leq s_1 s_2 s_3$ .

۱۰.  $N$  نفر با هم آشنا نیستند. می‌خواهیم بعضی از آنها را طوری با هم آشنا کنیم که وقتی سه نفر را به دلخواه از بین این  $N$  نفر انتخاب کنیم، تعداد آشنایان آنها یکسان نباشد. ثابت کنید این کار به ازای هر  $N$  ممکن است.

۱۱. تعداد  $n > 4$  نقطه داده شده است. ثابت کنید می‌توان این نقطه‌ها را با پیکان چنان به هم وصل کرد که بتوان به کمک یک یا دو پیکان از هر نقطه به هر نقطه دیگر رسید (هر دو نقطه را می‌توان با پیکانی به هم وصل کرد که تنها یک جهت داشته باشد و حرکت روی هر پیکان تنها در مسیری ممکن است که با جهت آن مشخص شده است).

۱۲. نقطه  $O$  بر خط راست  $g$  واقع است.  $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \dots, \vec{OP}_n$  بردارهای واحدی هستند به نحوی که نقاط  $P_1, P_2, \dots, P_n$  در صفحه‌ای شامل  $g$  و در یک طرف  $g$  قرار دارند. ثابت کنید به ازای هر عدد فرد  $n$ ,

$$|\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2 + \dots + \vec{OP}_n| \geq 1$$

۱۳.  $n$  بردار به طول واحد در صفحه قرار دارند که مجموع آنها برابر صفر است. ثابت کنید این بردارها را می‌توان طوری شماره‌گذاری کرد که مجموع  $k$  بردار اول،  $k = 1, 2, \dots, n$ ، از  $\sqrt{2}$  کمتر باشد [با استدلالی مشکلتر می‌توان ثابت کرد که این حکم برای  $\frac{\sqrt{6}}{4}$  به جای  $\sqrt{2}$  نیز برقرار است].

۱۴. به استقرا ثابت کنید اگر  $x_1, x_2, \dots, x_n$  اعداد حقیقی و مثبتی باشند، آنگاه

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

۱۵. به استقرا ثابت کنید که

الف)  $n$  خط که هیچ سه‌تایی از یک نقطه نگذرد صفحه را به  $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$  قسمت تقسیم می‌کنند.

ب)  $n$  صفحه که هر سه صفحه در یک نقطه مشترک‌اند و هیچ چهار صفحه‌ای نقطه مشترک ندارند، فضا را به  $\frac{(n+1)(n^2 - n + 6)}{6}$  قسمت تقسیم می‌کند.

۱۶. تعدادی نقطه در صفحه داریم که به وسیله تعدادی یال به هم وصل شده‌اند به طوری که اولاً تعداد یالها زوج است، ثانیاً از هر نقطه می‌توان در امتداد یالها به هر نقطه دیگر رفت. ثابت کنید این یالها را می‌توان طوری جهت‌دار کرد که از هر رأس تعداد زوجی پیکان خارج شده باشد.
۱۷. نشان دهید در هر مهمانی دو نفر وجود دارند که تعداد آشنای آنها در آن مهمانی برابر است. (اگر  $A, B$  را بشناسد،  $B$  نیز  $A$  را می‌شناسد.) نشان دهید اگر این شرط را برداریم برای هر  $n$ ، مهمانی‌ای با  $n$  نفر وجود دارد که تعداد آشنای هیچ دونفری مساوی نیست.
۱۸. یک گروه ۴۰ جلسه تشکیل دادند که در هر جلسه ۱۰ نفر شرکت می‌کردند، به طوری که هیچ دونفری در بیشتر از ۱ جلسه با هم نبودند. نشان دهید تعداد افراد گروه از ۶۳ نفر بیشتر است.
۱۹. ۱۷ دانشمند در سه زمینه علمی به هم نامه نوشتند (هر دو دانشمندی در یک زمینه علمی به هم نامه نوشته‌اند). نشان دهید سه دانشمند وجود دارد که هر سه در یک زمینه به هم نامه نوشته‌اند.
۲۰. ۱۹۷۸ نفر از ۶ کشور با شماره‌های از ۱ تا ۱۹۷۸ شماره‌گذاری شدند. نشان دهید سه نفر از یک کشور وجود دارند که شماره یکی از آنها برابر مجموع دو شماره دیگر است؛ یا شماره یکی، دو برابر شماره دیگری است.
۲۱. ۹ نقطه با مختصات صحیح در فضا داده شده‌اند. نشان دهید دو نقطه از آنها وجود دارد که روی پاره‌خطی که آن دو نقطه را به هم وصل می‌کند نقطه با مختصات صحیح دیگری موجود باشد.
۲۲. ۱۰۰ عدد در اختیار داریم. نشان دهید می‌توان تعدادی از آنها را انتخاب کرد به طوری که مجموع آنها به دو صفر ختم شود.
۲۳. یک مجموعه ۱۰ عضوی از اعداد دو رقمی مفروض است. نشان دهید همیشه می‌توان دو زیرمجموعه جدا از هم از این مجموعه انتخاب کرد که مجموع اعضای دو مجموعه مساوی باشد.
۲۴.  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$  اعداد طبیعی دلخواه هستند. نشان دهید  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{10}$  چنان وجود دارند که  $\lambda_i \in \{-1, 0, 1\}$  و  $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{10} a_{10} = \lambda \cdot a$  بر ۱۹۹۳ بخش پذیر باشد، و همه  $\lambda_i$ ها با هم صفر نباشند.
۲۵. اداره راهنمایی و رانندگی می‌خواهد ماشینها را با شماره‌های ۶ رقمی شماره‌گذاری کند به طوری که هر دو ماشین حداقل در دو مکان دارای شماره‌های متفاوت باشند. حداکثر تعداد ماشینهایی را که می‌تواند شماره‌گذاری کند پیدا کنید.

۲۶. در یک جمع  $n$  نفری بین هر ۴ نفر یکی وجود دارد که سه نفر بقیه را می‌شناسد. حداقل تعداد افرادی را پیدا کنید که همه  $n - 1$  نفر بقیه را می‌شناسند.
۲۷. ۹ نقطه داخل یک مثلث داده شده‌اند. نشان دهید سه نقطه از آنها مثلثی تشکیل می‌دهد که مساحت آن از  $\frac{1}{4}$  مساحت مثلث کمتر است.
۲۸. نشان دهید مسأله فوق برای ۵ نقطه هم درست است. نشان دهید برای ۴ نقطه که تشکیل یک چهار ضلعی محدب دهد نیز درست است!
۲۹. ۶ نقطه داخل یک مستطیل  $3 \times 4$  مفروض است. نشان دهید دو نقطه وجود دارد که فاصله آنها کمتر یا مساوی  $\sqrt{5}$  است.
۳۰. ۱۹۸۵ عدد که مقسوم علیه‌های اول هیچ کدام از ۲۳ تجاوز نمی‌کند مفروضند. نشان دهید ۴ عدد وجود دارد که حاصل ضرب آنها توان چهارم عددی طبیعی باشد.
۳۱.  $n + 1$  عدد از بین اعداد ۱، ۲، ...،  $2n$  انتخاب می‌کنیم. نشان دهید در بین آنها دو عدد وجود دارد که یکی بر دیگری بخش پذیر باشد.

## دنباله‌ها

## ۱-۳ دنباله‌های اعداد

## ▲ تعریف ۱-۳

▲  $\{f(1), f(2), \dots\}$  را یک دنباله حقیقی می‌نامیم که در آن  $f$  تابعی از  $\mathbb{N}$  به  $\mathbb{R}$  است. معمولاً  $f(n)$  را با نمادهایی نظیر  $a_n$  نمایش می‌دهند و دنباله را به‌طور خلاصه به صورت  $\{a_n\}$  نشان می‌دهند.

توضیح. اگر دنباله را با یک مجموعه نشان دهیم باید توجه شود ترتیب عناصر و تکرار آنها برخلاف تعریف مجموعه اهمیت دارد.  
به نکات زیر توجه کنید

۱. اگر تابع  $f$  از  $\mathbb{N}$  به  $\mathbb{C}$  تعریف شود یک دنباله مختلط به وجود می‌آید.
۲. اگر تابع  $f$  از  $\{1, 2, \dots, n\}$  به  $\mathbb{R}$  یا  $\mathbb{C}$  تعریف شود یک دنباله حقیقی یا مختلط متناهی به وجود می‌آید.
۳. گاهی با دنباله‌های مضاعف که به  $\{a_{m,n}\}$  نمایش می‌دهیم سروکار داریم. در این دنباله‌ها تابع  $f$  از  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  به  $\mathbb{R}$  یا  $\mathbb{C}$  تعریف می‌شود.
۴. گاهی به جای اینکه دنباله را از  $a_1$  شروع کنیم از  $a_0$  یا حتی از اندیسهای منفی شروع می‌کنیم.

## ■ مثال ۱-۳

تابع  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه  $f(n) = \frac{1}{n}$  دنباله زیر را به وجود می‌آورد

$$\left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$$

که به اختصار آن را به  $\{\frac{1}{n}\}$  نمایش می‌دهیم.

## ■ مثال ۲-۳

تابع  $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  با ضابطه  $f(n, m) = n + im$  یک دنباله مضاعف مختلط به وجود

می‌آورد.

## ■ مثال ۳-۳

به مجموعه‌هایی شمارا می‌گوییم که یک تابع یک به یک و پوشا از  $\mathbb{N}$  به آنها وجود داشته باشد. بنابراین هر مجموعه شمارا را می‌توان به صورت یک دنباله آراست. مثلاً  $\mathbb{Q}$  را می‌توان به صورت دنباله نمایش داد.

## ■ مثال ۴-۳

دنباله مضاعف  $a_{m,n} = \frac{m}{m+n}$  دارای خاصیت جالبی است:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} a_{m,n}) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{m \rightarrow \infty} a_{m,n}) = 1$$

## ▲ تعریف ۲-۳

دنباله  $\{a_n\}$  را کراندار می‌گویند هرگاه عددی مانند  $M > 0$  وجود داشته باشد که به ازای هر  $n$ ,

$$|a_n| \leq M$$

توضیح. تعریف را به راحتی می‌توان به دنباله‌های مضاعف تعمیم داد.

## ■ مثال ۵-۳

دنباله مثالهای ۱-۳ و ۴-۳ کراندار و دنباله مثال ۲-۳ بیکران است (قدر مطلق یک عدد مختلط

مثلاً  $a + bi$  به صورت  $\sqrt{a^2 + b^2}$  تعریف می‌شود).

## ▲ تعریف ۳-۳

دنباله حقیقی  $\{a_n\}$  را صعودی گوئیم هرگاه

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots$$



و نزولی گوئیم هر گاه

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots$$

▲ و یکنوا گوئیم هر گاه یا صعودی باشد یا نزولی.

توضیح. اگر علامت تساوی‌ها در تعریف فوق حذف شوند به تعاریف دنباله‌های اکیداً صعودی، اکیداً نزولی و اکیداً یکنوا می‌رسیم.

▲ تعریف ۳-۴

اگر  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  تابعی اکیداً صعودی باشد و  $\{a_n\}$  دنباله‌ای دلخواه، آنگاه  $\{a_{\sigma(n)}\}$  یک زیردنباله آن نام دارد.

یعنی اگر زیر مجموعه‌ای نامتناهی از اعضای دنباله را با همان ترتیب که در دنباله ظاهر می‌شود بنویسیم یک زیردنباله از آن را ساخته‌ایم.

▲

▲ تعریف ۳-۵

دنباله  $\{a_n\}$  را متناوب گوئیم هر گاه  $N \geq 0$  و  $T \in \mathbb{N}$  باشد که

$$n > N \Rightarrow a_{n+T} = a_n$$

اگر  $N = 0$  باشد دنباله را اکیداً متناوب می‌گوئیم.

▲

کوچکترین مقدار  $T$  را دوره تناوب اصلی دنباله می‌نامند.

■ مثال ۳-۶

■ دنباله‌های  $\{n \pmod{10}\}$  و  $\{n^2 + n \pmod{5}\}$  متناوب هستند (چرا؟).

تمرین

۱. ثابت کنید دنباله  $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  صعودی و کراندار است.

۲. ثابت کنید هر دنباله از اعداد حقیقی یک زیردنباله یکنوا دارد.

۳. ثابت کنید هر دنباله متناهی  $1 + mn$  عضوی یا یک زیردنباله  $1 + m$  عضوی صعودی دارد یا یک زیر دنباله  $1 + n$  عضوی نزولی.

۴. دنباله فیبوناچی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_1 = f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n > 2$$

الف) فرمول غیر بازگشتی دنباله را به دست آورید.

ب) ثابت کنید  $\{f_n \pmod{m}\}$  تناوبی است (به ازای هر  $m \in \mathbb{N}$ ). آیا این دنباله اکیداً تناوبی است؟

## ۲-۳ همگرایی دنباله‌ها

## ▲ تعریف ۳-۶

دنباله  $\{a_n\}$  به  $\alpha$  همگراست هرگاه برای هر  $\varepsilon > 0$ ،  $N > 0$  وابسته به  $\varepsilon$  وجود داشته باشد که

$$n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

▲

گاهی می‌نویسیم  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$

## ■ مثال ۳-۷

دنباله  $\{\frac{1}{n}\}$  به صفر همگراست زیرا برای هر  $\varepsilon > 0$ ، کافی است  $N = \frac{1}{\varepsilon}$  بگیریم

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

■

## ■ مثال ۳-۸

دنباله  $a_n = \begin{cases} n & \text{زوج } n \\ \frac{1}{n} & \text{فرد } n \end{cases}$  همگرا نیست؛ چون  $a_{2n}$  از هر مقداری بیشتر می‌شود ولی دارای

■

زیر دنباله همگرایی  $\{a_{2n+1}\}$  است.

## ● قضیه ۳-۱

اگر  $\{a_n\}$  به  $\alpha$  و  $\alpha'$  همگرا باشد آنگاه  $\alpha = \alpha'$  یعنی حد دنباله در صورت وجود یکتاست. اثبات. اگر  $\alpha \neq \alpha'$  آنگاه  $\varepsilon$  را برابر  $\frac{1}{4}|\alpha - \alpha'|$  می‌گیریم، آنگاه  $N_1$  و  $N_2$  وجود دارند که

$$n > N_1 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \frac{1}{4}|\alpha - \alpha'|$$

$$n > N_2 \Rightarrow |a_n - \alpha'| < \frac{1}{4}|\alpha - \alpha'|$$

از جمع دو نامساوی فوق و استفاده از نامساوی مثلث به تناقض زیر می‌رسیم که حکم را ثابت می‌کند:

$$|\alpha - \alpha'| < |\alpha - \alpha'|$$

●

## ● قضیه ۳-۲

اگر دنباله  $\{a_n\}$  همگرا باشد آنگاه کراندار است.

اثبات.  $N > 0$  وجود دارد که

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < 1 \Rightarrow |a_n| < |\alpha| + 1$$

پس کافی است  $M$  را به صورت زیر تعریف کنیم

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, |\alpha| + 1\}$$

آنگاه به ازای هر  $n$  داریم

$$|a_n| \leq M$$

### ● قضیه ۳-۳

اگر  $\{a_n\}$  و  $\{b_n\}$  به ترتیب به  $\alpha$  و  $\beta$  همگرا باشند آنگاه

$$a_n + b_n \rightarrow \alpha + \beta \quad (\text{الف})$$

$$a_n b_n \rightarrow \alpha \beta \quad (\text{ب})$$

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{\alpha}{\beta} \quad (\text{ج}) \quad (\text{اگر } \beta \neq 0)$$

برهان به عهده خواننده است.

### \* خاصیت تمامیت $\mathbb{R}$ (اصل کمال)

هر زیرمجموعهٔ ناتهی  $A$  از بالا کراندار  $\mathbb{R}$  کوچکترین کران بالایی دارد که آن را سوپریمم مجموعه گوئیم و به  $\sup A$  نشان می‌دهیم.

### ● قضیه ۳-۴

(بدون اثبات) هر دنباله کراندار  $\{a_n\}$  دارای یک زیر دنباله همگراست.

### ● قضیه ۳-۵

هر دنباله یکنوا همگراست اگر و فقط اگر کراندار باشد.

اثبات. اگر همگرا باشد بنابر قضیه ۳-۲ کراندار است. حال فرض می‌کنیم  $\{a_n\}$  صعودی و کراندار باشد؛ چون از بالا کراندار است بنا به خاصیت کمال اعداد حقیقی کوچکترین کران بالایی دارد که آن را  $a$  می‌نامیم.

برای هر  $\varepsilon > 0$ ،  $N > 0$  وجود دارد که  $a - \varepsilon < a_N \leq a < a + \varepsilon$  پس  $|a_N - a| < \varepsilon$ .  
پس بنابر صعودی بودن دنباله داریم

$$\forall n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

پس  $\{a_n\}$  به  $a$  همگراست.

### ● قضیه ۳-۶

(کوشی)  $\{a_n\}$  همگراست اگر و فقط اگر

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 : n, m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

توضیح. دنباله‌ای که در شرط فوق صدق کند دنباله کوشی گفته می‌شود.

اثبات. اگر دنباله  $\{a_n\}$  همگرا باشد (مثلاً به  $\alpha$ ) آنگاه برای هر  $\varepsilon > 0$ ،  $N > 0$  وجود دارد که

$$n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{4}$$

پس اگر  $m, n > N$  آنگاه

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - \alpha| + |\alpha - a_m| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

برای اثبات طرف دوم دو لم زیر را اثبات می‌کنیم:

لم ۱. (قضیه بسته‌های تودرتو)

اگر  $I_n = [a_n, b_n]$  بازه‌هایی تودرتو باشند (یعنی  $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$ ) و طول بازه‌ها به صفر میل کند (یعنی  $b_n - a_n \rightarrow 0$ ) آنگاه  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$  تنها و تنها از یک نقطه تشکیل می‌شود.

اثبات. اگر  $\bigcap I_n$  شامل دو نقطه متمایز باشد طول  $I_n$ ها از فاصله آن دو نقطه کمتر نمی‌شود که با فرض لم تناقض دارد. پس کافی است ثابت کنیم  $\bigcap I_n$  تهی نیست چون به ازای هر  $m, n$ ،  $a_n < b_m$  پس  $\{a_n\}$  مجموعه‌ای است که از بالا کراندار است. کوچکترین کران بالا یعنی  $a$  باید در تمام  $I_n$ ها باشد زیرا در غیر این صورت از یکی از کرانه‌های بالا (یعنی  $b_n$ ها) بزرگتر می‌شود که تناقض است.

لم ۲.

هر مجموعه نامتناهی کراندار دارای نقطه‌ای است مانند  $\alpha$  که هر همسایگی آن بینهایت نقطه از مجموعه را شامل است.

اثبات. فرض می‌کنیم مجموعه در بازه بسته  $[a, b] = I_1$  باشد؛ آن را نصف می‌کنیم. بینهایت نقطه در یکی از این دو نصفه که آن را  $I_2$  می‌نامیم وجود دارد. به همین ترتیب  $I_3, I_4, \dots$  به دست می‌آیند. ادامه اثبات با استفاده از لم قبل را به خواننده واگذار می‌کنیم.

حال به اثبات قضیه برمی‌گردیم. بنابر تمرین ۲ بخش ۳-۲ هر دنباله که در شرایط قضیه صدق کند کراندار است. پس بنابر لم ۲ یک نقطه  $\alpha$  دارد. برای هر  $\varepsilon > 0$ ،  $N > 0$  وجود دارد که

$$n, m > N \quad |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{4}$$

و همسایگی به شعاع  $\frac{\varepsilon}{4}$  حول  $\alpha$  نیز شامل یک  $a_p$  است که  $p > N$  پس

$$n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| \leq |a_n - a_p| + |a_p - \alpha| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

یعنی دنباله  $\{a_n\}$  به  $\alpha$  می‌گراید.

■ مثال ۳-۹

ثابت کنید  $a_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}$  همگرا نیست.

می‌دانیم

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n} &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \\ &\Rightarrow \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right| > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

پس دنباله نمی‌تواند کوشی باشد! یعنی دنباله همگرا نیست.

■ مثال ۱۰-۳

اگر  $\{a_n\}$  همگرا باشد و  $\sigma: N \rightarrow N$  یک تابع یک به یک و پوشا، ثابت کنید  $\{a_{\sigma(n)}\}$  همگراست.

برای هر  $\varepsilon > 0$ ،  $N > 0$  وجود دارد که

$$n, m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

اگر  $N_1$  را آنقدر بزرگ بگیریم که  $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(N_1)\} \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$  آنگاه

$$m, n > N_1 \Rightarrow \sigma(n), \sigma(m) > N \Rightarrow |a_{\sigma(n)} - a_{\sigma(m)}| < \varepsilon$$

پس  $\{a_{\sigma(n)}\}$  کوشی است پس همگراست.

توضیح.  $\{a_{\sigma(n)}\}$  را بازآرایی دنباله  $\{a_n\}$  گویند.

تمرین

۱. ثابت کنید هر دنباله کوشی کراندار است.

۲. نشان دهید اگر یک زیردنباله دنباله کوشی همگرا باشد، دنباله همگرا می‌شود. و از اینجا با استفاده از قضیه ۳-۴ اثبات دیگری برای قضیه کوشی بیاورید.

۳. ثابت کنید حد دنباله  $\{a_n\}$  در صورت وجود با حد هر بازآرایی آن مساوی است.

۴.  $a_1, a_2, \dots, a_n$  اعداد حقیقی مثبتی هستند و

$$b_k = \sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k}{n}}$$

ثابت کنید  $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

۵. (مهم) اگر تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  در نقطه  $a$  پیوسته باشد و  $\{a_n\}$  دنباله‌ای باشد که به  $a$

می‌گراید آنگاه  $\{f(a_n)\}$  به  $f(a)$  میل می‌کند.

۶. ثابت کنید  $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  همگراست.

۷. ثابت کنید  $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$  همگراست.

۸. ثابت کنید اگر  $\{a_n\}$  به  $\alpha$  همگرا باشد آنگاه  $\{|a_n|\}$  به  $|\alpha|$  همگراست. مثالی از دنباله  $\{a_n\}$  بزنید که همگرا نباشد ولی  $\{|a_n|\}$  همگرا باشد.

۹. کلیه دنباله‌های  $\{a_n\}$  را چنان معین کنید که

$$a_1 = 1, \quad |a_n - a_m| < \frac{2mn}{m^2 + n^2}$$

۱۰. مثالی از بازه‌های باز تودرتو بزنید که طول بازه‌ها به صفر میل کند و اشتراک آنها تهی باشد.

۱۱. با استفاده از لم ۲، قضیه ۳-۴ را ثابت کنید.

### ۳-۳ دنباله‌های همگرای مهم

(الف)  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$  اگر و فقط اگر  $|q| < 1$ .

(ب)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = 0$  اگر و فقط اگر  $\alpha < 0$ .

(ج)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{(1+\epsilon)^n} = 0$ ،  $\epsilon > 0$  و  $\alpha$  عددی حقیقی دلخواه.

(د)  $a > 0$ ،  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$

(ه)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(و)  $\beta > 0$  و  $\alpha$  دلخواه،  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log n)^\alpha}{n^\beta} = 0$ .

(ز)  $a > 0$ ،  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{a^n} = \infty$

(ح)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} (\frac{n}{e})^n} = 1$  (فرمول استرلینگ) (تقریب خوب برای  $n!$ )

(ط)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = 1$

(ی)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$

تمرین

۱. روابط فوق را با دقت کافی ثابت کنید! (بجز فرمول استرلینگ!)

### ۴-۳ دنباله‌های بازگشتی

دنباله‌ای که جمله  $n$ ام آن بر حسب روابطی از جملات قبلی معلوم باشد دنباله بازگشتی نام دارد. یکی از صورتهای کلی دنباله بازگشتی به صورت زیر است:

$$a_1, a_2, \dots, a_k \text{ معلوم } n > k: a_n = f(a_{n-1}, \dots, a_{n-k})$$

که  $f$  تابعی  $k$  متغیره است. اکثر مواقع  $a_n$  بر حسب ترکیب خطی از  $k$  جمله قبل تعریف می‌شود:

$$a_1, \dots, a_k \text{ معلوم } a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} \quad n > k \quad (۱-۳)$$

واضح است که برای  $a_1, \dots, a_k$  مشخص، دنباله به صورت یکتا به وجود می‌آید. پس اگر جمله عمومی را حدس بزنیم کار تمام است.

به معادله (۱-۳) معادله زیر را نسبت می‌دهیم:

$$x^k - c_1 x^{k-1} - \dots - c_k = 0 \quad (۲-۳)$$

حال چند حالت ممکن است اتفاق بیافتد:

الف) معادله  $k$  ریشه متمایز حقیقی  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  را داشته باشد؛ آنگاه دنباله

$$a_n = \lambda_1 \alpha_1^n + \lambda_2 \alpha_2^n + \dots + \lambda_k \alpha_k^n$$

در رابطه بازگشتی مزبور صدق می‌کند (چرا؟)؛ پس کافی است ضرایب  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  از  $k$  معادله،  $k$  مجهول زیر به دست بیاوریم:

$$\begin{cases} \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_k \alpha_k = a_1 \\ \lambda_1 \alpha_1^2 + \lambda_2 \alpha_2^2 + \dots + \lambda_k \alpha_k^2 = a_2 \\ \vdots \\ \lambda_1 \alpha_1^k + \lambda_2 \alpha_2^k + \dots + \lambda_k \alpha_k^k = a_k \end{cases}$$

ب) ریشه‌های معادله (۲-۳) حقیقی باشند ولی متمایز نباشند.

ابتدا قضیه زیر را که در دبیرستان خوانده‌ایم یادآوری می‌کنیم

#### ● قضیه ۷-۳

اگر چند جمله‌ای  $P(x)$  ریشه مرتبه  $k$ ام داشته باشد یعنی  $P(x) = (x - \alpha)^k Q(x)$  که  $Q(\alpha) \neq 0$  آنگاه

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = \dots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$$

فرض می‌کنیم معادله (۲-۳) ریشه‌های  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  به ترتیب از مرتبه‌های  $m_1, m_2, \dots, m_r$  داشته باشد ( $m_1 + m_2 + \dots + m_r = k$ ). آنگاه دنباله‌های زیر در معادله (۱-۳) صدق می‌کنند

$$a_n = \alpha_i^n$$

$$a_n = n\alpha_i^n$$

⋮

$$a_n = n(n-1)\dots(n-m_i+1)\alpha_i^n \stackrel{\text{تعریف}}{=} P(n, m_i)\alpha_i^n$$

به ازای  $1 \leq i \leq r$

پس جواب کلی دستگاه از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$a_n = \lambda_1 \alpha_1^n + \lambda_2 n \alpha_1^n + \dots + \lambda_{m_1} P(n, m_1) \alpha_1^n + \dots \\ + \lambda_{n-m_r} \alpha_r^n + \dots + \lambda_k P(n, m_r) \alpha_r^n$$

که برای به دست آوردن  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  باز باید یک دستگاه  $k$  معادله  $k$  مجهول را حل کنیم

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 \alpha_1 + \dots + \lambda_k P(1, m_r) \alpha_r = a_1 \\ \vdots \\ \lambda_1 \alpha_1^k + \lambda_2 k \alpha_1^k + \dots + \lambda_k P(k, m_r) \alpha_r^k = a_k \end{cases}$$

ج) اگر ریشه‌های معادله مختلط باشند و بتوانیم دنباله‌ای بسازیم که در شرایط صدق کند بنابراین دنباله ضرایب باید وقتی که به توان می‌رسند حقیقی شوند.  
د) اگر دستگاه  $k$  معادله  $k$  مجهول جواب نداشته باشد باید از روشهای ابتکاری استفاده کنیم.

### ■ مثال ۱۱-۳

دنباله فیبوناچی،  $f_1 = f_2 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$  به معادله زیر منجر می‌شود:

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow f_n = \lambda_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \lambda_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

$$\begin{cases} \lambda_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + \lambda_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1 \\ \lambda_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + \lambda_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$



■ مثال ۳-۱۲

دنباله زیر را به طور صریح پیدا کنید:

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 1, \quad f_n = 2f_{n-1} - f_{n-2}$$

حل.

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ مضاعف}$$

$$f_n = \lambda_1 1^n + n \lambda_2 1^n = \lambda_1 + \lambda_2 n$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1 \Rightarrow f_n = n - 1$$

■ مثال ۳-۱۳

$f_n$  را به صورت صریح بیان کنید:

$$f_1 = 2, \quad f_2 = 5, \quad f_3 = 12$$

$$f_n = 5f_{n-1} - 7f_{n-2} + 3f_{n-3}$$

حل. باید معادله زیر را حل کنیم:

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x-1)^2(x-3) = 0 \Rightarrow x = 1, \quad x = 3$$

مضاعف

$$f_n = \lambda_1 1^n + \lambda_2 n 1^n + \lambda_3 3^n$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 9\lambda_3 = 5 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 27\lambda_3 = 12 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = \frac{1}{3}$$

$$f_n = n + 3^{n-1}$$

روش حل دنباله‌های بازگشتی که به صورت دستگاه معادلات هستند

فرض کنید  $\{x_{1n}\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{x_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\dots$ ,  $\{x_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$  دنباله باشند که در رابطه زیر صدق

کنند  $(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{k1}, \dots, x_{k1})$  معلومند)

$$\begin{cases} x_{1,n+1} = a_{11}x_{1n} + a_{12}x_{2n} + \dots + a_{1k}x_{kn} \\ x_{2,n+1} = a_{21}x_{1n} + a_{22}x_{2n} + \dots + a_{2k}x_{kn} \\ \vdots \\ x_{k,n+1} = a_{k1}x_{1n} + a_{k2}x_{2n} + \dots + a_{kk}x_{kn} \end{cases}$$

به راحتی دیده می‌شود

$$\begin{pmatrix} x_{1,n+1} \\ x_{2,n+1} \\ \vdots \\ x_{k,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \\ \vdots \\ x_{k,n} \end{pmatrix}$$

$$X_{n+1} = AX_n$$

اگر بخواهیم دنباله به صورت صریح به دست آوریم باید  $A^n$  را به دست آوریم، چون

$$X_{n+1} = AX_n = A^2 X_{n-1} = \dots = A^n X_1$$

حال روشهایی را برای به دست آوردن توان  $n$ ام یک ماتریس بیان می‌کنیم.

### ▲ تعریف ۳-۷

$\lambda$  را یک مقدار ویژه ماتریس  $A_{n \times n}$  می‌نامند هرگاه

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

▲

پس هر معادله  $n \times n$  مقدار ویژه دارد (ممکن است تکراری، مختلط یا حقیقی باشند)، و باید یک معادله درجه  $n$  را حل کنیم.

### ▲ تعریف ۳-۸

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  مقادیر ویژه ماتریس  $A$  هستند.  $Y = \begin{pmatrix} y_{1i} \\ y_{2i} \\ \vdots \\ y_{ni} \end{pmatrix}$  یک بردار ویژه متناظر  $\lambda_i$

برای  $A$  نامیده می‌شود هرگاه

$$AY = \lambda_i Y$$

▲

● قضیه ۳-۸

با نمادگذاری تعاریف قبل

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}}_V \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{D: \text{ ماتریس قطری}} \underbrace{\begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}^{-1}}_{V^{-1}}$$

پس

$$A^k = VD^kV^{-1}$$

و

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & 0 \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

تذکره. چند مثال عددی برای ماتریسهای  $2 \times 2$  و  $3 \times 3$  حل کنید تا به فرایند کار مسلط شوید.

حل چند دنباله بازگشتی غیراستاندارد برای حل بعضی از دنباله‌های بازگشتی می‌توان با تغییر صورت جمله‌های دنباله آن را به صورتهای استاندارد قبلی تبدیل کرد. در اینجا چند مثال مهم را می‌آوریم

الف) حل دنباله بازگشتی

$$au_n + bu_{n+1} + au_n = d$$

$$au_n + bu_{n+1} + au_n = d \quad (b \text{ مرتب می‌کنیم. فرض می‌کنیم } \frac{x_n}{x_{n-1}} = au_n + b \text{ (بدیهی است که با}$$

یافتن فرمول صریح برای  $x_n$ ، برای  $u_n$  نیز فرمولی پیدا می‌شود). با جایگذاری نتیجه می‌شود

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} \left( \frac{x_{n+1}}{ax_n} - \frac{b}{a} \right) + \frac{x_n}{x_{n-1}} - b = d$$

که رابطه فوق به صورت زیر ساده می‌شود

$$x_{n+1} = (b - a^2)x_n + a(d + b)$$

که قابل محاسبه است.

تذکر. برابر بودن ضرایب  $u_n u_{n+1}$  و  $u_n$  لازم نیست (فقط برای راحتی محاسبه مساوی گرفته‌ایم).

## ■ مثال ۳-۱۴

را به صورت صریح بنویسید  $(u_1 = -\frac{7}{4}, u_2 = -\frac{17}{8})$   $u_n u_{n+1} + 6u_{n+1} + u_n = -12$

حل. در مثال  $a = 1$  و  $b = 6$  و  $d = -12$  است و  $x_n$  کمکی به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 5x_n - 6x_{n-1} \\ \Rightarrow x^2 - 5x + 6 &= 0 \Rightarrow x = 2, 3 \\ \Rightarrow x_n &= A \times 2^n + B \times 3^n\end{aligned}$$

چون  $\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{5}{2}$  می‌توان فرض کرد  $x_n = 2$  و  $x_{n-1} = 5$ . پس  $A = B = 1$

$$\frac{2^n + 3^n}{2^{n-1} + 3^{n-1}} = u_n + 6 \Rightarrow u_n = \frac{2^n + 3^n}{2^{n-1} + 3^{n-1}} - 6$$

■

ب) حل دنباله‌های بازگشتی با ضرایب متغیر در بعضی از دنباله‌های بازگشتی ضرایب معادله بازگشتی تابعی از  $n$  می‌باشند.

## ■ مثال ۳-۱۵

که به راحتی  $a_n - a_{n-1} = f(n)$  در می‌آید.  $a_n = \sum_{i=1}^n f(i) + a_0$

■

## ■ مثال ۳-۱۶

می‌توان  $a_n - k a_{n-1} = f(n)$  گرفت و در نتیجه به صورت زیر ساده می‌شود

$$b_n - b_{n-1} = \frac{f(n)}{k^n}$$

■

که با استفاده از مثال ۳-۱۵ قابل محاسبه است.

یک حالت کلی

گاهی به دنباله‌های بازگشتی به فرم کلی زیر برخورد می‌کنیم:

$$[ \text{معادله اصلی} ] \quad a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \dots + a_k u_{n-k} = f(n) (*)$$

با شرط اولیه  $u_0, u_1, u_2, \dots, u_k$

اگر بتوانیم دنباله‌ای مانند  $b_n$  بیابیم که در شرط (\*) صدق کند ولی احتمالاً شرایط اولیه را برآورده نکند، و دنباله  $c_n$  را که از رابطه زیر قابل محاسبه است با شرایط اولیه  $c_0 = a_0 - b_0$

$$c_k = a_k - b_k, \dots, c_1 = a_1 - b_1$$

$$a \cdot c_n + a_1 c_{n+1} + \dots + a_k c_{n-k+1} = 0$$

آنگاه دنباله اصلی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u_n = a_n + c_n$$

■ مثال ۳-۱۷

فرمول صریح دنباله زیر را به دست آورید:

$$(*) u_n - f(n)u_{n-1} = g(n) \quad u \text{ معلوم و}$$

تابع  $t(n)$  را بدین صورت تعریف می‌کنیم

$$t(n) = \prod_{i=1}^n f(i)$$

همچنین دنباله  $a_n$  را به صورت  $a_n = u_n/t(n)$  تعریف می‌کنیم. با جایگذاری  $a_n$  به جای  $u_n$  در معادله  $(*)$  به دست می‌آوریم

$$a_n t(n) - f(n)t(n-1)a_{n-1} = g(n)$$

اما می‌دانیم  $t(n) - f(n)t(n-1) = 0$ . (چرا؟) پس

$$a_n - a_{n-1} = \frac{g(n)}{t(n)}$$

که با استفاده از مثال (۳-۱۵)،  $a_n$  به دست می‌آید. پس

$$u_n = t(n)a_n$$

■

تمرین برای دنباله‌های بازگشتی غیراستاندارد

الف) در قسمت «یک حالت کلی»، برای  $f(n)$  های زیر  $b_n$  را حساب کرده‌ایم؛ فرایند کار را ثابت کنید.

۱.  $f(n) = \text{ثابت} \leftarrow b_n = \text{ثابت}$

۲.  $f(n) = n \leftarrow b_n = An + B$  (A و B ثابت)

۳.  $f(n) = n^k \leftarrow b_n = A_k n^k + A_{k-1} n^{k-1} + \dots + A_1$  (ثابت  $A_k, \dots, A_1$ )

۴.  $f(n) = r^n \leftarrow b_n = Ar^n$

۵.  $f(n) = n^k r^n \leftarrow b_n = r^n (A_k n^k + \dots + A_1)$

۶.  $b_n = Ar^n \sin n\alpha + Br^n \cos n\alpha \leftarrow f(n) = r^n \sin n\alpha$  یا  $f(n) = r^n \cos n\alpha$ .

۷. اگر جواب  $b_n$  برای  $f(n)$ ،  $\alpha(n)$  باشد و برای  $g(n)$ ،  $\beta(n)$  باشد ثابت کنید برای  $f(n) + g(n)$ ، جواب  $\beta(n) + \alpha(n)$  است.

ب) برای این دنباله‌ها فرمول صریح به دست آورید:

$$۱. a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 3^n$$

$$۲. a_0 = a_1 = 1, a_{n+2} - a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$۳. a_0 \cdots a_r, a_{n+2} - 3a_{n+1} - 3a_{n+1} - a_n = 3 - 5a_n$$
 معلوم  $a_0$

$$۴. a_0 = a_1 = 1, a_{n+2}^2 - 5a_{n+1}^2 + 6a_n^2 = 7n$$

$$۵. a_0 = 2, a_n^2 - 2a_{n-1} = 0$$

### تمرین

۱.  $0 < \alpha < 1$  و  $a_n > 0$ . آیا دنباله‌ای از اعداد وجود دارد که

$$1 + a_{n+1} \leq a_n + \frac{\alpha}{n} a_n$$

۲.  $U_n$  و  $V_n$  را به دست آورید ( $U_n$  و  $V_n$  معلومند)

$$U_{n+1} = \frac{2U_n + V_n}{3}, \quad V_{n+1} = \frac{2V_n + U_n}{3}$$

۳.  $a_n$  و  $b_n$  را بیابید ( $a_0$  و  $b_0$  معلومند)

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n^2 + 2b_n^2 \\ b_{n+1} = 2a_n b_n \end{cases}$$

۴. اگر  $a_n a_{n+1} = 2a_n - 1$  ( $a_n > 0$ ) ثابت کنید  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$  (در این دنباله «۲» وجود ندارد).

۵. ثابت کنید رقم یکان  $[(2 + \sqrt{3})^n]$  عددی است فرد.

راهنمایی:  $a_n = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$  را به صورت بازگشتی بنویسید.

۶. رقم یکان  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{1980}$  را پیدا کنید.

راهنمایی:  $a_n = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^{2n} + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^{2n}$  را به صورت بازگشتی بنویسید.

۷. در دنباله فیبوناچی ثابت کنید

$$f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2 = f_n f_{n+1} \quad (\text{الف})$$

ب) جملات فیبوناچی  $a_{m+n} = a_{n-1} a_m + a_n a_{m+1}$

ج)  $(a_n, a_m) = a_{(m,n)}$  جملات فیبوناچی

۸. ثابت کنید هر عدد طبیعی مجموع چند جمله متمایز از جملات دنباله فیبوناچی است.

۹. اگر  $a$  بزرگترین ریشه مثبت  $x^2 - 3x^2 + 1 = 0$  باشد، ثابت کنید  $[a^{1988}]$  و  $[a^{1788}]$  بر ۱۷ بخش‌پذیرند (راهنمایی: از دنباله‌های بازگشتی استفاده کنید).

۱۰. روشی برای محاسبه

$$\underbrace{f(f(\dots(f(x))))}_{n \text{ بار}}$$

که  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  است ارائه دهید.

۱۱. الف) فرمول صریح دنباله بازگشتی زیر را به دست آورید:

$$a_1 = 0, \quad 2a_{n+1} = 3a_n + \sqrt{5a_n^2 + 4}$$

ب) ثابت کنید  $a_{2n}$  به ازای هیچ  $n$  بر ۱۳۷۱ بخش‌پذیر نیست.

### ۵-۳ دنباله‌های متناوب عددی

مطالب اصلی

▲ تعریف ۳-۹

اگر  $\{a_n\}$  دنباله‌ای از اعداد صحیح باشد  $\{a_n \pmod{m}\}$  یک دنباله همبستگی گفته می‌شود.

▲

▲ تعریف ۳-۱۰

اگر  $\{a_n\}$  دنباله‌ای از اعداد صحیح باشد که  $N$  و  $T$  طبیعی وجود داشته باشند که

$$a_{n+T} \equiv a_n \pmod{m}, \quad n \geq N$$

آنگاه گوئیم دنباله  $\{a_n \pmod{m}\}$  یک دنباله همبستگی متناوب است، و  $T$  یک دوره تناوب آن و کوچکترین دوره تناوب که به  $T(m)$  نشان داده می‌شود دوره تناوب اصلی دنباله گفته می‌شود. اگر  $N = 1$  آنگاه دنباله اکیداً متناوب است.

▲

● قضیه ۳-۹

دنباله  $\{a_n\}$  از اعداد صحیح به ازای یک چند جمله‌ای  $r$  متغیری با ضرایب صحیح مانند  $P$  در شرط زیر صدق می‌کنند

$$a_{n+r} = P(a_{n+r-1}, \dots, a_n), \quad n \geq 1$$

آنگاه  $\{a_n \pmod{m}\}$  یک دنباله متناوب است.

اثبات.  $a_n \equiv \bar{a}_n \pmod{m}$  که  $0 \leq \bar{a}_n \leq m-1$ ، سپس  $r$  تاییهای مرتب زیر را در

نظر می‌گیریم

$$(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_r), (\bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_{r+1}), \dots, (\bar{a}_n, \bar{a}_{n+1}, \dots, \bar{a}_{n+r-1})$$

حداکثر  $m^r$ ،  $r$  تایی مرتب متمایز از اعداد بین صفر و  $m-1$  وجود دارد، پس در  $m^r + 1$  عضو اول از دنباله فوق دو عضو مساوی مثلاً

$$(\bar{a}_N, \dots, \bar{a}_{N+r-1}) = (\bar{a}_{N+T}, \dots, \bar{a}_{N+r-1+T})$$

وجود دارند. پس  $a_{N+r+T} \equiv P(\bar{a}_{N+r-1}, \dots, \bar{a}_N) \equiv a_{N+r} \pmod{m}$  پس  $n \geq N$  آنگاه  $\bar{a}_{n+T} = \bar{a}_n$  است. متناوب است.

## ● قضیه ۳-۱۰

اگر  $T(m)$  دوره تناوب اصلی دنباله  $\{a_n \pmod{m}\}$  و  $T$  یک دوره تناوب آن باشد، آنگاه  $T(m) \mid T$

## ● قضیه ۳-۱۱

اگر  $T(m)$  و  $T(m')$  دوره تناوب اصلی دنباله‌های  $\{a_n \pmod{m}\}$  و  $\{a_n \pmod{m'}\}$  باشند آنگاه  $m' \mid m$  نتیجه می‌دهد  $T(m') \mid T(m)$ .

## ● قضیه ۳-۱۲

$M = [m_1, m_2]$  و  $T(M)$ ،  $T(m_1)$ ،  $T(m_2)$  دوره تناوبهای اصلی دنباله‌های  $\{a_n \pmod{M}\}$ ،  $\{a_n \pmod{m_1}\}$  و  $\{a_n \pmod{m_2}\}$  باشند، آنگاه

$$T(M) = [T(m_1), T(m_2)]$$

اثبات. از قضیه ۳-۱۱ نتیجه می‌شود  $T(m_i) \mid T(M)$ ،  $(i = 1, 2)$  پس

$$[T(m_1), T(m_2)] \mid T(M)$$

به راحتی می‌توان نشان داد  $[T(m_1), T(m_2)]$  یک دوره تناوب دنباله  $\{a_n \pmod{M}\}$  است پس بنابر قضیه ۳-۱۰  $T(M) \mid [T(m_1), T(m_2)]$  و از آنجا حکم ثابت خواهد شد. بخصوص اگر  $(m_1, m_2) = 1$  آنگاه  $T(m_1, m_2) = [T(m_1), T(m_2)]$ .

## ● قضیه ۳-۱۳

دنباله  $\{n^k \pmod{m}\}$  یک دنباله متناوب اکید، با دوره تناوب  $m$  است.

## ● قضیه ۳-۱۴

اگر دنباله‌های  $\{a_n \pmod{m}\}$  و  $\{b_n \pmod{m}\}$  دوره تناوبهای  $T_1$  و  $T_2$  داشته باشند، آنگاه  $\{a_n + b_n \pmod{m}\}$  و  $\{a_n b_n \pmod{m}\}$  متناوب با دوره تناوب  $[T_1, T_2]$  خواهند بود.



■ مثال ۳-۱۸

ثابت کنید رقم آخر اعضای دنباله  $\{n(n+1)(n+2)\}$  یک دنباله متناوب می‌سازد.

حل.  $\{n^i \pmod{10}\}$  بنا بر قضیه ۳-۱۳ متناوب است و حکم مسأله بنا بر قضیه ۳-۱۴ صادق خواهد بود زیرا  $n(n+1)(n+2) = n^3 + 3n^2 + 2n$ .

■ مثال ۳-۱۹

فرض کنید  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, \dots$  دنباله‌ای باشد که  $a_{n+2}$  رقم آخر  $a_n + a_{n+1}$  است. ثابت کنید

$$4 \mid a_{1985}^2 + \dots + a_2^2$$

بنا بر قضیه ۳-۹ دنباله  $\{b_n\} = \{a_n \pmod{2}\}$  دنباله متناوب است. چند جمله آن را می‌نویسیم

$$1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, \dots$$

پس  $\{b_n\}$  یک دنباله اکیداً متناوب با دوره تناوب ۱۵ است. پس

$$a_{1985} \equiv b_5, \quad a_{1986} \equiv b_6, \quad \dots, \quad a_{2000} \equiv b_{20} \pmod{2}$$

مشاهده می‌کنیم ۸ جمله فرد و ۸ جمله زوج است. پس

$$4 \mid a_{1985}^2 + \dots + a_2^2$$

■ مثال ۳-۲۰

$\{a_n\}$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:  $a_1 = 1989^{1989}$  و  $a_n$  مجموعه رقمهای  $a_{n-1}$  است. مقدار  $a_5$  را به دست آورید.

حل. می‌دانیم مجموع ارقام یک عدد همنهشت خودش به هنگ ۹ است (چرا؟). پس از آنجایی که  $a_1 \equiv 0 \pmod{9}$  پس  $a_2 \equiv a_3 \equiv a_4 \equiv a_5 \equiv 0$  به هنگ ۹ ولی

$$a_1 = 1989^{1989} < (10^4)^{2000} = 10^{8000}$$

$$a_2 < 9 \times 8000 < 10^5$$

$$a_3 < 5 \times 9 = 45$$

$$a_4 < 4 + 9 = 13$$

$$a_5 \leq 9$$



حل. دنباله را به هنگ ۲ در نظر می‌گیریم

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 1 \ 1 \ 1 \\
 \rightarrow 1 \ 0 \ 1 \ 0 \\
 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\
 1 \ 0 \ 0 \ 0 \\
 1 \ 1 \ 1 \ 0 \\
 \rightarrow 1 \ 0 \ 1 \ 0
 \end{array}$$

پس دنباله تکرار شده و اعداد زوج در ۵ سطر اولیه وجود دارند.

دنباله‌های اکیداً متناوب هم‌نهشتی

● قضیه ۳-۱۵

دنباله  $\{a_n\}$  با تعریف بازگشتی زیر تعریف می‌شود

$$a_{n+r} = c_1 a_{n+r-1} + c_2 a_{n+r-2} + \dots + c_{r-1} a_{n+1} + c_r a_n$$

که همه اعداد  $c_i$  ها فوق طبیعی‌اند.

دنباله  $\{a_n(\text{mod } m)\}$  اکیداً متناوب است اگر  $(c_r, m) = 1$ .

اثبات. دنباله  $\{a_n(\text{mod } m)\}$  بنا بر قضیه ۳-۹ دنباله‌ای متناوب است پس  $N$  و  $T$  طبیعی وجود دارند که  $n \geq N \Rightarrow a_{n+T} \equiv a_n(\text{mod } m)$  ولی داریم

$$\begin{aligned}
 c_r a_{N-1+T} &= a_{N+r-1+T} - (c_1 a_{N-r-2+T} + \dots + c_{r-1} a_{N+T}) \\
 &\equiv a_{N+r-1} - (c_1 a_{N+r-2} + \dots + c_{r-1} a_N) \\
 &= c_r a_{N-1}(\text{mod } m)
 \end{aligned}$$

از آنجایی که  $(c_r, m) = 1$  آنگاه  $a_{N-1+T} \equiv a_N(\text{mod } m)$ ؛ با ادامه این روش  $N$  یکی‌یکی کم شده و حکم ثابت می‌شود.

نتیجه ۱. اگر  $c_r = \pm 1$  باشد آنگاه  $\{a_n(\text{mod } m)\}$  دنباله اکیداً متناوب است.

نتیجه ۲. اگر  $c_r \not\equiv 0$  به هنگ عدد اول  $p$  آنگاه  $\{a_n(\text{mod } p)\}$  دنباله اکیداً متناوب است.

● قضیه ۳-۱۶

اگر  $(a, m) = 1$  دنباله  $\{a^n(\text{mod } m)\}$  یک دنباله اکیداً متناوب است و  $\varphi(m)$  یک دوره تناوب است.

اثبات.  $a_{n+1} = a^{n+1} = a a_n$  پس بنا بر قضیه ۳-۱۵،  $\{a_n\}$  به هنگ  $m$  یک دنباله

اکیداً یکنواست. قسمت دوم از رابطه  $1(\text{mod } m) \equiv a^{\varphi(m)}$  به راحتی اثبات می‌شود.

نتیجه ۱. دوره تناوب  $\{a^n \pmod{10}\}$ ، ۴ است.

نتیجه ۲. دوره تناوب  $\{n^n \pmod{10}\}$ ، ۲۰ است.

هر دو دنباله فوق‌الکیدا متناوب هستند. (چرا؟)

### ■ مثال ۳-۲۳

تمام اعداد طبیعی  $n$  را بیابید که  $2^n - 1 \mid 7$ . همچنین ثابت کنید به ازای هر  $n$ ،  $7 \nmid 2^n + 1$ .

حل. قضیه ۳-۱۶ می‌گوید  $\{2^n \pmod{7}\}$  اکیدا متناوب است. از آنجایی که دنباله مذکور به صورت  $1, 2, 4, 1, 2, 4, \dots$  است، پس دوره تناوب آن ۳ است. پس بداهتا  $7 \mid 2^n - 1$  اگر و فقط اگر  $n = 3k$  و به ازای هر  $n$ ،  $7 \nmid 2^n + 1$ .

### ■ مثال ۳-۲۴

همه اعداد  $M \in \mathbb{N}$  را بیابید که  $M^{1989} + 1989^M \mid 5$ .

حل. می‌دانیم  $1989^M \equiv (-1)^M \pmod{5} \Rightarrow 1989^M \equiv -1 \pmod{5}$ . همچنین چون  $M$  نمی‌تواند بر ۵ بخش‌پذیر باشد (چرا؟) پس بنابر قضیه فرما

$$M^{1989} \equiv M \pmod{5}$$

یعنی باید تمام  $M$ هایی را به دست آورید که  $M + (-1)^M$  بر ۵ بخش‌پذیر باشد. دو حالت دارد (الف)  $M$  زوج: که در این حالت  $M = 5k - 1$  باید به صورت  $M = 10k + 4$  باشد؛ (ب)  $M$  فرد: که در این حالت  $M = 5k + 1$  باید به صورت  $M = 10k + 1$  باشد. ■

### ■ مثال ۳-۲۵

اعداد  $1 < m < n$  را چنان بیابید که سه رقم آخر  $1978^m$  و  $1978^n$  مساوی باشند و  $m + n$  مینیمم باشد.

حل.  $\{1978^n \pmod{8}\} = 2, 4, 0, 0, 0, \dots$ . یک دنباله متناوب از جمله سوم با دوره تناوب ۱ است،  $\{1978^n \pmod{125}\}$  نیز یک دنباله متناوب با دوره تناوب  $\varphi(125) = 100$  است. حال به عنوان یک تمرین در نظریه اعداد ثابت کنید ۲، ۴، ۵، ۱۰، ۲۰، ۲۵، ۵۰ دوره تناوب نیستند. پس  $\{1978^n \pmod{1000}\}$  یک دنباله متناوب از  $n \geq 3$  با دوره تناوب ۱۰۰ است. پس  $m = 3$  و  $n = 100 + 3$  مقدار مینیمم برابر ۱۰۶ است. ■  
حال چند تمرین زیر را حل نمایید.

تمرین

۱.  $\{a_n\}$  با تعریف  $a_1 = 3$  و  $a_{n+1} = 3^{a_n}$  را در نظر گرفته، بگویید کدام اعداد در

$\{a_n \pmod{100}\}$  نامتناهی بار تکرار می‌شوند.

۲.  $\{f_n\}$  دنباله فیبوناچی است. ثابت کنید  $\{f_n \pmod{m}\}$  دوره تناوبی زوج دارد ( $m \geq 3$ ).

۳.  $a_1 = 1, a_2 = 0$  و  $a_{n+1} = \lambda a_n - a_{n-1}$ . ثابت کنید هیچ جمله به صورت  $3^\alpha \times 5^\beta$  نیست. (راهنمایی:  $\{a_n \pmod{3}\}$  و  $\{a_n \pmod{5}\}$  را با هم بررسی کنید).

۴. دو دنباله  $\{x_n\}$  و  $\{y_n\}$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x_1 = x_2 = 1, x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1}$$

$$y_1 = 1, y_2 = 7, y_{n+1} = 2y_n + 3y_{n-1}$$

ثابت کنید  $\{x_n\}$  و  $\{y_n\}$  مقدار برابر ندارند (بجز در اولین جمله) (راهنمایی:  $\{x_n \pmod{8}\}$  و  $\{y_n \pmod{8}\}$  را بررسی کنید).

۵\*. ثابت کنید  $a_n = \sum_{k=0}^n 2^{2k} \binom{2n+1}{2k+1}$  به ازای هیچ  $n$  بر ۵ بخش پذیر نیست (راهنمایی: ثابت کنید  $a_n = 18a_{n-1} - 49a_{n-2}$ ).

۶. فرض کنید  $\{a_n \pmod{m}\}$  یک دنباله متناوب از جمله  $N$ ام با دوره تناوب اصلی  $T$  باشد و

$$a_N + a_{N+1} + \dots + a_{N+T-1} \equiv A \pmod{m}$$

ثابت کنید دنباله  $\{S_n \pmod{m}\}$  که  $S_n = a_1 + \dots + a_n$  یک دنباله متناوب از جمله  $N-1$ ام است و دوره تناوب اصلی آن  $\frac{m}{(A,m)} \times T$  است. خصوصاً دوره تناوب  $T$  دارد اگر  $A \equiv 0 \pmod{m}$  و دوره تناوب  $mT$  دارد اگر  $(A,m) = 1$ .

۷. دنباله  $\{a_n\}$  را با تعریف  $a_n = 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$  در نظر بگیرید. ثابت کنید در این دنباله نامتناهی عدد فرد آمده است.

۸. دنباله  $\{a_n \pmod{10}\}$  که در آن  $a_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$  است در نظر بگیرید. ثابت کنید عدد  $0/a_1 a_2 a_3 \dots$  یک عدد گویاست.

### ۳-۶ دو دنباله خاص

دنباله‌های بتی

● قضیه ۳-۱۷ (قضیه بتی)

شرط لازم و کافی برای آنکه دنباله‌های  $\{[n\alpha]\}$  و  $\{[n\beta]\}$  مجموعه اعداد طبیعی را افزاز کنند، یعنی

$$\{[n\beta]\} \cap \{[n\alpha]\} = \emptyset, \quad \{[n\beta]\} \cup \{[n\alpha]\} = \mathbb{N}$$

آن است که  $\alpha$  و  $\beta$  گنگ باشند و

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$$

(که البته فرض شده است  $\alpha > 1$  و  $\beta > 1$ ).

اثبات. شرط گنگ بودن  $\alpha$  و  $\beta$  ساده است (آن را ثابت کنید). حال ثابت می‌کنیم شرط  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$  لازم و کافی است.

بزرگترین  $m$  و  $n$  که  $m\alpha < k+1$  و  $n\beta < k+1$  به ترتیب  $\left[\frac{k+1}{\alpha}\right]$  و  $\left[\frac{k+1}{\beta}\right]$  هستند. پس تعداد اعداد کوچکتر یا مساوی  $k$  در  $\{[n\alpha]\} \cup \{[n\beta]\}$  برابر است با

$$M = \left[\frac{k+1}{\alpha}\right] + \left[\frac{k+1}{\beta}\right]$$

پس

$$\frac{k+1}{\alpha} + \frac{k+1}{\beta} - 2 < M < \frac{k+1}{\alpha} + \frac{k+1}{\beta}$$

فرض می‌کنیم  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = r$  پس

$$(k+1)r - 2 < M < (k+1)r$$

الف) اگر  $r < 1$  آنگاه به ازای  $k$  به اندازه کافی بزرگ  $(k+1)r < k$ ، پس  $M < k$  یعنی اعداد کوچکتر یا مساوی  $k$  در دو دنباله از  $k$  کمتر است، پس دستکم یک عدد در آنها ظاهر نشده است که خلاف فرض است.

ب) اگر  $r > 1$  آنگاه به ازای  $k$  به اندازه کافی بزرگ  $(k+1)r - 2 > k$  پس  $M > k$  دستکم یک عدد کوچکتر یا مساوی  $k$  دو بار ظاهر شده چون جملات هر دنباله متمایز هستند (چرا؟)، پس یک جمله در دو دنباله مشترک است که تناقض است از (الف) و (ب) نتیجه می‌شود  $r = 1$ .

حال ثابت می‌کنیم اگر  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$  آنگاه  $\{[n\alpha]\}$  و  $\{[n\beta]\}$  را افزای می‌کنند.

$$M = \left[\frac{k+1}{\alpha}\right] + \left[k+1 - \frac{k+1}{\alpha}\right] = \left[\frac{k+1}{\alpha}\right] + k - \left[\frac{k+1}{\alpha}\right] = k$$

چون به ازای هر  $k$  درست است به راحتی با استقرا روی  $k$  حکم ثابت می‌شود.

### تمرین

۱. تابعهای  $f$  و  $g$  توابعی اکیداً صعودی از  $Z^+$  به  $Z^+$  هستند که برد آنها،  $Z^+$  را افزای می‌کند؛ و  $g(m) = f(f(m) + 1)$  مقدار  $f(2m)$  را بیاید.

### دنباله‌های چگال

$\{a_n\}$  در مجموعه  $A$  چگال است هرگاه هر همسایگی هر نقطه از مجموعه  $A$  نقطه‌ای از  $\{a_n\}$  را داشته باشد یا اگر  $A = [a, b]$  آنگاه بین هر دو نقطه  $A$  ولو خیلی نزدیک، یک نقطه از  $\{a_n\}$  وجود داشته باشد.

■ مثال ۳-۲۶

اعداد گویا در اعداد حقیقی یک دنباله چگال می‌سازند چون بین هر دو عدد حقیقی عددی گویا وجود دارد. (چرا؟)

یکی از دنباله‌های چگال خیلی مهم دنباله زیر است:

● قضیه ۳-۱۸

$\{\{n\alpha\}\}_{n=1}^{\infty}$ ، یعنی جزء کسری عدد و  $\alpha$  عددی گنگ است/ در  $[0, 1]$  چگال است. یعنی بین هر دو عدد  $a, b \in [0, 1]$ ،  $a < b$ ،  $n \in \mathbb{N}$  وجود دارد که  $a < \{n\alpha\} < b$ .

اثبات. دایره‌ای به محیط ۱ در نظر گرفته و یک نقطه آن را مبدأ اختیار کرده و آن را تقسیم‌بندی کنید و سپس نقاط  $A_1, A_2, \dots$  که فاصله آنها از مبدأ  $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots$  هستند در نظر بگیرید. هیچ دو نقطه‌ای بر هم منطبق نمی‌شوند زیرا در این صورت  $\alpha$  گویا می‌شود (چرا؟). پس برای هر بازه  $I$  هر قدر کوچک دو نقطه  $A_p$  و  $A_{p+q}$  وجود دارد که فاصله آنها از هم از طول بازه  $I$  کمتر باشد زیرا اگر فاصله هر دو نقطه از طول بازه  $I$  بیشتر باشد تنها تعداد متناهی نقطه روی دایره می‌توان پیدا کرد. ولی از آنجا که فاصله نقاط  $A_{p+q}$  و  $A_{p+2q}$  از هم از طول بازه  $I$  کمتر است و به همین ترتیب  $A_{p+2q}, A_{p+3q}, \dots$  و همچنین  $A_{p+2q}, A_{p+3q}, \dots$  این مطلب از آنجا نتیجه می‌شود که

$$(p+q)\alpha - p\alpha = (p+2q)\alpha - (p+q)\alpha = (p+3q)\alpha - (p+2q)\alpha = \dots$$

پس  $\{A_{p+qi}\}_{i=1}^{\infty}$  دست‌کم یک نقطه درون بازه  $I$  دارد؛ زیرا در غیر این صورت فاصله دو نقطه متوالی این دنباله از طول بازه  $I$  بیشتر می‌شود و این تناقض است و از اینجا حکم ثابت می‌شود.

تمرین

۱\*. ثابت کنید برای هر  $a$  طبیعی،  $a > 1$  و هر  $M$  طبیعی،  $n \in \mathbb{N}$  وجود دارد که ارقام اولیه  $a^n$ ،  $M$  باشد. مثلاً برای  $M = ۱۳۷۱۱۹۹۲$ ،  $n \in \mathbb{N}$  وجود دارد که

$$2^n = ۱۳۷۱۱۹۹۲ \dots\dots\dots$$

رقمهای دیگر

۲. ثابت کنید برای هر عدد اول  $p$  و هر عدد حقیقی مثبت  $\alpha$  در  $\{\{n\alpha\}\}_{n=1}^{\infty}$  بینهایت عدد مضرب  $p$  وجود دارد.

۳. اگر برای هر عدد طبیعی  $n$  داشته باشیم  $[n\alpha] + [n\beta] = [n(\alpha + \beta)]$ ، ثابت کنید  $\alpha$  و  $\beta$  صحیح هستند.

۴. ثابت کنید اگر  $\alpha$  گنگ باشد، دنباله  $a_{m,n} = m + n\alpha$  در  $\mathbf{R}$  چگال است.
۵. تابع پیوسته  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  و تابع  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  مفروض است و  $A$  یک مجموعه چگال در  $\mathbf{R}$  است که  $\forall x \in A, f(x) = g(x)$ . ثابت کنید  $f = g$ .
۶. با استفاده از مسأله بالا ثابت کنید تنها تابع  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  که
- $$\forall x, y \in \mathbf{R} \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$
- $$f(xy) = f(x)f(y)$$
- تابع همانی است (توجه: شرط پیوستگی ذکر نشده است).
- ۷\*. ثابت کنید  $\left\{ \frac{\varphi(n)}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$  در  $[0, 1]$  چگال است.
۸. ثابت کنید  $\mathbf{R}^k$  یک زیر دنباله چگال شمارا دارد.
۹. ثابت کنید مجموعه  $A$  در  $\mathbf{R}$  چگال است اگر و فقط اگر برای هر نقطه از  $\mathbf{R}$  دنباله‌ای از عناصر  $A$  باشد که به آن میل نماید.
۱۰.  $f: A \rightarrow B$  پیوسته است و  $X$  یک مجموعه چگال در  $A$  است. ثابت کنید  $f(X)$  در  $B$  چگال است (تابع پوشاست).

### ۷-۳ سریها

#### ▲ تعریف ۱۱-۳

دنباله حقیقی  $\{a_n\}$  را در نظر بگیرید. گوئیم  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  همگراست هرگاه  $\{S_n\}$  که با جمله عمومی  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  تعریف می‌شود همگرا باشد و حد  $S_n$  را مقدار سری در نظر می‌گیریم.

▲ با توجه به آنکه سری را به صورت دنباله تعریف کردیم تمام قضایای دنباله درباره آن صادق است. محک کوشی در اینجا به قضیه زیر تبدیل می‌شود:

#### ● قضیه ۱۹-۳

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  همگراست هرگاه برای هر  $\varepsilon > 0, N > 0$  وجود داشته باشد که اگر  $n \geq m > N$  آنگاه

$$|S_n - S_m| = |a_{m+1} + \dots + a_n| < \varepsilon \quad \text{یا} \quad \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon$$

● هرگاه  $n = m + 1, m > N$  در نظر بگیریم آنگاه به قضیه زیر می‌رسیم:



● قضیه ۳-۲۰

اگر  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  همگرا باشد آنگاه  $a_n \rightarrow 0$ .

■ مثال ۳-۲۷

در مثال ۳-۷ دیدیم که  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  همگرا نیست در حالی که  $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ .

■ مثال ۳-۲۸

ثابت کنید سری  $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$  همگرا نیست.

حل.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$$

■ مثال ۳-۲۹

ثابت کنید سری  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$  همگراست اگر و فقط اگر  $|q| < 1$ .

حل. اگر  $|q| > 1$  آنگاه  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$  و اگر  $|q| < 1$  آنگاه  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$  و اگر  $|q| = 1$

آنگاه  $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = 1$ .

▲ تعریف ۳-۱۲

سری  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  به طور مطلق همگراست وقتی  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  همگرا باشد.

واضح است که اگر  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  همگرا باشد آنگاه  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  همگراست (چرا؟). ولی در مثال ۳-۳۳

نشان خواهیم داد که عکس گزاره فوق درست نیست. حال به بیان چند آزمون برای تشخیص همگرایی یا واگرایی سریها می پردازیم.

▲ آزمون مقایسه

● قضیه ۳-۲۱

سری  $\sum c_n$  همگرا و سری  $\sum d_n$  واگرا هستند.

(الف) اگر به ازای  $n > N$  داشته باشیم  $|a_n| \leq c_n$  آنگاه می توان نتیجه گرفت  $\sum |a_n|$

همگراست.

(ب) اگر به ازای  $n > N$  داشته باشیم  $a_n \geq d_n > 0$  آنگاه می توان نتیجه گرفت  $\sum a_n$  واگراست.

اثبات.

الف) برای هر  $\varepsilon > 0$ ،  $N > 0$  وجود دارد که

$$n \geq m > N \Rightarrow |c_{m+1} + \dots + c_n| < \varepsilon$$

پس برای  $m, n > N$  داریم

$$|a_{m+1} + \dots + a_n| \leq |a_{m+1}| + \dots + |a_n| \leq |c_{m+1} + \dots + c_n| < \varepsilon$$

پس  $\sum a_n$  همگراست.ب) اگر  $\sum a_n$  همگرا باشد بنا بر قسمت الف)،  $\sum d_n$  همگرا می‌شود که تناقض است.

●

## ● قضیه ۳-۲۲

سری  $\sum c_n$  همگرا و سری  $\sum d_n$  واگرا و برای هر  $n$ ،  $c_n$  و  $d_n$  مثبت هستند؛الف) اگر به ازای  $n > N$  داشته باشیم  $\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \leq \frac{c_{n+1}}{c_n}$  آنگاه می‌توان نتیجه گرفت  $\sum a_n$  همگراست.ب) اگر به ازای  $n > N$  داشته باشیم  $\left| \frac{d_{n+1}}{d_n} \right| \geq \frac{d_{n+1}}{d_n}$  آنگاه می‌توان نتیجه گرفت  $\sum a_n$  واگراست.

●

اثبات. تمرین!

آزمون ریشه

## ● قضیه ۳-۲۳

 $\{a_n\}$  دنباله‌ای حقیقی و با جملات مثبت است؛الف) اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$  آنگاه  $\sum a_n$  واگراست.ب) اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$  آنگاه  $\sum a_n$  همگراست.ج) اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$  نمی‌توان نتیجه‌ای گرفت!اثبات. اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$  می‌توان نتیجه گرفت  $n > N$  یا  $\sqrt[n]{a_n} > 1$  و این با  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  در تضاد است. فرض می‌کنیم  $1 < \alpha < \beta < 1$  پس  $N > 0$  وجود دارد که

$$n > N \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < \beta \Rightarrow a_n < \beta^n$$

ولی  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta^n$  همگراست و همگرایی  $\sum a_n$  از آزمون مقایسه نتیجه می‌شود.دو سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$  و  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  اولی واگرا و دومی همگراست (مثال ۳-۳۱) ولی در هر دو

●

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$$

آزمون نسبت

● قضیه ۳-۲۴

$\{a_n\}$  دنباله‌ای حقیقی با جملات مثبت است. آنگاه

(الف)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$  آنگاه  $\sum a_n$  واگراست.

(ب)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$  آنگاه  $\sum a_n$  همگراست.

(ج)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$  نمی‌توان نتیجه‌ای گرفت!

اثبات. می‌توان ثابت کرد  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  یعنی آزمون ریشه از آزمون نسبت

قویتر است.

توضیح. در قضایای فوق به جای  $\lim$  می‌توان از  $\overline{\lim}$  استفاده کرد، یعنی تمام زیردنباله‌هایی که در آنها مثلاً  $\sqrt[n]{a_n}$  همگراست را در نظر می‌گیریم و کوچکترین کران بالای حد آنها را به صورت  $\overline{\lim}$  نمایش می‌دهیم.

آزمون کوشی

قضیه

$\sum a_n$  که  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq 0$  همگراست اگر و فقط اگر  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$  همگرا باشد.

آزمون انتگرال

قضیه

دنبالهٔ نزولی  $a_n = f(n)$  از جملات مثبت را در نظر بگیرید. همگراست اگر و فقط اگر  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  همگرا باشد.

■ مثال ۳-۳۰

ثابت کنید  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\pi^n \cdot n^n}$  همگراست.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{\pi^{n+1} (n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{\pi^n n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - \frac{1}{n})^n}{\pi} = \frac{1}{\pi e} < 1 \quad (\text{آزمون نسبت})$$

■ مثال ۳-۳۱

ثابت کنید  $\sum \frac{1}{n^p}$  همگراست اگر و فقط اگر  $p > 1$ .

حل. چون دنباله در شرط آزمون کوشی صدق می‌کند پس همگراست اگر و فقط اگر

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^k \cdot \frac{1}{r^{kp}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r^{k(p-1)}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{r^{p-1}} \right)^k$$

همگرا باشد پس  $\frac{1}{r^{p-1}} < 1$  یا  $p > 1$ .

■ مثال ۳-۳

ثابت کنید  $\sum \frac{1}{f_1(n) \cdots f_{k-1}(n) \cdot (f_k(n))^p}$  همگراست اگر و فقط اگر  $p > 1$  که  $f_i$ ها به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$k > 0, \quad f_k(n) = \log f_{k-1}(n), \quad f_0(n) = n$$

■ حل. اثبات با استفاده از آزمون انتگرال به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

روش جمع‌زنی آبل

فرمول زیر برای محاسبه مجموع بعضی سریها مورد استفاده زیاد دارد و منسوب به آبل است

$$\sum_{k=m}^n a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} A_{k+1} (b_k - b_{k+1}) + A_{n+1} b_n - A_m b_m \quad (3-3)$$

که در فرمول فوق  $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ . اثبات رابطه فوق ساده و با قرار دادن  $A_n - A_{n-1}$  به جای  $a_n$  و بسط دادن آن است.

فرمول ۳-۳ را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت

$$\sum_{k=1}^n a_k (b_{k+1} - b_k) = a_n b_{n+1} - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1} (a_{k+1} - a_k) \quad (4-3)$$

تذکر. سعی کنید تمرین ۲۹ از مسائل تکمیلی همین بخش را همین الان حل کنید!

حال به اثبات یک قضیه سودمند می‌پردازیم.

● قضیه ۳-۲۵

$\{a_n\}$  و  $\{b_n\}$  در شرایط زیر صدق می‌کنند:

الف) مجموعه‌های جزئی سری  $\sum a_n$  کراندار است.

ب)  $b_1 \geq b_2 \geq \cdots$

ج)  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

آنگاه  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  همگراست.

اثبات. ثابت می‌کنیم سری در شرط کوشی صدق می‌کند. کران  $A_n$ ها را  $M$  می‌گیریم

یعنی  $\forall n \in \mathbb{N} : |A_n| < M$  چون  $b_n \rightarrow 0$  پس  $N > 0$  وجود دارد که  $n > N$  آنگاه

$b_n < \frac{\epsilon}{1M}$  ( $\epsilon > 0$  داده شده است). اگر  $n > m > N$  آنگاه

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=m}^n a_k b_k \right| &= \left| \sum_{k=m}^{n-1} A_{k+1}(b_k - b_{k+1}) + A_{n+1}b_n - A_m b_m \right| \\ &\leq \sum_{k=m}^{n-1} |A_{k+1}|(b_k - b_{k+1}) + |A_{n+1}|b_n + |A_m|b_m \\ &\leq M \left( \sum_{k=m}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) + b_n + b_m \right) = 2Mb_m < \varepsilon \end{aligned}$$

نتیجه. (لایب نیتز) دنباله  $\{a_n\}$  در شرایط زیر صدق می‌کند:

الف)  $|a_1| \geq |a_2| \geq |a_3| \geq \dots$

ب)  $a_{2n-1} \leq 0$  و  $a_{2n} \geq 0$

ج)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

آنگاه  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  همگراست.

اثبات. کافی است در قضیه قبل به جای  $a_n$ ،  $(-1)^n$  و به جای  $b_n$ ،  $|a_n|$  را قرار

دهیم.

■ مثال ۳-۳۳

سری  $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \dots$  همگراست (بنابر قضیه لایب نیتز). ولی به طور مطلق همگرا نیست.

▲ تعریف ۳-۱۳

اگر  $\{a_{\sigma(n)}\}$  یک بازآرایی دنباله  $\{a_n\}$  باشد (به مثال ۳-۱۰ نگاه کنید) آنگاه  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$  یک بازآرایی سری  $\sum a_n$  است.

اگر به مجموعه‌های جزئی نگاه کنیم متوجه می‌شویم آنقدر بدیهی نیست که سری بی‌تغییر بماند، و در واقع نیز چنین است ولی در مورد سریهای به طور مطلق همگرا قضیه زیر را داریم:

● قضیه ۳-۲۶

اگر  $\sum a_n$  یک سری به طور مطلق همگرا باشد هر بازآرایی آن نیز همگرا به همان حد  $\sum a_n$  خواهد بود. اثبات.  $\sum |a_n|$  همگراست پس در شرط کوشی صدق می‌کند و به ازای هر  $\varepsilon > 0$ ،  $N > 0$  وجود دارد که  $n > m > N$  آنگاه

$$\sum_{k=m}^n |a_k| < \varepsilon$$

حال فرض می‌کنیم دنباله باز آرایش شده  $\{a_{\sigma(n)}\}$  باشد.  $N_1$  را آنقدر بزرگ می‌گیریم که

$$\{1, 2, 3, \dots, N\} \subseteq \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(N)\}$$

پس  $n > m > N_1$  داریم  $|S'_n - S'_m| < \varepsilon$ ،  $S'_k = \sum_{i=1}^k a_{\sigma(i)}$  چون تمام جملات  $a_1, a_2, \dots, a_N$  می‌روند و بقیه از رابطه (۳-۵) به دست می‌آید پس هر دو به یک حد همگرا هستند.  $m$  را ثابت و  $n$  را به بینهایت بفرستید!

تذکر. به مسأله ۲۶ از مسائل تکمیلی همین بخش مراجعه کنید.

## تمرینهای تکمیلی

۱. اگر  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k$  همگرا ( $k > 1, a_n \geq 0$ )، ثابت کنید  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$  همگراست.

۲. اگر برای  $\{a_n\}$  زیر دنباله‌های  $\{a_{2n}\}$ ،  $\{a_{2n+1}\}$  و  $\{a_{pn}\}$  که  $p$  عدد اول فرد است همگرا باشند، ثابت کنید  $\{a_n\}$  همگراست.

۳. ثابت کنید سریهای  $\{a_n\}$  و  $\{b_n\}$  با تعاریف زیر هر دو به یک حد همگرا هستند و ثابت کنید این حد عددی گویا نیست.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

۴. برای سری واگرای  $\sum a_n$  از جملات مثبت با مجموع جزئی  $S_n$ ،  $(S_n = a_1 + \dots + a_n)$ ، ثابت کنید  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$  همگراست اگر و فقط اگر  $p > 1$ .

۵. برای سری همگرای  $\sum a_n$  از جملات مثبت با باقیمانده جزئی  $(r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k)$  ثابت کنید  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n^p}$  همگراست اگر و فقط اگر  $p < 1$ .

۶.  $\{a_n\}$  به  $a$  همگراست. ثابت کنید دنباله  $A_n$  با تعریف زیر نیز به  $a$  همگراست:

$$A_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

با ذکر مثال نشان دهید عکس این قضیه درست نیست.

۷. دنباله  $\{x_n\}$  به صورت  $(\alpha > 0)$ ،  $x_{n+1} = \frac{p-1}{p}x_n + \frac{\alpha}{px_n^{p-1}}$ ،  $p$  عددی طبیعی است. ثابت کنید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt[p]{\alpha}$$

۸.  $0 < x_1 < 1$ ،  $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$ ، ثابت کنید  $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = 1$ .

$$9. \text{ ثابت کنید } \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \dots}}}} = 3$$

۱۰. ثابت کنید اگر سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$  با جملات مثبت همگرا باشد سری زیر نیز همگراست

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(p_1 + p_2 + \dots + p_n)^2} \cdot p_n$$

۱۱. دنباله  $\{x_n\}$  مفروض است و  $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$ . ثابت کنید اگر دنباله  $\{y_n\}$  همگرا باشد، دنباله  $\{x_n\}$  نیز همگراست.

۱۲. فرض کنید  $\{a_n\}$  دنباله‌ای اکیداً صعودی از اعداد طبیعی است که  $\sum \frac{1}{a_n}$  همگراست.  $f(x)$  را تعداد  $a_n$ هایی در نظر می‌گیریم که از  $x$  تجاوز نمی‌کنند. ثابت کنید:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

۱۳. فرض کنید  $\{x_n\}$  دنباله‌ای باشد که  $\{x_n - x_{n-2}\}$  به صفر همگرا باشد. ثابت کنید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$$

۱۴. دنباله  $\{x_n\}$  را دارای «حد جالب» می‌گوییم هرگاه  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$  وجود داشته باشد. تابع  $f$  را روی بازه  $[0, 1]$  قدرتمند گوئیم هرگاه اگر  $\{x_n\}$  ( $0 \leq x_n \leq 1$ )، دارای حد جالب باشد،  $\{f(x_n)\}$  نیز دارای حد جالب باشد. مطلوب است به دست آوردن تمام توابع قدرتمند روی بازه  $[0, 1]$ .

۱۵. سری نامتناهی را در نظر بگیرید که  $m$ امین جمله آن  $\pm \frac{1}{n}$  است که علامت  $\pm$  از یک چیدن دلخواه هشت‌تایی از آنها به دست می‌آید که به‌طور تناوبی تکرار می‌شود. مثلاً سری نظیر  $++----++$  عبارت است از

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} - \frac{1}{12} - \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \dots$$

الف) ثابت کنید شرط کافی برای همگرایی سری آن است که چهار علامت مثبت و چهار علامت منفی باشد.

ب) آیا شرط فوق شرط لازم نیز می‌باشد؟

۱۶. ثابت کنید  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  همگراست اگر و فقط اگر  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  همگرا باشد ( $a_n > 0$ ).

۱۷. ثابت کنید اگر  $a_n$  و  $b_n$  همواره مثبت باشند و  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0$  آنگاه  $\sum a_n$  و  $\sum b_n$  یا هر دو همگرایند یا هر دو واگرا.

۱۸. ثابت کنید  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n \sin \frac{1}{n})$  همگراست.

۱۹. ثابت کنید دنباله  $\{a_n\}$  با تعریف زیر همگراست:

$$a_n = 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$$

۲۰. ثابت کنید  $\sum_{p \text{ اول}} \frac{1}{p}$  واگراست.

۲۱. ثابت کنید  $\prod_{p \text{ اول}} (1 - \frac{1}{p})$  به صفر همگراست.

۲۲. ثابت کنید دنباله  $\{x_n\}$  وجود دارد که در شرط زیر صدق می‌کند ( $\alpha > 1$  یک عدد ثابت)

$$|x_i - x_j| > \frac{1}{|i - j|^\alpha}$$

(راهنمایی: سری  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  همگراست. دنباله را استقرایی بسازید. لزومی ندارد فرمولی برای آن ارائه دهید.)

۲۳. تابعی صعودی مثال بزنید که در تمام نقاط گویا ناپیوسته و در تمام نقاط گنگ پیوسته باشد. (راهنمایی:  $\mathbb{Q}$  شماراست و همچنین می‌توان تابع را به صورت یک سری تعریف کرد.)

۲۴. دنباله‌ای از اعداد صحیح به این صورت تعریف می‌شود:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$$

ثابت کنید  $a_n$  بر  $2^k$  بخش پذیر است اگر و فقط اگر  $n$  بر  $2^k$  بخش پذیر باشد.

۲۵. اگر  $a$  عدد حقیقی و مثبتی باشد  $\{a_n\}$  به صورت زیر تعریف می‌شود

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 1}{n + 1}$$

نشان دهید عدد حقیقی مانند  $a$  وجود دارد که

(الف) به ازای هر  $a \geq a$  داشته باشیم  $a_n \rightarrow +\infty$

(ب) به ازای هر  $a < a$  داشته باشیم  $a_n \rightarrow 0$

۲۶. قضیه ریمان) اگر سری  $\sum a_n$  همگرا باشد ولی به طور مطلق همگرا نباشد و  $-\infty \leq \alpha \leq +\infty$  (حتی می‌تواند  $+\infty$  یا  $-\infty$  باشد) آنگاه یک بازآرایی از  $\{a_n\}$  مانند  $\{a_{\sigma(n)}\}$  وجود دارد که  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \alpha$ ! (راهنمایی: دست به کار شوید. شما باید این بازآرایی را بسازید!).

۲۷.  $S_{n,k}$  کوچکترین مقدار مثبت  $1^k \pm 2^k \pm 3^k \pm \dots \pm n^k$  است (علامتهای  $\pm$  به طور مناسب انتخاب می‌شوند). ثابت کنید به ازای هر  $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$  یک دنباله متناوب است.



۲۸. با ذکر مثالی نشان دهید قسمت اول قضیه لایب‌نیتز (یعنی شرط نزولی بودن  $|a_n|$  ها) لازم است.

۲۹. مقدار سریهای زیر را به دست آورید:

الف) 
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{k^2}}{(k+1)(k+2)}$$

ب) 
$$\sum_{k=1}^{\infty} (2k+1) \left(1 + \frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{k^2}\right)$$

ج) 
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^k \quad \text{که } |q| < 1$$

د) 
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2}$$

۳۰. دنباله‌های  $\{n_k\}$  و  $\{m_k\}$  را از اعداد طبیعی چنان بیابید که  $\sqrt{m_k} - \sqrt{n_k}$  به  $\sqrt{2}$  میل کند.

۳۱. آیا دنباله با خواص زیر موجود است؟

الف)  $a_n \in \mathbb{N}$

ب)  $\forall m \in \mathbb{N}, \{a_n \pmod{m}\}$  تناوبی باشد.

ج) هر عدد طبیعی بینهایت بار در دنباله ظاهر شود.

۳۲.  $u_1$  و  $u_2$  دلخواه  $u_{n+2} = \frac{2}{u_n + u_{n+1}}$  ثابت کنید  $\{u_n\}$  همگراست.

۳۳. اتحادهای زیر را ثابت کنید

$$\sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=m} \frac{1}{k_1!(k_1!+k_2!) \dots (k_1!+k_2!+\dots+k_n!)} = \frac{n^m}{n!m!}$$

$$\sum_{k_1+\dots+k_n=m} \frac{1}{2^{k_1}(2^{k_1}+2^{k_2}) \dots (2^{k_1}+\dots+2^{k_n})} = \frac{1}{n!2^n} \binom{m+n-1}{m}$$

۳۴. فرض کنید  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1$  و  $0 < a_n < \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$ .  $\forall n \in \mathbb{N}$  ثابت کنید برای هر

$$x \in ]0, 1[ \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i} = x \quad \text{موجود است که } \{a_n\}$$

۳۵. تمام اعداد  $n$  را بیابید که تنها از ۱ها و یک عدد  $\gamma$  تشکیل شده باشند و اول باشند.

۳۶. برای  $k$ ی داده شده فرض کنید  $f_1(k)$  مجموع مربعات ارقام  $k$  در پایه ۱۰ باشد و

$$f_{n+1}(k) = f_1(f_n(k))$$

- ثابت کنید  $f_{1991}(2^{1990}) = 256$

۳۷. فرض کنید  $f(1) + f(0) = 0$

$$f(n+2) = 4^{n+2}f(n+1) - 16^{n+1}f(n) + n \times 2^{n^2}$$

ثابت کنید  $f(1991)$ ،  $f(1990)$  و  $f(1989)$  بر ۱۳ بخش پذیر هستند.

۳۸. اگر  $x_0$  و  $x_1$  داده شده باشند و  $x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$  مقدار  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  را حساب کنید.

۳۹. اگر  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  همگرا باشد ثابت کنید دنباله  $b_n = \sqrt{\prod_{i=1}^n a_i}$  نیز همگراست ( $a_n \geq 0$ ).

۴۰. ثابت کنید دنباله  $\{(\sqrt{2} + 1)^n\}$  در هنگ ۲ تناوبی است.

۴۱. اعداد را به صورت زیر غربال می‌کنیم:  $a_1 = 1$  قرار می‌دهیم و  $a_1 + 1 = 2$  را خط می‌زنیم. در هر مرحله  $a_n$  را برابر اولین عدد خط نخورده می‌گیریم و  $a_n + n$  را خط می‌زنیم؛ دنباله زیر به وجود می‌آید

$$1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, \dots$$

فرمولی صریح برای  $a_n$  پیدا کنید.

۴۲.  $a_0 = 0$ ،  $a_1 = 1$  و  $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n} a_{n-2}$  ثابت کنید برای  $n > 8$ ،  $a_n \notin \mathbb{N}$ .

۴۳.  $\{n_i\}$  را از اعداد طبیعی با خاصیت زیر داریم

$$n_{k+1} > n_k$$

ثابت کنید  $n_i = i$ .

۴۴. اگر  $x_0 = 1$  و  $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n}$  ثابت کنید

$$\sqrt{2n} < x_n < \sqrt{2n + \log \sqrt{n}}$$

۴۵. فرض کنید  $S = \{2^a 3^b \mid a, b \in \mathbb{N}\}$ . حال  $a_n$  را  $m$ مین عضو  $S$  که به ترتیب صعودی مرتب شده‌اند می‌گیریم. ثابت کنید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

۴۶.  $n$  نقطه در مربع واحد موجودند. برای این  $n$  نقطه کوتاه‌ترین مسیر که از همه این نقاط بگذرد وجود دارد. ثابت کنید حداکثر طول این مسیر برابر  $4 + 2\sqrt{n}$  است.

۴۷.  $f_n$ ،  $m$ مین جمله دنباله فیبوناچی و  $P(x)$  یک چند جمله‌ای از درجه ۹۹۲ است به طوری که

$$992 \leq n \leq 1982, \quad P(n) = f_n$$

ثابت کنید  $P(1983) = f_{1982} - 1$ .

۴۸.  $\{a_n\}$ ،  $n \geq 1$  با تعریف  $a_{n+1} = \frac{1}{1-a_n}$  را در نظر بگیرید (در جملات این دنباله ۲ وجود ندارد).  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  چقدر است؟

۴۹. اگر  $a_1^{1992} = a_2^{92} = a_3^{2} = \dots = a_{1992}^{1}$  (ها طبیعی باشند) مقدار  $a_{1992+1}$  چقدر می‌تواند باشد؟

۵۰. ثابت کنید

$$1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{7}{4} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} < \frac{2}{3} \quad (\text{ب})$$

$$1 < \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n+1} < 2 \quad (\text{ج})$$

پیوست ۱-۳ چند جمله‌ایهای تیلور-بسط تیلور در آنالیز، قضیه بسیار زیبایی درباره تقریب توابع پیوسته با چندجمله‌ایها وجود دارد که به استون-وایرشراس مشهور است. این قضیه می‌گوید:  
برای هر تابع پیوسته  $f$  دنباله‌ای از چندجمله‌ایهای  $P_n$  وجود دارد که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x)$$

البته مفهوم حد فوق، مفهوم دقیقی است و فعلاً آن را به صورت شهودی که  $P_n$ ها در همه جا خیلی خیلی به  $f$  نزدیک می‌شوند بپذیرید.

تیلور درباره بعضی توابع پیوسته بینهایت مشتق‌پذیر روشی برای به دست آوردن  $P_n$ ها داده است که در زیر به اختصار می‌آوریم:

اگر تابع  $f$  تابعی پیوسته و بینهایت مشتق‌پذیر باشد، چندجمله‌ای تیلور مرتبه  $n$  آن حول صفر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

به راحتی می‌توان رابطه زیر را بررسی کرد:

$$p_n^{(k)}(0) = f^{(k)}(0), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

● قضیه ۳-۲۷

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - P_n(x)}{x^{n+1}} = 0$  یعنی  $f(x)$  به وسیله  $P_n(x)$  خیلی خوب تقریب زده می‌شود.

(شاید اکثر اوقات خیلی خوب! به تمرین این فصل مراجعه کنید.)

● قضیه ۳-۲۸

برای هر  $x \in \mathbb{R}$  نقطه مانند  $\alpha$  بین صفر و  $x$  وجود دارد که

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

یعنی اگر ثابت کنیم به ازای هر  $\alpha$  و  $x$ ،  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\alpha) \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$  ثابت کرده‌ایم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x)$$

در این صورت می‌نویسیم  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} x^k$ . به عبارت دیگر اگر ثابت شود  $M > 0$  وجود

دارد که  $|f^{(k)}(x)| < M$  به ازای هر  $k \in \mathbb{Z}^+$  و هر  $x \in \mathbb{R}$  با توجه به اینکه  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

نتیجه می‌شود  $f(x)$  با حد چندجمله‌ای تیلور خود حول صفر برابر است.

● حال چند بسط تیلور مهم را که به دست آوردن آنها چندان مشکل نیست می‌آوریم:

$$-\infty < x < +\infty : e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (\text{الف})$$

$$-1 < x \leq 1 : \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (\text{ب})$$

$$-\infty < x < +\infty : \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (\text{ج})$$

$$-\infty < x < +\infty : \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (\text{د})$$

$$|x| \leq 1 : \text{Arctg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (\text{ه})$$

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!} x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!} x^3 + \dots \quad (\text{و})$$

رابطه فوق به ازای هر  $r \in \mathbb{R}$  درست است!

## تمرین

۱. ثابت کنید  $f^{(n)}(0) = 0$  به ازای هر  $n$  که در آن

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

پس چند جمله تیلور حول صفر از هر مرتبه‌ای برابر صفر است ولی خود تابع صفر نیست.

۲. ثابت کنید

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots = \ln 2 \quad (\text{الف})$$

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi}{4} \quad (\text{ب})$$

۳. قضیه ۳-۲۷ و ۳-۲۸ را ثابت کنید.

پیوست ۲-۳ حل مسأله با استفاده از دنباله‌ها

۱. قورباغه‌ای از نردبانی که  $n$  پله دارد بالا می‌آید. او می‌تواند در هر پش یک پله یا دو پله را طی کند. چند روش برای بالا آمدن قورباغه وجود دارد؟

۲. شخصی  $n$  ریال پول دارد. او به چند طریق می‌تواند پول خود را با خریدن تمبرهای ۱ و ۲ و ۵ ریالی خرج کند؟

۳. اگر  $f(n)$  تعداد روشهای پوشاندن یک صفحه شطرنجی  $3 \times n$  باشد (به وسیله مستطیلهای  $1 \times 2$ ) نشان دهید:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{فرد } n \\ \frac{1}{\sqrt{3}} [(\sqrt{3}+1)(2+\sqrt{3})^{\frac{n}{2}} + (\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})^{\frac{n}{2}}] & \text{زوج } n \end{cases}$$

۴. چند کلمه به طول  $n$  به وسیله حروف  $a, b, c, d$  می توان نوشت به طوری که  $a$  و  $b$  مجاور نباشند؟

۵. قرار دهید  $a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} z^k$ . نشان دهید اگر  $z \neq -\frac{1}{4}$  آنگاه

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{1+4z}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{1+4z}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{1+4z}}{2} \right)^{n+1} \right]$$

و اگر  $z = -\frac{1}{4}$  آنگاه  $a_n = \frac{(n+1)}{2^n}$ .

۶. اگر  $f(n, k)$  تعداد زیرمجموعه های  $k$  عضوی  $\{1, 2, \dots, n\}$  باشد که هیچ دو عدد متوالی را شامل نباشد و همچنین  $1, n$  را با هم شامل نباشد:

الف) ثابت کنید  $f(n, k) = \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}$  ( $0 \leq k < n$ )

ب) اگر  $L_n = \sum_{k=0}^n f(n, k)$  نشان دهید

$$L_1 = 1, \quad L_2 = 3, \quad L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \quad n > 2$$

۷. فرض کنید  $S_n$  تعداد مسیرهایی در صفحه باشد که به وسیله سه بردار  $(0, 1)$  و  $(1, 0)$  و  $(1, 1)$  از نقطه  $(0, 0)$  به نقطه  $(n, n)$  می روند و هیچ یک از نقاط مسیر بالای خط  $y = x$  نیست. مثلاً  $S_0 = 1, S_1 = 1, S_2 = 6, S_3 = 6, S_4 = 90$ . ثابت کنید  $S_n$  برای  $n$  های زوج بر ۳ بخش پذیر است.

۸. فرض کنید  $a_n$  تعداد اعداد طبیعی باشد که:

الف) مجموع ارقام آنها  $n$  است؛

ب) ارقام آنها تنها از ۱ و ۳ و ۴ تشکیل شده است؛

ثابت کنید  $a_{2n}$  مربع کامل است.

۹.  $A$  و  $E$  را دو رأس روبه روی یک ۸ ضلعی منتظم می گیریم. قورباغهای از رأس  $A$  آغاز به جهیدن می کند و هر بار به رأس مجاور می پرد؛ ولی وقتی به رأس  $E$  رسید، همانجا توقف می کند.  $a_n$  را تعداد مسیرهایی می گیریم که قورباغه از طریق آنها با  $n$  جهش به  $E$  می رسد. ثابت کنید

$$a_{2n-1} = 0, \quad a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (x^{n-1} - y^{n-1})$$

که در آن  $x = 2 + \sqrt{2}$  و  $y = 2 - \sqrt{2}$

۱۰.  $\{a_n\}$  به صورت زیر تعریف شده است

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2}$$

مطلوب است محاسبه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$$

۱۱. برای هر  $n \geq 0$  تعداد دنباله‌های  $n$  تایی از اعداد  $0, 1, 2$  را بیابید که در آنها هیچگاه دو صفر متوالی موجود نباشد.

۱۲. مسأله پیش را برای اعداد  $0, 1, 2, \dots, k$  حل کنید که دو صفر متوالی نداشته باشد.

۱۳. برای هر  $n$  می‌توان  $n$  را به صورت مجموع اعداد بزرگتر یا مساوی ۲ نوشت ( $n \geq 2$ ). تعداد روشهای این نوع جمع‌زنی را به دست آورید.

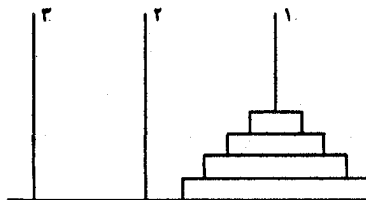
۱۴. دترمینان ماتریسی را که درآیه‌های آن به صورت زیر تعریف می‌شوند حساب کنید:

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j \\ 1 & |i - j| = 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

۱۵. فرمولی صریح برای  $a_n$  به دست آورید

$$a_{n+2}^2 - 5a_{n+1} + 4a_n = 0, \quad a_0 = 2, \quad a_1 = 13$$

۱۶. (برجهای هانوی) در یکی از ۳ برج موجود  $n$  مهره نامساوی از بزرگ به کوچک قرار داده‌ایم. می‌خواهیم آنها را به برج مجاور حرکت دهیم به طوری که در آخر به همین ترتیب باشد و الف) در هر حرکت یک مهره را از روی یک ستون برداریم و روی یک ستون دیگر بگذاریم.



شکل ۱-۳

ب) در هیچ لحظه‌ای مهره بزرگتر روی مهره کوچکتر زیر مهره بزرگتر قرار نگیرد.

حداقل چند حرکت لازم است؟

۱۷. اگر  $n$  خط در صفحه رسم شده باشد به طوری که هیچ سه تایی هم‌رس و هیچ دو تایی موازی نباشند؛

الف) تعداد کل قطعات به وجود آمده را محاسبه کنید.

ب) تعداد قطعات متناهی را محاسبه کنید.

۱۸. عدد مثلثی به صورت  $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$  تعریف می‌شود. فرمول صریح  $t_i = \sum_{i=1}^n t_i$  را حساب کنید (مسأله بدیهی است!).

۱۹. اگر دو خط موازی و  $n$  خط متمایز ناموازی که هیچ سه تایی از یک نقطه نمی‌گذرند موجود باشند صفحه به چند قسمت تقسیم می‌شود؟

۲۰. اگر یک سکه را  $2n$  بار بیاندازیم احتمال اینکه  $n$  بار شیر و  $n$  بار خط بیاید چقدر است؟ ( $a_n$  تعداد حالات مطلوب است.)

اگر  $b_n$  تعداد حالت‌هایی باشد که تعداد شیرها و خطها بعد از  $2n$  پرتاب مساوی شوند ثابت کنید

$$a_n = \sum_{i=0}^n b_i a_{n-i}, \quad b_0 = 0$$

و  $b_n$  را حساب کنید.

## یادآوری‌هایی از نظریهٔ اعداد مقدماتی

### بخش‌پذیری

گوییم عدد صحیح  $a$  بر عدد صحیح  $b$  بخش‌پذیر است یا  $a, b$  را عا د می‌کند و می‌نویسیم  $b|a$  هرگاه عدد صحیحی مانند  $q$  وجود داشته باشد که  $a = qb$ .

خواص بخش‌پذیری:

$$1. a|b, a|c \Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{Z}, a|bx + cy.$$

$$2. \forall k \in \mathbb{Z} \quad a|b \iff a|ka + b.$$

$$3. a|b, a, b > 0 \implies b \geq a.$$

$$4. a|1 \implies a = \pm 1.$$

$$5. a|b, b|a \implies |a| = |b|.$$

بزرگترین مقسوم‌علیه دو عدد صحیح  $a$  و  $b$  را  $d$  گوییم و می‌نویسیم  $d = (a, b)$ . هرگاه  $d|a$  و  $d|b$ ,  $d > 0$  و برای هر  $x$  که  $x|a$  و  $x|b$  داشته باشیم  $x|d$ .

دو عدد  $a$  و  $b$  را نسبت به هم اول یا متباین گویند هرگاه  $(a, b) = 1$ .

خواص ب.م.م:

$$1. \forall a, b \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{Z} \quad (ka, kb) = |k|(a, b).$$

$$2. \forall a, b \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{Z} \quad (a, b) = (a, ka + b) \quad \text{بخصوص}$$

$$(a, b) = (a, a + b) = (a, a - b)$$

$$3. (a, b) = (a, c) = 1 \iff (a, bc) = 1.$$

$$4. \text{لم اقلیدس (مهم)} \quad a|bc, (a, b) = 1 \Rightarrow a|c$$

$$5. \text{نتیجه: (} p \text{ عدد اول است)} \quad p|bc \implies p|b \vee p|c$$

$$6. (n, x, a, b, a', b' \in \mathbb{N}) \quad (a, b) = 1, x^n = ab \Rightarrow \exists a', b', a = a'^n, b = b'^n$$



۷.  $(a, b) = d \Rightarrow \exists r, s \in \mathbb{Z}, \quad d = ra + sb$  (بسیار مهم)

۸.  $(a, b) = 1 \iff \exists r, s \in \mathbb{Z}, \quad ra + sb = 1$  (بسیار مهم)

۹.  $(a, b) \leq (k'a, kb) \quad k, k' \in \mathbb{Z}$

۱۰.  $\forall a, b \in \mathbb{Z} \geq 0, \quad (a, b) \leq \min\{a, b\}$

۱۱.  $(a, b) = |a| \iff a|b$

۱۲.  $a|c, b|c, (a, b) = 1 \Rightarrow ab|c$

۱۳. الگوریتم اقلیدسی

$$\left. \begin{array}{l} a > b > 0, \quad a = bq_1 + r_1 \quad 0 \leq r_1 < b \\ \exists q_1, q_2, \dots, q_n \quad b = r_1q_2 + r_2 \quad 0 \leq r_2 < r_1 \\ \exists r_1, r_2, \dots, r_n : \quad r_1 = r_2q_3 + r_3 \\ \quad \vdots \\ r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n \quad 0 \leq r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} = r_nq_n \end{array} \right\} (a, b) = r_n$$

● قضیه ۱-۴ (مهم)

هر عدد بزرگتر از واحد را به صورت منحصر به فردی می توان به اعداد اول تجزیه کرد.

$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$  هر  $\alpha_i$  صحیح و نامنفی و  $p_i$  عدد اول است.

دنباله اعداد فیبوناچی به این صورت تعریف می شوند:

$f_1 = f_2 = 1, \quad \forall n > 2 \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

۱۴. قضیه:  $\forall m, n \in \mathbb{N} \quad (f_m, f_n) = f_{(m,n)}$

۱۵.  $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1 \quad (a > 1)$

۱۶.  $m \neq n \Rightarrow (2^{2^m} + 1, 2^{2^n} + 1) = 1$

۱۷. اول  $p = 4k + 3, \quad p|a^2 + b^2 \Rightarrow p|a, p|b$

۱۸. اول  $p = 4k + 1 \Rightarrow \exists x, y \in \mathbb{N} \quad p = x^2 + y^2$  (قضیه فرما)

۱۹. اول  $p = 4k + 3 \Rightarrow \nexists x, y \in \mathbb{N} \quad p = x^2 + y^2$

۲۰. اول  $p$  نیست  $\Rightarrow p = a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \Rightarrow \{a, b\} \neq \{c, d\}$

۲۱. (قضیه فرما)  $q | 2^p + 1 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : q = 2kp + 1$  و  $q \neq 3$  اعداد اول  $p, q$

● اگر  $p$  و  $q$  دو عدد اول بوده  $q > 3$  و  $q | 2^p + 1$  آنگاه  $\frac{1}{3}p$  بر  $p$  بخشپذیر است.

● قضیه ۲-۴ (مهم) قضیه دیریکله

در هر تصاعد حسابی به شکل  $(k \in \mathbb{N}) ak + b$  که  $(a, b) = 1$  باشد بینهایت عدد اول وجود

دارد.

● قضیه ۳-۴ مهم (قضیه چیشف)

برای هر عدد طبیعی  $n > 1$  عدد اولی بین  $n$  و  $2n$  قرار دارد. تعداد اعداد اول کوچکتر از  $n$  را با  $\pi(n)$  نشان می دهند.

● قضیه ۴-۴ مهم (قضیه گوس)

برای  $n$  های بسیار بزرگ  $\pi(n) \simeq n / \ln(n)$ . به عبارت دیگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n) \ln(n)}{n} = 1$$

همنهستی

می نویسیم  $a \equiv b \pmod{m}$  یا  $a \equiv b \pmod{m}$  و می خوانیم  $a$  همنهشت  $b$  است به هنگ  $m$  هر گاه  $m | a - b$ .

روابط همنهستی:

۲۲.  $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$

۲۳.  $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad a^n \equiv b^n \pmod{m}$

۲۴.  $a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod{m}, ac \equiv bd \pmod{m}$

۲۵.  $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow P(a) \equiv P(b) \pmod{m}$ . ۲۵.  $P(x)$  چندجمله ای با ضرایب صحیح

$ac \equiv bc \pmod{m}, (m, c) = d \Rightarrow a \equiv b \pmod{m/d}$

۲۶.  $ac \equiv bc \pmod{m}, (m, c) = 1 \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$  (حالت خاص)

۲۷.  $k > 2, k \in \mathbb{N}, a^{2^k-1} \equiv 1 \pmod{2^k}$  (فرد  $a$ )

۲۸.  $a \equiv b \pmod{4} \Rightarrow x^a \equiv x^b \pmod{10}$

دستگاه کامل مانده ها

مجموعه باقیمانده اعداد بر عدد  $m$  دستگاه کامل مانده هاست و به  $Z_m$  نمایش داده می شود و  $Z_m = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ .

۲۹. اگر باقیمانده  $x$  بر  $m$  را با نماد  $r_m(x)$  نشان دهیم، خواهیم داشت

$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad (a, m) = 1 \Rightarrow$

$Z_m = \{r_m(0 \times a + b), r_m(1 \times a + b), \dots, r_m((m-1) \times a + b)\}$

مجموعه مخفف مانده ها

مجموعه اعداد صحیح مثبت کوچکتر از  $m$  را که نسبت به  $m$  اول باشند، دستگاه مخفف مانده ها نامند.

تابع  $\varphi$  اویلر

تعداد اعضای مجموعه مخفف مانده های  $m$  را به  $\varphi(m)$  نشان می دهند و خوانده می شود «فی  $m$ ». در حالت خاص  $\varphi(p) = p - 1$  ( $p$  اول است).

$$.۳۰ \quad (a, m) = 1 \Rightarrow a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m} \quad (\text{بسیار مهم})$$

$$.۳۱ \quad n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \Rightarrow \varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

$$.۳۲ \quad (a, p) = 1 \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \quad (\text{قضیه فرما}) \quad (\text{بسیار مهم})$$

$$.۳۳ \quad m \neq 1, 2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha, (a, m) = 1 \Rightarrow a^{\varphi(m)/2} \equiv 1 \pmod{m}$$

$$.۳۴ \quad \text{معادله } a, q) = 1, x^n \equiv a \pmod{q} \text{ دارای جواب است اگر و فقط اگر}$$

$$.۳۵ \quad a^{\frac{\varphi(q)}{\gcd(\varphi(q), n)}} \equiv 1 \pmod{q}$$

● قضیه ۴-۵

معادله  $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$  برای اعداد اول  $p$  به صورت  $4k + 1$  جواب دارد و برای اعداد اول  $p$  به صورت  $4k + 3$  جواب ندارد.

۳۶. معیار اویلر

معادله  $x^2 \equiv a \pmod{p}$  که  $p$  اول است دارای جواب است اگر و فقط اگر

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$$

ریشه های اولیه

کوچکترین عدد مانند  $f$  ( $f > 0$ ) که  $a^f \equiv 1 \pmod{m}$  به هنگ  $m$  گویند [با شرط  $(a, m) = 1$ ] و با  $\text{ord}_m a$  نشان می دهند.

$$.۳۷ \quad (f = \text{ord}_m a), [(a, m) = 1] a^k \equiv a^n \pmod{m} \Leftrightarrow k \equiv n \pmod{f}$$

▲ تعریف ۴-۱

$a$  را ریشه اولیه به هنگ  $m$  گویند هرگاه  $\text{ord}_m a = \varphi(m)$ , [با شرط  $(a, m) = 1$ ]

$$.۳۸ \quad a^n \equiv 1 \pmod{m} \Rightarrow \text{ord}_m a | n$$

۳۹. دستگاه مخفف مانده هاست  $\{a, a^2, \dots, a^{\varphi(m)}\}$  ریشه اولیه است و  $(a, m) = 1$

$$.۴۰ \quad (\text{ord}_p g = p - 1, g^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p}) \Leftrightarrow \text{ord}_{p-1} g = \varphi(p-1) \quad \alpha \geq 1$$

۴۱. (مهم) اعداد به صورت  $1, 2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha$  ( $p$  اول و فرد  $\alpha \geq 1$ ) ریشه اولیه دارند و بقیه با توجه به رابطه (۳۳) ریشه اولیه ندارند.

۴۲. اگر  $g$  ریشه اولیه به هنگ  $p^\alpha$  باشد و به هنگ  $2p^\alpha$  نباشد آنگاه  $g + p^\alpha$  ریشه اولیه به هنگ  $2p^\alpha$  است.

(به مسائل مربوطه رجوع شود تا مطلب فهمیده شود.)

● قضیه ۴-۶ (باقیمانده چینی)

فرض کنید که  $m_1, \dots, m_r$  اعداد طبیعی دو به دو نسبت به هم اول باشند. در این صورت یک عدد و فقط یک عدد  $x$  متعلق به دستگاه کامل مانده‌ها به هنگ  $m_1 m_2 \dots m_r$  وجود دارد که جواب دستگاه معادلات همبستگی زیر باشد

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}, \quad x \equiv a_2 \pmod{m_2}, \dots, x \equiv a_r \pmod{m_r}$$

عکس حسابی  
(مهم)

$$(x, y) = 1 \quad \exists z \in \mathbb{N} \quad xz \equiv 1 \pmod{y}$$

● ۴۳. (قضیه لاگرانژ)

هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع مربعات چهار عدد صحیح نشان داد

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z} \quad n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

۴۴. هر عدد طبیعی غیر از اعداد به صورت  $4^h(8k+7)$  را می‌توان به صورت مجموع مربعات سه عدد صحیح نشان داد:  $(h, k \in \mathbb{Z}^+)$ .

۴۵. هر عدد اول به صورت  $4k+1$  را می‌توان به صورت مجموع مربعات دو عدد صحیح نوشت.

۴۶. توان عدد اول  $p$  در بسط  $n!$  از فرمول زیر محاسبه می‌شود و با  $E_n(p)$  نمایش داده می‌شود

$$E_n(p) = \left[ \frac{n}{p} \right] + \left[ \frac{n}{p^2} \right] + \left[ \frac{n}{p^3} \right] + \dots$$

منظور از  $[x]$  بزرگترین عدد صحیح نایبتر از  $x$  است.

۴۷. در تجزیه  $n!$  به اعداد اول دست‌کم یک عدد اول با توان واحد وجود دارد.

۴۸. اگر  $n > 5$ ، بین  $n$  و  $2n$  دو عدد اول متمایز وجود دارد.

۴۹.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0, \quad \forall n > N \quad \exists p_1, p_2, \dots, p_k : \quad n < p_i < (1 + \varepsilon)n$$

و  $p_i$ ها اولند.

۵۰.  $G_r(n)$  مجموع ارقام  $n$  در مبنای دو است. فرمول زیر منسوب به لواندر است

$$G_r(n) + E_n(2) = n$$

● قضیه ۴-۷ (لوکا)

۵۱. اگر بسط اعداد  $a$  و  $b$  در مبنای  $p$  به صورت

$$a = (a_1 a_2 \dots a_n)_p, \quad b = (b_1 b_2 \dots b_n)_p$$

باشد (بعضی از اعداد ابتدایی می‌تواند صفر باشد) آنگاه

$$\binom{a}{b} \equiv \binom{a_0}{b_0} \binom{a_1}{b_1} \cdots \binom{a_n}{b_n} \pmod{p}$$

که بنا بر تعریف

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{0}{0} = 1, \quad a < b \Rightarrow \binom{a}{b} = 0$$

● منظور از  $\binom{a}{b}$  ضریب بسط دو جمله‌ای یا همان  $\frac{a!}{b!(a-b)!}$  است.

۵۲.  $\sum_p \frac{1}{p}$  به طوری که مجموع روی اعداد اول حساب می‌شود واگراست یعنی از هر  $M > 0$  می‌تواند بزرگتر شود.

۵۳. اگر منظور از  $p_i$ ،  $i$ امین عدد اول باشد قضیه زیر که منسوب به بونزه است به صورت زیر است

$$n > 4 \Rightarrow p_{n+1}^2 < p_1 p_2 \cdots p_n$$

۵۴. قضیهٔ آخر فرما

معادلهٔ  $x^n + y^n = z^n$  برای  $n > 2$  جواب طبیعی ندارد.

چند حدس اثبات نشده

۱. هر عدد زوج مخالف ۲ را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت.
۲. اعداد اول به صورت  $2^{2^n} + 1$  نامتناهی است.
۳. اعداد اول به صورت  $2^n - 1$  نامتناهی است.
۴. تعداد اعداد اول دوقلو (اعداد اولی که اختلاف آنها ۲ است) نامتناهی است.

تمرین

۱. ثابت کنید اگر  $p$  عددی اول و  $0 < k < p$  عددی طبیعی باشد آنگاه  $p \mid \binom{p}{k}$ .
۲. با استقرا روی  $n$  ثابت کنید  $p \mid n^p - n$  (از بسط دو جمله‌ای نیوتن و مسألهٔ پیش استفاده کنید).
۳. ثابت کنید اگر  $F_n = 2^{2^n} + 1$  باشد آنگاه  $2 \mid F_n$  و  $2^{2^n} \mid F_n - 2$ .
۴. ثابت کنید  $n^2 \mid (n+1)^n - 1$   $\forall n \in \mathbb{N}$ .
۵. اگر  $a, b, n$  اعداد طبیعی و فرد باشند ثابت کنید  $2^k \mid a^n - b^n \Leftrightarrow 2^k \mid a - b$  ( $k \in \mathbb{N}$ )

۶. فرض کنید  $a_1, a_2, \dots, a_n$  یک ترتیب دلخواه از اعداد  $1, 2, 3, \dots, n$  باشد. ثابت کنید اگر  $n$  عددی فرد باشد  $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_n - n)$  عددی زوج خواهد بود.

۷. ثابت کنید  $8 \mid 5^n + 2 \times 3^{n-1} + 1$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ).

۸. ثابت کنید اگر  $a$  عددی فرد باشد  $8 \mid a^2 - 1$ .

۹. ثابت کنید  $\forall n \in \mathbb{N}$  عدد  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$  عددی غیر طبیعی است ( $n > 1$ ).

۱۰. همه اعداد طبیعی  $n$  را طوری پیدا کنید که  $(n-1)!$  بر  $n^2$  بخش پذیر باشد.

۱۱. اگر  $(a, b) = (a, c) = (b, c) = 1$  ثابت کنید  $(ab + ac + bc, abc) = 1$ .

۱۲. ثابت کنید به ازای هر  $n$  طبیعی  $(21n + 4, 14n + 3) = 1$ .

۱۳. ثابت کنید بینهایت  $n$  طبیعی وجود دارد که  $(n, 2^n - 1) > 1$ .

۱۴. ثابت کنید اگر  $[a, b]$  کوچکترین مضرب مشترک  $a$  و  $b$  باشد آنگاه  $[a, b] = \frac{ab}{(a, b)}$ .

۱۵. ثابت کنید اگر  $p$  عددی اول به شکل  $4k + 3$  باشد، معادله  $x^2 + y^2 = pz^2$  جواب صحیح ندارد.

۱۶. ثابت کنید اگر  $\frac{a^2 + b^2}{a + b}$  عددی صحیح باشد، خارج قسمت به شکل  $u^2 + v^2$  است.

۱۷. بدون استفاده از قضیه چیشف ثابت کنید بین  $n$  و  $n!$  یک عدد اول وجود دارد ( $n > 1$ ).

۱۸. ثابت کنید بینهایت عدد طبیعی وجود دارد که توان به شکل  $3mn + m + n$  نوشت ( $m, n \in \mathbb{N}$ ).

۱۹. ثابت کنید در هر تصاعد حسابی  $ak + b$  که  $(a, b) = 1$  بینهایت عدد وجود دارد که حاصل ضربی از  $n$  عدد اول متمایز باشد (به ازای  $n$  طبیعی دلخواه).

۲۰. ثابت کنید تصاعد حسابی از اعداد طبیعی و نامتناهی وجود ندارد که همه جمله‌های آن اعداد اول باشد.

۲۱. ثابت کنید برای هر  $n \in \mathbb{N}$  کثیرالجمله‌ای با ضرایب صحیح وجود دارد مانند  $p(x)$  که

$$p(1) < p(2) < \cdots < p(n)$$

و همه این اعداد، اعدادی اول باشد.

۲۲. ثابت کنید در تجزیه  $n!$  به اعداد اول عدد اولی با نمای واحد وجود دارد ( $n > 1$ ).

۲۳. در مجموعه  $V_n, (n \in \mathbb{N}, n > 2)$  که به صورت  $nk + 1$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) است، عددی را اول گوئیم که به صورت حاصلضرب دو عنصر  $V_n$  نتوان نوشت. ثابت کنید بینهایت عضو در  $V_n$  است که به صورت منحصر به فردی به حاصل ضرب اعداد اول تجزیه نشود.

۲۴. ثابت کنید برای هر  $a, b \in \mathbb{R}$ ،  $(a \neq b)$  عدد گویایی بین  $a$  و  $b$  وجود دارد که صورت و مخرج آن اعداد اول باشد.

۲۵. احتمال اینکه یک عدد از اعداد طبیعی انتخاب کنیم و آن عدد اول باشد چقدر است؟

۲۶. ثابت کنید به ازای هر عدد اول  $p$ ،  $(p, p+1) = 1$ ،  $(p, 2^p) = 1$ ،  $(p, 3) = 1$ .

۲۷. ثابت کنید در هر تصاعد حسابی از اعداد طبیعی، فاصله‌ای دلخواه از اعداد مرکب وجود دارد.

۲۸. اگر  $p, n$  اعداد اول باشند ثابت کنید  $p_n < 2^n$ ،  $(n > 1)$ .

۲۹. ثابت کنید در هر  $n+1$  عدد از  $2n$  عدد نخستین  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  دست‌کم دو عدد وجود دارد که یکی بر دیگری بخش‌پذیر باشد.

۳۰. بزرگترین مقسوم علیه مشترک  $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n-1}$  را به دست آورید.

۳۱. ثابت کنید هر عدد صحیح مثبت را می‌توان به صورت مجموع چند عدد طبیعی متوالی نوشت بجز توانهای ۲.

۳۲. ثابت کنید برای هر  $n$  طبیعی دنباله‌ای از  $n$  عدد طبیعی متوالی وجود دارد که هیچ یک توانی از یک عدد اول نباشد.

۳۳. ثابت کنید  $p$  اول است اگر و فقط اگر  $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$  (قضیه ویلسون).

۳۴. ثابت کنید معادله  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{14}^2 = 1599$  جواب صحیح برای  $x_1, x_2, \dots, x_{14}$  ندارد.

۳۵. ثابت کنید اگر  $f(x)$  چندجمله‌ای با ضرایب صحیح باشد معادله  $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$  به ازای بینهایت عدد اول  $p$  دارای جواب است.

۳۶. ثابت کنید تعداد کسرهای تحویل‌ناپذیر  $\frac{a}{p}$  که  $0 < \frac{a}{p} \leq 1$  و  $1 \leq b \leq n$  درست برابر با  $\varphi(1) + \varphi(2) + \dots + \varphi(n)$  است.

۳۷. ثابت کنید عددی بر ۹ بخش‌پذیر است که مجموع ارقام آن بر ۹ بخش‌پذیر باشد.

۳۸. بدون استفاده از محک اویلر ثابت کنید معادله  $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$  دارای جواب است اگر و فقط اگر  $p$  به صورت  $4k+1$  باشد ( $p$  اول است).

۳۹. اگر  $p$  عددی اول به شکل  $4k+3$  باشد ثابت کنید نمی‌توان مجموعه

$$\{n, n+1, \dots, n+p-2\}$$

را به دو دسته افراز کرد که ضربشان مساوی باشد ( $n \in \mathbb{N}$ ).

۴۰. ثابت کنید برای هر  $n > 1$  داریم  $n \nmid 2^n - 1$  ولی برای هر  $a > 2$  بینهایت عدد طبیعی  $n$  وجود دارد که  $n \mid a^n - 1$ .

۴۱. ثابت کنید در هر تصاعد حسابی از اعداد طبیعی به صورت  $ak + b$  بینهایت عضو وجود دارد که اعداد اول آنها در تجزیه یکسان است.

۴۲. این معادله را در اعداد طبیعی حل کنید

$$(y + 1)^x - 1 = y!$$

۴۳. ثابت کنید به ازای هر  $m \in \mathbb{N}$  عددی مانند  $M$  وجود دارد که اگر  $n > M$  بین  $n$  و  $2n$  دستکم یک عدد باشد که حاصل ضرب دقیقاً  $m$  عدد اول متمایز باشد.

۴۴. ثابت کنید به ازای هر  $m$ ، عددی به صورت  $2^n - 1$  هست که می‌تواند دستکم  $m$  عامل اول متمایز داشته باشد.

۴۵. ثابت کنید به ازای هر  $n$  فرد  $2^{n!} - 1$  بر  $n$  بخش پذیر است.

۴۶. ثابت کنید هر عامل اول از  $2^{2^n} + 1$  به صورت  $2^{n+1}k + 1$  است.

۴۷. همه اعداد فرد  $n$  را پیدا کنید که  $3^n + 1$  بر  $n$  قابل قسمت باشد.

۴۸. فرض کنید  $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$  داشته باشیم

$$n_1 \mid 2^{n_1} - 1, \quad n_2 \mid 2^{n_2} - 1, \quad \dots, \quad n_k \mid 2^{n_k} - 1$$

ثابت کنید  $n_1 = n_2 = n_3 = \dots = n_k = 1$ .

۴۹.  $n$  عدد  $x_n, \dots, x_2, x_1$  که هر یک ۱ یا  $-1$  است مفروضند به طوری که

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n + x_n x_1 = 0$$

ثابت کنید  $4 \mid n$ .

۵۰. همه اعداد طبیعی  $n$  را پیدا کنید که بر هر عدد کوچکتر از  $\sqrt{n}$  بخش پذیر باشند.

۵۱.  $S(n)$  را مجموع ارقام  $n$  در مبنای  $10$  می‌گیریم. ثابت کنید معادله زیر برای  $x \in \mathbb{N}$  جواب دارد

$$S(mx) = m$$

( $m$  عددی دلخواه و ثابت و طبیعی است.)

۵۲. ثابت کنید به ازای هر  $x, y \in \mathbb{N}$   $4xy - x - y$  مربع کامل نیست.

۵۳. ثابت کنید اگر  $x, y \in \mathbb{Z}$ ،  $x^2 + (x+4)^2 = y^2$  آنگاه  $x = 0$ .



۵۲. ثابت کنید هر عدد صحیح مثبت  $k$  را به بینهایت طریق می‌توان به صورت

$$k = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \dots \pm m^2$$

نشان داد که در آن  $m$  عددی طبیعی و علامت « $\pm$ » می‌تواند در وضع مناسبی اختیار شود.

۵۵. ثابت کنید معادلات زیر به ازای  $k \geq 2$  در  $\mathbb{Z}$  جواب ندارد

$$n! = x^k \quad (\text{الف})$$

$$n! = x^k - 1 \quad (\text{ب})$$

۵۶. همگی مقادیر  $n$  را طوری بیابید که  $\frac{2^n+1}{n} \in \mathbb{Z}$ .

۵۷. ثابت کنید به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$ ،  $n \mid \varphi(2^n - 1)$ .

۵۸. نشان دهید اگر عدد اول  $p$  به صورت  $3k + 1$  نباشد معادله  $x^2 \equiv a \pmod{p}$  برای هر  $a$  جواب دارد ولی اگر  $p$  به صورت  $3k + 1$  باشد در این صورت وقتی و تنها وقتی جواب دارد که  $(a, p) = 1$ ،  $a^k \equiv 1 \pmod{p}$ .

۵۹. فرض کنیم  $p$  عددی اول باشد؛ نشان دهید که  $\varphi(p-1)$  ریشه اولیه به هنگ  $p$  موجود است (ابتدا مسأله بعد را حل کنید).

۶۰. اگر  $g$  یک ریشه اولیه به هنگ عدد اول  $p$  باشد  $g^n$  یک ریشه اولیه به هنگ  $p$  است اگر و فقط اگر  $(n, p-1) = 1$ .

۶۱. ثابت کنید

$$\text{ord}_n(a^k) = \frac{\text{ord}_n a}{(k, \text{ord}_n a)} \quad \text{و } (a, n) = 1 \text{ و } n, a, k \in \mathbb{N}$$

۶۲. ثابت کنید معادله  $x^2 = y^2 + 23$  جواب صحیح ندارد.

۶۳. نقطه  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  را مشبک گوئیم اگر  $a, b \in \mathbb{Z}$ . همچنین این نقطه را قابل رؤیت گوئیم اگر  $(a, b) = 1$  ب.م.م. ثابت کنید برای هر عدد صحیح  $k > 0$  یک نقطه مشبک  $(a, b)$  موجود است به طوری که هیچ یک از نقاط مشبک  $(a+r, b+s)$ ،  $(0 < r \leq k)$  و  $(0 < s \leq k)$  از مبدأ قابل رؤیت نیست (راهنمایی: از قضیه چینی استفاده کنید).

۶۴. ثابت کنید اگر  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$  باشد، عدد  $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$  عددی صحیح است.

۶۵. معادله  $n!(n-1)! = m!$  را در مجموعه اعداد طبیعی حل کنید.

۶۶. تمام مقادیر  $n$  را پیدا کنید که  $2^{n-1} \mid n!$ .

۶۷. اگر  $\binom{n}{k}$  ها،  $(1 \leq k \leq n-1)$  همگی زوج باشند ثابت کنید  $n$  توانی از ۲ است.

۶۸. ثابت کنید

$$\begin{pmatrix} px + y \\ pa + b \end{pmatrix} \equiv_p \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ b \end{pmatrix}$$

۶۹. قضیه لوکا را با استفاده از مسأله پیش حل کنید.

۷۰. فرض کنید  $\{f(n)\}$  دنباله‌ای اکیداً صعودی از اعداد طبیعی باشد به طوری که  $f(2) = 2$

$$(m, n) = 1 \Rightarrow f(mn) = f(m)f(n)$$

و ثابت کنید  $f(n) = n$ .

۷۱. ثابت کنید اگر  $f(x) > 0$  و  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  در این صورت معادله زیر حداکثر تعداد

متناهی جواب در مجموعه اعداد طبیعی برای  $x_1, x_2, \dots, x_n$  دارد

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k) = 1$$

### خودآزمایی

۱. ثابت کنید به ازای هر  $n$  که  $2^{2^n} + 1$  عددی اول باشد و هر عدد اول  $p$  معادله زیر برای اعداد صحیح  $x$  و  $y$  جواب ندارد

$$2^{2^n} + 1 = x^p - y^p$$

۲. همهٔ اعداد  $n > 2$  را به دست آورید که دستگاه مخفف‌مانده‌ها به هنگ  $n$  به تصاعد حسابی باشد.

۳. ثابت کنید به ازای هر عدد به صورت  $p$  که  $p$  عدد اول و فرد است، اعداد  $1, 2, \dots, p-1$  را می‌توان روی یک دایره چنان قرار داد که  $ac - b^2$  بر  $p$  بخش پذیر باشد ( $a, b$  و  $c$  سه عدد پشت سر هم و دلخواه از دایره است).

۴. معادله زیر را در مجموعه اعداد طبیعی  $x, y$  و  $z$  حل کنید

$$1! + 2! + \dots + x! = y^{z+1}$$

۵. ثابت کنید عددی مربع کامل است اگر و فقط اگر تعداد مقسوم‌علیه‌های آن فرد باشد.

۶. به ازای هر عدد اول  $p$  ثابت کنید  $\binom{p}{r} \equiv 2 \pmod{p^2}$ .

۷. اگر  $p_i$ ،  $n$ امین عدد اول باشد، ثابت کنید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right) \dots = 0$$

## مباحث پیشرفته‌تر در نظریهٔ اعداد

### ۱-۵ توابع حسابی

توابعی که دامنه آنها اعداد طبیعی است، به توابع حسابی موسوم‌اند. بعضی از توابع حسابی مهم عبارت‌اند از

الف)  $\varphi(n)$ : تعداد اعداد کوچکتر از  $n$  و نسبت به  $n$  اول.

مهمترین خاصیت  $\varphi$  در قضیهٔ اویلر آشکار می‌شود:

اگر  $(a, n) = 1$ ، آنگاه  $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ .

اگر  $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ ، آنگاه  $\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ .

ب)  $\tau(n)$ : تعداد مقسوم علیه‌های مثبت  $n$ .

به راحتی ثابت می‌شود که اگر  $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ ، آنگاه

$$\tau(n) = (1 + \alpha_1) \cdots (1 + \alpha_k)$$

ج)  $\sigma_k(n)$ : مجموع توانهای  $k$ ام مقسوم علیه‌های مثبت  $n$ .

د)  $\pi(n)$ : تعداد اعداد اول کوچکتر از  $n$ .

تاکنون فرمولی برای  $\pi(n)$  ارائه نشده است ولی می‌دانیم که به ازای  $n$  های بزرگ،  $\pi(n) \simeq \frac{n}{\ln n}$ .

یا به عبارت دقیقتر  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n) \ln n}{n} = 1$ .

یکی از خواص مهم توابع حسابی، «ضربی» بودن آنهاست؛ تابع حسابی  $f$  را ضربی گوئیم

هرگاه

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad (m, n) = 1 \Rightarrow f(mn) = f(m)f(n)$$

بنابراین اگر اثر تابع ضربی  $f$  را روی توانهای اعداد اول بدانیم، تابع  $f$  به‌طور یکتا مشخص می‌شود

$$f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}) = f(p_1^{\alpha_1}) \cdots f(p_n^{\alpha_n})$$

ثابت می‌کنیم توابع  $\varphi$ ،  $\tau$  و  $\sigma_k$  ضربی هستند.

الف)  $\varphi$  تابعی ضربی است

فرض می‌کنیم  $(m, n) = 1$ ؛ بنابراین

تعداد اعداد کوچکتر از  $mn$  که نسبت به  $m$  اول اند و نسبت به  $n$  اول نیستند + تعداد اعداد اول کوچکتر از  $mn$  که نسبت به  $m$  اول نیستند = تعداد اعداد کوچکتر از  $mn$  که نسبت به  $mn$  اول نیستند پس

$$mn - \varphi(mn) = n(m - \varphi(m)) + \varphi(m)(n - \varphi(n))$$

ولذا

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$$

ب)  $\tau$  ضربی است

از آنجا که اگر  $(m, n) = 1$ ، آنگاه عاملهای اول  $m$  و  $n$  در تجزیه به اعداد اول متمایز خواهند بود، ضربی بودن  $\tau$  با توجه به تعریف آن بدیهی است.

ج)  $\sigma_k$  ضربی است

اگر  $(m, n) = 1$  و اگر مقسوم‌علیه‌های مثبت  $m$  و  $n$  به ترتیب  $\{a_1, \dots, a_k\}$  و  $\{b_1, \dots, b_s\}$  باشند، آنگاه مقسوم‌علیه‌های  $mn$  حاصل ضربهای دو به دوی  $a_i$ ها و  $b_j$ ها هستند. پس

$$\sigma_k(mn) = \sum_{i,j} (a_i^k b_j^k) = \left( \sum_i a_i^k \right) \left( \sum_j b_j^k \right) = \sigma_k(m)\sigma_k(n)$$

حال ثابت می‌کنیم تابع  $f$  ضربی است اگر و فقط اگر تابع  $F$  با ضابطه  $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$  ضربی باشد:

فرض می‌کنیم  $f$  ضربی باشد و  $(m, n) = 1$ . مقسوم‌علیه‌های  $m$  و  $n$  را به ترتیب  $\{a_1, \dots, a_k\}$  و  $\{b_1, \dots, b_s\}$  می‌گیریم. اکنون

$$F(mn) = \sum_{i,j} f(a_i b_j) = \sum_{i,j} f(a_i) f(b_j) = \sum_i f(a_i) \sum_j f(b_j)$$

$$\Rightarrow F(mn) = F(m)F(n)$$

پس اگر  $f$  ضربی باشد  $F$  نیز چنین است. اثبات عکس این مطلب به عهده خواننده است. حال به بیان روشهایی می‌پردازیم که با داشتن  $F$  بتوانیم  $f$  را محاسبه کنیم. ابتدا تابع ضربی زیر را تعریف می‌کنیم

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ (-1)^k, & \text{که } p_i \text{ها اول و متمایزند} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad n = p_1 p_2 \dots p_k$$

این تابع به تابع موبیوس مشهور است.

● قضیه ۱-۵

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \left[ \frac{1}{n} \right]$$

اثبات. چون  $\mu$  ضربی است کافی است حکم در مورد  $p^\alpha$  بررسی شود:

$$\begin{aligned} \sum_{d|p^\alpha} \mu(d) &= \mu(p^\alpha) + \mu(p^{\alpha-1}) + \dots + \mu(p) + \mu(1) \\ &= \mu(p) + \mu(1) = (-1) + (1) = 0 \end{aligned}$$

▲ تعریف ۱-۵ (ضرب دیریکله)

اگر  $f$  و  $g$  دو تابع حسابی باشند، ضرب دیریکله  $f$  و  $g$ ، که با  $(f * g)$ ، نشان داده می شود به صورت زیر تعریف می شود

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

تمرین

۱. ثابت کنید ضرب دیریکله جابجایی و شرکت پذیر است.

باتوجه به تعریف، در مورد تابع  $1(n) = 1$  به دست می آید  $(f * 1)(n) = \sum_{d|n} f(d) = F(n)$

و در مورد تابع  $\left[ \frac{1}{n} \right]$ ،  $I(n) = \left[ \frac{1}{n} \right]$ ،  $(f * I)(n) = \sum_{d|n} f(d)I\left(\frac{n}{d}\right) = f(n)$ ، قضیه ۱-۵ را نیز می توان به این صورت بیان کرد:

$$\mu * 1 = I$$

حال فرض کنیم  $F = f * 1$ ؛ در این صورت

$$F = 1 * f \Rightarrow \mu * F = \mu * (1 * f) = (\mu * 1) * f = I * f = f$$

پس به قضیه زیر می رسیم

● قضیه ۲-۵ (انعکاس موبیوس)

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) \Rightarrow f(n) = \sum_{d|n} F(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

عکس قضیه فوق نیز درست است، یعنی

● قضیه ۳-۵

$$f = f * \mu \Rightarrow f * 1 = F * (\mu * 1) = F * I = F \Rightarrow F(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

با توجه به این دو قضیه، اگر به ازای هر  $n$ ،  $\sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} g(d)$ ، آنگاه به ازای هر  $n$ ،

$$f(n) = g(n)$$

● قضیه ۴-۵

۱. ضرب و ترکیب دو تابع ضربی، تابعی ضربی است.

$$2. \sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$3. \sum_{i=1}^n F(i) = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{n}{i} \right] f(i)$$

زیرا

$$\sum_{i=1}^n F(i) = \sum_{i=1}^n \sum_{d|i} f(d)$$

$$= \sum_{i=1}^n (n \text{ تعداد اعداد بخش‌پذیر بر } i \text{ و کوچکتر از } n) \times f(i) = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{n}{i} \right] f(i)$$

■ مثال ۱-۵

۱. ثابت کنید  $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$

حل. از آنجا که  $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$  تعداد اعداد کوچکتر از  $n$  است که ب.م.م آنها و  $n$  برابر  $d$  است (چرا؟) می‌توان نوشت

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) = n$$

■ مثال ۲-۵

ثابت کنید  $\sum_{d|n} \frac{1}{d} = \frac{\sigma(n)}{n}$  و  $\prod_{d|n} d = n^{\frac{\tau(n)}{2}}$

حل.

$$A = \prod_{d|n} d = \prod_{d|n} \frac{n}{d} \Rightarrow A^2 = \prod_{d|n} d \frac{n}{d} = \prod_{d|n} n = n^{\tau(n)}$$

$$\Rightarrow A = n^{\tau(n)}$$

$$\sum_{d|n} \frac{1}{d} = \sum_{d|n} \frac{d}{n} = \frac{1}{n} \sum_{d|n} d = \frac{\sigma(n)}{n}$$

■ مثال ۳-۵

$$\sum_{d|n} \mu(d) \tau\left(\frac{n}{d}\right) = 1 \text{ ثابت کنید}$$

حل. از آنجا که  $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$  بنا به قضیه ۲-۵،

$$1 = \sum_{d|n} \mu(d) \tau\left(\frac{n}{d}\right)$$

■ مثال ۴-۵

ثابت کنید ماتریس  $[a_{ij}]_{n \times n}$  که به صورت زیر تعریف می شود وارون پذیر است

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i|j \\ 0, & \cancel{i|j} \end{cases}$$

حل. می خواهیم ماتریس  $[b_{ij}]_{n \times n}$  ی به دست آوریم که  $[b_{ij}][a_{ij}] = I_{n \times n}$  یا

$$\delta_{ij} = \sum_k b_{ik} a_{kj} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

$\delta_{ij}$  را می توان به صورت زیر نوشت

$$\delta_{ij} = \sum_{k|j} b_{ik}$$

بنابر قضیه ۲-۵،

$$b_{ij} = \sum_{k|j} \delta_{ik} \mu\left(\frac{j}{k}\right) = \begin{cases} 0, & \cancel{i|j} \\ \mu\left(\frac{j}{i}\right), & i|j \end{cases}$$

پس  $[a_{ij}]$  وارون پذیر است.

■ مثال ۵-۵

$\{a_n\}$  دنباله ای است با این خاصیت که به ازای هر  $n$ ،  $\sum_{d|n} a_d = 2^n$ . ثابت کنید  $n|a_n$ .

حل. فرض می‌کنیم  $b_n$  تعداد دنباله‌هایی از اعداد صفر و یک باشد که دوره تناوب آنها (یعنی کوچکترین دوره تناوب آنها)  $n$  باشد؛ بنابراین  $\sum_{d|n} b_d = 2^n$ .

بنابر قضیه ۳-۵،  $a_n \equiv b_n$  و  $n|b_n$ . (حل این مسأله بدون استفاده از قضیه مویوس مشکل است!)

■ مثال ۵-۶

ثابت کنید  $\sum_{i=1}^n \left[ \frac{n}{i} \right] \varphi(i) = \frac{n(n+1)}{2}$

حل. چون  $\phi(n) = \sum_{d|n} \varphi(d) = n$  پس بنابر قضیه ۴-۵،

$$\sum_{i=1}^n \left[ \frac{n}{i} \right] \varphi(i) = \sum_{i=1}^n \phi(i) = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

■ مثال ۵-۷

فرض کنیم  $S_n = \{1 \leq k \leq 2n \mid \{\frac{n}{k}\} \geq \frac{1}{4}\}$ . ثابت کنید  $\sum_{d \in S_n} \varphi(d) = n^2$ .  
توضیح. برای محاسبه عباراتی به شکل  $\sum f(d)$  دارای شرایطی خاص، سعی می‌کنیم تابعی مانند  $g$  بیابیم که

$$g(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ دارای شرایط باشد} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در این صورت کافی است مقدار  $\sum_{d=1}^n f(d)g(d)$  را پیدا کنیم.

حل. توجه می‌کنیم که مقدار  $f(k) = \left[ \frac{2n}{k} \right] - 2 \left[ \frac{n}{k} \right]$  صفر است اگر  $\frac{1}{4} < \{\frac{n}{k}\}$  و یک است اگر  $\{\frac{n}{k}\} \geq \frac{1}{4}$ . بنابراین

$$\begin{aligned} \sum_{d \in S_n} \varphi(d) &= \sum_{k=1}^{2n} \varphi(k) \left[ \frac{2n}{k} \right] - 2 \sum_{k=1}^{2n} \varphi(k) \left[ \frac{n}{k} \right] \\ &= \frac{2n(2n+1)}{2} - 2 \frac{n(n+1)}{2} = n^2 \end{aligned}$$

تمرین

۱. یک ماتریس نامتناهی از اعداد طبیعی مفروض است که در آن  $a_{ij} \leq ij$  نشان دهید



به ازای هر  $k \in \mathbb{N}$  عددی در ماتریس وجود دارد که دست کم  $k$  بار تکرار شده باشد.

۲. تابع  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  مفروض است. توابع  $g$  و  $h$  را به این صورت تعریف می‌کنیم

$$g(n) = \sum_{\substack{(r,n)=1 \\ 1 \leq r \leq n}} f\left(\frac{r}{n}\right), \quad h(n) = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$$

$g$  و  $h$  چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۳. ثابت کنید

$$\sum_{\substack{(r,n)=1 \\ 1 \leq r \leq n}} \cos \frac{r\pi}{n} = \mu(n)$$

۴. تعدادی کارت روی میز وجود دارد که روی هر یک عددی طبیعی نوشته شده است به نحوی که به ازای هر عدد طبیعی، تعداد کارتهایی که مقسوم‌علیه‌های  $n$  روی آنها نوشته شده است دقیقاً  $n$  است. ثابت کنید تمام اعداد طبیعی روی کارتها نوشته شده‌اند.

۵. ثابت کنید  $\prod_{\substack{p|n \\ p \text{ اول}}} (1 - f(p)) = \sum_{d|n} \mu(d) f(d)$

۶. ثابت کنید  $\sum (-1)^{i+1} \left[ \frac{n}{p_1 p_2 \dots p_i} \right] = n - 1$  که  $\sum$  روی تمام اعداد اول متمایز گرفته شده است.

۷. سری دیریکله،  $A_s(f)$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$A_s(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k)}{k^s}$$

خاصیت مهم این سریها این است که  $A_s(f) A_s(g) = A_s(f * g)$  (این مطلب را بدون

اثبات می‌پذیریم). ثابت کنید  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$

۸. ثابت کنید

(الف)  $\sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} = \frac{n}{\varphi(n)}$

(ب)  $\sum_{\substack{(r,n)=1 \\ 1 \leq r \leq n}} r = \frac{1}{2} n \varphi(n)$

(ج)  $\sum_{n=1}^x \lambda(n) \left[ \frac{x}{n} \right] = [\sqrt{x}]$  که در آن  $\lambda$  به این صورت تعریف می‌شود

$$\lambda(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ (-1)^k, & n = p_1 p_2 \dots p_k \text{ (همه لزوماً متمایز)} \end{cases}$$

۹. ثابت کنید به ازای هر تابع حسابی  $f$  که  $f(1) \neq 0$ ، تابع یکتای  $f^{-1}$  وجود دارد که  $(f * f^{-1}) = f^{-1} * f = I$  و نشان دهید مجموعه توابع حسابی  $f$  که  $f(1) \neq 0$ ، با عمل  $*$  یک گروه جابه‌جایی تشکیل می‌دهد.

۱۰. با توجه به مسأله قبل نشان دهید  $\varphi^{-1}(n) = \prod_{p|n} (1-p)$  ( $p$  اول است).

۱۱. ثابت کنید  $\sum_{d|n} \tau^2(d) = \left(\sum_{d|n} \tau(d)\right)^2$ .

۱۲. فرض کنید  $P(n)$  حاصل ضرب اعداد کوچکتر یا مساوی  $n$  باشد که نسبت به  $n$  اول‌اند؛ ثابت کنید

$$P(n) = n^{\varphi(n)} \prod_{d|n} \left(\frac{d!}{d^d}\right)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}$$

۱۳. ثابت کنید  $\sum_{n \leq x} \varphi(n) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{\pi} \sum_{n \leq x} \mu(n) \left[\frac{x}{n}\right]^2$

۱۴. ثابت کنید چند جمله‌ایهای  $P$  و  $Q$  وجود ندارد که  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ .

## ۲-۵ قانون تقابل مربعی

گاهی در نظریه اعداد محتاج به حل معادلات همبهنشتی‌ای مشابه  $x^2 \equiv a \pmod{p}$  می‌شویم. توجه می‌کنیم که اگر بتوانیم معادله فوق را حل کنیم، به راحتی می‌توانیم معادله کلی

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{p}$$

را که  $(a, p) = 1$  حل کنیم: برای این کار با ضرب در  $4a$  و ایجاد یک عبارت درجه دوم داریم

$$(2ax + b)^2 \equiv b^2 - 4ac \pmod{p}$$

البته معادله  $x^2 \equiv a \pmod{p}$  به ازای هر  $a$  جواب ندارد. اگر  $(a, p) = 1$  و معادله جواب داشته باشد،  $a$  را مانده درجه دوم به هنگ  $p$  گوئیم؛ و اگر معادله جواب نداشته باشد،  $a$  را نامانده درجه دوم گوئیم. بررسی حالت  $p = 2$  بسیار ساده است، لذا از اینجا به بعد  $p$  را یک عدد اول فرد می‌گیریم. برای راحتی کار یک نماد مفید را معرفی می‌کنیم.

▲ تعریف ۲-۵ (نماد لژاندر)

$\left(\frac{a}{p}\right)$ ، به این صورت تعریف می‌شود

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & a \text{ مانده درجه دوم است} \\ -1, & a \text{ نامانده درجه دوم است} \\ 0, & a \equiv 0 \pmod{p} \end{cases}$$

به راحتی دیده می شود که

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right) \Leftrightarrow a \equiv b(p) \quad (\text{الف})$$

$$\left(\frac{k^2}{p}\right) = 1 \quad (\text{ب})$$

ثابت می کنیم که دقیقاً  $\frac{p-1}{2}$  مانده درجه دوم و  $\frac{p-1}{2}$  نامانده درجه دوم وجود دارد: از آنجا که اعداد  $1^2, 2^2, \dots, (p-1)^2$  همگی به هنگ  $p$  ناهمنهشت بوده، مانده درجه دوم هستند، پس دست کم  $\frac{p-1}{2}$  مانده درجه دوم وجود دارد. لم بعد اثبات را تمام می کند. ▲

لم. (محک اولیلا). به ازای هر  $a$  و هر عدد اول و فرد  $p$ ،  $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$ . اثبات. اگر  $a \equiv 0 \pmod{p}$ ،  $a$ ، بدهاتماً دو طرف تساوی صفر می شود. اگر  $a$  مانده درجه دوم به هنگ  $p$  باشد،  $x$  وجود دارد که  $x^2 \equiv a \pmod{p}$ ؛ پس  $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$  و  $x^{p-1} \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$  ولی از آنجا که معادله  $x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$  حداکثر  $\frac{p-1}{2}$  جواب دارد و قبلاً تعداد  $\frac{p-1}{2}$  مانده درجه دوم به دست آورده ایم، پس تعداد مانده های درجه دوم دقیقاً  $\frac{p-1}{2}$  است، پس تعداد نامانده های درجه دوم نیز  $\frac{p-1}{2}$  است. از آنجا که  $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{p}$ ، پس اگر  $a$  نامانده باشد،  $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$  و حکم ثابت می شود.

نتیجه. نماد  $\left(\frac{a}{p}\right)$  ضربی قوی است، یعنی  $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$ ،  $\forall a, b$ .

با اینکه محک اولیلا برای بررسی مانده بودن یا نامانده بودن بسیار مفید است ولی هنوز قادر نیستیم به راحتی مثلاً  $(17/53)$  را محاسبه کنیم. در اینجا لم بسیار مفیدی را که ریاضیدان بزرگ گاوس در ۱۸ سالگی اثبات کرده، ذکر می کنیم.

لم گاوس. اگر  $(a, p) = 1$ ، آنگاه اعداد  $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$ ،  $\frac{p-1}{2}$  عدد ناهمنهشت به هنگ  $p$  هستند. اگر فرض کنیم دقیقاً  $k$  تایی آنها با اعدادی بیشتر از  $\frac{p-1}{2}$  همنهشت باشند، آنگاه  $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^k$ .

اثبات. فرض می کنیم  $a_1, a_2, \dots, a_k$  اعدادی از  $a, 2a, \dots, (p-1)a$  باشند که بیشتر از  $\frac{p-1}{2}$  به هنگ  $p$  هستند، و  $b_1, b_2, \dots, b_s$  را بقیه اعداد می گیریم. به راحتی می توان بررسی کرد که  $a_1, a_2, \dots, a_k, p-a_1, p-a_2, \dots, p-a_k, b_1, b_2, \dots, b_s$ ،  $\frac{p-1}{2}$  عدد ناهمنهشت بین  $1$  و  $\frac{p-1}{2}$  هستند؛ پس

$$(p-a_1)(p-a_2)\dots(p-a_k)b_1b_2\dots b_s = \left(\frac{1}{p}(p-1)\right)!$$

$$\Rightarrow (-1)^k a_1 a_2 \dots a_k b_1 b_2 \dots b_s \equiv \left(\frac{1}{p}(p-1)\right)! \pmod{p}$$

حال اگر به جای  $a_i$  ها و  $b_i$  ها مقادیر  $a, 2a, \dots, (p-1)a$  را قرار دهیم به دست

می‌آید

$$(-1)^k a^{\frac{p-1}{q}} \times \left(\frac{1}{q}(p-1)\right)! \equiv \left(\frac{1}{q}(p-1)\right)! \pmod{p}$$

$$\Rightarrow (-1)^k a^{\frac{p-1}{q}} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow a^{\frac{p-1}{q}} \equiv (-1)^k \pmod{p}$$

بقیهٔ کار با استفاده از محک اویلر بدهی است.

حال می‌خواهیم بین  $\left(\frac{p}{q}\right)$  و  $\left(\frac{q}{p}\right)$  رابطه‌ای بیابیم. در نظر اول ممکن است رابطه‌ای بین این دو نباشد، ولی گاوس یا فراست، قانون تقابل مربعی را کشف کرد که یکی از زیباترین قضایای ریاضی است. ما در اینجا اثباتی با استفاده از مثلثات خالص (!) ارائه می‌کنیم که به وسیلهٔ آیزنشتاین به دست آمده است.

## ● قضیه ۵-۵ (قانون تقابل مربعی)

اگر  $p$  و  $q$  اول و فرد باشند، آنگاه

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{q} \cdot \frac{q-1}{p}}$$

لم ۱.

اگر  $m$ ، آنگاه

$$\frac{\sin mx}{\sin x} = \prod_{k=1}^{m-1} \left( \sin^2 x - \sin^2 \frac{k\pi}{m} \right) \times (-4)^{\frac{m-1}{2}}$$

اثبات لم. به استقرایه راحتی ثابت می‌شود که  $\frac{\sin mx}{\sin x}$  یک چندجمله‌ای بر حسب  $\sin^2 x$  است که ضریب بزرگترین توان آن  $(-4)^{\frac{m-1}{2}}$  است. بقیهٔ کار، با توجه به اینکه به ازای  $k = 1, 2, \dots, \frac{m-1}{2}$ ،  $\pm \frac{\pi k}{m}$  ریشهٔ  $\frac{\sin mx}{\sin x}$  است و با تجزیهٔ چندجمله‌ای مذکور، حکم بدهی است.

اثبات قضیه. با توجه به لم،

$$\frac{\sin(p \cdot \frac{k\pi}{q})}{\sin(\frac{k\pi}{q})} = (-4)^{\frac{p-1}{2}} \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \left( \sin^2 \frac{k\pi}{q} - \sin^2 \frac{j\pi}{p} \right)$$

حال اگر در اتحاد فوق  $k$  را برابر  $1, 2, \dots, \frac{q-1}{2}$  قرار دهیم و عبارات حاصل را در هم ضرب کنیم، نتیجه می‌شود

$$\prod_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} \frac{\sin(p \cdot \frac{k\pi}{q})}{\sin \frac{k\pi}{q}} = (-4)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \prod_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} \left( \sin^2 \frac{k\pi}{q} - \sin^2 \frac{j\pi}{p} \right)$$

$$= (-4)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{\sin(q \cdot \frac{j\pi}{p})}{(-1)^{\frac{q-1}{2}} \times (-4)^{\frac{q-1}{2}} \times \sin(\frac{j\pi}{p})}$$

$$= (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{\sin(q \cdot \frac{j\pi}{p})}{\sin(\frac{j\pi}{p})}$$

اکنون دستگاه مخفف مانده‌ها به هنگ  $p$  و  $q$  را به ترتیب  $\{-\frac{p-1}{2}, \dots, 1, \dots, \frac{p-1}{2}\}$  و  $\{-\frac{q-1}{2}, \dots, 1, \dots, \frac{q-1}{2}\}$  می‌گیریم و با استفاده از لم گاوس به دست می‌آید

$$\left(\frac{p}{q}\right) \prod_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} \frac{\sin(\frac{k\pi}{q})}{\sin(\frac{k\pi}{p})} = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{p}\right) \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{\sin(\frac{j\pi}{p})}{\sin(\frac{j\pi}{q})}$$

پس

$$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$$

چند مثال، قدرت این قضیه را نشان می‌دهد.

■ مثال ۸-۵

آیا معادله  $x^2 \equiv 521 \pmod{997}$  جواب دارد؟ (۵۲۱ و ۹۹۷ اول اند.)

حل.

$$\begin{aligned} \left(\frac{521}{997}\right) &= \left(\frac{997}{521}\right) = \left(\frac{476}{521}\right) = \left(\frac{4}{521}\right) \left(\frac{7}{521}\right) \left(\frac{17}{521}\right) \\ &= \left(\frac{7}{521}\right) \left(\frac{17}{521}\right) = \left(\frac{521}{7}\right) \left(\frac{521}{17}\right) = \left(\frac{3}{7}\right) \left(\frac{11}{17}\right) \\ &= -\left(\frac{7}{3}\right) \left(\frac{17}{11}\right) = -\left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{6}{11}\right) = -\left(\frac{2}{11}\right) \left(\frac{3}{11}\right) \\ &= \left(\frac{3}{11}\right) = -\left(\frac{11}{3}\right) = -\left(\frac{2}{3}\right) = 1 \end{aligned}$$

پس معادله جواب دارد.

■ مثال ۹-۵

آیا معادله  $x^2 + 6x - 154 \equiv 0 \pmod{399}$  جواب دارد؟

حل.

$$\begin{aligned} (x+3)^2 &\equiv 145 \pmod{399} \\ \left(\frac{145}{399}\right) &= \left(\frac{5}{399}\right) \left(\frac{29}{399}\right) = \left(\frac{399}{5}\right) \left(\frac{399}{29}\right) = \left(\frac{-1}{5}\right) \left(\frac{22}{29}\right) \\ &= \left(\frac{2}{29}\right) \left(\frac{11}{29}\right) = -\left(\frac{11}{29}\right) = -\left(\frac{29}{11}\right) = -\left(\frac{7}{11}\right) \\ &= \left(\frac{11}{7}\right) = \left(\frac{4}{7}\right) = 1 \end{aligned}$$

پس معادله جواب دارد.

### تمرین

۱. ثابت کنید

$$\left(\frac{2}{p}\right) = \begin{cases} 1 & p \equiv \pm 1 \pmod{8} \\ -1 & p \equiv \pm 3 \pmod{8} \end{cases}$$

۲. فرض کنید  $P$  عدد فردی با تجزیه  $P = \prod_{i=1}^n p_i^{\alpha_i}$  باشد. نماد ژاکوبی،  $\left(\frac{n}{P}\right)$ ، به صورت

$$\left(\frac{n}{1}\right) = 1, \quad \left(\frac{n}{P}\right) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{n}{p_i}\right)^{\alpha_i}$$

تعریف می‌شود.

ثابت کنید اگر  $P$  و  $Q$  فرد و نسبت به هم اول باشند، آنگاه  $\left(\frac{P}{Q}\right)\left(\frac{Q}{P}\right) = (-1)^{\frac{P-1}{2} \cdot \frac{Q-1}{2}}$ .

۳. ثابت کنید اگر  $4m^2 + (4n-1)^2 = 4k$  که در آن  $m$  عددی طبیعی است که عامل اولی به شکل  $4k-1$  ندارد، آنگاه معادله  $y^2 = x^2 + k$  جواب صحیح ندارد.

۴. اگر  $f(x)$  چندجمله‌ایی باشد که به ازای مقادیر صحیح  $x$  مقدار صحیح می‌گیرد، ثابت کنید

$$(a, p) = 1 \Rightarrow \sum_{x=1}^p \left(\frac{f(ax+b)}{p}\right) = \sum_{x=1}^p \left(\frac{f(x)}{p}\right)$$

۵. اگر  $n$  عددی فرد و  $p$  عددی اول و فرد باشد، ثابت کنید

$$\left(\frac{n}{p}\right) = (-1)^{\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{in}{p}\right]}$$

و از آنجا اثباتی دیگر برای قانون تقابل مربعی پیدا کنید.

### ▲ تعریف ۳-۵

فرض کنیم  $f$  یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح باشد، و به ازای عدد اولی چون  $p$  و  $\alpha \geq 2$  از هم‌نهشتی  $(*) \equiv f(x) \pmod{p^\alpha}$  جوابی مانند  $x = a$  داشته باشد، که در آن  $a$  طوری انتخاب شده است که  $0 \leq a < p^\alpha$ . این جواب در  $(**) \equiv f(x) \pmod{p^{\alpha-1}}$  نیز صدق می‌کند،  $a$  را بر  $p^{\alpha-1}$  تقسیم می‌کنیم

$$a = qp^{\alpha-1} + r \quad (0 \leq r < p^{\alpha-1})$$

گوئیم باقیمانده  $r$  به وسیله  $a$  تولید می‌گردد. به عبارت دیگر هر جواب  $a$  از هم‌نهشتی  $(*)$  در بازه  $0 \leq a < p^\alpha$  جوابی از هم‌نهشتی  $(**)$  مانند  $r$  در بازه  $0 \leq r < p^{\alpha-1}$  تولید می‌کند. حال فرض کنیم با جواب  $r$  از  $(**)$  در بازه  $0 \leq r < p^{\alpha-1}$  شروع کرده، می‌پرسیم آیا جوابی مانند

$a$  از (\*) در بازه  $0 \leq a < p^\alpha$  وجود دارد که  $r$  را تولید کند. این جوابها را جوابهای مربوط به  $r$  می‌نامیم. ▲

▲ تعریف ۴-۵

مشتق چندجمله‌ای  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  را به صورت  $f'(x) = \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1}$  تعریف می‌کنیم. ▲  
با توجه به قضیه دو جمله‌ای نتیجه می‌شود که

$$(c + p^{k-1}t)^i \equiv c^i + i c^{i-1} p^{k-1} t \pmod{p^k}$$

پس

$$f(c + p^{k-1}t) \equiv f(c) + f'(c) p^{k-1} t \pmod{p^k}$$

و به راحتی می‌توانیم این قضیه مهم را ثابت کنیم:

● قضیه ۶-۵

اگر  $c$  یک ریشه  $f(x) \equiv 0 \pmod{p^{k-1}}$  باشد، آنگاه تعداد جوابهای مربوط به  $c$  برای معادله  $f(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$

(الف) صفر است، اگر  $f'(c) \equiv 0 \pmod{p}$  و  $c$  ریشه  $f(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$  نباشد؛

(ب) یک است، اگر  $f'(c) \not\equiv 0 \pmod{p}$ ؛

(ج)  $p$  است، اگر  $f'(c) \equiv 0 \pmod{p}$  و  $c$  ریشه  $f(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$  باشد.

۳-۵ ریشه‌های اولیه

▲ تعریف ۵-۵

اگر  $(a, m) = 1$ ، مرتبه  $a$  به هنگ  $m$ ،  $\text{ord}_m a$ ، کوچکترین عدد مثبت  $f$  است که

$$a^f \equiv 1 \pmod{m}$$

بنابر قضیه اوایلر  $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ ؛ بنابراین به ازای هر  $a$  و هر  $m$  که  $(a, m) = 1$ ، مرتبه  $a$  به هنگ  $m$  وجود دارد. ▲

تمرین

۱. مرتبه ۲ را به هنگ ۵، ۷ و ۱۳ محاسبه کنید.

● قضیه ۷-۵

اگر  $a^n \equiv 1 \pmod{m}$ ، آنگاه  $\text{ord}_m a | n$ .

اثبات. فرض کنید  $\text{ord}_m a = f$  و  $n = fk + r$ ، که در آن  $f > r > 0$ . در این

صورت

$$a^f \equiv 1 \pmod{m} \Rightarrow a^{kf} \equiv 1 \pmod{m} \Rightarrow a^{kf+r} \equiv a^r \pmod{m} \Rightarrow a^r \equiv a^n \equiv 1 \pmod{m}$$

بنابراین،  $r$  که عددی مثبت و کوچکتر از  $f$  است باید برابر مرتبهٔ  $a$  باشد. تناقض حاصل ثابت می‌کند که  $r = 0$  یا  $\text{ord}_m a | n$ .

● قضیهٔ ۵-۸

فرض کنیم مرتبهٔ  $a$  به هنگ  $m$  برابر  $f$  باشد. در این صورت  $a^r \equiv a^s \pmod{m}$  اگر و تنها اگر  $r \equiv s \pmod{f}$ . اثبات. فرض کنید  $r > s$ . بنابراین

$$a^r \equiv a^s \pmod{m} \Rightarrow a^{r-s} \equiv 1 \pmod{m} \stackrel{\text{بنابرضیه ۵-۷}}{\Rightarrow} f | r - s \Rightarrow r \equiv s \pmod{f}$$

$$r \equiv s \pmod{f} \Rightarrow r - s = kf$$

$$\Rightarrow a^{r-s} = a^{kf} \equiv 1 \pmod{m} \Rightarrow a^r \equiv a^s \pmod{m}$$

▲ تعریف ۵-۶

▲  $g$  را یک ریشهٔ اولیه به هنگ  $m$  گویند هرگاه  $\text{ord}_m g = \varphi(m)$ .

● قضیهٔ ۵-۹

$g$  یک ریشهٔ اولیه به هنگ  $m$  است اگر و فقط اگر  $\{g, g^2, \dots, g^{\varphi(m)}\}$  دستگاه مخفف مانده‌ها باشد.

اثبات. اگر مجموعهٔ فوق یک دستگاه مخفف مانده‌ها باشد آنگاه، از آنجا که  $g^{\varphi(m)} \equiv 1$  به ازای هر  $i, i < \varphi(m)$ ،  $g^i \not\equiv 1 \pmod{m}$ . پس  $g$  یک ریشهٔ اولیه است، یعنی  $\text{ord}_m g = \varphi(m)$ . اگر  $g$  یک ریشهٔ اولیه باشد، تعداد  $\varphi(m)$  عدد ناهمنهشت که نسبت به  $m$  اول اند تشکیل یک دستگاه مخفف مانده‌ها می‌دهند چون اگر  $i \neq j$  و  $g^i \equiv g^j \pmod{m}$ ، آنگاه  $i \equiv j \pmod{\varphi(m)}$ . چون  $i, j < \varphi(m)$ ، پس  $i = j$ ، که تناقض است. از طرفی چون  $(g, m) = 1$ ، پس  $\forall k : (g^k, m) = 1$ .

■ مثال ۵-۱۰

اگر  $m > 2$ ،  $n > 2$ ،  $(m, n) = 1$ ، آنگاه  $mn$  ریشهٔ اولیه ندارد، یعنی عددی مانند  $a$  که  $(a, mn) = 1$  وجود ندارد که مرتبهٔ آن  $\varphi(mn)$  باشد. چون  $\varphi(m)$  و  $\varphi(n)$  هر دو زوج اند (چرا؟) پس

$$[\varphi(m), \varphi(n)] = k\varphi(m) = k'\varphi(n) \text{ و } [\varphi(m), \varphi(n)] < \varphi(mn)$$

$$\left. \begin{aligned} g^{[\varphi(m), \varphi(n)]} &= g^{k\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m} \\ g^{[\varphi(m), \varphi(n)]} &= g^{k'\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n} \end{aligned} \right\} \Rightarrow g^{[\varphi(m), \varphi(n)]} \equiv 1 \pmod{mn}$$



یعنی عددی کوچکتر از  $\varphi(mn)$  وجود دارد که  $g$  به توان آن عدد، همنهشت واحد به هنگ  $mn$  است.

● قضیه ۵-۱۰

اگر  $m \neq 1, 2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha$  در آن  $p$  عددی اول و فرد است، آنگاه  $m$  ریشه اولیه ندارد. اثبات. از مثال ۴-۵ معلوم می‌شود که اگر  $m$  یک ریشه اولیه داشته باشد آنگاه  $m$  نمی‌تواند دو عامل اول فرد متمایز داشته باشد. پس  $m$  باید به صورت  $2^k p^\alpha$  باشد. در حالت  $k > 1$  و  $\alpha \geq 1$ ، باز بنابر مثال،  $m$  ریشه اولیه ندارد، پس  $m$  باید به صورت  $2p^\alpha$  یا  $p^\alpha$  یا  $2$  یا  $4 \cdot 2^k$  ( $k > 2$ ) باشد. پس به صورت  $2^k$  است؛ ولی با استقرا می‌توان ثابت کرد که

$$(a, 2) = 1 \Rightarrow a^{2^{k-1}} \equiv 1 \pmod{2^k}$$

و  $\varphi(2^k) < 2^{k-2}$ . پس  $m$  ریشه اولیه ندارد.

تذکر. به عبارت دقیق‌تر، می‌توان ثابت کرد که اگر  $m \neq 1, 2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha$ ، آنگاه

$$(a, m) = 1 \Rightarrow a^{\varphi(m)/2} \equiv 1 \pmod{m}$$

حال ثابت می‌کنیم اعداد  $1, 2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha$  ریشه اولیه دارند. سه مورد نخست را می‌توان با آزمایش تحقیق کرد؛ حالت  $p^\alpha$  و  $2p^\alpha$  را ثابت خواهیم کرد. ابتدا ثابت می‌کنیم به هنگ  $p$  ریشه اولیه‌ای وجود دارد:

فرض می‌کنیم تعداد  $f(d)$  عضو از  $Z_p$  مرتبه  $d$  دارند که  $d|p-1$ . چون هر عضو  $Z_p$  مرتبه‌ای دارد که مقسوم علیه  $p-1$  است، پس  $\sum_{d|p-1} f(d) = p-1$ . از طرفی می‌دانیم که  $\sum_{d|p-1} \varphi(d) = p-1$ ، و لذا با توجه به ضربی بودن  $f$  و قضیه ۳-۵ نتیجه می‌شود  $f(d) = \varphi(d)$ . پس نتیجه مهم زیر به دست می‌آید

نتیجه. تعداد  $\varphi(p-1)$  ریشه اولیه به هنگ  $p$  در  $Z_p$  وجود دارد.

حال به صورت استقرایی ثابت می‌کنیم که به هنگ  $p^\alpha$  ریشه اولیه‌ای وجود دارد.  $g$  را یک ریشه اولیه  $p$  می‌گیریم. به وضوح  $g + kp$  نیز یک ریشه اولیه است. بنابر قاعده بسط دوجمله‌ای

$$(g + kp)^{p-1} = g^{p-1} + (p-1)g^{p-2}(kp) + \lambda p^2$$

با فرض  $g^{p-1} = 1 + \lambda'p$  به دست می‌آید

$$(g + kp)^{p-1} = 1 + p(\lambda' - g^{p-2}k + \lambda''p) = 1 + pu$$

چون  $g^{p-2} \not\equiv 1 \pmod{p}$ ، پس می‌توان  $k$  را طوری اختیار کرد که  $p \nmid u$ . به طور استقرایی فرض می‌کنیم  $u_{\alpha-1}$  ای موجود است که

$$(g + kp)^{\varphi(p^{\alpha-1})} = 1 + p^{\alpha-1}u_{\alpha-1}$$

و  $p \mid u_{\alpha-1}$ . حال نشان می‌دهیم  $g + kp$  یک ریشه اولیه به هنگ  $p^\alpha$  است. مرتبه  $g + kp$  به هنگ  $p^\alpha$  را  $f$  می‌گیریم. چون  $(g + kp)^f \equiv 1 \pmod{p^{\alpha-1}}$ ، پس  $f$  باید بر  $(p-1)p^{\alpha-2}$  بخش پذیر باشد و  $(p-1)p^{\alpha-1}$  باید بر  $f$  بخش پذیر باشد؛ پس  $f = p^{\alpha-2}(p-1)$  یا  $f = p^{\alpha-1}(p-1)$ ؛ ولی

$$(g + kp)^{p^{\alpha-1}(p-1)} = 1 + p^{\alpha-1}u_{\alpha-1} \not\equiv 1 \pmod{p^\alpha}$$

پس  $g + kp$  یک ریشه اولیه به هنگ  $p^\alpha$  است و

$$\begin{aligned} (g + kp)^{p^{\alpha-1}(p-1)} &= (1 + p^{\alpha-1}u_{\alpha-1})^p = 1 + p^\alpha u_{\alpha-1} + \lambda p^{\alpha+1} \\ &= 1 + p^\alpha(u_{\alpha-1} + \lambda p) = 1 + p^\alpha u_\alpha \end{aligned}$$

و  $p \mid u_\alpha$  چون  $p \mid u_{\alpha-1}$ . اکنون به استقرا نتیجه می‌شود که  $g + kp$  یک ریشه اولیه به هنگ هر  $p^\alpha$  است.

نتیجه. اگر  $g$  یک ریشه اولیه به هنگ  $p$  باشد و  $g^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$ ، آنگاه  $g$  یک ریشه اولیه به هنگ هر  $p^\alpha$  است.

با توجه به اینکه  $\varphi(2p^\alpha) = \varphi(p^\alpha)$ ، اگر  $g$  یک ریشه اولیه فرد به هنگ  $p^\alpha$  باشد [که لزوماً وجود دارد (چرا؟)] آنگاه  $g$  یک ریشه اولیه به هنگ  $2p^\alpha$  است.

### ■ مثال ۵-۱۱

عددهای فرد  $n$  را به دست آورید که  $1 + 3^n$  بر  $n$  بخش پذیر باشد.

حل.

$$3^{2n} + 1 \equiv 0 \pmod{n} \Rightarrow 3^{2n} \equiv -1 \pmod{n}$$

فرض می‌کنیم  $p$  کوچکترین عامل اول  $n$  باشد (یک «کَلک» مفید). داریم

$$3^{2n} \equiv -1 \pmod{p} \Rightarrow \text{ord}_p 3 \mid 2n$$

چون  $\text{ord}_p 3 < p$ ، پس  $p$  نسبت به  $n$  اول است. چون  $n$  عامل کوچکتر از  $p$  ندارد، پس

$$\text{ord}_p 3 \mid 2 \Rightarrow \text{ord}_p 3 = 2 \Rightarrow 3^2 \equiv -1 \pmod{p}$$

■  $p = 2$ ، و لذا  $n$  فرد نمی‌باشد. پس تنها جواب،  $n = 1$  است که عامل اول ندارد.

### ■ مثال ۵-۱۲

بزرگترین توان  $3$  را پیدا کنید که عدد  $1 + 2^{2^n}$  بر آن بخش پذیر باشد.

حل. چون  $2^2 \equiv 1 \pmod{3}$  و  $2^2 \not\equiv 1 \pmod{3^2}$ ، پس  $2$  یک ریشه اولیه به هنگ  $3^\alpha$  است. از طرفی اگر

$$\begin{aligned} 2^{2^n} + 1 \equiv 0 \pmod{3^f} &\Leftrightarrow 2^{2^n \times 2} \equiv -1 \pmod{3^f} \Leftrightarrow \varphi(3^f) \mid 2 \times 2^n \\ &\Rightarrow 3^{f-1} \mid 2^n \Rightarrow \max f = n + 1 \end{aligned}$$

■ مثال ۵-۱۳

اگر  $p$  عددی اول باشد نشان دهید هر مقسوم علیه اول  $2^p + 1$  غیر از ۳، به صورت  $2kp + 1$  است.

حل.

$$2^p + 1 \equiv 0 \pmod{q} \Rightarrow 2^{2p} \equiv 1 \pmod{q} \Rightarrow \text{ord}_q 2 \mid 2p, \text{ord}_q 2 \mid q - 1$$

چون  $\text{ord}_q 2 \mid 2$  پس  $\text{ord}_q 2 \mid p$  و  $\text{ord}_q 2 = p$ . پس  $1 \mid q - 1$ ، یعنی  $q = kp + 1$ ، و لذا  $k$  باید زوج باشد. پس  $q = 2k'p + 1$ .

تمرین

۱. تمام  $n$ هایی را به دست آورید که  $\frac{2^n+1}{n^2} \in \mathbb{Z}$ .

۲. ثابت کنید اعداد  $1, \dots, p-1$  را می توان دور یک دایره چنان چید که به ازای هر سه عدد متوالی  $a, b, c$  و  $p \mid b^2 - ac$ .

۳. ثابت کنید مقسوم علیه های اول  $2^{2^n} + 1$  به صورت  $2^{n+1}k + 1$  می باشند ( $k \in \mathbb{N}$ ).

۴. ثابت کنید اگر  $n > 1$ ، آنگاه  $n \nmid 2^n - 1$ .

۵. ثابت کنید  $\text{ord}_m a^k = \frac{\text{ord}_m a}{(\text{ord}_m a, k)}$ .

۶. ثابت کنید  $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m, n)} - 1$ .

۷. اگر  $n_1, n_2, \dots, n_k$  عددهایی طبیعی باشند که

$$n_1 \mid 2^{n_1} - 1, n_2 \mid 2^{n_2} - 1, \dots, n_k \mid 2^{n_k} - 1$$

ثابت کنید  $n_1 = n_2 = \dots = n_k = 1$ .

۸. اگر  $k < p - 1$ ، ثابت کنید  $p \mid 1^k + 2^k + \dots + (p-1)^k$ .

۳-۵ اندیس

دیدیم که اگر  $g$  یک ریشه اولیه به هنگ  $m$  باشد، مجموعه  $\{1, g, g^2, \dots, g^{\varphi(m)-1}\}$  یک دستگاه مخفف مانده هاست. پس به ازای هر  $a$  که  $(a, m) = 1$ ، می توانیم به فردی،  $0 \leq i \leq \varphi(m) - 1$  وجود دارد که  $g^i \equiv a \pmod{m}$ ؛ این  $i$  را  $\text{ind}_g a$  یا به اختصار  $\text{ind } a$  گوئیم ("ind"، مخفف "index" به معنای اندیس است). صحت گزاره های صفحه بعد

به راحتی تحقیق می‌شود (البته توجه کنید که  $\text{ind}$  فقط برای اعداد متباین با  $m$  تعریف می‌شود).

$$1. \text{ind}(ab) \equiv \text{ind } a + \text{ind } b \pmod{\varphi(m)}$$

$$2. \text{ind } a^n \equiv n \text{ind } a \pmod{\varphi(m)}$$

$$3. \text{ind}_g a \equiv \text{ind}_g a \cdot \text{ind}_g g' \pmod{\varphi(m)}$$

مشاهده می‌شود که  $\text{ind}$  تشابه زیادی با  $\log$  دارد. کسانی که با نظریه گروه‌ها آشنایی دارند، می‌توانند تحقیق کنند که اگر  $n$  ریشه اولیه داشته باشد آنگاه گروه  $(\mathbb{Z}_n, +)$  تحت تابع  $\text{ind}$  با گروه دوری  $(\mathbb{Z}_n^*, \times)$  یکرینخت است ( $\mathbb{Z}_n^*$  مجموعه اعدادی است که از  $n$  کوچکتر و نسبت به  $n$  اول‌اند)، و این مشابه یکرینختی  $(\mathbb{R}, +)$  با  $(\mathbb{R}^+, \cdot)$  تحت تابع  $\log$  است.

لم.

اگر  $m$  ریشه اولیه داشته باشد و  $(a, m) = 1$ ، آنگاه معادله  $x^n \equiv a \pmod{m}$  جواب دارد اگر و فقط اگر  $(n, \varphi(m)) \mid \text{ind } a$ ؛ در این صورت این معادله تعداد  $(n, \varphi(m))$  جواب متمایز به هنگ  $m$  دارد.

اثبات. از طرفین اندیس می‌گیریم، به دست می‌آید

$$n \text{ind } x \equiv \text{ind } a \pmod{\varphi(m)}$$

این معادله جواب دارد اگر و فقط اگر  $(n, \varphi(m)) \mid \text{ind } a$ ، و در این صورت تعداد  $(n, \varphi(m))$  جواب متمایز برای  $x$  پیدا می‌شود، و در نتیجه تعداد  $(n, \varphi(m))$  جواب برای  $x$  پیدا می‌شود.

### ● قضیه ۵-۱۱

اگر  $m$  ریشه اولیه داشته باشد و  $(a, m) = 1$ ، آنگاه معادله  $x^n \equiv a \pmod{m}$  جواب دارد اگر و فقط اگر  $a^{\frac{\varphi(m)}{(n, \varphi(m))}} \equiv 1 \pmod{m}$ ؛ در این صورت این معادله تعداد  $(n, \varphi(m))$  جواب متمایز به هنگ  $m$  دارد.

اثبات. اگر و فقط اگر  $a^{\frac{\varphi(m)}{(n, \varphi(m))}} \equiv 1 \pmod{m}$

$$\frac{n}{(n, \varphi(m))} \text{ind } a \equiv \text{ind } 1 \pmod{\varphi(m)}$$

● و اگر و فقط اگر  $(n, \varphi(m)) \mid \text{ind } a$ ، پس بنا بر لم قبل قضیه ثابت می‌شود.

نتیجه. معادله  $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$  جواب دارد اگر و فقط اگر  $p$  به صورت  $4k + 1$  باشد.

### تمرین

۱. ثابت کنید اگر  $4k + 3$  عددی اول باشد مجموعه  $\{a, a + 1, \dots, a + 4k + 1\}$  را نمی‌توان به دو مجموعه افزار کرد که حاصل ضرب اعضای آنها مساوی باشد.

۲. فرض کنید  $(a, p) = 1$ ، و  $n$  را تعداد اعضای از مجموعه  $\{a, 2a, \dots, \frac{1}{p}(p-1)a\}$  بگیرید که باقیمانده تقسیم آنها بر  $p$ ، بین  $\frac{1}{p}(p+1)$  و  $p-1$  است. ثابت کنید معادله  $x^2 \equiv a \pmod{p}$  دارای جواب است اگر و تنها اگر  $n$  زوج باشد.

۳. ثابت کنید معادله  $x^2 \equiv 2 \pmod{p}$  دارای جواب است اگر و فقط اگر

$$p \equiv \pm 1 \pmod{8}$$

( $p$  عددی فرد و اول است).

۴. فرض کنید  $p$  عدد اولی است که  $p-1$  توانی از ۲ است. ثابت کنید عدد  $a$ ،  $(a, p) = 1$ ، ریشه اولیه به هنگ  $p$  است اگر و فقط اگر  $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$ .

۵. ثابت کنید معادله  $x^2 \equiv a \pmod{2^n}$ ،  $n > 2$ ، جواب دارد اگر و فقط اگر

$$a \equiv 1 \pmod{8}$$

( $a$  فرد است).



## نامساویهای هندسی ۱

| علامت‌گذاری                   |                 |
|-------------------------------|-----------------|
| زئوس مثلث و زوایای آن         | $A, B, C$       |
| اضلاع مثلث                    | $a, b, c$       |
| میانه‌ها                      | $m_a, m_b, m_c$ |
| ارتفاعها                      | $h_a, h_b, h_c$ |
| نیمسازها                      | $d_a, d_b, d_c$ |
| شعاع دایره محیطی              | $R$             |
| شعاع دایره محاطی داخلی        | $r$             |
| شعاعهای دایره‌های محاطی خارجی | $r_a, r_b, r_c$ |
| نصف محیط                      | $p$             |
| مساحت                         | $S$             |
| مرکز دایره محیطی              | $O$             |
| مرکز دایره محاطی داخلی        | $I$             |
| مرکز ارتفاعی                  | $H$             |
| محل تلاقی میانه‌ها            | $G$             |
| مراکز دایره محاطی خارجی       | $I_a, I_b, I_c$ |

▲ تعریف ۱-۶

$$M_r(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \left( \frac{x_1^r + x_2^r + \dots + x_n^r}{n} \right)^{1/r} & 0 < |r| < \infty \\ \sqrt[r]{x_1 x_2 \dots x_n} & r = 0 \\ \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} & r = -\infty \\ \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} & r = +\infty \end{cases}$$



▲ تعریف ۶-۲ (تعریف جمع و ضرب دوری)

یعنی  $\sum f(a, b, c)$

$$f(a, b, c) + f(b, c, a) + f(c, a, b)$$

یعنی  $\Pi f(a, b, c)$

$$f(a, b, c) \cdot f(b, c, a) \cdot f(c, a, b)$$

مثلاً برای مجموع اضلاع مثلث می‌نویسیم  $\sum a$  یا برای  $ab + bc + ca$  می‌نویسیم  $\sum ab$ . ▲

## ۱-۶ اتحادهای مهم

### ۱-۱-۶ مقدمه

در این فصل ما سعی می‌کنیم روابط مهم بین اجزای مثلث را بر حسب سه کمیت  $R$ ،  $r$  و  $p$  بیان کنیم؛ و در فصل بعد با بیان نامساویهایی مهم دربارهٔ این سه کمیت، نامساویهای مهمی برای تمام اجزای مثلث می‌توانیم به دست آوریم. چون اجزای مهم مثلث مثل اضلاع، میانه‌ها، ارتفاعات و ... سه‌گانه هستند (سه ضلع، سه میانه، و ... ) روش کلی ما در این بخش، یک معادله درجه سوم با ضرایبی که بر حسب  $R$ ،  $r$  و  $p$  است می‌باشد که سه کمیت مورد نظر، ریشه‌های آن باشند. یعنی

$$x^3 + f_1(R, r, p)x^2 + f_2(R, r, p)x + f_3(R, r, p) = 0$$

که ریشه‌های آن می‌توانند سه ضلع مثلث، سه میانه، سه ارتفاع، و ... باشند. از آنجا با استفاده از روابط ویت می‌توان عبارات متقارن اولیه، یعنی

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \sigma_1 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \sigma_2 \\ x_1x_2x_3 = \sigma_3 \end{cases} \quad (1-6)$$

را بر حسب  $R$ ،  $r$  و  $p$  پیدا کرد؛ و از آنجا که هر رابطه متقارن نسبت به  $x_1$ ،  $x_2$ ،  $x_3$  می‌توان به صورت ترکیبی از سه رابطه (۱-۶) بیان نمود، اتحادهای بسیاری را می‌توان ثابت کرد. برای نمونه

$$S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$$

را به ازای چند  $k$  اولیه در زیر حساب کرده‌ایم

$$S_1 = \sigma_1^1 - 2\sigma_2$$

$$S_2 = \sigma_1^2 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$$

$$S_3 = \sigma_1^3 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3$$

$$S_4 = \sigma_1^4 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 - 5\sigma_2\sigma_3$$

⋮

همچنین می توان رابطه های زیر را به دست آورد

$$S_{-1} = \frac{\sigma_1}{\sigma_1}$$

$$S_{-2} = \frac{\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2}$$

$$S_{-3} = \frac{\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2}{\sigma_1^3}$$

همچنین اگر

$$x_1 + x_2 + x_3 = a$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b$$

$$x_1x_2x_3 = c$$

آنگاه می توان نتیجه گرفت  $x_1, x_2, x_3$  ریشه های معادله زیر هستند

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$

تمرین

۱. رابطه بازگشتی زیر را برای  $S_k$  (با تعریف داده شده در متن) ثابت کنید

$$S_k = \sigma_1 S_{k-1} - \sigma_2 S_{k-2} + \sigma_3 S_{k-3}$$

۲. رابطه زیر را ثابت کنید

$$S_k = k \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = k} \frac{(-1)^{k-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3} (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 1)!}{\lambda_1! \lambda_2! \lambda_3!} \sigma_1^{\lambda_1} \sigma_2^{\lambda_2} \sigma_3^{\lambda_3}$$

(یعنی مجموع فوق روی تمام  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  های نامنفی زده می شود که

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = k$$

شود).

۳. اعداد حقیقی  $a, b, c$  در دو رابطه  $abc > 0$  و  $a + b + c > 0$  صدق می کنند. ثابت

کنید به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$

$$a^n + b^n + c^n > 0$$

۲-۱-۶ معادله مربوط به اضلاع

واضح است که  $a + b + c = 2p$  و چون  $S = pr$  و  $S = \frac{abc}{4R}$  پس

کافی است  $ab + ac + bc$  را بر حسب  $R, r$  بیان کنیم: اگر از دو رابطه مثلثی زیر استفاده



کنیم

$$p - a = r \cot \frac{\alpha}{2}$$

$$\cot \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$$

نتیجه می‌شود

$$ab + ac + bc = r^2 + p^2 + 4rR$$

به‌طور خلاصه سه رابطه مهم زیر را که باید به خاطر سپرد به‌دست آوردیم

$$a + b + c = 2p$$

$$ab + ac + bc = r^2 + p^2 + 4rR$$

$$abc = 4rRp$$

پس معادله‌ای که سه ضلع در آن صدق می‌کنند به‌صورت زیر است

$$x^2 - 2px^2 + (r^2 + p^2 + 4rR)x - 4rRp = 0$$

همچنین با استفاده از رابطه سینوسها،  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$  به‌دست می‌آید

$$\sin A + \sin B + \sin C = p/R$$

$$\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A = \frac{r^2 + p^2 + 4rR}{4R^2}$$

$$\sin A \sin B \sin C = \frac{rp}{4R^2}$$

حال به محاسبه چند عبارت متقارن برحسب  $r$ ،  $R$  و  $p$  می‌پردازیم (اثباتها ساده هستند):

$$\sum a^2 = 2(p^2 - r^2 - 4rR) \quad ۱.$$

$$\sum a^3 = 2p(p^2 - 3r^2 - 6rR) \quad ۲.$$

$$\Pi(a+b) = 2p(p^2 + r^2 + 2rR) \quad ۳.$$

$$\sum \frac{1}{a} = \frac{p^2 + r^2 + 4rR}{4rRp} \quad ۴.$$

$$\sum \frac{1}{bc} = \frac{1}{4rR} \quad ۵.$$

$$\sum \frac{a+b}{c} = \frac{p^2 + r^2 - 2rR}{4rR} \quad ۶.$$

$$\sum \frac{a}{p-a} = \frac{4R-2r}{r} \quad ۷.$$

$$\sum \frac{a^2}{p-a} = \frac{2p(R-r)}{r} \quad ۸.$$

تذکر. در روابط ۱ تا ۶ به‌جای  $a$ ،  $b$  و  $c$ ،  $2R \sin A$ ،  $2R \sin B$  و  $2R \sin C$  قرار دهید و

اتحاد مربوط را بنویسید.

۳-۱-۶ معادله‌ای که  $\cos A$ ،  $\cos B$  و  $\cos C$  ریشه‌های آن باشند. می‌دانیم

$$2R \sin A = a$$

همچنین

$$p - a = r \cotg \frac{A}{2} = r \sqrt{\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A}}$$

پس

$$2R \sqrt{1 - \cos^2 A} + r \sqrt{\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A}} = p$$

با ساده کردن نتیجه می‌شود

$$2R^2 \cos^2 A - 2R(R+r) \cos^2 A + (p^2 + r^2 - 2Rr) \cos A + (2R+r)^2 - p^2 = 0$$

با استفاده از رابطه بین ریشه‌ها نتیجه می‌شود

$$\sum \cos A = \frac{R+r}{R} \quad ۹$$

$$\sum \cos A \cos B = \frac{r^2 + p^2 - 2Rr}{2R^2} \quad ۱۰$$

$$\prod \cos A = \frac{p^2 - (2R+r)^2}{2R^2} \quad ۱۱$$

$$\sum \cos^2 A = \frac{2Rr^2 + 2Rr + r^2 - p^2}{2R^2} \quad ۱۲$$

$$\prod (\cos A + \cos B) = \frac{2Rr^2 + r^2 + p^2 r}{2R^2} \quad ۱۳$$

$$\sum \frac{1}{\cos A} = \frac{p^2 + r^2 - 2Rr}{2Rr} \quad ۱۴$$

$$\sum \frac{1}{\sin A} = \frac{p^2 + r^2 + 2Rr}{2pr} \quad ۱۵$$

$$\sum \frac{1}{\cos A \cos B} = \frac{2R}{r} \quad ۱۶$$

۴-۱-۶ معادله‌ای که  $\sin^2 \frac{A}{2}$ ،  $\sin^2 \frac{B}{2}$ ،  $\sin^2 \frac{C}{2}$  ریشه‌های آن هستند.

از آنجایی که  $\cos A = 1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2}$ ، با تبدیل  $x$  به  $1 - 2x$  در معادله مربوط به  $\cos$  معادله مورد نظر به صورت زیر به دست می‌آید

$$16R^2 x^3 - 8R(2R-r)x^2 + (p^2 + r^2 - 8Rr)x - r^2 = 0$$

از آنجا با استفاده از روابط بین ریشه‌ها به دست می‌آید

$$\sum \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{2R-r}{2R} \quad ۱۷$$

$$\sum \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} = \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{16R^2} \quad ۱۸$$

$$\Pi \sin^2 \frac{A}{4} = \frac{r^2}{16R^2} \Rightarrow \Pi \sin \frac{A}{4} = \frac{r}{4R} \quad .19$$

$$\sum \sin^2 \frac{A}{4} = \frac{4R^2 + r^2 - p^2}{16R^2} \quad .20$$

همچنین با استفاده از برابری بدیهی  $\cos^2 \frac{A}{4} = 1 - \sin^2 \frac{A}{4}$  می‌آید.

$$\sum \cos^2 \frac{A}{4} = \frac{4R+r}{4R} \quad .21$$

$$\sum \cos^2 \frac{A}{4} \cos^2 \frac{B}{4} = \frac{p^2 + (4R+r)^2}{16R^2} \quad .22$$

$$\sum \frac{1}{\cos^2 \frac{A}{4}} = \frac{p^2 + (4R+r)^2}{p^2} \quad .23$$

$$\Pi \cos^2 \frac{A}{4} = \frac{p^2}{16R^2} \Rightarrow \Pi \cos \frac{A}{4} = \frac{p}{4R} \quad .24$$

۵-۱-۶ معادله‌ای که  $\tan \frac{C}{4}$ ,  $\tan \frac{B}{4}$ ,  $\tan \frac{A}{4}$  ریشه‌های آن باشد.

$$px^2 - (4R+r)x^2 + px - r = 0$$

(اثبات به عهده خواننده).

از معادله فوق اتحادهای زیر نتیجه می‌شود

$$\sum \tan \frac{A}{4} = \frac{4R+r}{p} \quad .25$$

$$\Pi \tan \frac{A}{4} = \frac{r}{p} \quad .26$$

$$\sum \tan^2 \frac{A}{4} = \frac{(4R+r)^2 - 4p^2}{p^2} \quad .27$$

$$\Pi(\tan \frac{A}{4} + \tan \frac{B}{4}) = \frac{4R}{p} \quad .28$$

$$\sum \tan \frac{A}{4} \tan \frac{B}{4} = 1 \quad .29$$

$$\sum a \tan \frac{A}{4} = 2(4R-r) \quad .30$$

۶-۱-۶ معادله‌ای که  $r_a$ ,  $r_b$ ,  $r_c$  ریشه‌های آن هستند.

می‌دانیم

$$\frac{r_a}{r} = \frac{p}{p-a} \Rightarrow \frac{1}{r_a} = \frac{p-a}{pr}$$

پس می‌توان با استفاده از روابط بین  $a$ ,  $b$ ,  $c$  نتیجه گرفت

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r} \quad .31$$

$$\frac{1}{r_a r_b} + \frac{1}{r_b r_c} + \frac{1}{r_c r_a} = \frac{4R+r}{p^2 r} \quad .32$$

$$\frac{1}{r_a r_b r_c} = \frac{1}{p^2 r} \quad .33$$

پس معادله مورد نظر به صورت زیر است (چرا؟)

$$x^r - (4R + r)x^r + p^r x - p^r r = 0$$

بعضی روابط دیگر عبارت‌اند از:

$$\sum r_a = 4R + r \quad .34$$

$$\sum r_a^r = (4R + r)^r - 2p^r \quad .35$$

$$\sum r_a^r = (4R + r)^r - 12p^r R \quad .36$$

$$\Pi(r_a + r_b) = 4p^r R \quad .37$$

$$\sum \frac{r_a + r_b}{r_c} = \frac{4R - 2r}{r} \quad .38$$

۷-۱-۶ معادله‌ای که  $h_c$ ،  $h_b$ ،  $h_a$  ریشه‌های آن هستند.

$$2Rx^r - (p^r + r^r + 4Rr)x^r + 4p^r r x - 4p^r r^r = 0$$

که از آنجا نتیجه می‌شود

$$\sum h_a = \frac{1}{rR}(p^r + r^r + 4Rr) \quad .39$$

$$\Pi h_a = \frac{4p^r r^r}{R} \quad .40$$

$$\sum \frac{1}{h_a} = \frac{1}{r} \quad .41$$

$$\sum \frac{h_a + h_b}{h_c} = \frac{p^r + r^r - 2Rr}{2Rr} \quad .42$$

بعضی روابط ترکیبی عبارت‌اند از

$$\sum \frac{1}{r_a} = \sum \frac{1}{h_a} \quad .43$$

$$r \sum r_a r_b = \Pi h_a \quad .44$$

$$\sum \frac{a}{p-a} = \sum \frac{r_a + r_b}{r_c} \quad .45$$

$$\sum \frac{b+c}{a} = \sum \frac{h_b + h_c}{h_a} \quad .46$$

## ۲-۶ نامساویهای $R$ ، $r$ و $p$

در فصل قبل عبارات زیادی را بر حسب  $R$ ،  $r$  و  $p$  به دست آوردیم. حال در این فصل با بیان نامساویهای بین  $R$ ،  $r$  و  $p$  می‌توان نامساویهای بسیاری را ثابت کرد.

۶-۲-۱ نامساوی  $R$  و  $r$ 

بنا به فرمول اویلر  $OI^2 = R^2 - 2rR$  (اگر اثبات را ندیده‌اید، سعی کنید اثبات کنید.) از اینجا نتیجه می‌شود  $R \geq 2r$ . همچنین  $R = 2r$  اگر و فقط اگر مثلث، متساوی‌الاضلاع باشد. همچنین می‌توان ثابت کرد اگر  $R \geq 2r$  آنگاه مثلثی با شعاع دایره محیطی  $R$  و دایره محاطی داخلی  $r$  موجود خواهد بود. پس نامساوی ذکر شده، قویترین نامساوی است یعنی اگر  $R \geq f(r)$  آنگاه حتماً رابطه زیر برقرار است

$$R \geq 2r \geq f(r)$$

با استفاده از این نامساوی، از روابط ۷، ۸، ۹، ۱۶، ۱۷، ۱۹، ۲۱ و ۳۸ نامساویهای زیر نتیجه می‌شود

$$\sum \frac{a}{p-a} \geq 6 \quad ۰.۷'$$

$$\sum \frac{a^2}{p-a} \geq 2(a+b+c) \quad ۰.۸'$$

$$\sum \cos A \leq \frac{r}{R} \quad ۰.۹'$$

$$\sum \frac{1}{\cos A \cos B} \geq 4 \quad ۰.۱۶'$$

$$\sum \sin^2 \frac{A}{4} \geq \frac{r}{R} \quad ۰.۱۷'$$

$$\pi \sin \frac{A}{4} \leq \frac{1}{R} \quad ۰.۱۹'$$

$$\sum \cos^2 \frac{A}{4} \leq \frac{1}{4} \quad ۰.۲۱'$$

$$\sum \frac{r_a + r_b}{r_c} \geq 6 \quad ۰.۳۸'$$

۶-۲-۲ رابطه مهم بین  $R$ ،  $r$  و  $p$ 

از آنجایی که  $\frac{1}{4r^2}(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$  عبارتی متقارن برحسب  $a$ ،  $b$  و  $c$  است. پس می‌توان آن را به صورت ترکیبی از عبارات متقارن اولیه یا برحسب  $p$ ،  $r$ ،  $R$  نمایش داد که پس از ساده کردن عبارت زیر به دست می‌آید

$$-p^2 + 2(2R^2 + 10Rr - r^2)p^2 - r(4R + r)^2$$

از آنجایی که عبارت اول همواره مثبت بود پس با استفاده از  $\Delta$  برای معادله درجه دوم نامساوی زیر نتیجه می‌شود

$$2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr} \leq p^2 \leq$$

$$2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}$$

یکی از دو علامت نامساوی، تساوی می‌شود اگر و فقط اگر مثلث، متساوی‌الساقین باشد و هر دو تساوی می‌شود اگر و فقط اگر مثلث، متساوی‌الاضلاع باشد.

اگر طرف چپ را به  $f(r, R)$  و طرف راست را به  $F(r, R)$  نمایش دهیم به رابطه خلاصه شده زیر می‌رسیم

$$f(r, R) \leq p^r \leq F(r, R) \quad (*)$$

ثابت می‌شود نامساوی فوق قویترین نامساوی برای  $p^r$  است؛ یعنی اگر  $G(r, R)$  و  $g(r, R)$  توابعی حقیقی و همگن باشند که

$$g(r, R) \leq p^r \leq G(r, R)$$

آنگاه می‌توان رابطه زیر را نوشت

$$g(r, R) \leq f(r, R) \leq p^r \leq F(r, R) \leq G(r, R)$$

یعنی با اطمینان خوبی می‌توانیم بگوییم نامساوی که با استفاده از نامساوی (\*) حل نشود، غلط است! (البته نامساوی که بر حسب  $p^r$ ،  $R$  و  $r$  باشد).

نامساوی (\*) خیلی قوی است. حال بعضی حالت‌های ضعیفتر را بررسی می‌کنیم

$$49. \quad \sqrt{3}p \leq 4R + r$$

$$48. \quad 16Rr - 5r^2 \leq p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$$

$$49. \quad p \leq 2R + (3\sqrt{3} - 4)r$$

$$50. \quad 2R^2 + 8Rr + 3r^2 \leq p^2 \leq 5R^2 + 4Rr - r^2$$

حال سعی می‌کنیم با استفاده از این نامساویها، نامساویهایی از اتحادهای بخش ۶-۱ به دست آوریم (برای راحتی از نامساوی نسبتاً قوی زیر استفاده می‌کنیم)

$$2R^2 + 8Rr + 3r^2 \leq p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$$

$$4(R^2 + 2Rr + r^2) \leq \sum a^2 \leq 4(2R^2 + r^2) \quad .1'$$

$$4Rp(R+r) \leq \sum a^2 \leq 4Rp(2R-r) \quad .2'$$

$$\sum \frac{a+b}{c} \leq \frac{R^2 + rR + 2r^2}{Rr}, \sum \frac{a+b}{c} \geq \frac{R^2 + 2Rr + 2r^2}{Rr} \quad .6'$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{R+r}{R} \right)^2 - 1 \leq \Pi \cos A \leq \frac{r^2}{2R^2} \leq \frac{1}{\lambda} \quad .11'$$

$$.12'$$

$$\frac{3}{4} \leq \frac{R^2 - r^2}{R^2} \leq \sum \cos^2 A \leq \frac{2R^2 - 2Rr - r^2}{R^2} \leq 3 \times \frac{(R-r)^2}{R^2} < 3 \quad .14'$$

$$10. \quad \frac{r}{R} \leq \frac{R^2 + 2r^2 + 2Rr}{Rr} \leq \sum \frac{1}{\cos A} \leq \frac{2R^2 + 2r^2 + Rr}{Rr} \leq 3 \frac{R}{r}$$

$$\frac{1}{\lambda} \leq \frac{1}{\lambda} + \frac{r^2}{4Rr} \leq \sum \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \leq \frac{R^2 + r^2 - Rr}{4Rr} \leq \frac{1}{4}$$

تمرین

۱. نامساویهای زیر را ثابت کنید

$$\begin{aligned} \frac{3r(4R+r)}{(7R-5r)^2} &\leq \frac{r}{2R-r} \leq \frac{3r}{4R+r} \leq \frac{r(4R+r)}{(2R-r)(2R+5r)} \\ &\leq \frac{r(16R+3r)}{(4R-r)(4R+7r)} \leq \frac{r}{R+r} \leq \frac{r(16R-5r)}{(4R+r)^2} \\ &\leq \frac{4r(12R^2 - 11Rr + r^2)}{(3R-2r)(4R+r)^2} \leq \left(\frac{p}{4R+r}\right)^2 \leq \frac{R}{2(2R-r)} \\ &\leq \frac{4R^2 + 4Rr + 3r^2}{(4R+r)^2} \leq \frac{1}{3} \leq \frac{4R+r}{27r} \leq \frac{R^2}{4r(R+r)}! \end{aligned}$$

۲. نتیجه زیر را که قویتر از  $R \geq 2r$  است، ثابت کنید.

$$\frac{R}{r} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

نقاط مهم در مثلث و روابط طولی آنها

حال به محاسبه فاصله بین نقاط مهم یعنی  $O, I, H$  و  $G$  می پردازیم. چون بعضی اوقات این فاصله ها صفر می شود، می توانیم نامساویهای نسبتاً خوبی به دست آوریم

$$OI^2 = R^2 - 2Rr \quad ۱.$$

$$OG^2 = R^2 - \frac{1}{4} \sum a^2 = \frac{1}{4}(9R^2 + 8Rr + 2r^2 - 2p^2) \quad ۲.$$

$$OH^2 = 9R^2 - \sum a^2 = 9R^2 + 8Rr + 2r^2 - 2p^2 = 9OG^2 \quad ۳.$$

$$GI^2 = \frac{1}{4}(p^2 + 5r^2 - 16Rr) \quad ۴.$$

$$HI^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2 \quad ۵.$$

$$GH^2 = 4OG^2 = \frac{1}{4}(9R^2 + 8Rr + 2r^2 - 2p^2) \quad ۶.$$

نامساوی اردیش - موردل

این نامساوی با اثباتی بسیار جالب که از آن می اوریم، هر چند چندان سخت نیست، ولی چند سال حل نشده بود. صورت کامل قضیه به صورت صفحه بعد است

● قضیه ۱-۶

P نقطه‌ای داخل مثلث ABC است. آنگاه

$$PA + PB + PC \geq 2(PH_1 + PH_2 + PH_3) \quad ۱$$

$$PA \cdot PB \cdot PC \geq 8PH_1 \cdot PH_2 \cdot PH_3 \quad ۲$$

اثبات قضیه. ابتدا لم زیر را ثابت می‌کنیم

لم.

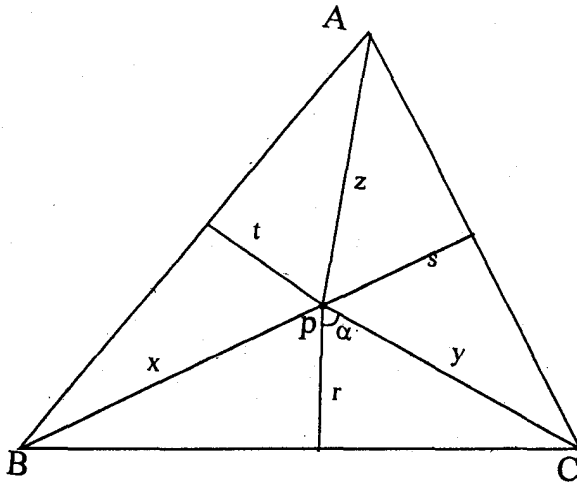
اگر  $x, y, z$  و  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  زوایای مثلث باشند، آنگاه

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy \cos \alpha + 2yz \cos \beta + 2zx \cos \gamma$$

اثبات لم.

$$(x - y \cos \alpha - z \cos \gamma)^2 + (y \sin \alpha - z \sin \gamma)^2 \geq 0$$

اثبات قضیه (قسمت اول). طول نیمسازهای  $BPC$  و  $CPA$  و  $APB$  را به ترتیب  $r$



شکل ۱-۶

s و t می‌نامیم

$$2S_{PBC} = xy \sin(2\alpha) = yr \sin \alpha + xr \sin \alpha$$

$$\Rightarrow 2xy \cos \alpha = (y + x)r \geq 2\sqrt{xy} \cdot r$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{xy} \cos \alpha \geq 2r$$



$$(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{z})^2 \geq 2\sqrt{xy} \cos \alpha + 2\sqrt{yz} \cos \beta + 2\sqrt{zx} \cos \gamma$$

$$\geq 2r + 2s + 2t$$

$$\Rightarrow x + y + z \geq 2(r + s + t) \geq 2(PH_1 + PH_2 + PH_3)$$

اثبات قضیه (قسمت دوم). (اینجا  $r, s, t$  فاصله  $p$  از سه ضلع هستند).

$$h_a \leq z + r \Rightarrow ah_a \leq az + ar$$

$$\Rightarrow ra + sb + tc \leq az + ar \Rightarrow sb + tc \leq az$$

$$\left. \begin{aligned} az &\geq 2\sqrt{stbc} \\ bx &\geq 2\sqrt{trac} \\ cy &\geq 2\sqrt{rsba} \end{aligned} \right\} \Rightarrow abcxyz \geq 8rstabc \Rightarrow xyz \geq 8rst$$

تمرین

۱. ثابت کنید  $t > 0$  آنگاه

$$\left(\frac{r}{R}\right)^t + \left(\frac{p}{R}\right)^t \leq \frac{1 + 3^{2t/2}}{2^t}$$

۲. ثابت کنید  $\frac{R}{r} + \frac{r}{R} \geq \frac{6}{5}$ .

۳. ثابت کنید ماکزیمم  $A, B, C, D$  و  $E$  که نامساویهای زیر همواره درست باشند

$$\begin{aligned} &\leq \frac{Rr - 2r^2}{1} \leq \frac{p^2 - 2\sqrt{Rr}}{A} \leq \frac{2p^2 - 2\sqrt{Rr}}{B} \\ &\leq \frac{R^2 - 2Rr}{C} \leq \frac{R^2 - 2r^2}{D} \leq \frac{2\sqrt{Rr} - 2p^2}{E} \end{aligned}$$

به قرار زیر است

$$A = 16, \quad B = 5, \quad C = D = \frac{5}{8}, \quad E = \frac{20 + 5\sqrt{17}}{8}$$

تمرینهای تکمیلی

۱. اگر  $I$  محل برخورد نیمسازهای مثلث  $ABC$  باشد و  $A', B', C'$  محل برخورد امتداد نیمساز با دایره محیطی مثلث، ثابت کنید

$$IA' + IB' + IC' \geq IA + IB + IC$$

۲. نقطه  $P$  داخل مثلث  $ABC$  مفروض است. ثابت کنید دستکم یکی از سه زاویه  $PAB, PCA$  و  $PBC$  از  $30^\circ$  بیشتر نیست.

۳. اگر  $h_a, h_b, h_c$  ارتفاعات مثلث  $ABC$  باشند و  $R$  و  $r$  شعاع دایره محیطی و محاطی باشند، ثابت کنید

$$h_a + h_b + h_c \leq 3(R + r)$$

۴. اگر  $P$  نقطه‌ای داخل مثلث و  $R_1, R_2, R_3$  فواصل از رئوس و  $r_1, r_2, r_3$  فواصل از اضلاع باشند، ثابت کنید

$$R_1^2 \sin^2 \alpha + R_2^2 \sin^2 \beta + R_3^2 \sin^2 \gamma \leq 3(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) \quad \text{الف)}$$

$$\sum R_1(r_1 + r_2) \geq \sum (r_1 + r_2)(r_1 + r_2) \quad \text{ب)}$$

$$\sum (R_1 + R_2)(R_1 + R_2) \geq 4 \sum (r_1 + r_2)(r_1 + r_2) \quad \text{ج)}$$

$$R_1 \geq r_1 \frac{a}{b} + r_2 \frac{b}{a} \quad \text{د)}$$

$$R_2 \geq r_1 \frac{c}{b} + r_2 \frac{a}{b}$$

$$R_3 \geq r_1 \frac{b}{c} + r_2 \frac{a}{c}$$

$$\sum R_i^2 \geq 4 \sum r_i^2 \quad \text{ه)}$$

$$\sum \frac{r_1 + r_2}{R_1} \geq 3 \quad \text{و)}$$

۵. نشان دهید

$$PA \cdot PB \cdot PC \geq (PH_1 + PH_2)(PH_2 + PH_3)(PH_3 + PH_1)$$



## نامساویهای هندسی ۲

### ۱-۷ نامساویهای مهم

با مسأله‌ای شروع می‌کنیم:  
ثابت کنید در هر مثلث  $ABC$  داریم

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

اثبات. تابع  $F(x) = \sin(x)$  روی  $[0, \pi]$  محدب است پس طبق قضیه یسن داریم

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq 3 \sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

بعضی مواقع مسأله به این راحتی حل نمی‌شود بلکه بحثهایی لازم است. به‌عنوان مثال:  
ثابت کنید در هر مثلث داریم

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

اثبات. تابع  $F(x) = \cos(x)$  روی  $[0, \frac{\pi}{3}]$  محدب است پس طبق قضیه یسن اگر  
زوایای مثلث حاده باشند داریم

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq 3 \cos\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = \frac{3}{2}$$

حال فرض کنید یکی از زوایای مثلث مثلاً  $C$  منفرجه باشد، پس  $A$  و  $B$  حاده‌اند و لذا

$$\cos A + \cos B \leq 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \cos A + \cos B + \cos C \leq 2 \cos \left( \frac{A+B}{2} \right) - \cos(A+B)$$

$$= 2 \cos \left( \frac{A+B}{2} \right) - 2 \cos^2 \left( \frac{A+B}{2} \right) + 1 \leq \frac{3}{2}$$

از چنین نامساویهایی در حل نامساویهای مربوط به مثلث استفاده می‌شود.

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad .1$$

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} \quad .2$$

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3} \quad .3$$

$$\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3} \quad .4$$

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8} \quad .5$$

$$\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad .6$$

$$\sin A \sin B \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad .7$$

$$\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8} \quad .8$$

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq 2\sqrt{3} \quad .9$$

$$\cot(A/2) + \cot(B/2) + \cot(C/2) \geq 3\sqrt{3} \quad .10$$

$$\sin(A/2) + \sin(B/2) + \sin(C/2) \leq \frac{3}{2} \quad .11$$

$$\cos(A/2) + \cos(B/2) + \cos(C/2) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad .12$$

$$\tan(A/2) + \tan(B/2) + \tan(C/2) \geq \sqrt{3} \quad .13$$

$$\cot(A/2) + \cot(B/2) + \cot(C/2) \geq 3\sqrt{3} \quad .14$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4} \quad .15$$

$$\tan^2(A/2) + \tan^2(B/2) + \tan^2(C/2) \geq 1 \quad .16$$

$$\tan^2 2A + \tan^2 2B + \tan^2 2C \geq 6 \quad .17$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{5}{4} \quad .18$$

۱۹. ثابت کنید اگر  $\alpha + \beta + \gamma = 45^\circ$  و  $|\alpha|, |\beta|, |\gamma| \leq 45^\circ$  در این صورت

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

## ۲-۷ اتحادهای مهم

با مسأله‌ای از مسائل المپیاد بین‌المللی ریاضی (که راه‌حل‌های مختلفی دارد) شروع می‌کنیم: ثابت کنید اگر  $a, b$  و  $c$  اضلاع مثلثی و  $S$  مساحت آن باشد داریم

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

حل. توجه کنید که اتحاد زیر برقرار است

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4S(\cot A + \cot B + \cot C)$$

زیرا

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C = \frac{4S}{\sin C} \cos C = 4S \cot C$$

و به همین ترتیب بقیه عبارات مشابه با عبارت اخیر به دست می‌آیند و با جمع بستن آنها اتحاد اول نتیجه می‌شود. حال با استفاده از رابطه ۴ در بخش قبل داریم

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4S(\cot(A/2) + \cot(B/2) + \cot(C/2)) \geq 4S \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}S$$

اتجاهای مربوط به مثلث که در زیر می‌آیند در اثبات نامساویها کاربرد زیادی دارند.

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4S(\cot A + \cot B + \cot C) \quad ۱.$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{r}{R} + 1 \quad ۲.$$

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{p}{R} \quad ۳.$$

$$\tan A + \tan B + \tan C = \frac{S}{rR \cos A \cos B \cos C} \quad ۴.$$

$$r = (p - a) \tan A/2 \quad ۵.$$

$$r_a = p \tan A/2 \quad ۶.$$

$$r_a + r_b + r_c - r = 2R \quad ۷.$$

$$\tan(A/2) + \tan(B/2) + \tan(C/2) = \frac{r+R}{p} \quad ۸.$$

$$\cot(A/2) + \cot(B/2) + \cot(C/2) = p/r \quad ۹.$$

$$d_a = \frac{bc}{b+c} \cos\left(\frac{A}{2}\right) \quad (d_a \text{ نیمساز مربوط به زاویه } A) \quad ۱۰.$$

$$4S^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4 \quad ۱۱.$$

$$a \cdot IA^2 + b \cdot IB^2 + c \cdot IC^2 = abc \quad (\text{I مرکز دایره محاطی مثلث است}) \quad ۱۲.$$

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \quad ۱۳.$$

$$a/\sin^2(A/2) + b/\sin^2(B/2) + c/\sin^2(C/2) = \frac{4pR}{r} \quad ۱۴.$$

$$abc = 4prR \quad ۱۵.$$

$$ab + ac + bc = p^2 + r^2 + 4rR \quad ۱۶.$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 4rR \quad ۱۷.$$

$$\frac{a^2}{r_b^2} + \frac{b^2}{r_c^2} + \frac{c^2}{r_a^2} = 4r(r + R) \quad ۱۸.$$

$$\cos A \cos B \cos C = \frac{p^2 - r^2 - 4rR - 4R^2}{4R^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R^2} - 1 \quad ۱۹.$$

$$\sin^2(A/2) + \sin^2(B/2) + \sin^2(C/2) = 1 - \frac{r}{R} \quad ۲۰.$$

$$\tan(A/2) \tan(B/2) + \tan(B/2) \tan(C/2) + \tan(A/2) \tan(C/2) = 1 \quad ۲۱.$$

$$a \tan(A/2) + b \tan(B/2) + c \tan(C/2) = 2(2R - r) \quad ۲۲.$$

$$\tan^2(A/2) + \tan^2(B/2) + \tan^2(C/2) = \frac{(2R+r)^2 - p^2}{p^2} \quad ۲۳.$$

## ۳-۷ مرکز نقاط

حال اندکی بحث را عوض می‌کنیم و درباره مرکز نقاط صحبت می‌کنیم؛ بحثی که کاربردهای فراوانی دارد و در زمینه نامساویها نیز یک استفاده خیلی مهم از آن خواهیم کرد. فرض کنید  $P_1, \dots, P_n$  نقاطی در فضا باشند و  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  اعداد حقیقی که مجموعشان صفر نیست در این صورت نقطه منحصر به فردی چون  $M$  موجود است که

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{MP}_i = \vec{0}$$

(ثابت کنید).  $M$  را مرکز نقاط  $P_1, \dots, P_n$  به ضرایب  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  می‌نامیم.

## ■ مثال ۱-۷

■ اگر  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  مساوی باشند  $M$  مرکز ثقل نقاط  $P_1, \dots, P_n$  خواهد شد.

## ■ مثال ۲-۷

■ اگر  $P_1 = A$  و  $P_2 = B$  و  $P_2 = C$  رئوس مثلثی باشند، در این صورت مرکز نقاط  $A, B, C$  وابسته به  $a, b, c$  (طول اضلاع متناظر)، مرکز دایره محاطی مثلث  $ABC$  خواهد شد.

## ■ مثال ۳-۷

■ اگر  $A, B, C$  رئوس مثلثی باشند، مرکز نقاط  $A, B, C$  وابسته به  $\sin 2A, \sin 2B, \sin 2C$  مرکز دایره محیطی مثلث  $ABC$  خواهد شد.

## ■ مثال ۴-۷

■ اگر  $A, B, C$  رئوس مثلثی باشند، مرکز نقاط  $A, B, C$  وابسته به  $\tan A, \tan B, \tan C$ ، مرکز ارتفاعی مثلث خواهد شد.

## ■ مثال ۵-۷

■ اگر  $M$  مرکز نقاط  $P_1, \dots, P_n$  وابسته به ضرایب  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  باشد، در این صورت برای هر نقطه  $O$  خواهیم داشت

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{OP}_i = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \vec{OM}$$

(ثابت کنید).

## ■ مثال ۶-۷

■ یک رابطه مهم در زمینه فوق وجود دارد که از آن در اثبات چند نامساوی مهم استفاده خواهیم

کرد. فرض کنید  $M$  مرکز نقاط  $\{P_i\}_{i=1}^n$  وابسته به ضرایب  $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$  باشد. در این صورت رابطه زیر برقرار است

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{AP_i}^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{MP_i}^2 + \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) \overline{AM}^2$$

( $A$  نقطه دلخواهی است) یا اگر تعریف کنیم

$$F(X) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{XP_i}^2$$

در این صورت

$$F(A) = F(M) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overline{MA}^2$$

(ثابت کنید). توجه کنید که  $F(M)$  مقدار ثابتی است و در نتیجه  $F(A)$  تنها به فاصله  $A$  از  $M$  بستگی دارد. در ضمن توجه کنید که:

■ مثال ۷-۷

■  $F(A) \geq F(M)$  یا مجموع  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{AP_i}^2$  در نقطه  $M$  به مینیموم خود می‌رسد.

■ مثال ۸-۷

نقطه  $P$  را در صفحه مثلث  $ABC$  پیدا کنید که  $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$  در آن مینیموم شود. (جواب: مرکز ثقل مثلث.)

رابطه بالا در محاسبه فواصل نقاط مشخص کاربرد دارد.

■ مثال ۹-۷

اگر  $G$  مرکز ثقل نقاط  $\{P_i\}_{i=1}^n$  باشد، در این صورت فاصله نقطه دلخواه  $A$  از  $G$  را با داشتن فواصل  $A$  از  $P_i$  ها می‌توان به دست آورد به عبارت دیگر

$$\overline{GA}^2 = \sum_{i=1}^n \overline{AP_i}^2 - \sum_{i=1}^n \overline{P_iG}^2$$

■ که کاربردهای دیگری نیز در هندسه دارد.

■ مثال ۱۰-۷

ثابت کنید مکان هندسی نقاطی در صفحه مثل  $P$  که مجموع مربعات فواصل آن از رئوس یک مثلث مقداری ثابت است یک نقطه، یک دایره و یا تهی است. جواب خود را تشریح کنید.

## ■ مثال ۷-۱۱

مجموعه همه نقاطی مثل  $M$  از صفحه را پیدا کنید که  $a \cdot \overline{MA} + b \cdot \overline{MB} + c \cdot \overline{MC} = abc$  با این شرط که  $a, b$  و  $c$  اضلاع مثلث  $A, B$  و  $C$  رؤس متناظر باشند.

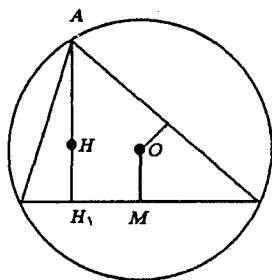
■ حال از بحثهای قبلی در اثبات چند نامساوی استفاده می‌کنیم. ابتدا مسائل زیر را حل کنید:

$$1. \quad \overline{IA} + \overline{IB} + \overline{IC} = 3r^2 - p^2 \quad (\text{است } I \text{ مرکز دایره محاطی است})$$

$$2. \quad \overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4} = \frac{2p^2 - 2r^2 - 4rR}{4} \quad (\text{است } G \text{ مرکز ثقل مثلث است})$$

۳. اگر  $H$  مرکز ارتفاعی و  $O$  مرکز دایره محیطی باشد، ثابت کنید:

$$2OM = AH$$



شکل ۷-۱

۴. ثابت کنید  $OM = R \cos A$  و نتیجه بگیرید  $AH = 2R \cos A$ .

۵. ثابت کنید  $aHA + bHB + cHC = 2R^2(a \cos A + b \cos B + c \cos C)$

حال به ادامه بحث می‌پردازیم. طبق توضیحات قبلی:

$$a\overline{AH} + b\overline{BH} + c\overline{CH} = a\overline{AI} + b\overline{BI} + c\overline{CI} + (a+b+c)\overline{HI}$$

$$\Rightarrow 2R^2(a \cos A + b \cos B + c \cos C) = abc + (a+b+c)\overline{HI}$$

$$\Rightarrow 2R^2 \left[ a \left( 1 - \frac{a^2}{4R^2} \right) + \dots \right] = abc + (a+b+c)\overline{HI}$$

$$\Rightarrow 2R^2(2p) - (a^2 + b^2 + c^2) = 4prR + 2p\overline{HI}$$

$$\Rightarrow 4pR^2 - [(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) + 3abc] =$$

$$4prR + 2p\overline{HI}$$

$$\Rightarrow 4pR^2 - [2p(2p^2 - 2r^2 - 4rR) - (p^2 + r^2 + 4rR) + 12prR] =$$

$$4prR + 2p\overline{HI}$$



پس از ساده کردن:

$$\overline{IH}^r = 4R^r + 3r^r + 4rR - p^r \quad ۶$$

به روشی مشابه ثابت کنید

$$\overline{IG}^r = \frac{p^r + 5r^r - 16rR}{4} \quad ۷$$

۸

$$\overline{OH}^r = 9R^r - (a^r + b^r + c^r)$$

$$\overline{OG}^r = \frac{\overline{OH}^r}{9}$$

$$\overline{GH}^r = \frac{4}{9}\overline{OH}^r$$

$$\overline{IO}^r = R^r - 2rR$$

اولین نتیجه‌ای که از مباحث فوق گرفته می‌شود، دو نامساوی مهم در مثلث است:

$$p^r \leq 3r^r + 4rR + 4R^r \quad ۹$$

$$p^r \geq 16rR - 5r^r \quad ۱۰$$

برای پی بردن به اهمیت روابط (۹) و (۱۰) توجه کنید که در هر مثلث داریم

$$\begin{cases} a + b + c = 2p & (۱^*) \\ ab + ac + bc = p^r + r^r + 4rR & (۲^*) \\ abc = 4prR & (۳^*) \end{cases}$$

یا به عبارتی  $a, b, c$  ریشه‌های معادله درجه سوم زیر هستند:

$$x^r - 2px^r + (p^r + r^r + 4rR)x - 4prR = 0$$

به عبارات  $۱^*$ ,  $۲^*$ ,  $۳^*$  عبارات متقارن اولیه  $a, b, c$  گفته می‌شود. طبق قضیه‌ای در جبر هر عبارت متقارن بر حسب  $a, b, c$  را می‌توان به صورت چند جمله‌ای از عبارات متقارن اولیه  $a, b, c$  نوشت و لذا طبق روابط بالا بر حسب چند جمله‌ای از عبارات متقارن اولیه خواهد بود. هرگاه نامساوی‌ای به شکل  $\phi(a, b, c) \geq 0$  داده شد،  $\phi$  را به صورت چندجمله‌ای از  $R, p, r$  بنویسید و از (۹) و (۱۰) استفاده کنید.

$$ab + ac + bc \leq 4(r + R)^r \quad \text{داریم مثلث داریم}$$

اثبات.

$$p^r + r^r + 4rR \leq 4(r^r + R^r + 2rR) \Rightarrow p^r \leq 4R^r + 3r^r + 4rR$$

که بنابر (۹) درست است. (سعی کنید نامساوی را مستقیماً ثابت کنید)

■ مثال ۷-۱۲

ثابت کنید در هر مثلث داریم  $h_a + h_b + h_c \leq 3(r + R)$   
اثبات.

$$\begin{aligned} h_a + h_b + h_c &= \frac{2S}{a} = \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c} = \frac{2S(ab + ac + bc)}{abc} \\ &= \frac{2pr(p^r + r^r + 4rR)}{4prR} = \frac{p^r + r^r + 4rR}{2R} \end{aligned}$$

نامساوی عبارت است از

$$\frac{p^r + r^r + 4rR}{2R} \stackrel{?}{\leq} 3(r + R)$$

در نتیجه

$$p^r \leq 2rR + 6R^r - r^r$$

ولی طبق (۹) کافی است ثابت کنیم

$$3r^r + 4rR + 4R^r \leq 2rR + 6R^r - r^r$$

یا معادلاً

$$2\left(\frac{r}{R}\right)^r - \left(\frac{r}{R}\right) - 1 \leq 0$$

ولی چندجمله‌ای  $2x^r - x - 1$  برای  $1/2 < x \leq 1$  همواره منفی است و می‌دانیم  $0 < r/R \leq 1/2$  در نتیجه حکم ثابت می‌شود [مسئله حل شده زیرا نامساوی داده شده از (۹) ضعیفتر بود].

حال شما نامساویهای زیر را ثابت کنید:

$$1. \quad h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c \leq r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c$$

$$2. \quad \cos A \cos B \cos C \leq \frac{r^r}{4R^r}$$

$$3. \quad \frac{r_a}{h_a} + \frac{r_b}{h_b} + \frac{r_c}{h_c} \geq 3$$

$$4. \quad (a + b + c)^2 \leq 5(a^2 b + b^2 a + a^2 c + c^2 a + b^2 c + c^2 b) - 3abc$$

$$5. \quad \frac{abc}{r} \geq \frac{a^r}{r_a} + \frac{b^r}{r_b} + \frac{c^r}{r_c}$$

$$6. \quad \sum \frac{1}{(p-a)^2} \geq \frac{1}{r^2}$$

$$7. \quad a^r + b^r + c^r - 2ab - 2ac - 2bc + 18 \frac{abc}{a+b+c} \geq 4\sqrt{3}S$$

۸. ثابت کنید در هر مثلث، مثلث  $HIG$  منفرج‌الزاویه است.

$$9. \quad \sum_{A,B} \sin(A/2) \cdot \sin(B/2) \leq \frac{a}{b} + \frac{r}{4R}$$

$$10. \quad 2ab + 2bc + 2ac - a^2 - b^2 - c^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

$$11. \quad 4R + r \geq p\sqrt{3}$$

$$12. \quad 9 \leq (a + b + c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \leq \frac{18}{\delta} + \frac{(a+b+c)^2}{\delta abc}$$

$$h_a + h_b + h_c \leq \sqrt{3}p \quad ۱۳$$

۱۴. ثابت کنید در مثلث  $ABC$ :

$$\begin{cases} A > 90^\circ \Rightarrow r_a > 2R + r > p \\ A = 90^\circ \Rightarrow r_a = 2R + r = p \\ A < 90^\circ \Rightarrow r_a < 2R + r < p \end{cases}$$

(طرف دوم این نامساویها قویتر از نامساوی ذکر شده در متن است ولی عمومی نیست).

۱۵. فرض کنیم دنباله  $\Delta_n$  از مثلثها داده شده باشد.  $(\Delta_n = A_n B_n C_n)$  می‌گوییم مثلث متساوی‌الاضلاع  $\Delta_n$  اگر  $n \rightarrow \infty$

$$(B_n)_{n \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{\pi}{3} \quad (A_n)_{n \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{\pi}{3}$$

$$(C_n)_{n \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{\pi}{3}$$

ثابت کنید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{O_n H_n}{O_n I_n} = \sqrt{2}$$

(که در آن  $O_n, H_n, I_n$  به ترتیب مرکز دایره محیطی، مرکز ارتفاعی و مرکز دایره محاطی مثلث  $\Delta_n$  می‌باشند).

یادداشت

حال که در حل نامساویهای مثلث تا حدودی ورزیده شده‌اید می‌توانید از این ورزیدگی در حل نامساویهای عادی استفاده کنید. توجه کنید که نامساویهایی که اضلاع یک مثلث را محدود می‌کنند عبارتند از:

$$a + b - c \geq 0 \quad p - a \geq 0$$

$$b + c - a \geq 0 \quad p - b \geq 0$$

$$c + a - b \geq 0 \quad p - c \geq 0$$

یعنی  $p - a$  و  $p - b$  و  $p - c$  می‌توانند هر سه عدد حقیقی مثبتی باشند، پس می‌توان با تغییر

$$x \rightarrow p - a \quad y \rightarrow p - b \quad t \rightarrow p - c$$

نامساویهای مربوط به  $x, y, z$  حقیقی مثبت را به نامساوی برحسب اضلاع مثلثی تبدیل کرد.

■ مثال ۷-۱۳

ثابت کنید به ازای  $x, y, z > 0$  داریم

$$y^2(x + z - y) + x^2(y + z - x) + z^2(x + y - z) \leq 3xyz$$

حل.

$$(p-b)^2(p-a+p-c+b-p) + (p-a)^2(p-b+p-c+a-p) \\ + (p-c)^2(p-a+p-b+c-p) \leq 3(p-a)(p-b)(p-c)$$

پس از ساده کردن:

$$2r(2r-R) \stackrel{?}{\leq} 0$$

که درستی آن بدیهی است.

■ مثال ۷-۱۴

ثابت کنید به ازای  $x, y, z > 0$  داریم:

$$x^2y + y^2x + x^2z + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y \geq$$

$$\sqrt{3}(x+y+z)^{2/3}(xyz)^{1/3} - 3xyz \geq 6xyz$$

■ مثال ۷-۱۵

ثابت کنید برای  $x, y, z \geq 0$  داریم:

$$(x+y+z)^2 + 9xyz \geq 4(x+y+z)(xy+yz+zx)$$

در ضمن می‌توان از عکس این روش نیز استفاده کرد و نامساویهای مثلث را با استفاده از نامساویهای عادی ثابت کرد.

■ مثال ۷-۱۶

اگر  $a, b, c$  اضلاع مثلث باشند:

$$c^2a(c-a) + a^2b(a-b) + b^2c(b-c) \geq 0$$

## ۴-۷ نامساوی اردیش-موردل

یکی از نامساویهای معروف مثلث نامساوی اردیش-موردل است که می‌گوید اگر  $p$  نقطه‌ای درون مثلث  $ABC$  باشد و فاصله  $p$  از  $A, B, C$  و  $a, b, c$  به ترتیب  $x, y, z$  و  $s, r, t$  باشد در

$$x + y + z \geq 2(r + s + t)$$

$$xyz \geq 8rst$$

تمرین

۱. ثابت کنید اگر  $x, y, z$  اعداد حقیقی و  $\alpha, \beta, \gamma$  زوایای مثلثی باشند آنگاه

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy \cos \alpha + 2yz \cos \beta + 2zx \cos \alpha$$

از این استفاده کرده و اثبات دیگری برای نامساوی اردیش-موردل بدهید.

۲. ثابت کنید  $rx + sy + tz \geq 2(rs + st + tr)$

۳.  $xy + yz + zx \geq 4(rs + st + rt)$

۴.  $2(1/x + 1/y + 1/z) \leq 1/r + 1/s + 1/t$

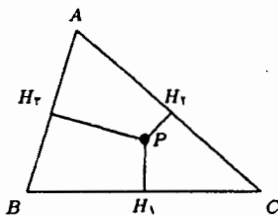
۵.  $xyz \geq (r + s)(r + t)(s + t)$

۶.  $\sqrt{s} + \sqrt{t} + \sqrt{r} \leq 3\sqrt{\frac{R}{r}}$  ( $r$  و  $R$  شعاع دایره محیطی و محاطی)

۷.  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 4(r^2 + s^2 + t^2)$

۸.  $\frac{r+s}{z} + \frac{s+t}{x} + \frac{r+t}{y} \geq 3$

۹. نقطه  $P$  داخل مثلث  $ABC$  است. ثابت کنید دستکم یکی از سه زاویه  $PCA, PBC, PAB$  از  $30^\circ$  بیشتر نیست.



شکل ۲-۷

۱۰. با توجه به نامگذاری شکل ۲-۷، نقطه  $P$  در مثلث  $ABC$  را چنان بیابید که

(i) مساحت  $H_1H_2H_3$  ماکزیمم شود؛

(ii) حاصل ضرب  $pH_1 \cdot pH_2 \cdot pH_3$  ماکزیمم شود؛

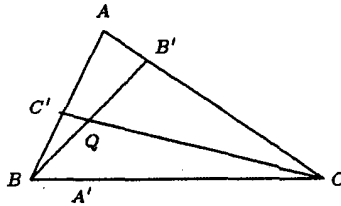
(iii) مقدار  $AH_1^2 + BH_2^2 + CH_3^2$  مینیموم شود.

۱۱. فرض کنید نقطه Q داخل مثلث ABC است، ثابت کنید

$$\sum_{A,B,C} (QA) \cdot \cos\left(\frac{A}{2}\right) \geq p \quad (p \text{ نصف محیط})$$

۱۲. فرض کنید Q داخل مثلث ABC (شکل ۳-۷) است، ثابت کنید:

$$QA' + QB' + QC' \leq \max\{a, b, c\}$$



شکل ۳-۷

۱۳. در صفحه نقاط  $A_1, A_2, A_3, A_4, O$  طوری هستند که برای  $i \neq j$  مساحت مثلث  $OA_iA_j$  دست کم ۱ است. ثابت کنید

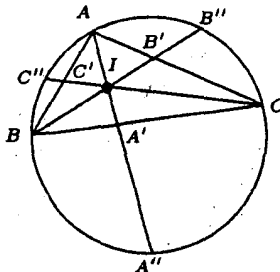
$$\exists i, j \in \{1, 2, 3, 4\} : S(OA_i, A_j) \geq \sqrt{2}$$

۱۴. اگر I مرکز دایره محاطی مثلث ABC در شکل ۴-۷ باشد ثابت کنید

$$1/4 \leq \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \frac{1}{16} \quad (i)$$

$$\frac{IA'}{IA} + \frac{IB'}{IB} + \frac{IC'}{IC} \geq 3 \text{ و } JA' + IB' + IC' \geq IA + IB + IC \quad (ii)$$

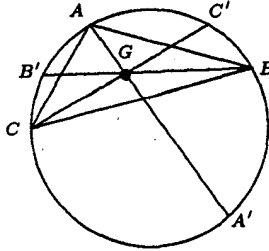
$$16S_{A''B''C''}^2 \geq 27r^2 S_{ABC} \quad (iii)$$



شکل ۴-۷

۱۵. اگر  $G$  مرکز ثقل مثلث  $ABC$  در شکل ۵-۷ باشد، ثابت کنید

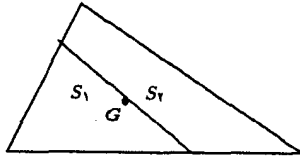
$$GA + GB + GC \leq GA' + GB' + GC'$$



شکل ۵-۷

۱۶. اگر  $G$  مرکز ثقل مثلث  $ABC$  در شکل ۶-۷ باشد ثابت کنید:

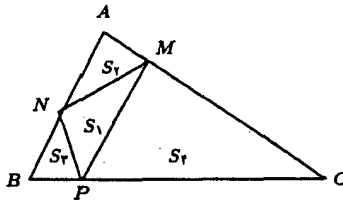
$$\frac{4}{5} \leq \frac{S_1}{S_2} \leq \frac{5}{4}$$



شکل ۶-۷

۱۷. ثابت کنید اگر  $P, N, M$  نقاطی روی  $BC, AB, AC$  باشند (شکل ۷-۷)، در این صورت

$$S_2 \geq \min\{S_1, S_2, S_3\}$$



شکل ۷-۷



## ریاضیات گسسته

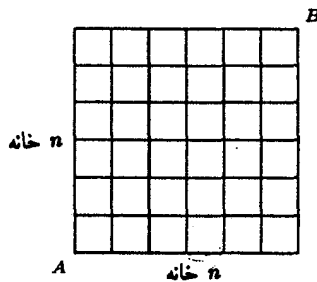
### ۱-۸ آنالیز ترکیبی و شمارش

روشهای مختلفی برای شمارش وجود دارد. سعی می‌کنیم با ذکر مثالهای متنوع آنها را توضیح دهیم. توصیه می‌کنیم که قبل از خواندن راه حل، خودتان سعی کنید مسأله را حل کنید.

#### ۱-۱-۸ مسائل و مثالهای نمونه

##### ■ مثال ۱-۸

در مربع شکل ۱-۸ ذره‌ای می‌تواند بالا یا جلو در امتداد پاره‌خطهای شبکه حرکت کند. این ذره به چند طریق می‌تواند از  $A$  به  $B$  برسد.



شکل ۱-۸

راه حل اول. هر مسیر از  $A$  به  $B$  دارای  $2n$  پاره‌خط است که  $n$  تا از آنها نسبت بالا خواهد



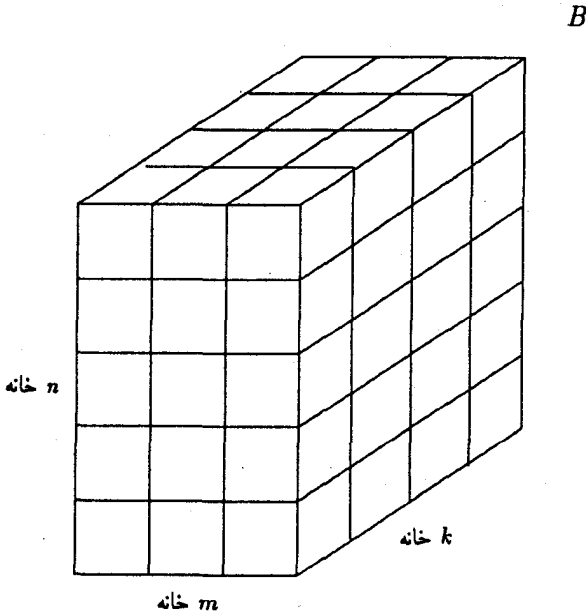
بود که انتخاب با ذره است! که کدامها باشند. یعنی جواب مسأله  $\binom{2n}{n}$  است.

راه حل دوم. هر لغت  $2n$  حرفی متشکل از  $n$  حرف «ج» معرف جلو رفتن و  $n$  حرف «ب» معرف بالا رفتن یک مسیر را برای ذره معین می‌کند و هر مسیر یک لغت  $2n$  حرفی با شرایط فوق است پس کافی است تعداد چنین لغتهایی را بشماریم که برابر  $\frac{(2n)!}{n!n!}$  یا همان  $\binom{2n}{n}$  است. ■

توضیح. تعداد جایگشتهای  $n$  چیز که دسته‌های  $n_1$  تایی،  $n_2$  تایی،  $\dots$ ،  $n_k$  تایی آنها شبیه هم باشند برابر  $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$  (البته  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ ) است.

### تمرین

۱. اگر به جای مربع یک مکعب مستطیل قرار دهیم که  $m \times n \times k$  باشد و ذره بتواند جلو، بالا و داخل یعنی در سه جهت  $\nearrow$  حرکت کند؛ تعداد راههایی که ذره می‌تواند از یک رأس به رأس مقابل برود را محاسبه کنید (شکل ۲-۸).



شکل ۲-۸

■ مثال ۸-۲

اداره راهنمایی و رانندگی می‌خواهد اتومبیلها را با شماره‌های شش رقمی که ارقام می‌توانند ۰ تا ۹ باشند شماره‌گذاری نماید؛ به طوری که هر دو شماره دست‌کم دو تفاوت در ارقام با هم داشته باشند. حداکثر تعداد اتومبیلهایی که بدین طریق می‌توانند شماره‌گذاری شوند چقدر است.

حل. ۵ رقم اول را در نظر می‌گیریم. این ۵ رقم به  $10^5$  طریق می‌تواند شماره‌گذاری شود. (چرا؟) پس اگر  $1 + 10^5$  اتومبیل شماره‌گذاری شده داشته باشیم، حداقل دو اتومبیل وجود خواهند داشت که ۵ رقم اول آنها یکی باشد و این دو اتومبیل حداکثر می‌توانند در رقم آخر با هم فرق داشته باشند. پس  $10^5$  یک کران بالا برای تعداد اتومبیلها است. حال باید با ذکر مثالی نشان دهیم شماره‌گذاری  $10^5$  اتومبیل با شرایط مسأله امکان‌پذیر است. برای این کار کافی است برای هر عدد پنج‌رقمی  $x_1 + x_2 + x_2 + x_2 + x_5$  رقم  $x_6$  را مشخص کنیم می‌توانیم  $x_6$  را باقیمانده  $x_1 + x_2 + x_2 + x_2 + x_5$  بر ۱۰ بگیریم. حال اگر عدد پنج رقمی دیگر مانند  $y_1 y_2 y_3 y_4 y_5$  داشته باشیم که فقط در یک جا با اولی تفاوت کند نشان می‌دهیم  $y_6 \neq x_6$ . چرا که

$$y_6 \stackrel{!}{=} y_1 + y_2 + \dots + y_5$$

$$x_6 \stackrel{!}{=} x_1 + x_2 + \dots + x_5$$

و چون ۵ رقم اول فقط در یک جا با هم فرق دارند پس

$$y_6 - x_6 \stackrel{!}{=} y_i - x_i \neq 0$$

که  $i$  جایی است که با هم فرق می‌کنند، پس  $x_6 \neq y_6$ . یعنی حداکثر اتومبیلها  $10^5$  است.

■ مثال ۸-۳

حداکثر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $n$  عضو مانند  $A$  را چنان بیابید که اشتراک هر دو زیرمجموعه ناتهی باشد.

حل. می‌دانیم یک زیرمجموعه  $n$  عضوی،  $2^n$  زیرمجموعه دارد. این مجموعه‌ها را به زوجهایی که در هر زوج یک زیرمجموعه و متمم آن قرار دارد تقسیم می‌کنیم؛ پس  $2^{n-1}$  زوج داریم. حال اگر  $1 + 2^{n-1}$  زیرمجموعه از مجموعه  $A$  انتخاب کنیم، دست‌کم دو مجموعه داخل یک زوج می‌افتند و اشتراک آنها تهی است. پس  $2^{n-1}$  یک کران بالا برای تعداد زیرمجموعه‌های دارای شرایط مسأله است.  $2^{n-1}$  زیرمجموعه را می‌توان زیرمجموعه‌هایی از مجموعه  $A$  گرفت که همگی یک عضو بخصوص را شامل باشند.

## ■ مثال ۸-۴

۱۳۷۱ مجموعه ۳۷ عضوی داریم که اشتراک هر دو تایی آنها دقیقاً یک عضو است. نشان دهید اشتراک همه مجموعه‌ها تهی نیست.

حل. مجموعه‌ها را به صورت  $A_1, A_2, \dots, A_{1371}$  شماره‌گذاری می‌کنیم. چون  $A_1$  با هریک از  $1370$  مجموعه دیگر تنها در یک عضو اشتراک دارد و یک مجموعه ۳۷ عضوی است پس دستکم با ۳۸ مجموعه در یک عضو بخصوص اشتراک دارد (چرا؟) اگر این‌طور نباشد حداکثر با ۳۷ مجموعه در یک عضو بخصوص اشتراک دارد. و چون  $1369 = 37 \times 37$ ،  $A_1$  باید دستکم ۳۸ عضو مختلف داشته باشد، که این ممکن نیست. این عضو بخصوص را  $a$  می‌نامیم. حال نشان می‌دهیم  $a$  در اشتراک تمام مجموعه‌ها وجود دارد. فرض کنید  $B$  مجموعه دلخواهی از  $1371$  مجموعه داده شده باشد. اگر  $B$ ،  $a$  را شامل نباشد باید از هر یک از ۳۸ مجموعه‌ای که با  $A_1$  در  $a$  اشتراک دارند با  $B$  در عضوی اشتراک داشته باشند که این اعضا متمایز باشند (چرا؟) یعنی باید دستکم ۳۸ عضو در  $B$  باشد که این ممکن نیست. پس  $a \in A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{1371}$  یعنی این اشتراک ناتهی است.

## ■ مثال ۸-۵

تعدادی از زیرمجموعه‌های  $r$  عضوی از یک مجموعه  $n$  عضوی ( $n \geq r$ ) را انتخاب می‌کنیم به طوری که اشتراک هر  $r+1$  مجموعه ناتهی باشد نشان دهید اشتراک تمام مجموعه‌های انتخاب شده ناتهی است.

حل. مجموعه‌ها را به صورت  $A_1, A_2, \dots, A_k$  شماره‌گذاری می‌کنیم و فرض می‌کنیم  $A_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$  اگر اشتراک همه  $k$  مجموعه فوق تهی باشد، پس  $x_1$  در یک مجموعه از مجموعه‌های  $A_2, \dots, A_k$  نیست، مثلاً  $A_2$  به همین ترتیب  $x_2$  در یک مجموعه مثلاً  $A_3, \dots, A_k$  در یک مجموعه مثلاً  $A_{r+1}$  نیست پس  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{r+1} = \emptyset$  که متناقض فرض مسأله است.

## تمرین

۱. فرض کنید  $X$  مجموعه‌ای ناتهی شامل  $n$  عضو و  $C$  مجموعه‌ای شامل  $p$  رنگ باشد. بزرگترین عدد  $p$  را بیابید که در خاصیت زیر صدق کند:

اگر به هر طریق دلخواه تمام زیرمجموعه‌های  $X$  را با استفاده از این رنگها رنگ کنیم به طوری که هر زیرمجموعه فقط یک رنگ داشته باشد؛ آن‌گاه دو زیرمجموعه  $A$  و  $B$  از  $X$  وجود داشته باشد به قسمی که مجموعه‌های  $A, B, A \cup B$  و  $A \cap B$  دارای رنگهای یکسان باشند.

۲. فرض کنید  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ ،  $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$  و  $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$

سه افراز از مجموعه متاهی  $X$  باشد به طوری که

$$1 \leq i, j, k \leq n : |A_i \cap B_j| + |A_i \cap C_k| + |B_j \cap C_k| \geq n$$

نشان دهید  $|X| \geq \frac{n^2}{3}$ .

تذکره.  $|A|$  یعنی تعداد عناصر مجموعه  $A$ . (افراز یعنی مجموعه‌ای که اعضای آن دوبه‌دو جدا از هم باشند و اجتماع همه آنها کل مجموعه باشد و هیچیک تهی نباشد).

■ مثال ۸-۶

$n$  خط که هیچ دوتایی موازی و هیچ سه‌تایی متقارب نباشند در صفحه مفروض است. تعداد نقاط تقاطع را به دست آورید.

حل. تعداد نقاط تقاطع را  $f(n)$  می‌گیریم.  $f(n+1) = f(n) + n$  چون اگر یک خط به مجموعه  $n$  خط اضافه شود،  $n$  نقطه تقاطع جدید به وجود می‌آید پس چون  $f(n+1) - f(n) = n$  داریم

$$f(2) - f(1) = 1, f(3) - f(2) = 2, \dots, f(n) - f(n-1) = n-1.$$

اگر رابطه‌های فوق را جمع کنیم با توجه به این که  $f(1) = 0$  به دست می‌آید:

$$f(n) = n \left( \frac{n-1}{2} \right)$$

تمرین

۱.  $n$  خط مثال ۸-۶ صفحه را به چند قسمت تقسیم می‌کنند.

۲.  $n$  صفحه که هر سه‌تایی در یک نقطه مشترکند و هیچ چهار صفحه‌ای نقطه مشترک ندارند در فضا مفروضند. تعداد خطوط اشتراک را به دست آورید و نشان دهید فضا را به چند قسمت تقسیم می‌کنند.

۳.  $n$  کره دو به دو متقاطع فضا را به چند قسمت تقسیم می‌کنند؟

■ مثال ۸-۷

یک تابع  $f$  به هر زیرمجموعه ۹ عضوی از  $\{1, 2, \dots, 20\}$  یکی از اعداد ۱ تا ۲۰ را نسبت می‌دهد. ثابت کنید یک زیرمجموعه ۱۰ عضوی مانند  $T$ ،  $T \subseteq \{1, 2, \dots, 20\}$  وجود دارد به طوری که

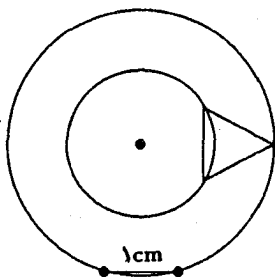
$$\forall k \in T : f(T - \{k\}) \neq k$$

حل. اگر برای هر زیرمجموعه  $۱۰$  عضوی  $T$  عنصری مانند  $k$  در  $T$  باشد که  $f(T - \{k\}) = k$  و اگر برای زیرمجموعه  $۱۰$  عضوی دیگری مانند  $T'$  عنصری مانند  $k'$  باشد که  $f(T' - \{k'\}) = k'$  و  $T - \{k\} = T' - \{k'\}$  آنگاه نتیجه می‌شود  $T = T'$ ،  $k = k'$  (چرا؟). حال چون  $\binom{۱۰}{۱}$  زیرمجموعه  $۱۰$  عضوی وجود دارد پس  $T - \{k\}$  ها  $\binom{۱۰}{۱}$  زیرمجموعه  $۹$  عضوی متمایز از  $\{۱, ۲, \dots, ۱۰\}$  است در حالی که  $\binom{۱۰}{۱} < \binom{۱۰}{۲}$  که این تناقض است! پس یک زیرمجموعه  $۱۰$  عضوی با خاصیت مورد نظر وجود دارد. ■

## ■ مثال ۸-۸

نقاط صفحه را با ۳ رنگ، رنگ آمیزی کرده‌ایم. ثابت کنید دست کم دو نقطه هم‌رنگ وجود دارد که فاصله آنها از هم  $۱\text{cm}$  است.

حل. دایره‌ای به شعاع  $۱\text{cm}$  حول نقطه به رنگ اول می‌زنیم. اگر نقطه‌ای از آن رنگ روی این دایره باشد که مسأله ثابت شده وگرنه نقاط این دایره همگی از رنگهای دوم و سوم هستند. حال مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع  $۱\text{cm}$  را روی این دایره مطابق شکل زیر می‌چرخانیم اگر دو رأس از این مثلث هم‌رنگ باشند مسأله ثابت شده است وگرنه رأس سوم همواره به رنگ اول خواهد بود و دایره‌ای به رنگ اول و به شعاع بزرگتر از  $۱\text{cm}$  خواهیم داشت پس وتری به طول  $۱\text{cm}$  دارد که مسأله را ثابت می‌کند (شکل ۸-۳). ■



شکل ۸-۳

## تمرین

۱. اگر در مثال ۸-۸ بجای ۳ رنگ از ۹ رنگ استفاده می‌کردیم آیا باز هم مسأله همواره درست بود؟

## ■ مثال ۹-۸

فرض کنید  $X$  یک مجموعه  $n$  عضوی باشد و فرض کنید  $A_1, A_2, \dots, A_k$  زیرمجموعه‌هایی از  $X$  باشند به طوری که به ازای هر  $i$ ،  $Z$  متمایز از  $A_i$ ،  $A_i \not\subseteq A_j$  حداکثر مقدار  $k$  را بیابید.

حل. یک زنجیر از زیرمجموعه‌های  $X$  را دنباله مجموعه‌های  $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \dots \subset B_n$  می‌گیریم که  $B_1$  یک عضو است،  $B_2$  دو عضو است،  $\dots$  و  $B_n$   $n$  عضوی (یا کل  $X$ ) است. تعداد زنجیرهای متمایز که یک مجموعه  $m$  عضوی به خصوص را شامل باشند برابر  $m!(n-m)!$  است (چرا؟) و تعداد کل زنجیرهای متمایز  $n!$  است. (چرا؟) چون بنابر فرض مسأله زنجیر شامل  $A_i, i = 1, \dots, k$  نباید مجموعه‌های دیگر را شامل باشد پس زنجیرهایی که  $A_1$  را شامل هستند و زنجیرهایی که  $A_2$  را شامل هستند و  $\dots$  همگی متمایز هستند و تعداد آنها از  $n!$  کمتر است. از طرف دیگر تعداد زنجیرهای شامل  $A_i$ ،  $m!(n-m)!$  است که  $m$  تعداد عناصر مجموعه است و می‌دانیم  $(\lfloor \frac{n}{k} \rfloor!)^2 \geq m!(n-m)!$  پس باید  $n! \geq k(\lfloor \frac{n}{k} \rfloor!)^2$  یا  $k \leq \frac{n!}{(\lfloor \frac{n}{k} \rfloor!)^2}$  حال زیرمجموعه‌های  $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$  عضو که تعداد آنها  $\frac{n!}{(\lfloor \frac{n}{k} \rfloor!)^2}$  است در شرط مسأله صدق می‌کنند پس ما کمترین  $k$  برابر  $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$  است. ■

■ مثال ۸-۱۰

نشان دهید دنباله  $a_1, a_2, \dots, a_{mn+1}$  از اعداد حقیقی یا یک زیردنباله صعودی  $m+1$  عضوی دارد یا یک زیردنباله نزولی  $n+1$  عضوی.

توضیح. زیردنباله یعنی  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$  که  $i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_k$  صعودی گوئیم هرگاه  $a_{i_1} \geq a_{i_2} \geq \dots \geq a_{i_k}$  و نزولی گوئیم هرگاه  $a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \dots \leq a_{i_k}$

حل. در بالای هر  $a_i$  زوج مرتب  $(\alpha, \beta)$  را می‌نویسیم که  $\alpha$  طول بزرگترین زیردنباله صعودی است که با  $a_i$  شروع می‌شود و  $\beta$  طول بزرگترین زیردنباله نزولی است که با  $a_i$  شروع می‌شود. زوجهای مرتب نوشته شده متمایز هستند چرا که اگر زوج مربوط به  $a_i, a_j$  که  $i < j$  هر دو  $(\alpha, \beta)$  باشد. و فرض کنیم  $a_i \leq a_j$  آنگاه می‌توان دنباله  $\alpha$  عضوی که صعودی است و با  $a_j$  شروع می‌شود را در نظر گرفت و عضو ابتدای آن را  $a_i$  قرار داد و یک زیردنباله صعودی  $\alpha+1$  عضوی که با  $a_i$  شروع می‌شود به دست آورد که با توجه به اینکه زوج  $(\alpha, \beta), a_i$  است غیرممکن است. فرض  $a_i \geq a_j$  نیز با بررسی زیردنباله نزولی  $a_j$  میسر می‌شود. حال اگر مسأله درست نباشد برای هر  $a_i$  زوج  $(\alpha, \beta)$  دارای این خاصیت است که  $\alpha \leq m, \beta \leq n$  پس حداکثر  $mn$  زوج مرتب می‌توانند موجود آیند در حالیکه  $mn+1$  عدد داریم. تناقض حاصل درستی مسأله را ثابت می‌کند. ■

تمرین

۱. فرض کنید  $a_1 < a_2 < \dots < a_{mn+1}$  اعدادی طبیعی باشند. نشان دهید یا  $m+1$  عضو وجود دارند مثلاً  $a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_{i_{m+1}}$  که  $a_{i_m}$  بر  $a_{i_{m+1}}$  بخش پذیر باشد و  $\dots$  و  $a_{i_1}$  بر  $a_{i_2}$  بخش پذیر باشد یا  $n+1$  عضو وجود دارد که هیچ دو تایی بر هم بخش پذیر نباشند.

۲. می‌گوییم دو عضو  $a, b$  نسبتی با هم ندارند هرگاه  $a \leq b$  و  $b \leq a$  هر دو نادرست باشند؛ نشان دهید  $\subseteq$  یک رابطه ترتیب جزئی روی زیرمجموعه‌های مجموعه  $X$  تعریف می‌کند و دو عضو را که نسبتی با هم ندارند مشخص کنید.  
حال می‌توانیم قضیه کلی زیر را بیان کنیم.

تذکر. رابطه  $\leq$  را یک رابطه ترتیب جزئی روی مجموعه  $A$  گوئیم هرگاه

$$\forall a \in A; a \leq a \quad (\text{الف})$$

$$\forall a, b \in A; a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b \quad (\text{ب})$$

$$\forall a, b, c \in A; a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c \quad (\text{ج})$$

### ۲-۱-۸ اصل شمول و عدم شمول

#### ● قضیه ۱-۸

فرض کنید  $A_1, A_2, \dots, A_n$  مجموعه‌هایی متناهی باشند آنگاه

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

تذکر.  $|A|$  تعداد اعضای مجموعه  $A$  است و  $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ .

اثبات. عضو  $a \in \bigcup_{i=1}^n A_i$  را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم  $a$  در  $k$  مجموعه از  $n$  مجموعه  $A_1, A_2, \dots, A_n$  قرار داشته باشد. اگر نشان دهیم  $a$  در طرف دوم نیز یکبار شمرده می‌شود حکم ثابت است.

در جمله اول از قضیه ۱-۸،  $a$ ،  $k$  بار شمرده می‌شود، در جمله دوم  $\binom{k}{2}$  بار، در جمله سوم  $\binom{k}{3}$  بار و ... پس کلاً  $(-1)^{k-1} \binom{k}{k} + \dots + \binom{k}{2} - \binom{k}{1} + \binom{k}{k}$  بار،  $a$  شمرده می‌شود و با توجه به این که  $0 = (-1)^k \binom{k}{k} + \dots + \binom{k}{2} - \binom{k}{1} + \binom{k}{k}$  (چرا؟) پس عبارت بالا برابر قضیه ۱-۸ است و حکم ثابت می‌شود. ●

#### تمرین

۱. حکم قضیه ۱-۸ را با استقرا روی  $n$  ثابت کنید.

حال صورت مفیدتری از قضیه ۱-۸ را که در شمارش به‌کار می‌آید، بیان می‌کنیم. ابتدا نمادگذارها را کمی توضیح می‌دهیم.

فرض کنید  $A$  یک مجموعه  $n$  عضوی باشد و  $k$  شرط داشته باشیم؛ مثلاً شرایط  $c_1, c_2, \dots, c_k$ . تعداد عناصری از  $A$  که شرط  $c_i$  را دارند به  $N(c_i)$  و تعداد عناصری از  $A$  که هر دو شرط  $c_i, c_j$

را دارند به  $N(c_i c_j)$  نمایش می‌دهیم و همین طور برای شرایط بیشتر،  $N(c_i c_j \dots c_m)$  تعریف می‌شود. به همین نحو  $N(\bar{c}_i)$  تعداد عناصری از  $A$  را که  $c_i$  ندارند،  $N(\bar{c}_i \bar{c}_j)$  تعداد عناصری از  $A$  که شرایط  $c_i$  و  $c_j$  را ندارند و غیره.

● قضیه ۸-۲

$$N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \dots \bar{c}_k) = n - \sum_{i=1}^k N(c_i) + \sum_{i < j} N(c_i c_j) - \dots + (-1)^k N(c_1 c_2 \dots c_k)$$

● برهان مانند قضیه ۸-۲ می‌باشد و به خواننده واگذار می‌شود.

■ مثال ۸-۱۱

$\varphi(n)$  تعداد اعداد طبیعی که کوچکتر از  $n$  یا مساوی با آن هستند و نسبت به  $n$  اول هستند تعریف می‌شود. اگر  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$  که  $p_i$  ها اعدادی اول و متمایزند؛ نشان دهید

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

و نتیجه بگیرید اگر  $(n, m) = 1$  آنگاه

$$\varphi(mn) = \varphi(n)\varphi(m)$$

حل. شرط  $c_i$  را بخش‌پذیر بودن بر  $p_i$  می‌گیریم. مسأله پیدا کردن  $\varphi(n)$  بر می‌گردد به حساب کردن مقدار  $N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \dots \bar{c}_k)$  برای مجموعه  $n$  عضوی  $\{1, 2, \dots, n\}$ . به راحتی می‌توان دید که  $N(c_1 c_2 \dots c_m)$  برابر  $\frac{n}{p_1 \dots p_m}$  است، پس بنا بر قضیه قبل داریم

$$\varphi(n) = n - \sum_{i=1}^n \frac{n}{p_i} + \sum_{i < j} \frac{n}{p_i p_j} - \dots + (-1)^k \frac{n}{p_1 p_2 \dots p_k}$$

ولی عبارت فوق بسط  $n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$  است و حکم ثابت می‌شود.

■ مثال ۸-۱۲

به چند طریق  $n$  نفر می‌توانند کلاه‌های خود را عوض کنند به طوری که هیچ کدام کلاه خودشان سرشان نباشد.

حل. افراد را از ۱ تا  $n$  شماره‌گذاری می‌کنیم و شرط  $c_i$  را این می‌گیریم که نفر  $i$ ام کلاه خودش سرش نباشد.

$N(c_1 c_2 \dots c_m)$  برابر می‌شود با  $(n-m)!$  پس کافی است  $N(\bar{c}_1 \dots \bar{c}_n)$  را برای مجموعه



تمام جایگشتها که  $n!$  عضو دارد حساب کنیم.

$$\begin{aligned} N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \dots \bar{c}_k) &= n! - n(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! \\ &\quad - \dots + (-1)^n (n-n)! \binom{n}{n} \\ &= n! \left( 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right) \end{aligned}$$

معمولاً عدد فوق را به  $D(n)$  نمایش می‌دهند.

### تمرین

۱. با استفاده از بسط تیلور  $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$  نشان دهید برای  $n$  های بزرگ

$$D(n) \simeq \frac{n!}{e} \quad (\simeq \text{علامت تقریب است})$$

### ■ مثال ۸-۱۳

فرض کنید  $X$  یک مجموعه  $n$  عضوی و  $Y$  یک مجموعه  $m$  عضوی باشد، تعداد تابعهای پوشای  $f: X \rightarrow Y$  را تعیین کنید.

فرض می‌کنیم  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$  و شرط  $c_i$  را این می‌گیریم که  $y_i$  در برد  $f$  نباشد. مسأله منجر می‌شود به محاسبه  $N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \dots \bar{c}_m)$  در مجموعه همه توابع  $f: X \rightarrow Y$  که یک مجموعه  $m^n$  عضوی است (چرا؟).  $N(c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k})$  برابر است با  $(m-k)^n$  پس بنا بر قضیه ۲ داریم:

$$\text{تعداد توابع پوشا} = m^n - \binom{m}{1}(m-1)^n + \binom{m}{2}(m-2)^n + \dots + (-1)^{m-1}$$

از مسأله فوق می‌توان نتیجه گرفت که اگر  $m > n$  آن‌گاه مقدار فوق صفر است (چرا؟). از اتحاد فوق نتیجه بگیرید اگر  $P$  چند جمله‌ای با درجه کوچکتر از  $m$  باشد:

$$\sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} P(i) = 0$$

### تمرین

۱. فرض کنیم  $A_1, A_2, \dots, A_r \subset X$ . ثابت کنید تعداد اعضای  $X$  که دقیقاً متعلق به

$p$  مجموعه از  $q$  مجموعه اول باشند برابر است با

$$\sum_{k=p}^q (-1)^{k-p} \binom{k}{p} \sum | \cap A_i |$$

که  $\sum | \cap A_i |$  روی اشتراکهای  $n$  تایی است.

## ۲-۸ نظریه گراف

### ▲ تعریف ۱-۸

یک مجموعه متناهی  $V$  به عنوان رئوس و مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های دو عضوی  $V$  به عنوان یالها، یک گراف ساده را تشکیل می‌دهند.

به زبان شهودی یک گراف مجموعه‌ای از نقاط است که توسط خطوطی موسوم به یال به هم وصل می‌باشند مانند شکل ۴-۸



شکل ۴-۸

حال به تعریف بعضی مفاهیم نظریه گراف می‌پردازیم.

درجه رأس: تعداد یالهای خارج شده از یک رأس را درجه آن رأس می‌نامیم. (درجه رأس  $v$  را به  $\deg v$  نمایش می‌دهند)

رأس منزوی: رأسی که درجه آن صفر باشد رأس منزوی نام دارد.

گراف کامل  $n$  رأسی که با  $K_n$  نمایش می‌دهند یک گراف با  $n$  رأس است که بین هر دو رأس

آلی وجود داشته باشد. پس تعداد یالهای این گراف  $\binom{n}{2}$  و درجه هر رأس  $n-1$  است. متمم گراف  $G$  که با  $G^c$  نمایش می‌دهند گرافی است با همان رئوس  $G$  که دو رأس در آن به هم وصلند اگر و فقط اگر در  $G$  به هم وصل نباشند. مثلاً متمم دوگراف نمایش داده شده در شکل ۴-۸ در شکل ۵-۸ نموده شده است.

### ▲ تعریف ۲-۸

گرافی که درجه رئوس آن برابر باشند گراف منظم نام دارد؛ مثلاً  $K_n$  گراف منظم است.

### ● قضیه ۳-۸

مجموع درجات رئوس یک گراف دو برابر تعداد یالهای گراف است.

اثبات. تمرین ۱



شکل ۵-۸

نتیجه. مجموع درجات رئوس یک گراف عددی است زوج.

نتیجه. در هر گراف تعداد رأسهای با درجه فرد، زوج است.

▲ تعریف ۳-۸

فرض کنید  $G$  یک گراف باشد.  $G_1$  را زیرگراف  $G$  گوئیم هرگاه مجموعه رئوس آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه رئوس گراف  $G$  باشد و دو رأس در  $G_1$  به هم وصل باشند اگر در  $G$  به هم وصل باشند.

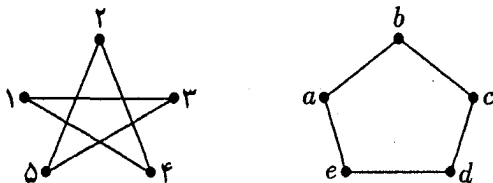


▲ تعریف ۴-۸

گراف  $G_1$  با مجموعه رئوس  $V_1$  و مجموعه یالهای  $E_1$  را با گراف  $G_2$  با مجموعه رئوس  $V_2$  و مجموعه یالهای  $E_2$  یکرخیخت گوئیم هرگاه تابع یک به یک و پوشای  $f : V_1 \rightarrow V_2$  وجود داشته باشد به طوری که دو رأس  $a, b$  در  $G_1$  به هم وصلند اگر و فقط اگر  $f(a), f(b)$  در  $G_2$  به هم وصل باشند.



به راحتی می‌توان آزمود که یکرخیختی یک رابطه هم‌ارزی است. به‌عنوان مثال گرافهای شکل ۶-۸ یکرخیختند.



شکل ۶-۸

در اینجا تابع  $f : V_1 \rightarrow V_2$  به صورت زیر تعریف می‌شود

$$f(1) = a \quad f(3) = b \quad f(5) = c \quad f(2) = d \quad f(4) = e$$

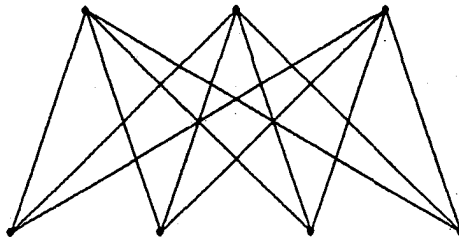
■ مثال ۱۴-۸

نشان دهید در هر گراف دو رأس وجود دارد که درجه آنها برابر است.

حل. اگر رأس منزوی در گراف نباشد چون درجه هر رأس عددی است بین ۱ تا  $n - 1$  (تعداد رؤس گراف است)، حکم بنا بر اصل لانه کبوتری نتیجه می شود. اگر دو رأس منزوی وجود داشته باشد درجه آنها با هم برابر خواهد بود. اگر تنها یک رأس منزوی داشته باشیم باقیمانده گراف یک گراف  $n - 1$  رأسی است که درجه هر رأس بین ۱ تا  $n - 2$  است و حکم به استقرا ثابت می شود.

▲ تعریف ۵-۸

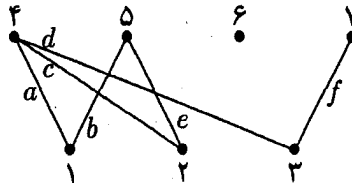
گراف دوبخشی کامل  $K_{m,n}$  گرافی است با  $m + n$  رأس که آنها را می توان به دو مجموعه، یکی  $m$  عضوی و دیگری  $n$  عضوی افزایش کرد به طوری که هر دو رأس از یک مجموعه به هم وصل نباشند و هر دو رأس از دو مجموعه مختلف به هم وصل باشند؛ مانند شکل ۷-۸.



شکل ۷-۸



تذکر. اگر شرط وصل بودن هر دو رأس از مجموعه مختلف را از تعریف حذف کنیم. به تعریف گراف دوبخشی می رسمیم به عنوان مثال شکل ۸-۸ یک گراف دوبخشی غیرکامل است.



شکل ۸-۸

▲ تعریف ۶-۸

مجموعه  $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$  که در آن  $v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 e_3 \dots e_n v_{n+1}$  یال وصل کننده  $v_i$  و  $v_{i+1}$  است را یک گردش گوئیم. اگر  $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$  متمایز باشند، یک مسیر تعریف می شود و اگر  $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$  متمایز باشند و  $v_1 = v_n$  آنگاه یک دور تعریف می شود.

به عنوان مثال در شکل ۸-۸

$1a4c2e5b1a4$  یک گردش است

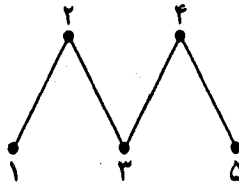
$1a4c2$  یک مسیر است

$1a4c2e5b1$  یک دور است

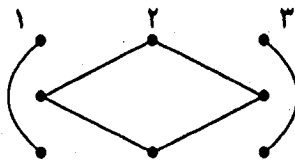
▲ تعریف ۸-۷

گراف  $G$  را همبند گوئیم هرگاه بین هر دو رأس آن مسیری وجود داشته باشد؛ مثلاً گراف شکل ۸-۸ همبند نیست چون بین ۶ و ۵ مسیری وجود ندارد ولی گراف شکل ۹-۸ (الف) همبند است.

رابطه هم‌ارزی زیر را روی رئوس گراف  $G$  تعریف می‌کنیم:  
 $a, b$  هم‌ارز هستند هرگاه مسیری از  $a$  به  $b$  موجود باشد. کلاسهای هم‌ارزی که از این رابطه به دست می‌آیند را مؤلفه‌های گراف گوئیم و تعداد آنها را به  $k(G)$  نشان می‌دهیم. به عنوان مثال برای گراف شکل ۹-۸ (ب) سه مؤلفه همبندی داریم که در شکل ۱۰-۸ شماره‌گذاری شده‌اند.



شکل ۹-۸



شکل ۱۰-۸

● قضیه ۸-۴

گراف  $G$  دوبخشی است اگر و فقط اگر دور فرد نداشته باشد. (دور فرد، دوری است که تعداد یالهای آن فرد باشد)

اثبات. به راحتی می‌توان دید برای هر گراف دوبخشی  $G$  هر دور تعداد زوجی یال دارد. حال فرض کنید  $G$  گرافی باشد که دور فرد نداشته باشد. کافی است مسأله را برای گرافهای همبند

ثابت کنیم، چون یک گراف دوبخشی است اگر و فقط اگر مؤلفه‌های همبندی آن دوبخشی باشند. مجموعه رئوس  $G$  را به  $V$  نمایش می‌دهیم و برای رأس  $v \in V$ ،  $U_1$  را مجموعه رئوسی مانند  $W \subset V$  می‌گیریم که کوتاهترین مسیر بین  $v$  و اعضای  $V$ ، تعداد زوجی یال داشته باشد،  $V_2$  را  $V - V_1$  تعریف می‌کنیم (به راحتی) می‌توان نشان داد که هیچ دو رأس در  $V_1$  به هم وصل نیست و هیچ دو رأسی در  $V_2$  به هم وصل نیست پس  $G$  یک گراف دوبخشی است. ●

▲ تعریف ۸-۸

اگر  $v$  رأسی از گراف  $G$  باشد  $G - v$  گرافی است که از حذف رأس  $v$  و تمام یالهای متصل به آن به دست می‌آید. ▲

▲ تعریف ۹-۸

رأس  $v$  را رأس یک برشی گراف  $G$  گوئیم هرگاه  $k(G - v) > k(G)$ . ▲  
به عبارت دیگر تعداد مؤلفه‌های همبندی گراف با برداشتن رأس  $v$  زیاد شود. برای گراف همبند، برشی بودن رأس بدین معناست که با برداشتن آن رأس، گراف ناهمبند شود.

● قضیه ۵-۸

در گراف همبند  $G$  رأس  $v$  برشی است اگر و فقط اگر دو رأس  $u$  و  $w$  از گراف موجود باشند به طوری که هر مسیر بین  $u$  و  $w$  از  $v$  بگذرد. ●

اثبات. (کفایت) اگر رأس  $v$  دارای خاصیت فوق باشد با برداشتن آن مسیری از  $u$  و  $w$  وجود نخواهد داشت یا به عبارت دیگر گراف ناهمبند می‌شود، پس  $v$  یک رأس برشی خواهد بود. (لزوم) اگر  $v$  یک رأس برشی باشد با برداشتن آن گراف ناهمبند می‌شود پس اگر  $u$  و  $w$  را در مؤلفه‌های همبندی مختلف گراف  $G - v$  بگیریم هر مسیر از  $u$  به  $w$  از  $v$  می‌گذرد زیرا در غیر این صورت  $u$  و  $w$  نمی‌توانند در مؤلفه‌های همبندی مختلف باشند.

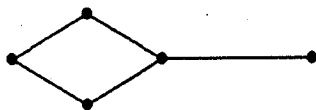
● قضیه ۶-۸

در هر گراف همبند، ۲ رأس وجود دارد که برشی نباشد.

اثبات. رئوس  $u$  و  $w$  در گراف طوری وجود دارند که طول مسیر مینیمم بین  $u$  و  $w$  در گراف ماکزیمم باشد. اگر  $u$  و  $w$  غیر برشی باشند قضیه ثابت شده است و در غیر این صورت دست کم یکی از آنها مثلاً  $u$  برشی است. با حذف آن گراف ناهمبند می‌شود، پس می‌توان رأس  $v$  را در مؤلفه همبندی گرفت که متمایز از مؤلفه همبندی که  $w$  را شامل است، باشد. در این صورت مسیر مینیمم از  $v$  به  $w$  از  $u$  می‌گذرد پس طول آن از مسیر مینیمم بین  $u$  و  $w$  بیشتر است و این یک تناقض می‌باشد. پس  $u$  و  $w$  هر دو غیر برشی هستند. ●

▲ تعریف ۱۰-۸

قطر گراف همبند  $G$  طول ماکزیمم مسیره‌های مینیمم بین رئوس گراف است. مثلاً قطر گراف شکل ▲  
۱۱-۸، ۱۱-۳ است.

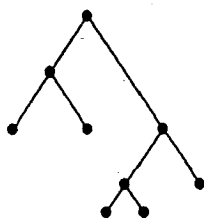


شکل ۸-۱۱

قطر گراف  $G$  را به  $diam(G)$  یا  $d(G)$  نمایش می‌دهند.

▲ تعریف ۸-۱۱

▲ گراف همبند  $G$  را درخت گوئیم هرگاه دور نداشته باشد. مانند شکل ۸-۱۲.



شکل ۸-۱۲

● قضیه ۸-۷

احکام زیر هم‌ارزند ( $G$  یک گراف  $n$  رأسی است)

(الف)  $G$  درخت است؛

(ب)  $G$  دور ندارد و دارای  $n - 1$  یال است؛

(ج)  $G$  همبند و دارای  $n - 1$  یال است؛

(د)  $G$  همبند است و هر یال آن را برداریم غیرهمبند می‌شود؛

(ه) هر دو رأس  $G$  تنها و تنها توسط یک مسیر به هم وصل است؛

(و)  $G$  دور ندارد و هر دو رأس نامتصل را به هم وصل کنیم دقیقاً یک دور به دست می‌آید.

برهان قضیه فوق چندان مشکل نیست و به‌عنوان یک تمرین خوب برای درک تمام مفاهیم

قبل به خواننده واگذار می‌شود.

● قضیه ۸-۸

در هر درخت اقلأً دو رأس وجود دارند که درجه آنها ۱ است.

اثبات. اگر حداکثر یک رأس با درجه ۱ وجود داشته باشد، آنگاه مجموع درجات رئوس

گراف حداقل  $2n - 1$  است در حالی که مجموع درجات رئوس یک درخت دو برابر تعداد یالها

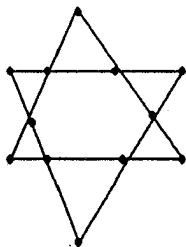
که همان  $n - 1$  است، می‌باشد یعنی  $2 - 2n$ ؛ تناقض حاصل درستی حکم را ثابت می‌کند. ●

▲ تعریف ۸-۱۲

برای گراف همبند  $G$  زیر درخت گسترشده، زیرگرافی از  $G$  است که همهٔ رئوس  $G$  را شامل باشد و یک درخت باشد. ▲

▲ تعریف ۸-۱۳ (گراف اویلری)

گراف همبند  $G$  را اویلری گویند هر گاه شامل گردش بسته‌ای باشد که همهٔ یالهای گراف را دقیقاً یکبار طی کند؛ مثلاً گراف شکل ۸-۱۳ یک گراف اویلری است. گراف اویلری به مفهوم شهودی



شکل ۸-۱۳

شکلی است که از یک نقطه می‌توان آن را با مداد کشید بدون آنکه مداد را از کاغذ برداریم و سرانجام به رأس اول برگردیم. اگر در تعریف گراف اویلری شرط بسته بودن مسیر را حذف کنیم تعریف گراف نیمه اویلری به دست می‌آید. ▲

● قضیه ۸-۹

گراف همبند  $G$  اویلری است اگر و فقط اگر درجهٔ هر رأس آن زوج باشد. اثبات. (لزوم) اگر  $G$  اویلری باشد، گردش بستهٔ آن را در نظر می‌گیریم. در این گردش به

هر رأس که می‌رسیم دقیقاً یک بار هم از آن خارج می‌شویم. پس درجه هر رأس زوج است. (کفایت) قضیه برای گرافهایی که تعداد یالهایشان کمتر یا مساوی ۳ است، درست است. فرض کنیم قضیه برای تمام گرافهای درجهٔ زوج و همبندی که تعداد یالهایشان کمتر از  $e$  باشد، درست باشد. ثابت می‌کنیم قضیه برای گرافهای  $e$  یالی هم درست است.

گردش بستهٔ ماکزیمال گراف را در نظر می‌گیریم (گردش بسته‌ای که تعداد یالهای آن ماکزیمم باشد) این گردش را  $G_1$  می‌نامیم. اگر  $G_1$  کل گراف  $G$  باشد که هیچ وگرنه یالی پیدا می‌شود که در  $G$  هست ولی در  $G_1$  نیست. حال یالهای گردش  $G_1$  را از  $G$  حذف می‌کنیم، چیزی که باقی می‌ماند  $(G - E(G_1))$  گرافی است که درجهٔ همهٔ رأسهایش زوج است. یک مؤلفهٔ همبندی مثل  $G_2$  از  $G - E(G_1)$  را در نظر می‌گیریم چون کل گراف  $G$  همبند بود پس این مؤلفهٔ همبندی حداقل در یک رأس مثل  $v$  با  $G_1$  اشتراک داشت. چون تعداد یالهای مؤلفهٔ همبندی  $G_2$  کمتر از  $e$  است پس بنا به فرض استقرا یک گردش بسته دارد. حال یک گردش جدید چنان به دست

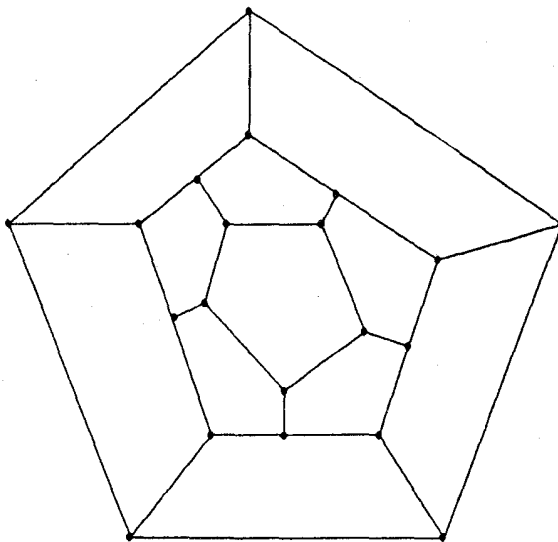


می‌آوریم که در گردش  $G_1$  هر وقت که به رأس  $v$  رسیدیم ابتدا گردش  $G_2$  را طی می‌کنیم. این گردش از  $v$  شروع می‌شود و به  $v$  هم ختم می‌شود و سپس گردش  $G_1$  را ادامه می‌دهیم. یک گردش به دست می‌آید که تعداد یالهایش بیشتر از گردش  $G_1$  است و این مخالف فرض است. پس گردش  $G_1$ ، یالهای کل گراف را در بر می‌گیرد یعنی گراف اویلری است. ●

▲ تعریف ۸-۱۴ (دور هامیلتونی)

دوری از گراف  $G$  که تمام رئوس  $G$  را شامل باشد، هامیلتونی گویند. مثلاً گراف شکل ۸-۱۴ هامیلتونی است (یعنی دور هامیلتونی دارد). ▲

مسیری که تمام رئوس را شامل باشد، مسیر هامیلتونی نام دارد.



شکل ۸-۱۴

● قضیه ۸-۱۵

اگر برای هر دو رأس غیرمتصل  $v, u$  از  $G$  که دارای  $n$  رأس است نامساوی

$$\deg u + \deg v \geq n$$

برقرار باشد آنگاه گراف  $G$  هامیلتونی است.

اثبات. فرض کنید  $G$  هامیلتونی نباشد، به  $G$  آنقدر یال اضافه می‌کنیم تا به گرافی تبدیل شود که با اضافه کردن هر یال، هامیلتونی گردد. نام آن را  $G_1$  می‌گذاریم.  $v, u$  را دو رأس غیرمتصل در گراف اخیر می‌گیریم (توجه کنید که  $K_n$  هامیلتونی است پس دو رأس غیرمتصل وجود دارد)

با اتصال  $u, v$  گراف هامیلتونی می‌شود و دارای دور هامیلتونی

$$u \rightarrow u_1 \rightarrow u_2, \dots \rightarrow u_{n-2} \rightarrow v \rightarrow u$$

است. اگر  $u$  به  $u_i$  وصل باشد  $v$  به  $u_{i-1}$  وصل نیست چون در این صورت

$$u \rightarrow u_i \rightarrow u_{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow v \rightarrow u_{i-1} \rightarrow u_{i-2} \rightarrow \dots \rightarrow u$$

یک دور هامیلتونی است که شامل یال  $uv$  نیست و این با طرز ساخت  $G_1$  تناقض دارد. پس از اینجا نتیجه می‌شود  $\deg u + \deg v \leq n - 1$  که با فرض مسأله تناقض دارد. پس گراف  $G$  هامیلتونی بوده است.

▲ تعریف ۸-۱۵ (گراف مسطح)

به گرافی که بتوان آن را در صفحه طوری قرار داد که یالهای آن یکدیگر را قطع نکنند گراف مسطح گوییم.



شکل ۸-۱۵

برای گراف مسطح تعداد ناحیه‌هایی که صفحه ایجاد می‌کنند را می‌توان شمرد. مثلاً در گرافهای فوق تعداد ناحیه‌ها ۵ و ۴ است. توجه کنید ناحیه خارجی نیز حساب می‌شود.

● قضیه ۸-۱۱

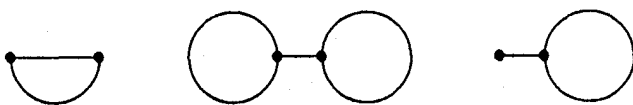
در گراف مسطح  $G$  با تعداد رأسهای  $V$  تعداد یالهای  $E$  و تعداد ناحیه‌های  $R$  رابطه زیر برقرار است

$$V - E + R = 2$$

اثبات. به استقرا روی تعداد یالها، برای  $2$  و  $1$   $E$  حکم واضح است. فرض می‌کنیم قضیه برای گرافها با تعداد یالهای نایبتر از  $E$  درست باشد. حکم را برای گراف با  $1 + E$  یال را ثابت می‌کنیم. اگر یک یال از گراف کم کنیم یکی از صورتهای شکل ۸-۱۶ اتفاق خواهد افتاد که درستی فرمول در هر حالت به سادگی به دست می‌آید.

چون هر ناحیه حداقل محصور بین ۳ یال است پس  $3R \leq 2E$  حال چون

$$3V - 3E + 3R = 6 \Rightarrow 3V - E \geq 6 \Rightarrow E \leq 3V - 6$$



شکل ۸-۱۶

نتیجه.  $K_5$  گراف مسطح نیست. اثبات. برای  $K_5$ ، داریم  $E = 10$  و  $V = 5$ . اگر  $K_5$  مسطح باشد آنگاه بنا بر نامساوی فوق  $9 = 15 - 6 \leq 10$  که تناقض است.

نتیجه. در هر گراف مسطح رأسی وجود دارد که درجه آن حداکثر ۵ است

برهان. تمرین!

● قضیه ۸-۱۲

$K_{3,3}$  (گراف دو بخشی کامل با ۶ رأس) مسطح نیست. اثبات.  $K_{3,3}$  هر ناحیه حداقل محصور بین ۴ یال است پس  $4R \leq 2E$ ، از طرفی

$$V - E + R = 2 \Rightarrow 4V - 4E + 4R = 8 \Rightarrow 4V - 2E \leq 8 \\ \Rightarrow E \leq 2V - 4$$

ولی در  $K_{3,3}$   $V = 6$  و  $E = 9$  پس اگر  $K_{3,3}$  مسطح باشد

$$9 \leq 12 - 4 = 8$$

● که تناقض است.

▲ تعریف ۸-۱۶

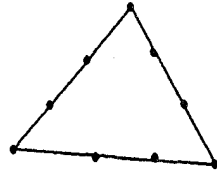
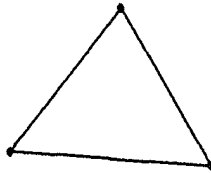
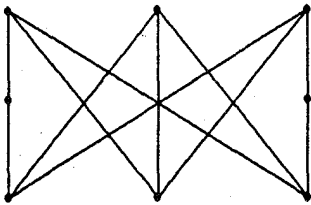
یک زیرتقسیم گراف  $G$  عبارت است از گرافی مانند  $H$  که با اضافه کردن رأسهای جدید روی یالهای  $G$  به دست آید. مثلاً در شکل ۸-۱۶،  $H$  یک زیرتقسیم  $G$  است. ▲

● قضیه ۸-۱۳ (کوراتوسکی)

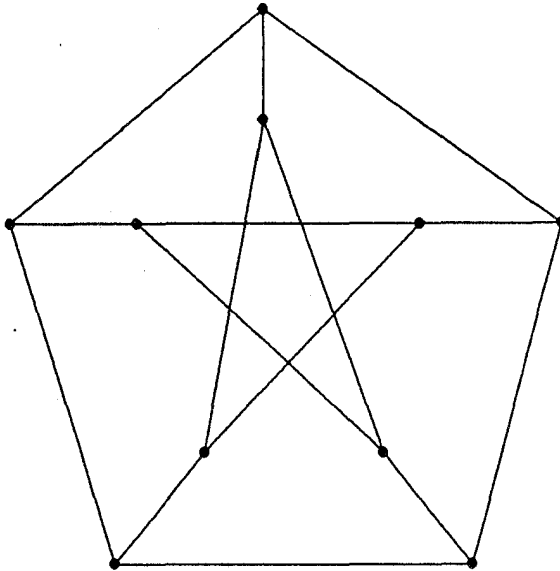
● گراف همبند  $G$  مسطح است اگر و فقط اگر زیر تقسیم از  $K_{3,3}$  یا  $K_5$  نداشته باشد.

تمرین

۱. با استفاده از قضیه فوق نشان دهید گراف شکل ۸-۱۸ (گراف پترسون) غیر مسطح



شکل ۸-۱۷



شکل ۸-۱۸

است.

▲ تعریف ۸-۱۷ (عدد رنگی رأسی)

برای گراف  $G$  کمترین عددی که بتوان رأسهای گراف را با آن تعداد رنگ، رنگ آمیزی کرد به طوری که هیچ دو رأس متصل هم رنگ نباشند، عدد رنگی رأسی گراف  $G$  گفته می شود و به  $\chi(G)$  نمایش داده می شود.

▲ تعریف ۸-۱۸ (عدد رنگی یالی)

نظیر تعریف قبلی کمترین عددی است که یالهای گراف را بتوان با آن تعداد رنگ، رنگ آمیزی کرد به طوری که هیچ دو یالی که در یک رأس مشترک هستند هم رنگ نباشند و با  $\chi'(G)$  نشان داده

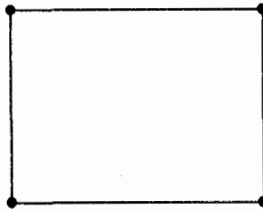
می‌شود.

■ مثال ۸-۱۵

به راحتی می‌توان دید که:

$$\chi(C_{2m+1}) = 3, \quad \chi(C_{2m}) = 2, \quad \chi(K_n) = n$$

که در آن  $C_n$  دور  $n$  رأسی است. مثلاً  $C_4$  در شکل ۸-۱۹ نمایانده شده است.



شکل ۸-۱۹

حال چند قضیه برای  $\chi$  بدون اثبات بیان می‌کنیم.

● قضیه ۸-۱۴ (قضیه Brooks)

اگر گراف همبند  $G$ ، گراف کامل نباشد یا دور فرد نداشته باشد، آنگاه  $\chi(G) \leq \Delta(G)$  که  $\Delta(G)$  ماکزیمم درجه رئوس است.

● قضیه ۸-۱۵ (قضیه Nordhavs and Gaddum)

اگر  $G$  یک گراف با تعداد رئوس  $n$  باشد آنگاه:

$$2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(G^c) \leq n + 1 \quad (۸-۱۸ \text{ الف})$$

$$n \leq \chi(G) \cdot \chi(G^c) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \quad (۸-۱۸ \text{ ب})$$

● قضیه ۸-۱۶ (قضیه Vizing)

برای هر گراف  $G$

$$\chi'(G) \leq 1 + \Delta(G)$$

۱. گرافی داریم  $n$  رأسی و  $m$  یالی. ثابت کنید حداقل

$$\frac{2m}{3n} \left( m - \frac{n^2}{4} \right)$$

مثلث در آن وجود دارد.

۲.  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$  درجات رئوس یک گراف هستند که برای هر  $1 \leq k \leq n - d_n$  داریم  $d_k \geq k$  ثابت کنید گراف مفروض همبند است.

۳. فرض کنید گراف  $G$ ،  $n$  رأس و  $m$  یال دارد. ثابت کنید حداقل  $n - m$  یال موجود است که هیچ دو تایی در هیچ رأسی مشترک نیستند.

۴. در یک گراف  $10$  رأسی بین هر سه رأس حداقل دو تا به هم متصلند. ثابت کنید این گراف یک زیرگراف کامل  $4$  رأسی دارد. آیا این حکم برای یک گراف  $9$  رأسی هم درست است؟

۵. یک گراف  $3$  بخشی داریم که هر بخش آن  $n$  رأس دارد و درجه هر رأس آن  $n + 1$  است. ثابت کنید می‌توان از هر بخش یک رأس انتخاب کرد طوری که هر دو رأس از این سه رأس به هم متصل باشند.

۶. اگر مجموعه یالهای  $K_m$  را به  $n$  مجموعه  $A_1, \dots, A_n$  افراز کنیم که  $m > 2^n$  در این صورت حداقل یکی از مجموعه‌های  $A_i$  شامل یک دور فرد است. برای  $M = 2^n$  مثال نقضی بیاورید.

۷. در یک گراف هر دو رأس که متصل باشند رأس متصل مشترکی ندارند ولی هر دو رأس که متصل نیستند درست دو رأس متصل مشترک دارند ثابت کنید درجه تمام رئوس مساوی است.

۸. در یک گراف دو بخشی یکی از بخشها را  $A$  بنامید و فرض کنید رئوس  $A$  عبارت باشند از  $a_1, \dots, a_m$ . فرض کنید برای هر  $k$  رأس از این رئوس مجموعه رئوسی که حداقل به یکی از اینها متصل است حداقل  $k$  عضو داشته باشد. ( $1 \leq k \leq m$ ) ثابت کنید  $m$  یال  $v_1, v_2, \dots, v_m$  موجود است که هر  $a_i$  رأسی از  $v_i$  است و هیچ دو تا از  $v_i$ ها در هیچ رأسی مشترک نیستند. (این قضیه فیلیپ هال است)

■ مثال ۸-۱۶

روی صفحه  $n$  نقطه داده شده که هیچ سه تایی بر یک خط راست نیستند. ( $n \geq 5$ ) ثابت کنید حداقل  $\binom{n-2}{3}$  چهار ضلعی محدب با رئوس بین این  $n$  نقطه وجود دارند.

اثبات. فرض کنید  $f(n)$  کران پایینی برای تعداد چهار ضلعی‌های محدب با  $n$  نقطه در صفحه باشد. (یعنی برای هر  $n$  نقطه دلخواه حداقل  $f(n)$  چهار ضلعی محدب با رئوس بین آن  $n$  نقطه موجود باشد) واضح است که برای  $n \geq 5$  داریم  $f(n) \geq 1$  حال اگر نقاط داده شده  $a_1, \dots, a_n$  باشند با کنار گذاشتن هر  $a_i$ ، چهار ضلعی محدب به دست می‌آید که کلاً می‌شود  $n f(n-1)$  ولی هر چهار ضلعی محدب حداکثر  $n-4$  بار شمرده می‌شود پس داریم

$$f(n) \geq \frac{nf(n-1)}{n-4} \Rightarrow \frac{f(n)}{f(n-1)} \geq \frac{n}{n-4} \quad n \geq 5$$

$$\Rightarrow \prod_{n=5}^k \frac{f(n)}{f(n-1)} \geq \prod_{n=5}^k \frac{n}{n-4} \Rightarrow \frac{f(k)}{f(5)} \geq \frac{k!}{5!(k-4)!}$$

ولی  $f(5) \geq 1$  و لذا

$$f(k) \geq \frac{k!}{5!(k-4)!} \Rightarrow f(k) \geq \frac{\binom{k}{5}}{k-4} \quad k \geq 5$$

ولی از آنجا که

$$\frac{\binom{k}{5}}{k-4} \geq \binom{k-3}{2}$$

حکم ثابت می‌شود.

### ۳-۸ قضیهٔ دیلورث

● قضیه ۸-۱۷ (دیلورث)

هرگاه  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{mn+1}\}$  یک مجموعه مرتب جزئی با  $mn+1$  عضو باشد مثلاً  $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{m+1}}\}$  یک مجموعهٔ  $m+1$  عضوی مثلاً پیدا کرد که  $a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \dots \leq a_{i_{m+1}}$  یا یک مجموعهٔ  $n+1$  عضوی پیدا کرد که هیچ دو عضوی از آن با هم نسبتی نداشته باشند.

کاربرد قضیه دیلورث

(الف) با استفاده از قضیه دیلورث مثال ۸-۱۰ را دوباره ثابت کنید.

(ب) روی خط راستی  $n^2+1$  پاره خط قرار گرفته است، ثابت کنید یا بین این پاره خط‌ها می‌توان  $n+1$  پاره خط غیر متقاطع پیدا کرد و یا  $n+1$  پاره خط وجود دارند که یک نقطه مشترک دارند.

اثبات. پاره خط‌ها را بازه‌هایی روی خط حقیقی در نظر بگیرید. هر پاره خط به صورت

$[a, b]$  است. حال رابطه‌ای (ترتیب جزئی) بین این  $n^2+1$  پاره خط تعریف کنید.

$$[a, b] \leq [c, d] \Leftrightarrow b < c \text{ یا } [a, b] = [c, d]$$

واضح است که این یک رابطه ترتیب جزئی است حال با استفاده از قضیه دیل‌ورث یا  $n + 1$  پاره‌خط موجود است که  $[a_1, b_1] \leq [a_2, b_2] \leq \dots \leq [a_n, b_n]$  (که چون این  $n + 1$  پاره‌خط متمایزند پس نتیجه می‌شود هیچ دوتایی همدیگر را قطع نخواهد کرد (با توجه به تعریف  $\leq$ ) و یا  $n + 1$  عضو موجود است که هر دو عضو با هم نسبت ندارد و این معناست که  $n + 1$  پاره‌خط موجود است که هر دو تا متمایزند ولی اشتراک دارند، ولی طبق مسأله‌ای هر تعداد متناهی پاره‌خط روی یک خط که هر دو تا اشتراک داشته باشند، همگی در یک نقطه مشترک هستند (اثبات این مسأله با استقرا به سادگی به دست می‌آید). بنابراین قضیه ثابت شد.

## تمرین

۱.  $M$  زیرمجموعه‌ای از مجموعه همه زوجهای عددهای طبیعی  $(a, b)$  است که  $a < b$  و  $a$  و  $b$  از عدد مفروض طبیعی  $n \geq 2$  تجاوز نمی‌کنند در ضمن اگر  $(a, b)$  در  $M$  باشد، آن وقت هیچ زوج  $(b, c)$  در آن نیست. مجموعه  $M$  حداکثر چند عضو دارد؟

۲. مجموعه  $X$ ،  $n$  عضوی است. حداکثر چند زیرمجموعه ۳ عضوی از  $X$  می‌توان برداشت که هر دو تا از آنها در یک عضو مشترک باشند.

۳. از مجموعه‌ای که  $n \geq 5$  عضو دارد،  $n + 1$  زیرمجموعه ۳ عضوی برداشته‌ایم. ثابت کنید بین این زیرمجموعه‌ها دو تا هستند که دقیقاً یک عضو مشترک دارند.

۴. مجموعه  $X$  را به زیرمجموعه‌های جدا از هم  $A_1, \dots, A_n$  تقسیم کرده‌ایم، سپس همان مجموعه  $X$  را به زیرمجموعه‌های جدا از هم  $B_1, \dots, B_n$  تقسیم کرده‌ایم طوری که برای  $A_i \cup B_j$  هر  $i, j$  که  $n \geq i, j \geq 1$  حداقل  $n$  عضو دارد. ثابت کنید  $|X| \geq \frac{n!}{n}$ . آیا تساوی می‌تواند برقرار شود؟

۵. به چند طریق می‌توان  $k$  عدد از بین عددهای  $1, 2, \dots, n$  انتخاب کرد که هیچ دوتایی متوالی نباشند؟

۶.  $2^0$  عدد طبیعی  $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_r$  داده شده است. ثابت کنید بین  $(a_j - a_k)$ ‌ها که  $k > j$  حداقل ۴ عدد برابر موجود است.

## ۴-۸ توابع مولد

اگر ضریب  $x^5$  را در بسطی مانند زیر محاسبه کنیم:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^4$$

آنگاه تعداد حالات تقسیم ۵ شیء را بین ۴ نفر به دست آورده‌ایم! در واقع  $x^5$  به صورتهای مختلفی از قبیل  $x^1 x^1 x^1 x^2$  یا  $x^1 x^2 x^2 x^0$ ، ... ساخته می‌شود. که در واقع هر کدام نوعی



تقسیم را مشخص می‌کند. به این گونه توابع تابع مولد گفته می‌شود و در بعضی مسائل بسیار مفیدند.

تعمیم تعریف ضریب دو جمله‌ای برای اعداد حقیقی

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-k+1)}{k!} \quad (r \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}, k \leq r)$$

$$\binom{r}{0} = 1$$

تعمیم بسط دو جمله‌ای برای اعداد حقیقی

$$(x+y)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k y^{r-k}$$

تذکر. برای اعداد غیرطبیعی بسط دو جمله‌ای نامتناهی است. با استفاده از تعریف می‌توان این مطلب را ثابت کرد.

$$n, r \in \mathbb{N} \quad \binom{-n}{r} = (-1)^r \binom{n+r-1}{r}$$

درس توابع مولد را تنها با مثالهای متعدد ارائه می‌دهیم.

تذکر. برای اعداد غیرطبیعی بسط دو جمله‌ای نامتناهی است. با استفاده از تعریف می‌توان این مطلب را ثابت کرد.

### ■ مثال ۸-۱۷

تعداد حالت‌های تقسیم  $n$  شیء را بین  $k$  نفر به دست آورید.

حل. باید ضریب  $x^n$  را در بسط  $(1+x+x^2+\dots)^k$  به دست آوریم. از طرفی اگر  $x < 1$  بگیریم بنابر فرمول حد مجموع تصاعد هندسی باید بسط  $(1-x)^{-k}$  را محاسبه کنیم. ضریب  $x^n$  بنابر فرمول برابر است با

$$(-1)^k \binom{-k}{n} = \binom{n+k-1}{n}$$

یعنی جواب  $\binom{n+k-1}{n}$  است.

### ■ مثال ۸-۱۸

به چند طریق می‌توان اسکناس ۱۰ تومانی را به سکه‌های ۱ و ۲ و ۵ تومانی خرد کرد.

حل. باید ضریب  $x^{10}$  را در بسط

$$(1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots)$$

به دست آوریم. که برابر ۷ می شود یعنی به ۷ طریق می توان این کار را انجام داد.

■ مثال ۸-۱۹

ثابت کنید تعداد حالتی که یک عدد را می توان به صورت چند عدد فرد نوشت برابر تعداد حالتی است که یک عدد را می توان به صورت مجموع چند عدد مختلف نوشت.

حل. بسط مولد افراز اعداد به مجموع اعداد فرد به صورت زیر است:

$$(1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots)$$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^5} \dots$$

و بسط بعدی به صورت زیر است

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^2)\dots = \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^8}{1-x^2}$$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^5} \dots$$

از آنجا درستی حکم ثابت می شود.

■ مثال ۸-۲۰

ثابت کنید برای  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

حل. ضریب  $x^n$  در بسط  $(1+x)^{2n}$  برابر  $\binom{2n}{n}$  است. از طرفی

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n \cdot (1+x)^n$$

$$= \left(1 + \binom{n}{1}x + \dots + \binom{n}{n}x^n\right) \left(1 + \binom{n}{1}x + \dots + \binom{n}{n}x^n\right)$$

و ضریب  $x^n$  برابر

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \dots + \binom{n}{n}\binom{n}{0}$$

است و از فرمول  $\binom{n}{n} = \binom{n}{n-k}$  نتیجه می شود این همان  $\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n-k}$  است و از آنجا

حکم ثابت می‌شود.

## ■ مثال ۸-۲۱

ضریب  $x^n$  را در بسط  $\frac{1}{(x-3)(x-2)^2}$  به دست آورید.

حل. باید کسر را تفکیک کرد

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

طرفین را در  $x-3$  ضرب و به جای  $x$ ، ۳ قرار می‌دهیم به دست می‌آید  $A=1$ ؛ طرفین را در  $(x-2)^2$  ضرب و به جای  $x$ ، ۲ قرار می‌دهیم به دست می‌آید  $C=-1$ ؛ بجای  $x$ ، ۴ قرار می‌دهیم و  $A$  و  $C$  را مقدارگذاری می‌کنیم به دست می‌آید  $B=-1$ ؛

$$\frac{1}{x-3} = (x-3)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} x^k (-3)^{-1-k}$$

$$\frac{-1}{(x-2)} = -(x-2)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} x^k (-2)^{-1-k}$$

$$-\frac{1}{(x-2)^2} = -(x-2)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k} x^k (-2)^{-2-k}$$

پس ضریب  $x^n$  عبارت است از

$$\binom{-1}{n} (-3)^{-1-n} - \binom{-1}{n} (-2)^{-1-n} - \binom{-2}{n} (-2)^{-2-n}$$

که از فرمول بسط دو جمله‌ای برابر  $\binom{-n}{r}$  به دست می‌آید.

## ■ مثال ۸-۲۲

بسط مولد سری  $\{1^2, 2^2, \dots\}$  را بنویسید (یعنی عبارتی که به صورت  $1^2 + 2^2x + \dots$  باشد)

حل. بسط  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$  را در نظر بگیرید اگر یک بار مشتق بگیریم داریم

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$$

$$x \left(\frac{1}{1-x}\right)' = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$$

اگر از این عبارت هم مشتق بگیریم داریم

$$\left(x \left(\frac{1}{1-x}\right)'\right)' = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \dots$$

یا

$$\left(x \left(\frac{1}{1-x}\right)'\right)' = \frac{x(x+1)}{(1-x)^2}$$

## ■ مثال ۸-۲۳

اگر بسط مولد  $\{a_0, a_1, \dots\}$  را داشته باشیم بسط مولد  $\{a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots\}$  را به دست آورید

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \\ \Rightarrow g(x) &= \frac{f(x)}{1-x} = f(x)(1+x+x^2+\dots) = \\ & a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + \dots \end{aligned}$$

## ■ مثال ۸-۲۴

با استفاده از مثال ۸-۲۳،  $1 + 2 + 3 + \dots + n$  را محاسبه کنید.

حل.

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = 1 + 2x + 3x^2 + \dots = \frac{-1}{(1-x)^2}$$

پس باید ضریب  $x^{n-1}$  را در بسط  $\frac{-1}{(1-x)^2}$  محاسبه کنیم اما می‌دانیم که

$$-(1-x)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k} (-x)^k$$

بنابراین ضریب  $x^n$  برابر است با

$$\binom{n+1}{n-1} = \frac{n(n+1)}{2}$$

## ■ مثال ۸-۲۵

بسط توانی  $e^x$  را که در آن  $e$  عدد نپراست ( $e = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$ ) پیدا کنید.

حل.

$$\begin{aligned}
 e^x &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots & x=0 &\Rightarrow a_0 = \frac{1}{0!} \\
 \text{مشتق می‌گیریم} \quad e^x &= a_1 + 2a_2x + \dots & x=0 &\Rightarrow a_1 = \frac{1}{1!} \\
 \text{مشتق می‌گیریم} \quad e^x &= 2a_2 + 6a_3x + \dots & x=0 &\Rightarrow a_2 = \frac{1}{2!} \\
 \text{مشتق می‌گیریم} \quad e^x &= 6a_3 + 24a_4x + \dots & x=0 &\Rightarrow a_3 = \frac{1}{3!}
 \end{aligned}$$

به همین ترتیب  $a_k = \frac{1}{k!}$  پس:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

■ مثال ۸-۲۶

حد ضریب  $x^n$  را در بسط  $\frac{e^x}{1-x}$  وقتی  $n$  به بینهایت میل کند به دست آورید.  
 طبق مثال ۷ باید مجموع  $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$  را حساب کنیم. که اگر در رابطه بالا بجای  $x$ ، ۱ قرار دهیم حد مجموع برابر  $e$  می‌شود.

■ مثال ۸-۲۷

قایتی ۴۸ پرچم دارد که به تعداد مساوی پرچم قرمز، سفید، آبی و سیاه دارد. این قایتی ۱۲ پرچمی می‌فرستد به طوری که تعداد فردی پرچم آبی و تعداد زوجی پرچم سیاه داشته باشد. این قایتی چند علامت می‌تواند بفرستد؟

حل. باید ضریب  $\frac{x^{12}}{1-x}$  را در بسط زیر به دست آوریم

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)^2 \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) \left(1 + \frac{x^2}{3!} + \dots\right)$$

از بسط  $e^x$  نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
 \frac{e^x + e^{-x}}{2} &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\
 \frac{e^x - e^{-x}}{2} &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots
 \end{aligned}$$

پس باید ضریب  $\frac{x^{12}}{1!}$  را در بسط زیر حساب می‌کنیم

$$e^{2x} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = e^{2x} \left(\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{4}\right) = \frac{e^{2x} - 1}{4}$$

که برابر  $\frac{4^{11}}{4} = 4^{10}$  است.

■ مثال ۸-۲۸

اگر اعداد طبیعی را به تعداد متناهی تصاعد حسابی افزایش کنیم، ثابت کنید دستکم قدر نسبت دو تصاعد با هم مساوی است.

حل. فرض کنید افزارها به صورت زیر باشند

$$\{a_1, a_1 + d_1, a_1 + 2d_1, \dots\}$$

$$\{a_2, a_2 + d_2, a_2 + 2d_2, \dots\}$$

⋮

$$\{a_n, a_n + d_n, a_n + 2d_n, \dots\}$$

داریم

$$x + x^2 + \dots = (x^{a_1} + x^{a_1+d_1} + \dots) + (x^{a_2} + \dots) \\ + \dots + (x^{a_n} + \dots)$$

یا

$$\frac{x}{1-x} = \frac{x^{d_1}}{1-x^{d_1}} + \frac{x^{d_2}}{1-x^{d_2}} + \dots + \frac{x^{d_n}}{1-x^{d_n}}$$

اگر هیچ دو قدر نسبتی برابر نباشند بین  $d_i$ ها ماکزیمی یکتا مانند  $d_n$  وجود دارد.  $1 - x^{d_n}$  ریشه‌ای مختلط به صورت  $e^{\frac{2\pi i}{d_n}}$  دارد ( $i = \sqrt{-1}$ ) است. این ریشه مشترک ریشه هیچ کسر دیگری نیست؛ چون اگر کسر دیگری این ریشه را داشته باشد باید  $d_i$  عامل  $d_n$  داشته باشد که چون  $d_n > d_i$  غیر ممکن است. حال اگر طرفین را به  $e^{\frac{2\pi i}{d_n}}$  میل دهیم طرف راست  $\infty$  می‌شود در حالیکه طرف چپ عدد است. از تناقض حاصل نتیجه می‌شود  $d_n$  با یک قدر نسبت دیگر برابر است.

## اعداد مختلط

## ۱-۹ اعداد مختلط

با دستگاههای مختلف اعداد از قبل آشنا هستیم؛ در اینجا ذکری اجمالی از آنها به میان آورده پس از آن به معرفی اعداد مختلط می‌پردازیم.

۱. اعداد طبیعی. مجموعه اعداد طبیعی از همان ابتدا برای بشر شناخته شده بود. این مجموعه از اعداد را که متشکل از ۱، ۲، ... می‌باشد، با  $N$  نمایش می‌دهیم.  $N$  نسبت به اعمال جمع و ضرب بسته است، یعنی اگر  $a$  و  $b$  دو عدد طبیعی باشند  $a + b$  و  $a \times b$  نیز طبیعی‌اند. ۲. اعداد صحیح. با توجه به اینکه معادلات ساده‌ای نظیر  $x + 3 = 2$  در مجموعه اعداد طبیعی جوابی ندارند مجموعه اعداد منفی تعریف شدند؛ با اضافه شدن صفر به عنوان جوابی برای معادله  $x + a = a$  به دو مجموعه قبل، مجموعه اعداد صحیح ساخته شد. این مجموعه اعداد را با  $Z$  نمایش می‌دهیم.  $Z$  نیز همچون  $N$  نسبت به جمع و ضرب بسته است، ضمن آنکه وارون جمعی هر عضو  $Z$ ، عضوی از  $Z$  است.

۳. اعداد گویا. و اما با طرح معادلات نظیر  $5x + 2 = 6$ ، مجموعه اعداد گویا تعریف شد. مجموعه اعداد گویا که آنرا با  $Q$  نمایش می‌دهیم، عبارت است از مجموعه جوابهای همه معادلات به شکل  $ax = b$  که  $a \in N$  و  $b \in Z$ .  $Q$  تحت اعمال جمع و ضرب و تفریق،  $\{0\} - Q$  تحت تقسیم بسته است و هر عدد گویا (غیر از صفر) نسبت به هر یک از این چهار عمل دارای وارون می‌باشد.

۴. اعداد حقیقی. پس از معادلات درجه یک که منجر به تولید اعداد گویا شد، معادلاتی از درجه دو و بیشتر، نظیر معادله  $x^2 = 2$ ، مطرح شدند. همچنین مطرح شدن اعدادی مانند  $e = 2,71828\dots$ ،  $\pi = 3,14159\dots$  که هیچ کدام به شکل  $a/b$  نیستند، باعث تعریف اعداد اصم شد که اجتماع آنها با  $Q$ ، اعداد حقیقی را به وجود می‌آورد. مجموعه اعداد حقیقی را با

$R$  نمایش می‌دهیم.  $R$  همراه با اعمال جمع و ضرب معمولی تشکیل یک میدان مرتب می‌دهد. مهمترین خاصیت این میدان اصل تمامیت است.

بنابر اصل تمامیت، هر زیرمجموعه از اعداد حقیقی که دارای کران بالا (پایین) باشد، دارای کوچکترین کران بالا (بزرگترین کران پایین) است.

۵. اعداد مختلط. پس از طرح معادلاتی که منجر به تولید  $R$  شد، نوبت به معادله  $x^2 + 1 = 0$  می‌رسد. بدیهی است این معادله در  $R$  دارای جواب نیست؛ جوابهای چنین معادلاتی به عنوان اعداد «موهومی» شناخته شدند. هر عدد مختلط ترکیبی است از یک عدد حقیقی و یک عدد موهومی، بدین ترتیب که هر عدد مختلط به صورت زوج مرتبی از اعداد حقیقی می‌باشد که مؤلفه اول آن جزء حقیقی و مؤلفه دوم آن جزء موهومی عدد مزبور می‌باشد. مجموعه اعداد مختلط را با  $C$  نمایش می‌دهیم. مجموعه  $\{(x, 0) \mid x \in R\}$  چون در تناظر یک به یک با  $R$  قرار دارد با  $R$  یکی گرفته می‌شود. اعمال جمع و ضرب بر  $C$  بدین صورت تعریف می‌شوند:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

به این ترتیب می‌بینیم که  $(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$  و لذا عدد مختلط  $(0, 1)$  که با  $i$  نمایش داده می‌شود یک جواب معادله  $x^2 + 1 = 0$  است. روشن است که هر عدد مختلط  $(a, b)$  را می‌توان به صورت  $a + bi$  نوشت؛ همچنین دو عدد مختلط  $(a, b)$  و  $(c, d)$  مساویند اگر و فقط اگر  $a = c$  و  $b = d$ .

اعمال تفریق و تقسیم، به‌عنوان معکوس اعمال جمع و ضرب، به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \times \frac{c - di}{c - di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i \quad (c, d) \neq (0, 0)$$

### ▲ تعریف ۹-۱

قدرمطلق عدد مختلط  $z = x + iy$  که با  $|z|$  نمایش داده می‌شود عبارت است از عدد حقیقی  $\sqrt{x^2 + y^2}$ .

### چند خاصیت اعداد مختلط

هرگاه  $z_1, z_2, z_3$  اعداد مختلط باشند

$$1. \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ آنگاه } z_2 \neq (0, 0) \text{ و اگر } |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$2. \quad |z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2| \text{ و } |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$3. \quad z_1 z_2 = z_2 z_1 \text{ و } z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$4. \quad z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2)z_3 \text{ و } z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

$$5. \quad z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$



$$1 \cdot z = z \cdot 1 = z \text{ و } z + 0 = 0 + z = z \cdot 6$$

با توجه به خواص بالا و وجود وارون جمعی هر عدد مختلط و وجود وارون ضربی هر عدد مختلط ناصفر، مجموعه اعداد مختلط  $\mathbb{C}$ ، به همراه اعمال جمع و ضرب تعریف شده، تشکیل یک میدان می‌دهد. (وارون ضربی  $(a, b)$  عدد مختلط  $(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$  است)

▲ تعریف ۹-۲

▲ مزدوج عدد مختلط  $z = x + iy$  عبارت است از عدد مختلط  $\bar{z} = x - iy$ .

● قضیه ۹-۱

روابط زیر برقرارند:

$$\bar{\bar{z}} = z \cdot 1$$

۲.  $\bar{z} = z$  اگر و فقط اگر  $z$  عددی حقیقی باشد.

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \cdot 3$$

$$\overline{-z} = -(\bar{z}) \cdot 4$$

$$\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}, z \neq 0 \cdot 5$$

$$|z|^2 = z\bar{z} \cdot 6$$

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} \cdot 7$$

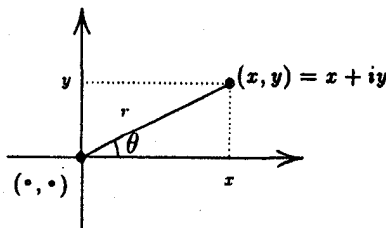
اثبات به عهده خواننده می‌باشد.

## ۹-۲ نمایش هندسی اعداد مختلط

با توجه به آنکه به هر عدد مختلط  $x + iy$  زوج مرتب  $(x, y)$  را نسبت داده‌ایم می‌توان مجموعه اعداد مختلط را در تناظر یک به یک با صفحه قرار داد (شکل ۹-۱).

با توجه به تعریفی که از قدرمطلق اعداد مختلط نتیجه می‌شود، قدرمطلق عدد مختلط  $z$  در واقع فاصله متناظر آن در صفحه از مبدأ مختصات است.

از سوی دیگر نقاط صفحه را می‌توان با مختصات قطبی نیز نمایش داد؛ اگر  $(r, \theta)$  مختصات



شکل ۹-۱

قطبی نقطه  $(x, y)$  باشد آنگاه این روابط برقرار است

$$y = r \sin \theta, x = r \cos \theta \quad (1-9)$$

$$\theta = \arctg \frac{y}{x}, r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2-9)$$

بدین ترتیب هر عدد مختلط را نیز می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

که در آن  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  و  $\theta = \arctg \frac{y}{x}$ . این نحوه نمایش عدد مختلط را صورت قطبی اعداد مختلط می‌نامند.

### ● قضیه ۲-۹

اگر  $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$  و  $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$  آنگاه

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) \quad \text{الف}$$

$$z_1 / z_2 = r_1 / r_2 (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)) \quad \text{ب}$$

اثبات. با نوشتن تعاریف ضرب و تقسیم اعداد مختلط و با توجه به روابط مثلثاتی مجموع

دو زاویه حکم به دست می‌آید.

### ● قضیه ۳-۹ (قضیه موآری)

به ازای هر عدد مختلط  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

اثبات. با استقرا بر  $n$  و با استفاده از قسمت الف قضیه ۲-۹.

### ▲ تعریف ۳-۹

عدد مختلط  $z$  را یک ریشه  $n$ ام عدد مختلط  $w$  می‌نامیم هرگاه  $z^n = w$ .

### ● قضیه ۴-۹

هر عدد مختلط غیر صفر دقیقاً  $n$  ریشه  $n$ ام دارد.

اثبات. فرض کنیم  $w = s(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  داده شده باشد. عدد مختلط

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = s(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

و این تساوی فقط زمانی برقرار است که  $r^n = s$  و  $\cos n\theta = \cos \varphi$  از رابطه اول نتیجه می‌شود که  $r = \sqrt[n]{s}$  و  $r$  ریشه  $n$ ام و مثبت عدد حقیقی  $s$  می‌باشد. از دومی نتیجه می‌شود که به ازای  $k$  طبیعی،  $\theta = \theta_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$  هر  $z$  که به این ترتیب به دست می‌آید یک ریشه  $n$ ام  $w$  می‌باشد. حال خواننده می‌تواند خود تحقیق کند که تعداد این  $z$ ها دقیقاً  $(n)$  است. به عنوان مثال ریشه‌های

$n$ ام عدد یک عبارت‌اند از اعدادی مثل  $z$  به طوری که  $z^n = 1$ ، یا

$$\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} = z, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

به این ترتیب اگر فرض کنیم  $w = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ ، ریشه‌های  $n$ ام واحد عبارت خواهند بود از

$$1, w, w^2, w^3, \dots, w^{n-1}$$

در نمایش هندسی، ریشه‌های  $n$ ام واحد رئوس یک  $n$  ضلعی منتظم محاط در دایره به شعاع واحد هستند که یک رأس آن  $(1, 0)$  می‌باشد. به ازای هر عدد با طول یک نیز، ریشه‌های  $n$ ام آن عدد رئوس یک  $n$  ضلعی منتظم محاط در دایره می‌باشند که یک رأس آن همان نقطه مزبور است. برای اعداد مختلط با طول غیر از یک نیز می‌توان تعبیرهای مشابهی پیدا کرد. مطلبی که در قضیه قبل اثبات شد، حالت خاصی از قضیه‌ای است که تحت عنوان «قضیه اساس جبر» شناخته می‌شود.

● قضیه ۹-۵ (قضیه اساسی جبر)

هر چند جمله‌ای درجه  $n$  با ضرایب مختلط دارای  $n$  ریشه مختلط است، یعنی معادله  $c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0 = 0$  که در آن  $c_0, c_1, \dots, c_n$  اعداد مختلط می‌باشند دارای  $n$  ریشه  $z_1, z_2, \dots, z_n$  می‌باشد.

● برای این قضیه اثباتهای متفاوتی وجود دارد؛ ما در اینجا این قضیه را ثابت نمی‌کنیم.

### ۹-۳ فرمول اویلر

یکی از اساسی‌ترین فرمولهایی که با استفاده از اعداد مختلط به دست می‌آید فرمول

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

است. این فرمول نتیجه‌ای از بسط تیلور توابع  $e^x$  و  $\sin x$  و  $\cos x$  است. از قضیه تیلور می‌دانیم که

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

با جایگذاری  $i\theta$  به جای  $x$  در فرمول اول و جایگذاری  $\theta$  به جای  $x$  در دو فرمول دیگر و همچنین ضرب سومی در  $i$ ، فرمول اویلر حاصل می‌شود.

از این فرمول نتایج بسیار جالبی به دست می‌آید که یکی از ساده‌ترین و در عین حال جالبترین

آنها با جایگذاری  $\pi$  به جای  $\theta$  نتیجه می شود:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

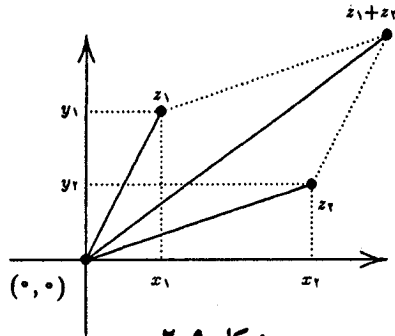
در این فرمول پنج تا از مهمترین اعداد یکجا ظاهر شده اند.

## ۴-۹ تبدیلیهای هندسی با استفاده از اعداد مختلط

انتقال. دو عدد مختلط  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$  را در نظر می گیریم؛ می دانیم که

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

تعبیر هندسی این رابطه در شکل ۲-۹ داده شده است.



شکل ۲-۹

در واقع با انتقال نقطه  $z_1$  به اندازه بردار  $z_2$ ، نقطه  $z_1 + z_2$  به دست آمده است. لذا تعبیر هندسی جمع دو عدد مختلط، همان انتقال در صفحه است.

دوران. اگر  $z_1 = \cos \theta_1 + i \sin \theta_1$  و  $z_2 = \cos \theta_2 + i \sin \theta_2$  آنگاه

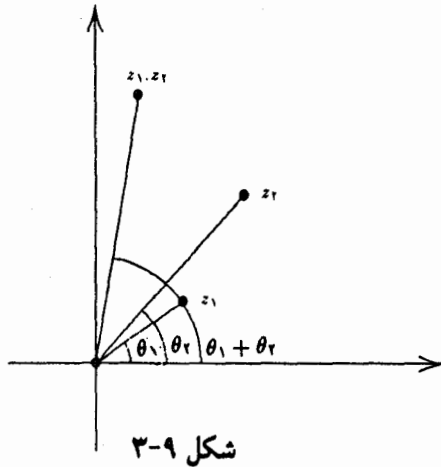
$$z_1 z_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

با توجه به شکل ۳-۹ نقطه  $z_1$  در واقع به اندازه  $\theta_2$  دوران یافته است، لذا دوران هندسی را می توانیم با ضرب دو عدد مختلط بیان کنیم (به این نکته توجه کنید که در اینجا  $|z_1| = |z_2| = 1$ ). در حالت کلی نگاشت  $f(z) = z_1(z - a) + a$  یک تبدیل تشابهی به دست می دهد (دوران، تجانس، و ترکیبات آنها) و به ازای هر تبدیل تشابهی نیز تابعی مختلط متناظر با آن وجود دارد. با استفاده از این توابع قضیه ذیل ثابت می شود.

### ● قضیه ۶-۹

ترکیب هر دو تبدیل تشابهی یک تبدیل تشابهی است.

اثبات. فرض کنیم  $f(z) = z_1(z - a) + a$ ،  $g(z) = z_2(z - b) + b$  توابع متناظر



دو تبدیل باشند؛ ثابت می‌کنیم که  $f \circ g(z) = z_\alpha(z - c) + c$

$$\begin{aligned} f \circ g(z) &= f(g(z)) = z_1(z_2(z - b) + (b - a)) + a \\ &= z_1 z_2(z - b) + z_1(b - a) + a \end{aligned}$$

اگر  $z_1 z_2 = 1$  آنگاه  $f \circ g(z) = z + c$ ، که در آن  $c = (b - a)(z_1 - 1)$  بنابراین  $f \circ g$  بیانگر یک انتقال، و لذا یک تبدیل تشابهی است.

اگر  $z_1 z_2 \neq 1$  آنگاه  $C = \frac{z_1 z_2 b + z_1(b - a) + a}{1 - z_1 z_2}$ ، که از آنجا نتیجه می‌شود

$$f \circ g(z) = z_1 z_2(z - c) + c$$

که یک تبدیل تشابهی است.

حال خواننده می‌تواند درستی مطالب زیر را تحقیق کند:

۱. در تبدیل  $f(z) = z_1(z - a) + a$

(الف) اگر  $|z_1| = 1$ ، تبدیل فقط دوران است؛

(ب) اگر در نمایش قطبی  $z$ ،  $\theta = 0$  (یعنی  $\arg z = 0$ ) آنگاه تبدیل فقط تجانس است.

۲. ترکیب دو تجانس یک تجانس است.

۳. ترکیب دو دوران یک دوران است.

### تمرین

۱. نشان دهید  $\cos 5\theta = 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta$

۲. نشان دهید  $\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{2\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} = 1/2$

(راهنمایی: معادله  $z^4 + 1 = 0$  را در نظر بگیرید.)

۳. ثابت کنید به ازای هر  $n$  روابط زیر برقرارند

$$\cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{2\pi}{n} + \dots + \frac{2(n-1)\pi}{n} = -1$$

$$\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$$

$$\sin \frac{\pi}{m} \sin \frac{2\pi}{m} \sin \frac{3\pi}{m} \dots \sin \frac{(m-1)\pi}{m} = \frac{m}{2^{m-1}} \quad ۴$$

(راهنمایی: در نظر داشته باشید که ریشه‌های معادله  $z^m = 1$  عبارتند از  $(e^{2(m-1)\pi i/m}, \dots, e^{2\pi i/m}, 1)$ )

۵. ثابت کنید

$$\begin{aligned} \cos \theta + \cos(\theta + \alpha) + \cos(\theta + 2\alpha) + \dots + \cos(\theta + n\alpha) \\ = \frac{\sin \frac{1}{2}(n+1)\alpha}{\sin \frac{1}{2}\alpha} \cos(\theta + \frac{1}{2}n\alpha) \end{aligned}$$

۶. مجموعهای زیر را محاسبه کنید

$$s_1 = \cos \alpha + r \cos(\alpha + \theta) + r^2 \cos(\alpha + 2\theta) + \dots + r^n \cos(\alpha + n\theta) + \dots$$

$$s_2 = \sin \alpha + r \sin(\alpha + \theta) + r^2 \sin(\alpha + 2\theta) + \dots + r^n \sin(\alpha + n\theta) + \dots$$

۷. ثابت کنید که به ازای هر عدد طبیعی  $n$ ,

$$\begin{aligned} \cos n\alpha = \cos^n \alpha - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha \\ - \binom{n}{6} \cos^{n-6} \alpha \sin^6 \alpha + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin n\alpha = \binom{n}{1} \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha \\ + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \alpha \sin^5 \alpha + \dots \end{aligned}$$

۸. حاصل ضربهای زیر را به دست آورید:

$$P_1 = \prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2n+1}, \quad P_2 = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$$

$$P_3 = \prod_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{2n+1}, \quad P_4 = \prod_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{2n}$$

۹. حاصل جمعهای زیر را بیابید:

$$\cot^2 \frac{\pi}{2n+1} + \cot^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \cot^2 \frac{3\pi}{2n+1} + \dots + \cot^2 \frac{n\pi}{2n+1}$$

$$\operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{2n+1} + \operatorname{cosec}^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \operatorname{cosec}^2 \frac{3\pi}{2n+1} + \dots + \operatorname{cosec}^2 \frac{n\pi}{2n+1}$$

۱۰. با استفاده از مسأله قبل ثابت کنید:

$$\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{2n+1}\right) \frac{\pi^2}{6} < 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \dots + 1/n^2$$

$$< \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) \frac{\pi^2}{6}$$

و از آنجا نتیجه بگیرید  $1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \dots = \frac{\pi^2}{6}$ .

۱۱. الف) فرض کنید  $M$  روی دایره محیطی یک  $n$  ضلعی منتظم قرار دارد. ثابت کنید مجموع مجذورهای فواصل  $M$  از رئوس  $n$  ضلعی برابر  $2nR^2$  است.

ب) فرض کنید  $M$  روی صفحه یک  $n$  ضلعی منتظم باشد و فاصله آن از مرکز  $n$  ضلعی برابر  $L$  باشد. ثابت کنید مجموع مجذورهای فواصل  $M$  از رئوس  $n$  ضلعی منتظم برابر  $n(R^2 + L^2)$  است.

پ) ثابت کنید قسمت (ب) حتی برای حالتی که  $M$  روی صفحه  $n$  ضلعی واقع نباشد هم درست است.

۱۲. الف) ثابت کنید مجموع مجذورات طول همه ضلعها و قطرهای هر  $n$  ضلعی منتظم برابر  $n^2 R^2$  است.

ب) ثابت کنید مجموع طول همه ضلعها و قطرهای هر  $n$  ضلعی منتظم برابر  $nR \cotg \frac{\pi}{n}$  است.

پ) ثابت کنید حاصل ضرب طول همه ضلعها و قطرهای  $n$  ضلعی منتظم برابر  $n^{n/2} R^{n(n-1)/2}$  است.

۱۳. اگر رابطه  $x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k = y_1^k + y_2^k + \dots + y_n^k$  به ازای  $n, k = 1, 2, 3, \dots$  درست باشد، ثابت کنید  $\{x_r\}_{r=1}^n, \{y_r\}_{r=1}^n$  جایگشتی از یکدیگرند.

۱۴. اگر  $z_1, z_2, z_3$  رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع در صفحه مختلط باشند نشان دهید

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$$

۱۵. نشان دهید حاصل جمع و حاصل ضرب کلیه ریشه‌های معادله

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

به ترتیب عبارتند از  $-\frac{a_0}{a_n}$  و  $(-1)^n \frac{a_n}{a_0}$ . این مسأله را تعمیم دهید.

۱۶. ثابت کنید هرگاه  $w$  یک ریشه معادله  $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = 0$  باشد،  $\bar{w}$  (مزدوج  $w$ ) نیز یک ریشه این معادله است.

۱۷. ثابت کنید هر چند جمله‌ای  $f$  با ضرایب حقیقی را می‌توان به حاصل ضرب چند جمله‌ایهای درجه یک یا دو با ضرایب حقیقی تجزیه نمود.

۱۸. سه عدد مختلطی را که ریشه‌های معادله  $z^3 - 3pz^2 + 3qz - r = 0$  هستند به‌عنوان رئوس یک مثلث در صفحه مختلط می‌گیریم؛ ثابت کنید الف)  $P$  مرکز ثقل این مثلث می‌باشد.

ب) ثابت کنید این مثلث متساوی الاضلاع است اگر و فقط اگر  $p^2 = q$ .

در این قسمت می‌خواهیم به‌طور مختصر یکی از جالبترین کاربردهای اعداد مختلط را توضیح دهیم: استفاده از این اعداد در نظریه اعداد. ابتدا اعداد «مختلط صحیح» را تعریف می‌کنیم (مجموعه این اعداد را با  $\mathbb{Z}[i]$  نمایش می‌دهیم). عددی را عدد مختلط صحیح می‌نامیم که قسمتهای حقیقی و موهومی آن صحیح باشند؛ به عبارت دیگر،  $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ . قوانین جمع و ضرب در  $\mathbb{Z}[i]$  همان قوانین جمع و ضرب در  $\mathbb{C}$  می‌باشند؛ خواننده باید بسته بودن این دو عمل نسبت به  $\mathbb{Z}[i]$  را تحقیق کند. یکاهای  $\mathbb{Z}[i]$  عبارت‌اند از  $\pm 1$  و  $\pm i$ . طبیعی است که همانند اعداد صحیح، در اینجا مسأله بخش‌پذیری و اعداد اول مطرح شود؛ عدد مختلط صحیح  $a + bi$  را بر  $c + di$  بخش‌پذیر گوئیم و می‌نویسیم  $c + di \mid a + bi$  هرگاه حاصل تقسیم  $a + bi$  بر  $c + di$  عدد مختلط صحیح باشد. مثلاً  $4 + 6i \mid 2 + 3i$  و  $2 + 23i \mid 1 + i$  و  $3 + 2i \mid 2 + 23i$ .  
در  $\mathbb{Z}[i]$  نیز عدد «اول» همانند  $\mathbb{N}$  تعریف می‌شود:

#### ▲ تعریف ۹-۴

$w \in \mathbb{Z}[i]$  را اول گوئیم هرگاه، فقط بر  $w$  و یک‌های  $\mathbb{Z}[i]$  و حاصل‌ضربهای این اعداد بخش‌پذیر باشد.

با توجه به اینکه  $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[i]$  را به‌عنوان مجموعه‌ای از خود در بر دارد در نگاه اول این‌گونه به نظر می‌رسد که هر عدد اول در  $\mathbb{Z}$  باید در  $\mathbb{Z}[i]$  نیز اول باشد، اما مثال قبل و مثال بعد نادرستی این



تصور را نشان می‌دهد.

## ■ مثال ۹-۱

فقط اعداد اول فرد را در نظر می‌گیریم، چرا که دیدیم که ۲ در  $Z[i]$  اول نیست. اعداد اول فرد در  $Z$  به دو دسته تقسیم می‌شوند: آنهایی که به صورت  $4k + 1$  هستند و آنهایی که به صورت  $4k + 3$  هستند. با دقت در مثال قبل مشاهده می‌شود که هیچ عدد اول به شکل  $4k + 1$  در  $Z[i]$  اول نیست. از نظریه اعداد می‌دانیم که هر عدد اول به صورت  $4k + 1$  را می‌توان به صورت مجموع دو مربع کامل نوشت، لذا

$$4k + 1 = a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi) \Rightarrow a + bi \mid 4k + 1$$

حال که غیر اول بودن اعداد به شکل  $4k + 1$  مشخص شد به اعداد اول به شکل  $4k + 3$  می‌پردازیم. ثابت می‌کنیم که این اعداد در  $Z[i]$  اولند. با توجه به اینکه هر عامل  $4k + 3$  در  $Z[i]$  غیر حقیقی است و نیز از آنجا که به ازای هر  $z$  که  $4k + 3 \mid z$ ، باید  $4k + 3 \mid \bar{z}$  به دست می‌آید:

$$4k + 3 = z_1 \bar{z}_1 \cdot z_2 \bar{z}_2 \cdot \dots \cdot z_n \bar{z}_n = a^2 + b^2 \Rightarrow 4k + 3 = a^2 + b^2$$

اما از نظریه اعداد می‌دانیم که این ممکن نیست، لذا  $4k + 3$  در  $Z[i]$  نیز اول است. حال اعداد اول به شکل  $a + bi$  را شناسایی می‌کنیم: ■

## ● قضیه ۹-۷

$z = a + bi$  در  $Z[i]$  اول است اگر و فقط اگر  $a^2 + b^2$  در  $Z$  اول باشد.

اثبات. اولاً ثابت می‌کنیم که اگر  $a + bi$  اول باشد  $a^2 + b^2$  نیز اول است: اگر  $a + bi$  اول باشد  $a - bi$  نیز اول است از طرف دیگر  $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ ، و لذا  $a^2 + b^2$  در  $Z[i]$  فقط بر  $a + bi$  و  $a - bi$  حاصل ضربی از آنها با یک‌های  $Z[i]$  بخش پذیر می‌باشد. این اعداد فقط ۱ و  $a^2 + b^2$  در  $N$  می‌باشند؛ لذا  $a^2 + b^2$  عددی است اول. ثانیاً اگر  $a^2 + b^2$  اول باشد  $a + bi$  نیز اول است. فرض می‌کنیم چنین نباشد، یعنی  $a + bi$  اول نباشد؛ پس می‌توان نوشت  $a + bi = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)$  اکنون  $a - bi = (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i)$  لذا

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (a + bi)(a - bi) \\ &= (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)(a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i) \\ &\Rightarrow a^2 + b^2 = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \end{aligned}$$

که این خلاف اول بودن  $a^2 + b^2$  می‌باشد. لذا  $a + bi$  در  $Z[i]$  اول است. پس به طور کلی مجموعه اعداد اول مختلط صحیح،  $P$ ، را می‌توان به شکل زیر نمایش داد:

$$P = \{4k + 3 \in N \mid 4k + 3 \text{ اول است}\} \cup \{a + bi \mid a^2 + b^2 \text{ اول است}\}$$

با این قضیه‌ها،  $Z[i]$  نیز دقیقاً همان خواص  $Z$  را داراست که مهمترین آنها قضیهٔ یکتایی تجزیه است که به همان شکل بیان می‌شود؛ تجزیهٔ عدد مختلط  $z$  عبارتست از نوشتن آن به صورت حاصل ضربی از عوامل اول  $Z[i]$  یا توانهای آنها.

● قضیه ۹-۸ (یکتایی تجزیه)

اگر  $\Pi x_i$  و  $\Pi y_i$  دو تجزیهٔ عدد  $m \in Z[i]$  باشند آنگاه  $x_i$ ها و  $y_i$ ها با تقریب یک عامل یک مساویند (یعنی هر  $x_i$  برابر است با یکی از  $y_i$ ها یا ضرب یکی از  $y_i$ ها در یکی از یک‌های  $Z[i]$ ) و برعکس.

■ مثال ۹-۲

ثابت کنید اگر  $a^2 + b^2 \mid c^2 + d^2$  آنگاه  $c^2 + d^2 = u^2 + v^2$

به عبارت دیگر، حاصل تقسیم مجموع دو مربع کامل به مجموع دو مربع کامل، اگر عدد صحیح باشد، مجموع دو مربع کامل است.

حل. دوباره به این نکته توجه می‌کنیم که اگر  $x + yi \mid a + bi$ ، آنگاه  $x - yi \mid a - bi$ ؛ لذا  $a^2 + b^2 = \Pi x_i \Pi \bar{x}_i = \Pi y_i \Pi \bar{y}_i$ ، و در نتیجه ( $x_i$ ها و  $y_i$ ها همگی اول‌اند)  $A = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2} = \frac{(x_1, x_2, \dots, x_n)(\bar{x}_1, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}{(y_1, y_2, \dots, y_m)(\bar{y}_1, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m)}$  برای آنکه  $A$  در  $Z[i]$  باشد باید به ازای هر  $y_i$ ، یک  $x_j$  یا  $\bar{x}_j$  برابر  $y_i$  وجود داشته باشد؛ فرض کنیم  $x_j = y_i$ . در نتیجه خواهیم داشت  $\bar{x}_j = \bar{y}_i$ ، و لذا  $A$  به صورت

$$\underbrace{(t_1 t_2 \dots t_l)}_i \underbrace{(\bar{t}_1 \bar{t}_2 \dots \bar{t}_l)}_{\bar{i}}$$

خواهد بود که به ازای هر  $i$ ،  $t_i$  جای هست به طوری که  $t_i = x_j$  بنا بر این

$$A = t \bar{t} \Rightarrow A = u^2 + v^2$$

و یا (به شرط آنکه  $a^2 + b^2 \mid c^2 + d^2$ )،  $c^2 + d^2 = u^2 + v^2$ .

تمرین

۱. ثابت کنید اگر  $a^2 + b^2 \mid a + ab + 1$  آنگاه  $k^2 = \frac{a^2 + b^2}{1 + ab}$ .

۲. فرض کنیم  $d < c < b < a$  که  $a, b, c, d$  اعدادی طبیعی و فرد هستند و  $ad = bc$ .

ثابت کنید اگر  $a + d = 2^m$  و  $b + c = 2^n$ ، آنگاه  $a = 1$ .

۳. با استفاده از خواص  $Z[i]$  ثابت کنید معادلهٔ  $a^2 + b^2 = c^2$  در  $N$  جواب ندارد.

## هندسه

بعضی مسائل مربوط به خطوط هم‌رس و نقطه‌های واقع بر یک خط راست با بررسی مسأله‌های هندسی‌ای که در المپیادهای مختلف مطرح شده‌اند می‌توان دریافت که مسأله‌های مربوط به خطوط متقارب و نقطه‌های همخط، قسمت بزرگی از این مسائل را به خود اختصاص داده‌اند.

برای حل این نوع مسائل روشهای متعددی وجود دارد که از جمله آنها می‌توان به روشهای کلاسیک هندسی، روشهای برداری و تبدیلات هندسی اشاره کرد. در این قسمت منظور از روشهای «کلاسیک» هندسی روشهایی هستند که از قضایای مشهور هندسه مسطحه مانند قضایای سیوا، منلائوس و غیره نتیجه می‌شوند. در این فصل به این روش‌ها خواهیم پرداخت. این فصل به سه بخش تقسیم شده است. در بخش ۱ به چند قضیه کلاسیک که معمولاً مورد استفاده قرار می‌گیرند خواهیم پرداخت. بخش ۲ در مورد زیرمیانها و نقاط بروکار در مثلث و ارتباط آنها با یکدیگر خواهد بود؛ در این بخش از بعضی نتایج به دست آمده در بخش قبل استفاده می‌شود. بخش آخر نیز به‌طور طبیعی به مسائل اختصاص داده شده است. تعداد مسائل پیشنهاد شده در این قسمت خیلی زیاد نیست ولی با وجود این، مسائل در درجه‌های متفاوتی از دشواری قرار دارند. بعضی از آنها نتایج مفیدی هستند که اغلب به‌عنوان لم به‌کار می‌روند، و بعضی دیگر خود مسائلی مبارز طلب‌اند. علاوه بر این مسائل، در بخش‌های ۱ و ۲ نیز مسائلی به‌عنوان «مثال» ارائه شده‌اند. حل تمام این مسائل که بعضی با راهنمایی‌هایی نیز همراه هستند به‌عنوان تمرین برای خواننده هوشمند باقی گذارده شده است. در اینجا توضیحی نیز در مورد بخش ۲ ضروری به نظر می‌رسد؛ همان طور که قبلاً نیز اشاره شد، این قسمت در مورد زیرمیانها و نقاط بروکار مثلث خواهد بود؛ در واقع شاید هیچگاه مسأله‌ای در مورد مثلاً زیرمیان در هیچ المپیادی مطرح نشود، اما در این قسمت برای استخراج نتایج، روشهای قدرتمندی به‌کار گرفته شده است که می‌تواند در بسیاری مسائل

دیگر بدون تغییر به کار برده شوند.

### ۱-۱۰ چند قضیه

#### ۱-۱-۱۰ قضیه سوا

الف) شکل پاره خطی

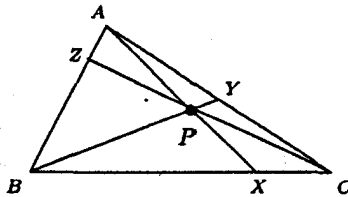
#### ▲ تعریف ۱-۱۰

پاره خط سواپی، پاره خطی است که یک رأس مثلث را به نقطه‌ای داخلی از ضلع مقابل آن متصل می‌کند.

#### ● قضیه ۱-۱۰

در مثلث  $ABC$ ، سه خط سواپی  $AX$ ،  $BY$ ،  $CZ$  متقارب‌اند اگر و تنها اگر

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$$



شکل ۱-۱۰

اثبات. داریم

$$\frac{S_{ABX}}{S_{ACX}} = \frac{BX}{XC}, \quad \frac{S_{PBX}}{S_{PXC}} = \frac{BX}{XC}$$

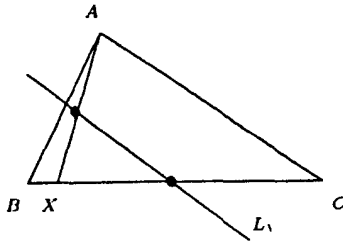
$$\frac{S_{APB}}{S_{APC}} = \frac{S_{ABX} - S_{PBX}}{S_{ACX} - S_{PXC}} = \frac{BX}{XC}$$

حال اگر همین رابطه را برای  $Y$  و  $Z$  نیز بنویسیم و در هم ضرب کنیم یک طرف قضیه ثابت می‌شود. برای اثبات عکس هم می‌توان به سادگی از برهان خلف کمک گرفت.

#### ■ مثال ۱-۱۰

(مرحله اول ۶۹-۷۰). اگر  $AX$ ،  $BY$ ،  $CZ$  را سه خط سواپی متقارب بگیرید. اگر  $L_1$  خط واصل بین وسط  $AX$  و وسط  $BC$  باشد، آنگاه  $L_1$  و  $L_2$  و  $L_3$  متقارب‌اند. ( $L_2$  و  $L_3$  هم مانند  $L_1$  تعریف می‌شوند)

(راهنمایی: مثلث میانه‌ای را رسم کنید.)



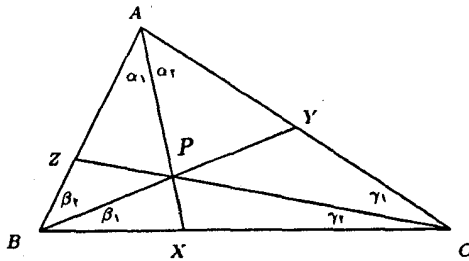
شکل ۲-۱۰

ب) شکل زاویه‌ای

● قضیه ۲-۱۰

در مثلث  $ABC$ ، خطوط  $AX$ ،  $BY$  و  $CZ$  متقاربانند اگر و تنها اگر

$$\frac{\sin \alpha_1 \cdot \sin \beta_1 \cdot \sin \gamma_1}{\sin \alpha_2 \cdot \sin \beta_2 \cdot \sin \gamma_2} = 1$$



شکل ۳-۱۰

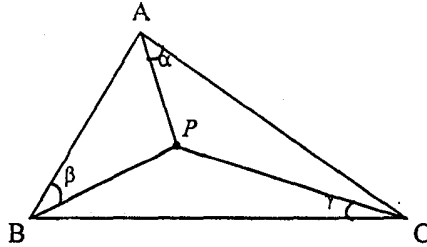
اثبات. اگر در مثلث‌های  $APB$ ،  $APC$  و  $BPC$  قضیه سینوس‌ها را بنویسیم و در هم ضرب کنیم حکم به سادگی نتیجه می‌شود.

■ مثال ۲-۱۰

در شش ضلعی محدب  $AB_1CA_1BC_1$  زوایای  $A_1$  و  $B_1$  و  $C_1$  هر کدام  $۱۲۰^\circ$  هستند و  $BA_1 = A_1C$  و  $CB_1 = B_1A$  و  $AC_1 = C_1B$ . نشان دهید اقطار این شش ضلعی متقاربانند.

■ مثال ۳-۱۰

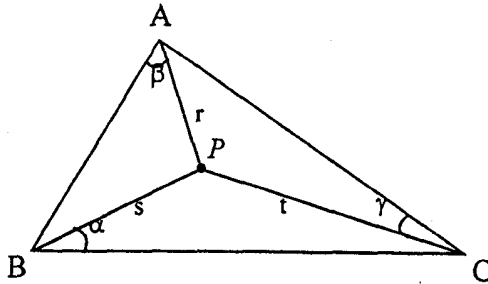
(IMO, ۱۹۹۱) در شکل زیر نشان دهید از میان زوایای  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  حتماً یکی کمترین مساوی



شکل ۴-۱۰

(راهنمایی: فرض کنید هر سه از  $30^\circ$  بیشتر باشند؛ از قضیه سوا استفاده کنید و سپس نامساوی  $\sin X \cdot \sin Y \cdot \sin Z \leq \sin^2 \frac{X+Y+Z}{3}$  را به کار ببرید.)

یادداشت. این مسأله راه‌های متعددی دارد، مثلاً درستی آن را به سادگی می‌توان از خواص نقطه بروکار نتیجه گرفت. همچنین این حکم یک نتیجه بديهی نامساوی اردیش-موردل است و در ضمن برای تحقیق درستی آن روش زیر را نیز می‌توان به کار برد: در  $APC$  و  $APB$  و  $BPC$  قضیه کسینوس‌ها را می‌نویسیم و جمع می‌کنیم؛ به دست می‌آید



شکل ۵-۱۰

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 2as \cos \alpha + 2tb \cos \gamma + 2rc \cos \beta \\ &= 2(S_1 \cot \alpha + S_2 \cot \beta + S_3 \cot \gamma) \end{aligned}$$

اگر  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  هر سه از  $30^\circ$  بیشتر باشند آنگاه

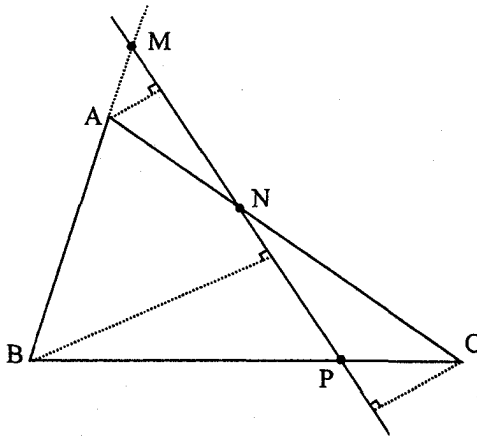
$$a^2 + b^2 + c^2 < 4\sqrt{3}(S_1 + S_2 + S_3) = 4\sqrt{3}S$$

که با رابطه مشهور  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$  تناقض دارد.

● قضیه ۱۰-۳

در مثلث  $ABC$  فرض کنید  $MNP$  یک قاطع دلخواه باشد در این صورت

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{NA}} = -1$$

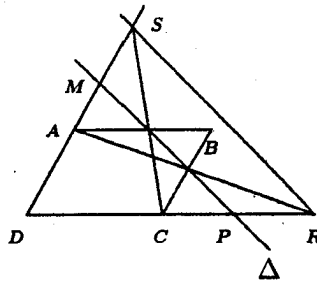


شکل ۱۰-۶

اثبات. از  $A, B, C$  عمودهایی بر  $MNP$  رسم می‌کنیم. حال اگر از قضیه تالس استفاده کنیم حکم نتیجه می‌شود. ●

■ مثال ۱۰-۴

(مرحله دوم ۷۰-۶۹)  $ABCD$  یک متوازی‌الاضلاع و  $\Delta$  یک قاطع آن است نشان دهید  $RS \parallel \Delta$ .



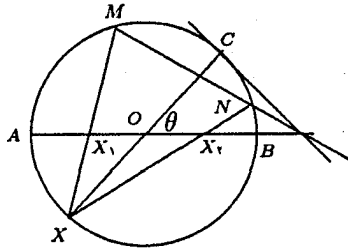
شکل ۱۰-۷

(راهنمایی: در مثلث  $MPD$ ، برای دو قاطع  $RA$  و  $SC$  قضیه منلائوس را بنویسید و با هم مقایسه کنید.) ■

■ مثال ۱۰-۵

$AB$  یک قطر دایره داده شده است و  $OX_1 = OX_2$  و  $X$  نقطه‌ای دلخواه روی دایره است. نشان دهید  $MN$  و  $AB$  و مماس بر دایره در نقطه  $C$  متقاربانند. (راهنمایی: اگر  $D$  محل برخورد  $MN$  با  $AB$  باشد نشان دهید

$$OD = \frac{R}{\cos \theta} \quad \text{و} \quad R = \frac{AB}{2}$$



شکل ۱۰-۸

۱۰-۱-۳ قضیه دزارگ

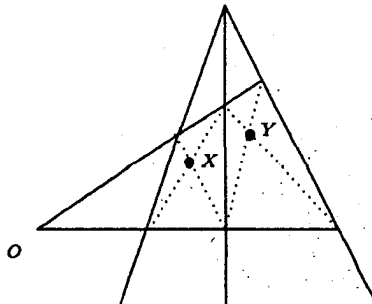
دو مثلث  $ABC$  و  $A_1B_1C_1$  را دارای مرکز همسانی گویند وقتی که جایگشتی از  $A_1B_1C_1$  مانند  $A'B'C'$  وجود داشته باشد که خطوط  $AA'$  و  $BB'$  و  $CC'$  هم‌مس باشند. متناظراً دو مثلث را دارای محور همسانی گویند اگر  $AB \cap A'B'$  و  $AC \cap A'C'$  و  $BC \cap B'C'$  روی یک خط راست باشند.

● قضیه ۱۰-۴

دو مثلث  $ABC$  و  $A'B'C'$  دارای محور همسانی هستند اگر و تنها اگر دارای مرکز همسانی باشند. اثبات. به عهده خواننده. (راهنمایی: از قضیه منلائوس استفاده کنید).

■ مثال ۱۰-۶

نشان دهید  $O$  و  $X$  و  $Y$  روی یک خط راست قرار دارند.

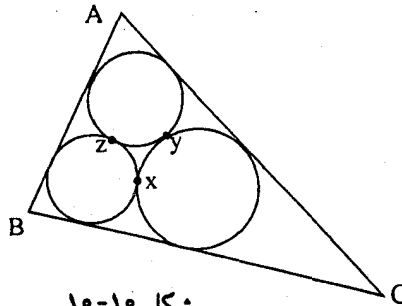


شکل ۱۰-۹



■ مثال ۱۰-۷

سه دایره درون مثلث  $ABC$  در نظر می‌گیریم به گونه‌ای که دوه‌دو برهم و بر اضلاع مثلث مماس باشند، نشان دهید  $AX$ ،  $BY$  و  $CZ$  متقارب هستند، که در آن  $X$ ،  $Y$  و  $Z$  محل‌های تماس دوایر با یکدیگر می‌باشند. (راهنمایی: برای دو مثلث  $ABC$  و  $XYZ$  از قضیه دزارگ استفاده کنید. در ضمن توجه به این نکته نیز مهم است که اگر سه شکل دو به دو مجانس را در نظر بگیریم، مراکز تجانس آنها روی یک خط راست هستند.)



شکل ۱۰-۱۰

۱۰-۱-۴ قضیه پاسکال و قضیه بریانشن

● قضیه ۱۰-۵ (پاسکال)

در هر شش ضلعی محاطی دلخواه، محل تلاقی اضلاع مقابل روی یک خط راست هستند. اثبات. اگر به قطب مرکز دایره یک تبدیل قطبی بدهیم نتیجه می‌شود که قضیه پاسکال معادل قضیه زیر است که موسوم به قضیه بریانشن می‌باشد.

● قضیه ۱۰-۶

در هر شش ضلعی محیطی قطرها هم‌برس‌اند.

لم ۱.

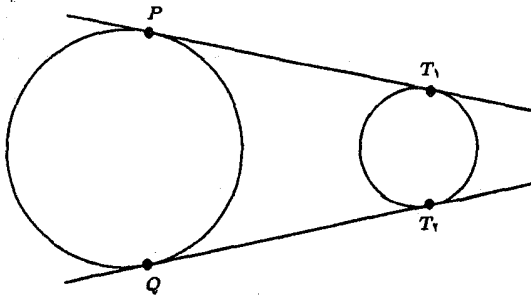
اگر در نقاط  $P$  و  $Q$  بر دایره  $C$  دو مماس  $PT_1$  و  $QT_2$  را در یک طرف طوری رسم کنیم که  $PT_1 = QT_2$  آنگاه می‌توان دایره‌ای رسم کرد که در نقاط  $T_1$  و  $T_2$  بر  $PT_1$  و  $QT_2$  مماس باشد. اثبات. تمرین.

حال با استفاده از این لم به اثبات قضیه بریانشن می‌پردازیم:

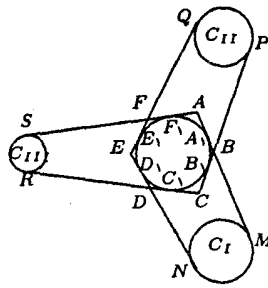
در شش ضلعی محیطی  $ABCDEF$  اضلاع را به گونه‌ای امتداد می‌دهیم که

$$A_1M = D_1N = B_1P + E_1Q = C_1R + F_1S$$

در این صورت اگر مطابق لم دوایر  $C_I$ ،  $C_{II}$  و  $C_{III}$  را رسم کنیم به آسانی دیده می‌شود که  $BE$  محور اصلی دو دایره  $C_I$  و  $C_{II}$ ، محور اصلی دو دایره  $C_I$  و  $C_{III}$  و  $FC$  محور



شکل ۱۱-۱۰



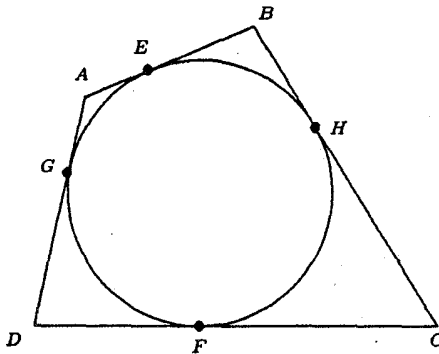
شکل ۱۲-۱۰

اصلی دو دایره  $C_{II}$  و  $C_{III}$  است، و بنابراین این خطوط باید در مرکز اصلی سه دایره متقارب باشند.

خواننده می‌تواند اثبات‌های دیگری برای قضایای پاسکال و بریانشن در مراجع مذکور در کتابنامه ببیند.

■ مثال ۱۰-۸

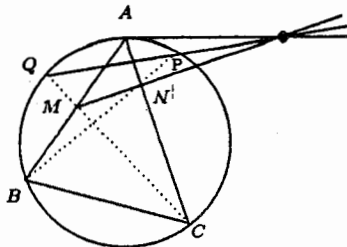
در شکل زیر نشان دهید  $AC, BD, EF, GH$  متقارب‌اند.



شکل ۱۳-۱۰

■ مثال ۱۰-۹

در شکل زیر  $ABC$  یک مثلث دلخواه محاط در دایره  $C$ ، و  $M$  و  $N$  نقاطی دلخواه بر اضلاع مثلث هستند نشان دهید که  $MN$  و  $PQ$  و مماس بر دایره در نقطه  $A$  متقارب‌اند.



شکل ۱۰-۱۴

(راهنمایی: از قضیه پاسکال استفاده کنید!)

۱۰-۲ زیرمیانها و نقطه‌های بروکار در مثلث

۱۰-۲-۱ زیرمیانها

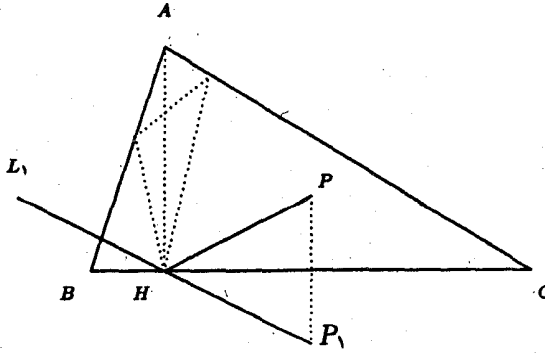
به‌عنوان کاربردی ساده از بعضی مطالب عنوان شده در بخش اول می‌توان به مفهوم مزدوج نیمساز و میانهای اشاره کرد.

فرض کنیم در مثلث  $ABC$  سه خط  $AX$ ،  $BY$  و  $CZ$  متقارب باشند. قرینه  $AX'$  نسبت به نیمساز زاویه  $A$  را  $AX'$  می‌گیریم و  $BY'$  و  $CZ'$  را نیز به همین ترتیب تعریف می‌کنیم. در این صورت از قضیه سوا به سادگی نتیجه می‌شود که  $AX'$ ،  $BY'$  و  $CZ'$  نیز متقاربند. (مزدوج نیمساز) مشابه همین مطلب نیز در مورد پاره‌خطهای سوایی  $AX$ ،  $AY$  و  $CZ$  وقتی که قرینه  $X$ ،  $Y$ ،  $Z$  را نسبت به وسط اضلاع در نظر بگیریم، برقرار است. فرض کنیم  $P$  محل تقارب  $AX$ ،  $BY$  و  $CZ$ ، و  $P'$  محل تقارب  $AX'$ ،  $BY'$  و  $CZ'$  باشد. یک مسأله جالب می‌تواند این باشد که در حالت مزدوج میانهای  $AX$ ،  $BY$  و  $CZ$  به چه وضعی باشند تا  $P$ ،  $P'$  و  $G$  (مرکز ثقل مثلث) روی یک خط راست قرار بگیرند؟

مثال بعدی نیز مسأله جالبی است که با استفاده از مفاهیم فوق راه‌حلی نسبتاً ساده پیدا می‌کند ولی بدون توجه به این نکات می‌تواند مسأله مشکلی باشد.

■ مثال ۱۰-۱۰

$P$  را نقطه‌ای درون مثلث  $ABC$ ، و  $H$  را پای ارتفاع نظیر  $BC$  بگیرید. قرینه  $P$  نسبت به  $BC$  بدست آورده  $L_1$  را امتداد واصل بین آن و  $H$ ، مرکز ارتفاعی مثلث، فرض می‌کنیم. اگر  $L_2$ ،  $L_2$  را نیز به همین ترتیب تعریف کنیم نشان دهید که  $L_1$ ،  $L_2$  و  $L_3$  متقاربند.



شکل ۱۰-۱۵

حل. در واقع  $L_1$  قرینه  $PH$  نسبت به  $AH$  است؛ حال اگر مثلث ارتفاعی  $H_1H_2H_3$  را در نظر بگیریم، سه خط  $PH_1, PH_2, PH_3$  در نقطه  $P$  متقارب‌اند.  $L_2$  قرینه  $PH_3$  نسبت به  $A_1H_1$  است. اکنون کافی است توجه کنیم که در مثلث ارتفاعی، نیمسازها ارتفاعهای مثلث اصلی هستند.

تمرین

۱. مسأله فوق را تعمیم دهید.

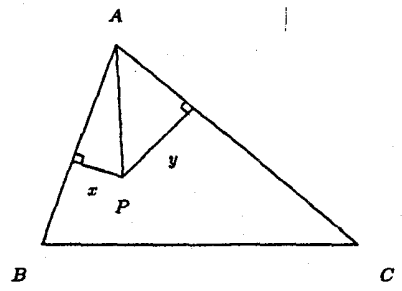
اکنون به یک حالت خاص از مزدوج نیمسازی می‌پردازیم.

زیر میانه: مزدوج نیمسازی میانه را زیر میانه می‌نامیم. محل هم‌رسی زیر میانه‌ها را نقطه زیر میانه‌ای نامیده با  $K$  نشان می‌دهیم.

● قضیه ۱۰-۷

$AP$  زیرمیانه است اگر و تنها اگر

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{b}$$



شکل ۱۰-۱۶

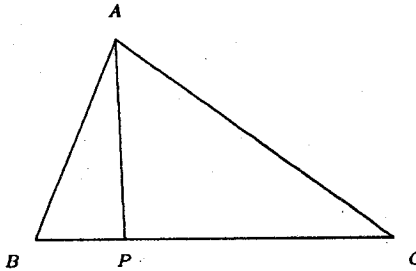
اثبات. اگر  $AP$  زیرمیانه باشد،  $AA'$  مزدوج نیمسازی هستند.  $A'$  وسط  $BC$  است) در نتیجه  $\frac{x}{y} = \frac{c}{b} = \frac{c}{b}$ .

● قضیه ۱۰-۸

اگر  $AP$  زیرمیانها باشد ( $P \in BC$ ) آنگاه

$$\frac{BP}{PC} = \frac{c^2}{b^2}$$

و برعکس.



شکل ۱۰-۱۷

اثبات. از قضیه قبل استفاده کنید.

نتیجه. برای فواصل  $K$  از سه ضلع، یعنی  $x, y$  و  $z$  داریم

$$x : y : z = a : b : c$$

و برعکس.

چند کاربرد:

۱. می‌دانیم که نقطه فرما در مثلث، نقطه‌ای است که مجموع فواصلش از سه رأس مینیموم است. به همین ترتیب ثابت می‌شود که  $K$  نقطه‌ای است که مجموع مربعات فواصل آن از سه ضلع مینیموم است.

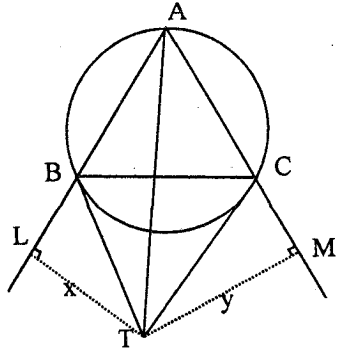
۲. در مثلث قائم‌الزاویه،  $K$  نقطه وسط ارتفاع وارد بر وتر است.

● قضیه ۱۰-۹

دایره محیطی  $ABC$  را در نظر می‌گیریم. اگر در  $B$  و  $C$  بر دایره محیطی دو مماس رسم کنیم تا همدیگر را در  $T$  قطع کنند.  $AT$  زیر میانها است.

اثبات. تمرین. (راهنمایی: قضیه ۷ را به کار ببرید.)

نقطه ژرگن. اگر دایره محیطی مثلث  $ABC$  به ترتیب در نقاط  $D, E$  و  $F$  بر اضلاع  $BC, AC, AB$  مماس باشد، به سادگی دیده می‌شود که پاره‌خطهای  $AD, BE$  و  $CF$  در نقطه‌ای در داخل مثلث متقاطع‌اند. این نقطه را نقطه ژرگن مثلث  $ABC$  می‌نامیم.

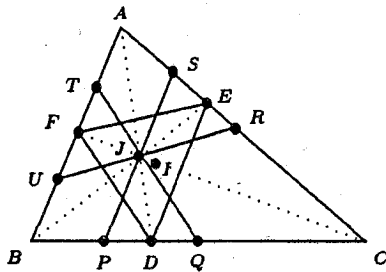


شکل ۱۸-۱۰

۴) با نامگذاریهای تعریف فوق، نقطه ژرگن مثلث  $ABC$  همان نقطه زیرمیانهای مثلث  $DEF$  است. اثبات. بنابر (۳) حکم ثابت است.

دایرهٔ آدامز (Adams)

$J$  را نقطه ژرگن،  $DEF$  را «مثلث ژرگن» مثلث  $ABC$  فرض می‌کنیم. از سه خط به موازات اضلاع مثلث  $DEF$  رسم می‌کنیم تا مثلث را در شش نقطه  $T, S, R, Q, P, U$  قطع کنند. در این صورت



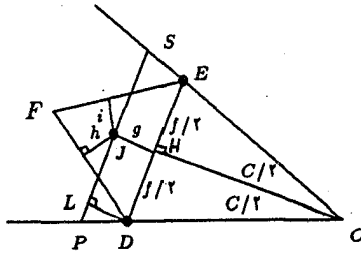
شکل ۱۹-۱۰

● قضیه ۱۰-۱۰

شش نقطه حاصل، روی یک دایره به مرکز  $I$  (مرکز دایره محاطی مثلث) واقع‌اند. (این دایره را دایرهٔ آدامز مثلث  $ABC$  می‌نامیم).

اثبات. داریم  $IP^2 = TD^2 + PD^2 = r^2 + PD^2$  را محاسبه می‌کنیم.  $CD$  و  $CE$  مماسهای مساوی بر دایرهٔ محاطی هستند، پس  $CDE$  متساوی‌الساقین است. می‌دانیم که  $CD = P - c$  (نصف محیط است)

$DL$  را عمود بر  $PS$  می‌گیریم. طول آن، یعنی  $g$ ، فاصلهٔ بین خطهای موازی  $DE$  و  $PS$  است و در نتیجه برابر همان فاصلهٔ نقطهٔ  $J$  تا  $DE$  است. اما  $J$  در واقع نقطه زیرمیانهای مثلث  $DEF$



شکل ۱۰-۲۰

است، پس

$$\frac{i}{EF} = \frac{h}{FD} = \frac{g}{ED} = t, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

ارتفاع مثلث متساوی‌الساقین CDE است، و

$$DH = \frac{1}{2}f = (p - c) \sin(C/2) \Rightarrow f = 2(p - c) \sin(C/2)$$

$$\begin{aligned} \triangle DPL : PD &= tf / \cos(C/2) = 2t(p - c) \operatorname{tg}(C/2) \\ &= 2t(p - c) \frac{r}{p - c} \\ &= 2tr \end{aligned}$$

در نتیجه  $PD = 2tr$  و نیز

$$IP^2 = r^2 + 4t^2 r^2 = r^2(1 + 4t^2)$$

- به نظر می‌آید که باقی کار را می‌توان به عنوان تمرین برای خواننده باقی گذاشت!

لم ۲.

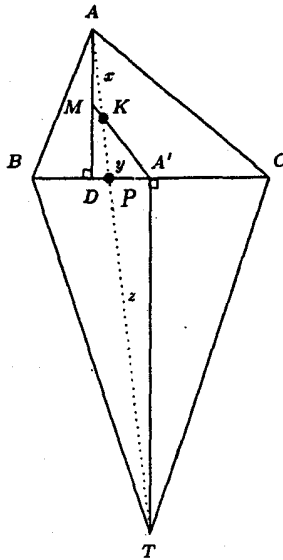
در مثلث  $ABC$ ،  $AL$  و  $AM$  را مزدوج نیمساز می‌فرض کرده‌ایم. از نقطه دلخواه  $X$  روی  $AM$  عمودهایی بر  $AB$  و  $AC$  رسم می‌کنیم تا  $Y$  و  $Z$  به دست آیند. در این صورت  $YZ \perp AL$ . اثبات. تمرین.

لم ۳.

$K$  را مطابق معمول نقطه زیرمیانهای مثلث  $ABC$  می‌گیریم. در این صورت  $AB$ ،  $AC$  و  $AK$  و مماس بر دایره محیطی مثلث  $ABC$  از نقطه  $A$  چهار شعاع یک دستگاه توافقی هستند. اثبات. تمرین. (راهنمایی: قضیه ۱۰-۸ را به کار ببرید.)

● قضیه ۱۰-۱۱

از  $A'$ ، وسط  $AC$ ، به  $K$  (نقطه زیر میانهای) در مثلث  $ABC$  وصل می‌کنیم در این صورت امتداد  $A'K$  ارتفاع  $AD$  را نصف می‌کند.



شکل ۱۰-۲۱

اثبات. مثلثهای  $PA'T, ADP$  مشابه هستند در نتیجه

$$DAP = PTA' \quad \text{و} \quad \frac{AD}{A'T} = \frac{AP}{PT} \quad (۱)$$

مثلثهای  $AMK$  و  $KA'T$  نیز مشابه اند پس

$$\frac{AM}{A'T} = \frac{AK}{KT} \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می شود که

$$\frac{AM}{AD} = \frac{AK.PT}{KT.AP}$$

نشان می دهیم که نسبت اخیر مساوی  $\frac{1}{2}$  است. بنابر لم (۲)

$$\frac{AK}{KP} = \frac{AT}{TP} \quad (\text{تقسیم توافقی})$$

اگر قرار دهیم  $AK = x$  و  $KP = y$ ،  $PT = z$ ، رابطه فوق تبدیل می شود به

$$xz = y(x + y + z)$$

اکنون

$$\begin{aligned} \frac{AK.PT}{KT.AP} &= \frac{xz}{(y+z)(x+y)} = \frac{xz}{xy + y^2 + yz + xz} \\ &= \frac{xz}{y(x+y+z) + xz} = \frac{xz}{xz + xz} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



▲ تعریف ۱۰-۲

مثلث عمودی نقطه  $P$  در مثلث  $ABC$ ، مثلث حاصل از پای عمودهایی است که از نقطه  $P$  بر اضلاع مثلث وارد می‌شود. مثلاً مثلث ارتفاعی، مثلث عمودی نقطه  $H$  (محل هم‌رسی ارتفاع‌ها) است، یا مثلث میانه‌ای مثلث عمودی نقطه  $O$  (مرکز دایره محیطی) است. ▲

▲ تعریف ۱۰-۳

دو نقطه  $P$  و  $Q$  را در مثلث  $ABC$  مزدوج یا هم زاویه گویند هرگاه  $AP$  با  $AQ$ ،  $BP$  با  $BQ$  و  $CP$  با  $CQ$  مزدوج نیمساز می‌باشند. ▲

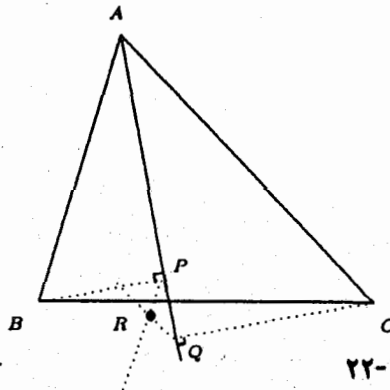
● قضیه ۱۰-۱۲

اگر دو نقطه  $P$  و  $Q$  در مثلث  $ABC$  مزدوج باشند آنگاه رئوس مثلثهای عمودی وابسته به این دو نقطه، شش نقطه هستند واقع بر دایره‌ای به مرکز  $M$ . ( $M$  نقطه وسط  $PQ$  است) اثبات. تمرین. (راهنمایی: ابتدا نقاط و خطوط وابسته به رأس  $A$  را در نظر بگیرید سپس از لم ۱ استفاده کنید). ●

تمرین

۱. نشان دهید اضلاع مثلث عمودی نقطه  $K$  (مرکز میانه‌ای)، متناسب‌اند با میانه‌های مثلث.
۲. نشان دهید نقطه  $K$  مرکز ثقل مثلث عمودی خودش است. آیا عکس مطلب هم درست است؟
۳. نتایج ۱ و ۲ی قضیه ۱۰-۸ را اثبات کنید.

۴. در مثلث  $ABC$ ، عمودهایی از  $B$  و  $C$  بر نیمساز زاویه  $A$  رسم کرده‌ایم تا آن را در  $P$  و  $Q$  قطع کنند. مطابق شکل از  $P$  به موازات  $AB$  و از  $Q$  به موازات  $AC$  خطوطی کشیده‌ایم



شکل ۱۰-۲۲

این دو خط همدیگر را در  $R$  قطع کرده‌اند. نشان دهید  $AR$  زیرمیانها است.

۵.  $K$  را نقطه زیرمیانهای مثلث  $ABC$  بگیرید. خطوط  $AK$  و  $BK$  دایره محیطی مثلث  $ABC$  را در  $D, E$  و  $F$  قطع کرده‌اند. نشان دهید نقطه زیرمیانهای مثلث  $DEF$ ، همان نقطه  $K$  است.

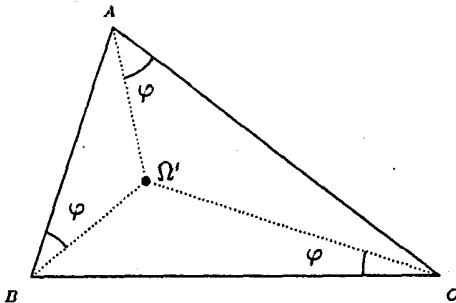
۶. سه دایره  $C_1, C_2, C_3$  به مراکز  $O_1, O_2, O_3$  را متناظر با مثلث  $A_1A_2A_3$  به این صورت در نظر گرفته‌ایم که دایره  $C_i$  از  $G$  (مرکز ثقل مثلث) و دو رأس  $A_i$  و  $A_j$  می‌گذرد ( $i \neq j, j \neq k, i \neq k$ ) نشان دهید

الف) نقطه  $O$  (مرکز دایره محیطی مثلث  $A_1A_2A_3$ ) همان مرکز ثقل  $O_1O_2O_3$  است.  
 ب) نقطه  $G$  (مرکز ثقل  $A_1A_2A_3$ ) نقطه زیرمیانهای مثلث  $O_1O_2O_3$  است.

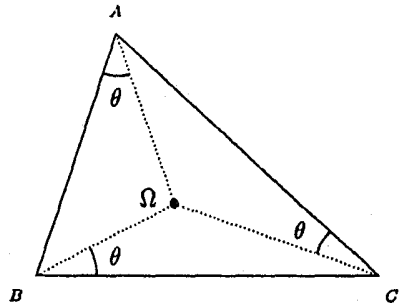
### ۱۰-۲-۲ نقاط بروکار در مثلث (Brocard points)

#### ▲ تعریف ۱۰-۲

در دو شکل زیر که در آنها سه زاویه  $\theta$  مشخص شده با هم، و سه زاویه  $\varphi$  مشخص شده نیز با هم مساوی هستند، نقاط  $\Omega$  و  $\Omega'$  را نقاط بروکار مثلث  $ABC$  می‌نامیم.



شکل ۱۰-۲۴



شکل ۱۰-۲۳



#### تمرین

۱. روشی هندسی برای پیدا کردن نقاط بروکار ارائه دهید.

#### ● تضییع ۱۰-۱۳

با نمادگذاری‌های تعریف فوق داریم  $\theta = \varphi$ . یعنی دو نقطه بروکار مثلث،  $\Omega$  و  $\Omega'$ ، مزدوج هستند. اثبات. نشان دهید  $\cot \theta = \cot \varphi = \cot A + \cot B + \cot C$ . و این نشان

خواهد داد که  $\theta = \varphi$ . از اینجا به بعد این مقدار مشترک را با  $\omega$  نشان می‌دهیم.



یک کاربرد: زاویه بروکار ماکزیمم اگر در تساوی  $\cot g \omega = \cot g A + \cot g B + \cot g C$  برای طرف راست، نامساوی ینسن را به کار ببریم نتیجه می‌شود که  $\cot g \omega \geq \sqrt{3}$  و از اینجا  $\omega \leq 30^\circ$ . تساوی نیز در حالت مثلث متساوی‌الاضلاع اتفاق می‌افتد.

تمرین

۱. (روشی دیگر برای مشخص کردن زاویه بروکار ماکزیموم) نشان دهید

$$\cot g \omega = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$$

حال از رابطه

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

نتیجه می‌شود که  $\omega \leq 30^\circ$ .

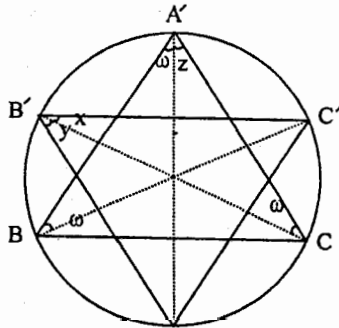
۲. با استفاده از مطالب فوق روش حل دیگری برای مثال ۱۰-۳ ارائه دهید.

لم ۴

فرض کنید  $\Omega$  نقطه بروکار مثلث  $ABC$  باشد.  $A\Omega$ ،  $B\Omega$  و  $C\Omega$  را امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی مثلث را در  $A'$ ،  $B'$  و  $C'$  قطع کنند. در این صورت دو مثلث  $ABC$  و  $A'B'C'$  قابل انطباق‌اند.

اثبات. داریم

$$A' = x + y = \omega + z = A$$



شکل ۱۰-۲۵

و به همین ترتیب  $B = B'$  و  $C = C'$  و چون شعاع دایره محیطی دو مثلث  $ABC$  و  $A'B'C'$  مساویند، دو مثلث قابل انطباق‌اند. به سادگی دیده می‌شود که  $A'B'C'$  از دوران  $ABC$  به اندازه  $2\omega$  به دست آمده است. از طرف دیگر می‌توان دید که هر نقطه بروکار  $ABC$  یک نقطه بروکار  $A'B'C'$  است و برعکس. از اینجا نتیجه زیر به دست می‌آید

گزاره:

الف)  $\widehat{\Omega O} = \Omega' O$ ؛

ب)  $\widehat{\Omega O \Omega'} = 2\omega$ .

تمرین

۱. نشان دهید هر نقطه بروکار، نقطه بروکار مثلث عمودی خودش است.

دو قضیه بعدی به ارتباطهای موجود بین نقاط بروکار و نقطه زیرمیانه‌ای مثلث خواهند پرداخت.

● قضیه ۱۰-۱۴

چهار نقطه  $\Omega, \Omega', O, K$  روی دایره‌ای به قطر  $KO$  واقع‌اند.اثبات. برای فواصل  $x, y, z$  و نقطه  $K$  از سه ضلع داشتیم

$$x = at, \quad y = bt, \quad z = ct$$

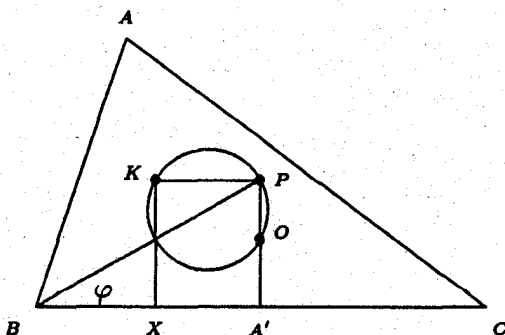
از طرف دیگر

$$ax + by + cz = 2S$$

$$\Rightarrow t = \frac{2S}{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow \frac{a}{2x} = \cotg \omega$$

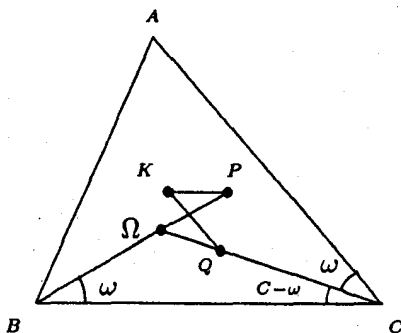
عمود منصف  $BC$  دایره به قطر  $KO$  را در  $O$  و  $P$  قطع می‌کند. چون  $KO$  قطر استنتیجه می‌شود که  $\widehat{KPO} = 90^\circ$  و در نتیجه  $KPA'X$  یک مستطیل خواهد بود و از آنجادر نتیجه  $x = KX = PA'$ 

$$\cotg \varphi = \frac{a}{2PA'} = \frac{a}{2x} = \cotg \omega$$



از اینجا نتیجه می‌شود که نقطه بروکار جایی روی خط  $BP$  است. در وضعیت مشابه فرض کنید که عمود منصف  $AC$  دایره به قطر  $KO$  را بجز  $O$  در  $Q$  قطع کند، مشابهاً  $\widehat{QCA} = \omega$  و  $KQ \parallel AC$ . در نتیجه  $\Omega$  محل تلاقی  $BP$  و  $CQ$  است.

می‌دانیم که  $KQ \parallel AC$ ،  $KP \parallel BC$ ؛ از اینجا نتیجه می‌شود که  $\widehat{PKQ} = C$  و چون  $\widehat{PPQ} = c - \omega$  به دست می‌آید  $\widehat{P\Omega C} = \omega + (c - \omega) = C$  از اینجا نتیجه می‌شود که  $PK\Omega Q$  محاطی است (در دایره‌ای مانند  $\Gamma$ ) ولی  $O$  نیز روی همین دایره قرار دارد. برای  $\Omega'$  نیز به طریق مشابه حکم ثابت می‌شود.



شکل ۱۰-۲۷

● قضیه ۱۰-۱۵

میانۀ نظیر یک رأس، زیرمیانۀ نظیر رأس دوم، و خط بروکار نظیر رأس سوم هم‌مس هستند. (خط بروکار نظیر یک رأس را خط واصل بین نقطه بروکار و رأس مورد نظر می‌گیریم)؛ وضعیت خطوط، مانند شکل زیر فرض شده‌اند.

اثبات. می‌خواهیم نشان دهیم

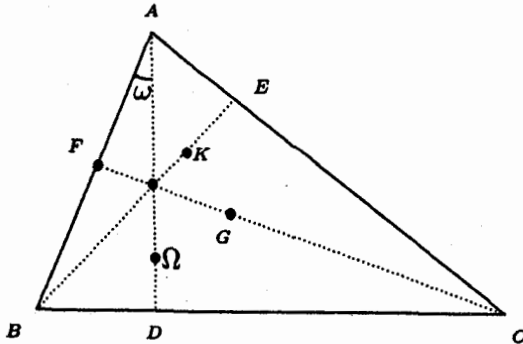
$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

داریم  $\frac{AF}{FB} = 1$  و  $\frac{CE}{EA} = \frac{a'}{c'}$  پس کافی است نشان دهیم

$$\frac{BD}{DC} = c^2/a^2$$

دو مثلث  $ABD$  و  $\Omega BD$  مشابه‌اند، در نتیجه

$$\frac{y}{r} = \frac{c}{p} \quad (*)$$



شکل ۱۰-۲۸

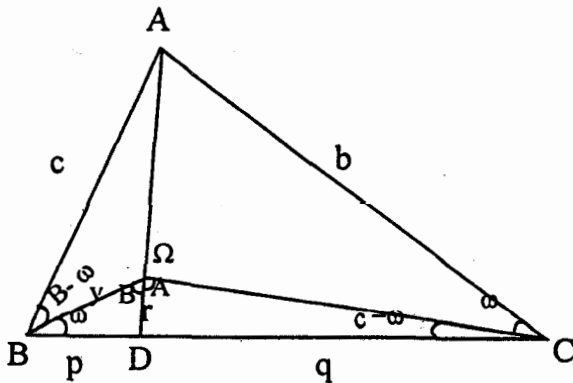
و نیز  $\widehat{D\Omega C} = \widehat{A}$  و  $\widehat{B\Omega D} = \widehat{B}$

از قانون سینوسها در مثلثهای  $B\Omega C$  و  $D\Omega C$  به دست می آید

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y}{\sin(c-\omega)} = \frac{a}{\sin(A+B)} = \frac{a}{\sin C} \\ \frac{r}{\sin(c-\omega)} = \frac{q}{\sin A} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{y}{r} = \frac{a \sin A}{q \sin C} = \frac{a^2}{qc}$$

و از (\*) نتیجه می شود:

$$\frac{p}{q} = c^2/a^2$$

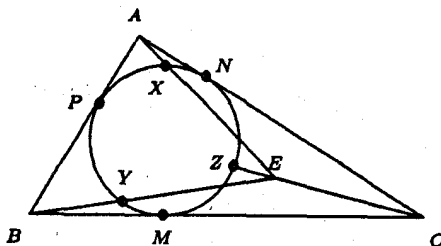


شکل ۱۰-۲۹

تمرین

۱. در مثلث  $ABC$  از پای ارتفاع وارد بر یک ضلع چهار عمود بر دو ضلع و ارتفاعهای وارد بر آن دو ضلع رسم کرده‌ایم. ثابت کنید چهار نقطه پای عمودها بر یک استقامت‌اند.

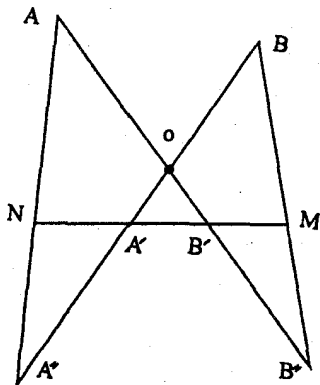
۲. در شکل زیر  $E$  نقطه‌ای دلخواه درون مثلث است که از سه رأس به آن وصل کرده‌ایم تا خطوط حاصل دایره محاطی را در  $X, Y, Z$  و  $NY, MX$  و  $PZ$  متقارب‌اند.



شکل ۱۰-۳۰

۳. در مثلث  $ABC$  خط  $l$  گذرنده از  $C$  بموازات  $BA$  رسم شده است و نیمسازهای داخلی  $AB$  خط  $l$  را در نقاط  $G$  و  $E$  و اضلاع مقابل را در  $F$  و  $D$  قطع کرده‌اند به نحوی که  $GF = DE$ . نشان دهید مثلث متساوی‌الساقین است.

۴. در شکل زیر داریم  $AO = B'B''$  و  $BO = A'A''$ . نشان دهید  $A'N = B'M$ .



شکل ۱۰-۳۱

۵. هرگاه سه خط سوایی  $AA'$ ،  $BB'$  و  $CC'$  در  $O$  همرس باشند، نشان دهید

$$\frac{AO}{OA'} = \frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C}$$

۶. در مثلث  $ABC$  اگر  $AA'$ ،  $BB'$  و  $CC'$  سه خط سوایی همرس در  $O$  باشند، نشان دهید  $1 = \frac{OA}{AA'} + \frac{OB}{BB'} + \frac{OC}{CC'}$

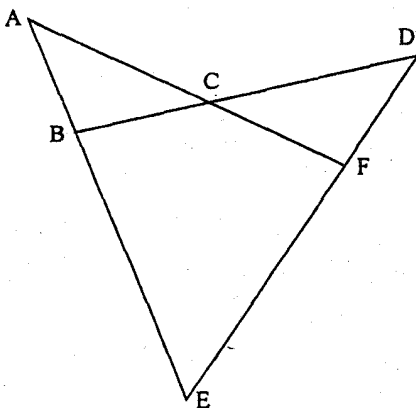
۷. در شرایط مسئله ۶ نشان دهید  $OA' + OB' + OC' < BC$  که  $BC$  بزرگترین ضلع مثلث است.

۸. در چهار مثلث شکل زیر ثابت کنید

(الف) محل تلاقی ارتفاعها روی یک خط راست هستند؛

(ب) دایره محیطی از یک نقطه می‌گذرند؛

(ج) مراکز دایره محیطی روی یک دایره هستند.



شکل ۱۰-۳۲

۹. در یک چهار ضلعی محیطی (محاظی)، مرکز دایره محاطی و مرکز دایره محیطی و محل تلاقی اقطار سه نقطه واقع بر یک خط راست هستند.

۱۰. سه خط سوایی در  $X$  همرس‌اند؛ مطلوب است شرط لازم و کافی برای اینکه محل تلاقی مزدوجهای میانه‌های آنها  $Y$ ، با  $X$  و  $G$  همخط باشد. ( $G$  محل تلاقی میانه‌ها)

۱۱. قطرهای  $AC$  و  $CE$  از شش ضلعی منتظم  $ABCE$  به وسیله نقاط داخلی  $M$  و



$N$  به نحوی تقسیم شده‌اند که  $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = r$ . اگر  $B, M$  و  $N$  همخط باشند،  $r$  را محاسبه کنید.

۱۲. دایرهٔ محاطی مثلث  $ABC$  بر  $AB$  در  $D$  مماس است.  $E'$  را سر دیگر قطری از دایرهٔ محاطی که شامل  $D$  است بگیرید. مماس بر دایرهٔ محاطی در  $E'$ ،  $AC$  را در  $A'$  و  $BC$  را در  $B'$  قطع می‌کند. اگر  $M$  وسط  $AB$  باشد:

(الف)  $A'B$ ،  $AB'$  و  $CM$  هم‌مس‌اند؛

(ب)  $M$ ، مرکز دایرهٔ محاطی، و وسط  $CD$  روی یک خط راست هستند.

۱۳. دایرهٔ  $C$ ، خط  $L$  مماس بر آن و یک نقطهٔ  $M$  واقع بر  $L$  را در نظر بگیرید. مکان هندسی تمام نقطه‌های  $P$  را پیدا کنید که وقتی از آنها دو مماس بر  $C$  رسم می‌کنیم این مماسها خط  $L$  را در نقطه‌های  $A$  و  $B$  طوری قطع کنند که  $MA = MB$ .

۱۴. در چهاروجهی  $ABCD$  نقاط  $K$  و  $L$  به ترتیب وسطهای یالهای  $AB$  و  $CD$  هستند، ثابت کنید هر صفحه شامل  $KL$  چهاروجهی را به دو حجم مساوی تقسیم می‌کند.

۱۵. در مثلث  $ABC$ ،  $D$  وسط  $BC$ ،  $E$  وسط  $AC$  و  $F$  وسط  $AB$  است و نیز نیمساز  $A$  با  $DE$  در  $D_1$  و با  $DF$  در  $D_2$ ، نیمساز  $B$  با  $EF$  در  $E_1$  و با  $ED$  در  $E_2$ ، و نیمساز  $C$  با  $FD$  در  $F_1$  و با  $FE$  در  $F_2$  تلاقی می‌کنند. ثابت کنید

(الف)  $D_2F_1$ ،  $D_1E_1$  و  $BC$  هم‌مس‌اند؛

(ب)  $E_1D_1$ ،  $E_2F_1$  و  $CA$  هم‌مس‌اند؛

(ج)  $F_1E_1$ ،  $F_2D_1$  و  $AB$  هم‌مس‌اند؛

(د) نقاط هم‌رسی (الف)، (ب) و (ج) همان نقاط تماس دایرهٔ محاطی  $ABC$  با اضلاع است.

۱۶. یک مثلث  $ABC$  و نقاط خارجی  $X$ ،  $Y$  و  $Z$  به گونه‌ای هستند که

$$\widehat{BAZ} = \widehat{CAY} \quad , \quad \widehat{CBX} = \widehat{ABZ} \quad , \quad \widehat{ACY} = \widehat{BCX}$$

ثابت کنید  $AX$ ،  $BY$  و  $CZ$  هم‌مس‌اند.

۱۷. (یک قضیه مشهور) در مثلث  $ABC$  وسطهای اضلاع، پای سه ارتفاع و وسطهای پاره‌خطهای واصل بین محل هم‌رسی ارتفاعها و رئوس مثلث بر یک دایره واقع‌اند.

۱۸.  $A'$ ،  $B'$  و  $C'$  را محل تماس دایرهٔ محاطی با اضلاع مثلث  $ABC$  گرفته‌ایم. می‌دانیم که  $AA'$ ،  $BB'$  و  $CC'$  هم‌مس‌اند (اگر نمی‌دانید ثابت کنید!)؛ نقطه هم‌رسی این سه خط را نقطه زرگن مثلث  $ABC$  می‌نامند. نشان دهید

$$\frac{JA'}{JA} \cdot \frac{JB'}{JB} \cdot \frac{JC'}{JC} = \frac{r}{4R} \quad \text{نقطه زرگن } ABC \text{ است.}$$

۱۹. مثلث  $ABC$  حاده الزویه است و  $L$  خطی در صفحه مثلث و  $u$  و  $v$  و  $w$  طول عمودهایی هستند که به ترتیب از  $A$ ،  $B$  و  $C$  بر  $L$  وارد شده‌اند. ثابت کنید

$$u^2 \operatorname{tg} A + v^2 \operatorname{tg} B + w^2 \operatorname{tg} C \geq 2S_{ABC}$$

در چه حالتی تساوی برقرار می‌شود؟

۲۰. هرگاه از سه خط سوایی هم‌مس یکی نیمساز یک زاویه مثلث سوایی حاصل باشد، آن خط سوایی ارتفاع است و برعکس.

۲۱. خطی اضلاع یا امتداد اضلاع یک شش ضلعی محاطی را قطع کرده است. بین نقاط تقسیم و رئوس شش ضلعی ۱۲ پاره خط به وجود می‌آید. نشان دهید حاصل ضربهای یکی در میان این ۱۲ پاره خط برابر هستند. این نتیجه را تعمیم دهید.

۲۲. در مثلث  $ABC$  اگر  $AB > AC$ ، آنگاه نیمساز  $C$  کوچکتر است از نیمساز  $B$ .

### چند مسأله متفرقه

۲۳. مساحت مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  ( $A = 90^\circ$ ) برابر  $S$  است. از رأس  $A$  خطی رسم می‌کنیم تا وتر را در  $D$  قطع کند به طوری که دایره‌های محاطی داخلی دو مثلث  $ABD$  و  $ACD$  برابر باشند. ثابت کنید طول  $AD$ ، مساوی  $\sqrt{S}$  است.

تعمیم: اگر  $ABC$  دلخواه باشد با شرایط فوق  $AD^2 = S \operatorname{ctg} A$ .

۲۴. نقاط  $A$ ،  $B$ ،  $C$ ،  $D$  و  $E$  روی یک کره قرار دارند به طوری که وترهای  $AB$  و  $CD$  در نقطه  $F$  یکدیگر را قطع می‌کنند و  $A$ ،  $C$  و  $F$  از  $E$  به یک فاصله‌اند. ثابت کنید  $BD$  و  $EF$  بر یکدیگر عمودند.

۲۵. ۷ دایره داده شده‌اند به طوری که ۶ دایره درون یک دایره ثابت قرار دارند و هر کدام از آنها با دایره ثابت و همچنین با دو دایره کوچکتر هم‌مسایه خود مماس است. اگر نقاط تماس ۶ دایره کوچک را با دایره بزرگتر  $A_1$ ،  $A_2$ ،  $A_3$ ،  $A_4$ ،  $A_5$ ،  $A_6$  بنامیم ثابت کنید

$$A_1 A_2 \cdot A_2 A_3 \cdot A_3 A_4 \cdot A_4 A_5 \cdot A_5 A_6 = A_2 A_3 \cdot A_3 A_4 \cdot A_4 A_5 \cdot A_5 A_6$$

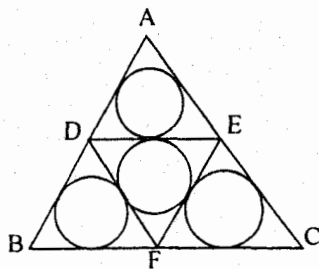
۲۶. نقاط  $E$ ،  $D$ ،  $F$  و  $F$  را روی اضلاع مثلث  $ABC$  به گونه‌ای انتخاب کرده‌ایم که

$$\tau_{ABE} = \tau_{DBF} = \tau_{EFC} = \tau.$$

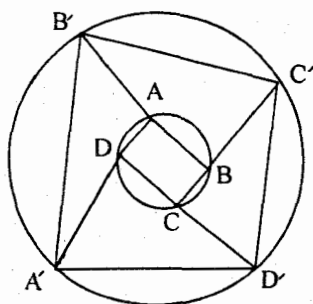
اگر  $\tau_{DEF} = \tau_1$  و  $\tau_{ABC} = \tau$  نشان دهید  $\tau = \tau_1 + \tau$ .

۲۷. در شکل زیر دو دایره هم مرکز به شعاعهای  $R > r$  داریم. نشان دهید

$$\left(\frac{R}{r}\right) \times (\text{محیط } ABCD) \geq (\text{محیط } A'B'C'D')$$



شکل ۱۰-۳۳



شکل ۱۰-۳۴